




Državni univerzitet u Novom Pazaru  
Departman za prirodno-matematičke nauke

Enes Kačapor

**Varijacioni račun u optimizaciji  
oblika elastičnih tela**

Doktorska disertacija

Novi Pazar, 2022.

	<b>Državni univerzitet u Novom Pazaru</b> <b>Departman za prirodno-matematičke nauke</b> 36000 Novi Pazar, Vuka Karadžića 9	Datum i broj
	<b>KLJUČNA DOKUMENTACIJA</b>	

Redni broj, RBR:			
Identifikacioni broj, IBR:	201001/2017		
Tip dokumentacije, TD:	Monografska dokumentacija		
Tip zapisa, TZ:	Tekstualni štampani materijal		
Vrsta rada, VR:	Doktorska disertacija		
Autor, AU:	Enes Kačapor		
Mentori, MN:	Prof. dr Ćemal Dolićanin, prof. dr Teodor Atanacković		
Naslov rada, NR:	Varijacioni račun u optimizaciji oblika elastičnih tela		
Jezik publikacije, JP:	Srpski jezik		
Jezik izvoda, JI:	Srpski jezik		
Zemlja publikovanja, ZP:	Srbija		
Uže geografsko područje, UGP:	Novi Pazar		
Godina, GO:	2022. godina		
Izdavač, IZ:	Državni univerzitet u Novom Pazaru		
Mesto i adresa, MA:	Novi Pazar, Vuka Karadžića 9		
Fizički opis rada, FO: (poglavlja/strana/citata/tabela/slika/grafika/priloga)	Poglavlja 8/ strana 96/ citata 36/ tabela 1/ slika 9		
Naučna oblast, NO:	Matematika		
Predmetna odrednica/ključne reči, PO:	Varijacioni račun, optimalni oblik, Pontrjaginov princip, prvi integrali		
UDK:	51		
Čuva se, ČU:	Biblioteka Državnog univerziteta u Novom Pazaru, Vuka Karadžića 9		
Važna napomena, VN:			
Izvod, IZ:	U ovoj disertaciji razmatra se optimizacija oblika elastičnih štapova koristeći metode varijacionog računa.		
Datum prihvatanja teme, DP:			
Datum odbrane, DO:			
Članovi komisije, KO:	Predsednik, mentor:	Prof. dr Ćemal Dolićanin	
	Član, mentor:	Prof. dr Teodor Atanacković	
	Član:	Prof. dr Igor Milovanović	
	Član:	Prof. dr Dragan Đorđević	
	Član:	Prof. dr Miroslava P. Torgašev	

# Sadržaj

<b>Predgovor</b>	<b>1</b>
<b>1 Uvod</b>	<b>4</b>
1.1 Osnovni elementi varijacionog računa . . . . .	5
1.2 Varijacija funkcije. Ojler–Lagranževa jednačina . . . . .	7
1.3 Osvrt na istoriju problema optimizacije oblika elastičnih štapova	10
<b>2 Matematički model</b>	<b>14</b>
2.1 Ispitivanje vrednosti parametara $\lambda_1$ i $\lambda_2$ koje vode do netrivijalnog rešenja integro-diferencijalne jednačine (2.8) sa graničnim uslovima (2.9) . . . . .	18
2.2 Definisanje problema stabilnosti pritisnutog obrnutog stuba . .	22
<b>3 Uslovi za egzistenciju rešenja jednačina koje određuju optimalni oblik štapa</b>	<b>23</b>
3.1 Pontrjaginov princip maksimuma . . . . .	24
3.2 Primena Pontrjaginovog principa u rešavanju jednačina koje određuju optimalni oblik štapa . . . . .	28
<b>4 Primena varijacionih metoda u ispitivanju svojstava rešenja jednačina koje određuju optimalni oblik štapa</b>	<b>34</b>

## SADRŽAJ

---

4.1	Prvi integrali sistema jednačina koje određuju optimalni oblik štapa . . . . .	35
4.2	Grupe transformacija prvih integrala koje njima odgovarajući varijacioni princip ostavljaju invarijantnim . . . . .	43
<b>5</b>	<b>Numeričko rešavanje sistema jednačina koje određuju optimalni oblik štapa</b>	<b>51</b>
5.1	Analiza numeričkog rešenja za različite vrednosti parametra $\lambda$	54
5.2	Optimalni oblik stuba u postkritičnom stanju . . . . .	56
<b>6</b>	<b>Klauzenov problem sa smicanjem</b>	<b>58</b>
6.1	Generalizacija problema određivanja optimalnog oblika štapa koji je najotporniji na izvijanje . . . . .	58
6.2	Optimalni model štapa opisanog jednačinom (6.10) . . . . .	66
<b>7</b>	<b>Bifurkacija i postkritično ponašanje optimalno oblikovanog štapa</b>	<b>73</b>
7.1	Nelinearne diferencijalne jednačine koje opisuju velike deformacije štapa . . . . .	73
7.2	Varijacioni princip za velike deformacije optimalno oblikovanog štapa . . . . .	80
<b>8</b>	<b>Numeričko rešenje sistema nelinearnih diferencijalnih jednačina (7.1), (7.2)</b>	<b>83</b>
8.1	Slučaj kada je parametar smicanja $\beta = 0$ . . . . .	84
8.2	Slučaj kada je parametar smicanja $\beta \neq 0$ . . . . .	88
	<b>Literatura</b>	<b>93</b>

# Predgovor

Varijacioni račun je matematička disciplina u kojoj se, opisno govoreći, radi o određivanju funkcija takvih da druga veličina, koja zavisi od tih funkcija, postiže minimum, odnosno maksimum. Ova grana matematike je od svog zasnivanja u osamnaestom veku, pa sve do danas, budila interesovanje kod mnogih velikih matematičara i naučnika, a razlog tome možemo tražiti u činjenici da se različiti matematički problemi mogu jednoobrazno ispitivati principima varijacionog računa.

Predmet istraživanja u ovoj doktorskoj disertaciji je optimizacija oblika elastičnih tela primenom varijacionog računa. Disertacija se sastoji iz osam glava, od kojih svaka sadrži izvestan broj sekcija.

U prvoj glavi su navedeni osnovni elementi varijacionog računa, sa posebnim osvrtom na varijaciju funkcije i Ojler–Lagranževu jednačinu, zbog njihovog značaja u teoriji varijacionog računa. Takođe, dat je kratak istorijski osvrt na problem optimizacije oblika elastičnih štapova.

U drugoj glavi je dat matematički model problema optimizacije oblika elastičnog štapa, pri čemu se ispituju vrednosti parametara opterećenja koje daju netrivialno rešenje odgovarajuće integro-diferencijalne jednačine. Po-

kazano je da nelinearne jednačine ravnoteže, za proizvoljnu površinu poprečnog preseka štapa, imaju tačku bifurkacije u najmanjoj sopstvenoj vrednosti odgovarajućeg linearizovanog sistema jednačina.

Treća glava je posvećena uslovima za egzistenciju rešenja jednačina koje određuju optimalni oblik štapa, pri čemu je korišćen Pontrjaginov princip maksimuma.

U četvrtoj glavi se razmatraju prvi integrali sistema jednačina koje određuju optimalni oblik štapa. Određena je grupa infinitezimalnih transformacija koje ostavljaju invarijantnim njima odgovarajući varijacioni princip. Takođe, pokazano je da se dobijeni rezultati poklapaju s rezultatima dobijenim u radu [8], za specijalni slučaj kada nema sile koja deluje na stub.

U petoj glavi prikazani su rezultati numeričke analize sistema jednačina kojima se određuje optimalni oblik stuba. Razmotreno je i ponašanje odgovarajućeg sistema diferencijalnih jednačina za tzv. postkritično stanje stuba.

Od šeste glave pa do kraja disertacije analizira se generalizacija problema određivanja optimalnog oblika štapa koji je najotporniji na izvijanje, pri čemu se u razmatranje uvodi smicanje. Proces optimizacije koji je sproveden takođe je baziran na Pontrjaginovom principu maksimuma.

Sedma glava tretira ponašanje štapa u slučaju kada je opterećenje takvo da dolazi do izvijanja štapa. Ispitane su tačke bifurkacije nelinearnog sistema koji opisuje postkritično ponašanje optimalno oblikovanog štapa. Takođe, za nelinearne jednačine velikih deformacija optimalno oblikovanog štapa formulisana je varijacioni princip čija je Ojler–Lagranževa jednačina identična sa jednačinama velikih deformacija. Time je rešen tzv. obrnuti problem

varijacionog računa, kod kojeg treba pronaći funkcional ako su date Ojler–Lagranževe jednačine.

U osmoj glavi je predstavljeno numeričko rešenje sistema nelinearnih diferencijalnih jednačina koje opisuju velike deformacije štapa. Određene su i uštede materijala koje optimizacija donosi.

★ ★ ★

Zahvaljujem svojim mentorima prof. dr Ćemalu Dolićaninu i prof. dr Teodoru Atanackoviću na ogromnoj pomoći i velikodušnim savetima tokom mog studiranja, a naročito tokom rada na ovoj doktorskoj disertaciji. Pored mnogobrojnih njihovih obaveza, ipak bi stalno nalazili vreme za mene i pomagali mi, upućujući me na odgovarajuću literaturu, a često i poklanjajući mi knjige za čitanje i učenje, na čemu sam im od sveg srca zahvalan. Imati takve ljude za svoje mentore je velika privilegija i čast. Naravno, posebnu zahvalnost dugujem svojoj porodici i iskrenim prijateljima na podršci, strpljenju i razumevanju u toku svih ovih godina.

Novi Pazar, 2022.

Enes Kačapor

# Glava 1

## Uvod

Varijacioni račun zasnovan je u osamnaestom veku, a njegovim utemeljiteljima se smatraju Leonard Ojler i Žozef Lagranž. Značajan razvoj je dostigao u devetnaestom veku, a danas, zahvaljujući radovima mnogih matematičara, postao je jedna od značajnih oblasti kako teorijske, tako i primenjene matematike. Iako je razvoj varijacionog računa bio podstaknut razvojem fizike, pa i geometrije, treba naglasiti da su varijacione metode, koje su se pokazale kao veoma efikasne za rešavanje raznih tipova problema, imale izuzetno veliku ulogu u razvoju prirodnih nauka inače. Razlog tome leži u činjenici da principi varijacionog računa imaju duboko značenje, jer se različiti matematički i fizički problemi mogu uniformno, po istom modelu, tumačiti i analizirati, čime se dobija jedan opšti prilaz njihovom ispitivanju i rešavanju.

Zbog svoje suštinski relativno jednostavne prirode, s jedne strane, i svoje kompleksnosti koja nastaje usled novih praktičnih problema, s druge strane, metode varijacionog računa se i danas unapređuju, razvijaju i koriste u raznim primenama, a posebno mesto zauzimaju u teoriji optimalnog upravljanja,



tj. u rešavanju optimizacionih problema. Glavni zadatak teorije optimalnog upravljanja predstavlja određivanje parametara procesa tako da neki od unapred zadatih kriterijuma optimalnosti bude minimalan, odnosno maksimalan. Za takve parametre procesa koristi se naziv *parametri upravljanja*, a kriterijum optimalnosti može biti, na primer, zapremina materijala, količina nekog industrijskog proizvoda, vreme, potrošnja goriva itd.

Imajući u vidu da je naš rad usmeren ka primeni varijacionog računa, u nastavku ćemo ukratko izložiti njegove osnovne elemente, [35].

### 1.1 Osnovni elementi varijacionog računa

Grubo govoreći, u problemima varijacionog računa radi se o pronalaženju onih funkcija za koje druga veličina koja zavisi od tih funkcija, tj. funkcional, postiže svoj ekstremum. Za oblast definisanosti funkcionala kažemo da je *skup dopustivih funkcija*. Pri primeni varijacionog računa na fizičke procese treba imati na umu činjenicu da je česta pojava da tokom procesa neki od njegovih parametara ima ekstremnu vrednost. Za taj fizički parametar obično se koristi termin *akcija*, *dejstvo* ili *kriterijum optimalnosti*. Dakle, razni problemi se definišu preko nekog svojstva koje izražava maksimalnost ili minimalnost određene fizičke veličine. U tom smislu, može se navesti čuveni *problem brahistohrone*<sup>1</sup>, a upravo on se vezuje za nastanak varijacionog računa. Naime, neka su date tačke  $A$  i  $B$  u vertikalnoj ravni. Treba odrediti oblik krive linije za koji će materijalna tačka, koja se kreće pod uticajem sile teže, bez otpora i bez početne brzine, iz tačke  $A$  stići do tačke  $B$  za *najkraće vreme*. Ovaj problem je 1696. godine postavio Johan Bernuli, a nezavisno

---

<sup>1</sup>Transkripcija sa grčkog jezika: *brahistos hronos*, što znači *najkraće vreme*.

jedan od drugoga rešavali su ga Njutn, Lajbnic, Lopital i Johanov stariji brat Jakob Bernuli.

Da bi se neki fizički proces dobro opisao elementima varijacionog računa, pored realnog procesa koji se zaista odvija, potrebno je formulirati klasu *zamisljenih* ili *variranih procesa*, koji se odvijaju istovremeno kad i realni, a koji se vrlo malo razlikuju od njega. Suština varijacionog računa sastoji se u tome da je od svih mogućih procesa, koji se istovremeno odvijaju u zadatom vremenskom intervalu, onaj stvarni proces zapravo jedini koji zadatom kriterijumu optimalnosti saopštava optimalnu vrednost. Problemi ovog tipa spadaju u oblast varijacionog računa, a za principe na kojima se zasniva ovakva optimizacija obično koristimo naziv *varijacioni principi*. Verovatno najpoznatiji varijacioni princip je *Hamiltonov princip*, čija je glavna karakteristika ta da se akcija, tj. kriterijum optimalnosti, uvek formuliše preko određenog integrala. Ono što posebno izdvaja Hamiltonov princip jeste činjenica da on, svojom primenom na probleme čiji karakter nije isključivo mehaničke prirode, objedinjuje mnoga naizgled potpuno različita polja fizike i tehnike.

Izuzetan značaj varijacionih principa u primenama sastoji se u mogućnosti dobijanja kako tačnih, tako i približnih rešenja velikog spektra inženjerskih problema koji se formulišu tim principima. Upravo ta mogućnost naročito dolazi do izražaja ako imamo u vidu da se, usled kompleksnosti matematičkog aparata, veoma mali broj problema može rešiti u potpunosti metodama matematičke analize.

## 1.2 Varijacija funkcije. Ojler–Lagranževa jednačina

Na osnovu svega navedenog, vidimo da je glavni zadatak varijacionog računa određivanje funkcije  $x = x(t)$ , koja ispunjava odgovarajuće uslove, tako da ona saopštava ekstremnu vrednost određenom integralu. Iz raznih problema se može zaključiti da je, uglavnom, podintegralna funkcija oblika

$$F = F(t, x(t), \dot{x}(t)),$$

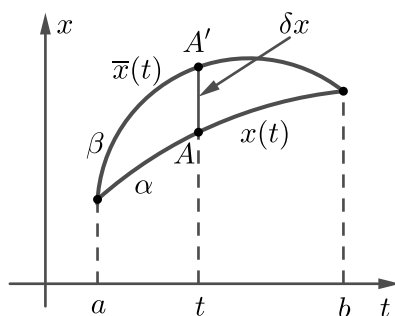
gde  $\dot{x}(t)$  označava izvod funkcije  $x = x(t)$  po promenljivoj  $t$ . Pretpostavimo sada da je  $x = x(t)$  funkcija koja saopštava najmanju vrednost određenom integralu

$$I = \int_a^b F(t, x, \dot{x}) dt, \quad x(a) = x_1, \quad x(b) = x_2. \quad (1.1)$$

Neka je  $\bar{x}(t)$  druga funkcija koja se beskonačno malo razlikuje od funkcije  $x(t)$  u svakoj tački datog intervala  $[a, b]$ . Sada se *varijacija funkcije*  $x(t)$ , kao osnovna operacija varijacionog računa, definiše kao

$$\delta x = \bar{x}(t) - x(t),$$

pri čemu još kažemo da je  $\delta$  *Lagranževa varijacija*. Suština varijacije funkcije jeste u tome što ona predstavlja infinitezimalnu promenu funkcije i njenih izvoda, bez promene nezavisno promenljive  $t$ . Dakle, promenljiva  $t$  je *fiksirana*, a vrši se promena same funkcije. Na primer, na Slici 1 su prikazane krive  $\alpha$  i  $\beta$ , pri čemu tački  $A$  sa koordinatama  $(t, x)$ , na krivoj  $\alpha$ , odgovara tačka  $A'$  sa koordinatama  $(t, x + \delta x)$ , na krivoj  $\beta$ .



Slika 1. Varijacija funkcije

Imajući u vidu to da se operatori variranja i diferenciranja često javljaju istovremeno, važno je naglasiti njihovu razliku. Naime, diferenciranjem mjerimo promenu funkcije  $x(t)$  prilikom promene argumenta  $t$ , dok se, kao što je već rečeno, variranjem mjeri promena funkcije *bez* promene nezavisno promenljive  $t$ . Međutim, važno je istaći ovde da postoje bitne praktične situacije kada je potrebno varirati i nezavisno promenljivu (na primer, kada granice u određenom integralu nisu specificirane), tj. kada se pretpostavlja da je i nezavisno promenljiva  $t$  pretrpela promenu  $t + \Delta t$ . Tada imamo *generalisanu* ili *asinhronu* varijaciju funkcije (za detalje, videti [35]).

Neka od najvažnijih svojstava Lagranževe varijacije funkcije su:

- (1) nezavisno promenljiva ne učestvuje u procesu variranja, odnosno

$$\delta t = 0;$$

- (2) operatori diferenciranja i variranja su komutativni, odnosno

$$\frac{d}{dt}(\delta x) = \delta\left(\frac{dx}{dt}\right);$$

(3) operatori integracije i variranja su komutativni, odnosno

$$\delta \int_a^b x(t) dt = \int_a^b \delta x(t) dt.$$

Promena integrala (1.1), koja se javlja varijacionom promenom funkcije  $x(t)$ , data je izrazom

$$I(\bar{x}) - I(x) = \int_a^b (F(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t)) - F(t, x(t), \dot{x}(t))) dt,$$

tako da se potrebni uslovi za ekstremalnost, tj. optimalnost, određenog integrala

$$I(x) = \int_a^b F(t, x, \dot{x}) dt, \quad x(a) = x_1, \quad x(b) = x_2,$$

izvode upravo iz ovog izraza, odakle se dobija čuvena *Ojler–Lagranževa* diferencijalna jednačina

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 0. \quad (1.2)$$

Kada integralimo jednačinu (1.2), dobijamo funkciju  $x = x(t, C_1, C_2)$ , gde integracione konstante  $C_1$  i  $C_2$  određujemo iz uslova  $x(a) = x_1$ ,  $x(b) = x_2$ . Za integralnu krivu  $x = x(t)$  koja zadovoljava Ojler–Lagranževu jednačinu i granične uslove  $x(a) = x_1$ ,  $x(b) = x_2$ , kažemo da je *ekstremala* odgovarajućeg varijacionog problema. Samo na ekstremalama funkcional može postići ekstremum. Prema tome, Ojler–Lagranževa jednačina predstavlja potreban uslov optimalnosti integrala (1.1). Inače, ako izračunamo izvod funkcije  $\partial F / \partial \dot{x}$  po promenljivoj  $t$ , ova jednačina dobija oblik

$$\left( \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2} \right) \frac{d^2 x}{dt^2} + \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \dot{x}} \right) \frac{dx}{dt} + \left( \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial \dot{x}} - \frac{\partial F}{\partial x} \right) = 0,$$

odakle vidimo da je Ojler–Lagranževa jednačina zapravo obična diferencijalna jednačina drugog reda.

Na kraju ovog dela pomenimo i to da postoje razna uopštenja navedenih razmatranja. Na primer, kada funkcional zavisi od viših izvoda, kada funkcional zavisi od više funkcija, kada funkcional zavisi od funkcije više nezavisno promenljivih, kada funkcija nije specificirana na krajevima intervala, kada funkcional zavisi od funkcija koje nisu međusobno nezavisne itd. Međutim, zbog obimnosti izlaganja, ta uopštenja nećemo ovde navoditi, a zainteresovanog čitaoca upućujemo na literaturu [34] i [35].

U nastavku ćemo se osvrnuti na istoriju problema optimizacije oblika elastičnih štapova, uz navođenje osnovnih matematičkih pristupa datoj problematici.

### 1.3 Osvrt na istoriju problema optimizacije oblika elastičnih štapova

Među prvima koji se bavio problemom određivanja optimalnog oblika elastičnih štapova matematičkim metodama bio je Ojler, koji je postavio i rešio problem izvijanja stuba, konstantnog poprečnog preseka, pod sopstvenom težinom, [18], [19]. Tako, na primer, stub koji je uklešten pri dnu, a slobodan na vrhu, pre nego što se izvije pod sopstvenom težinom, dostići će visinu

$$H = \sqrt[3]{\frac{9EI}{4\rho A} j^2_{-1/3}},$$

pri čemu je  $E$  Jangov modul elastičnosti,  $\rho$  je gustina materijala,  $A$  je poprečni presek,  $j_{-1/3} \approx 1.8663$  je najmanji pozitivan koren Beselove funkcije reda  $-1/3$ , a  $I$  je moment inercije površine poprečnog preseka.

Takođe, Lagranž se bavio određivanjem maksimalne sile izvijanja elastičnog stuba, pri čemu je data dužina i zapremina istog, [29]. Rešenje ovog problema je dao Klauzen 1851. godine, uz nešto izmenjene granične uslove, [13].

Nakon izvesnog vremena, Keler i Niordson su prišli razmatranju sledećeg problema:

*Odrediti visinu stuba, pri čemu je data zapremina materijala, oblikovanog tako da se neće izviti pod sopstvenom težinom i da bude viši od bilo kojeg drugog stuba napravljenog od istog materijala.*

Navedeni problem je u literaturi poznat kao *problem najvišeg stuba*. Keler i Niordson su ustanovili da je visina optimalno oblikovanog stuba 2.034 puta veća od visina stuba koji ima konstantan poprečan presek i koji je napravljen od istog materijala, [25].

Radovima Koksa (Cox) i Mekartija (McCarthy) devedesetih godina prošlog veka, [15], [32], [33], gore spomenuti problem ponovo se našao u fokusu interesovanja naučnika i istraživača. Naime, oni su ukazali na potrebu ponovnog razmatranja rada Kelera i Niordsona, pre svega zbog prirode spektra diferencijalnog operatora (diskretan ili ne).

Postoje različiti kriterijumi koji se koriste u matematičkim modelima optimizacije, a jedan od najpoznatijih koji se koristi je *model izvijanja* elastičnog štapa, pri čemu je štap pod različitim graničnim uslovima i izložen različitim

opterećenjima, [29], [13], [26], [14].

Kod modela izvijanja postoje dva osnovna pristupa datoj problematici. U prvom pristupu se pretpostavlja da je data masa štapa, tj. zapremina pri konstantnoj gustini, a oblik štapa se određuje tako da je njegov otpor izvijanju maksimalan, odnosno, tako da je sila izvijanja maksimalna. Što se tiče drugog modela izvijanja, pretpostavlja se da je poznata sila izvijanja, dok oblik štapa treba odrediti tako da je njegova masa (zapremina) minimalna, [6], [22], [3], [4], [5], [32], [25], [33]. U ovom radu koristićemo drugi pristup koji je napred naveden. Pri tome ćemo koristiti Pontrjaginov princip maksimuma, [1], [34], [35], uzimajući da je promenljiva upravljanja<sup>2</sup> površina poprečnog preseka štapa.

U bezdimenzijskom obliku linearizovane jednačine ravnoteže, koje odgovaraju analizi stabilnosti po metodu bliske ravnotežne konfiguracije, tj. koje opisuju proces izvijanja, mogu se napisati kao

$$(a^n(t)\dot{\theta}(t))' + \lambda f(a)\theta(t) = 0, \quad n = 1, 2, 3, \quad (1.3)$$

gde je  $\lambda$  parametar opterećenja,  $a$  površina poprečnog preseka,  $\theta$  nagib elastične linije. U jednačini (1.3) tačka iznad promenljive označava izvod te promenljive po  $t$ . Jednačini (1.3) može biti pridruženo više različitih graničnih uslova.

Parametar  $n$  može imati više različitih vrednosti. Na primer, za pravougaoni presek konstantne visine on iznosi 1, za kružni presek vrednost je 2, dok je za pravougaonik konstantne širine i promenljive visine vrednost 3. S obzirom na fizičko značenje promenljive  $a$  (površina poprečnog preseka), za-

---

<sup>2</sup>Control variable



htevaćemo da je  $a \geq 0$ . Pošto se  $a$  određuje iz uslova da je zapremina štapa minimalna, odnosno uslova

$$w_{opt} = \min_a \int_0^1 a(t) dt,$$

i nije poznata unapred, to jednačina (1.3) za dato  $\lambda$  mora imati rešenje za bilo koje  $a$ . U radu će se proučiti dovoljni uslovi za egzistenciju rešenja jednačine (1.3) uz proizvoljno nenegativno  $a$ .

Kada govorimo o uslovima izvijanja za generalisane elastične štapove, tada se javlja druga klasa problema, tako da umesto jednačine (1.3) imamo jednačinu

$$\left(a^2 \dot{\theta}\right)' + \lambda \left(1 + \frac{\lambda}{a} \beta\right) \theta = 0, \quad (1.4)$$

uz granične uslove

$$\lim_{t \rightarrow 0} a^2(t) \dot{\theta}(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow 1} a^2(t) \dot{\theta}(t) = 0.$$

Parametar  $\beta$  u jednačini (1.4) predstavlja bezdimenzijski smicajni koeficijent. Određivanje parametra  $\lambda$  za proizvoljno  $a$  nije baš očigledno. U daljem radu će biti dokazano postojanje parametra  $\lambda$  u jednačini (1.4) za proizvoljno  $\beta > 0$  i  $a \geq 0$ . Nakon toga je određeno optimalno  $a$ .

## Glava 2

### Matematički model

Razmotrimo stub dužine  $L$ , u gravitacionom polju sa ubrzanjem  $g$ , takav da je na gornjem kraju  $B$  fiksiran, uz mogućnost klizanja duž ose  $Ox$ . Neka na stub deluje sila intenziteta  $F$  na kraju  $B$ . Označimo sa  $H$  i  $V$  komponente kontaktne sile duž osa  $Ox$  i  $Oy$ , redom. Neka je  $M$  moment savijanja,  $\theta$  ugao između ose  $Ox$  i tangente na osi stuba, pri čemu pretpostavljamo da je osa stuba u trivijalnom, neizvijenom, položaju paralelna osi  $Ox$ . Dalje, neka je  $S$  dužina luka ose stuba merena od koordinatnog početka  $O$  Dekartovog pravouglog koordinatnog sistema  $xOy$ ,  $E$  je modul elastičnosti,  $\rho$  je gustina materijala,  $A$  i  $I$  su, redom, površina poprečnog preseka i moment inercije površine poprečnog preseka.

Jednačine ravnoteže su, [7],

$$\frac{dH}{dS} = q_0 A, \quad \frac{dV}{dS} = 0, \quad \frac{dM}{dS} = -V \cos \theta + H \sin \theta, \quad (2.1)$$

## 2. Matematički model

---

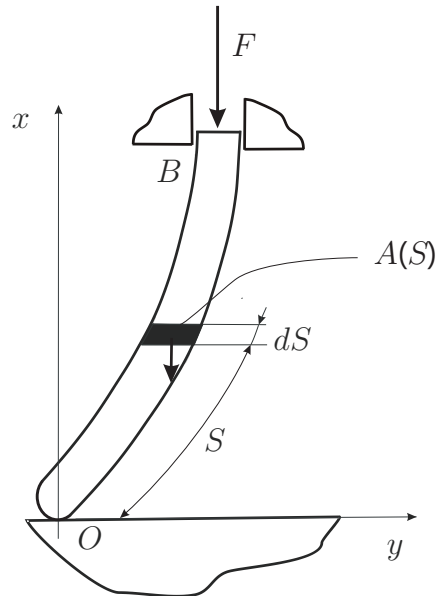
gde je  $q_0 = \rho g$ , pri čemu jednačine

$$\frac{dx}{dS} = \cos \theta, \quad \frac{dy}{dS} = \sin \theta, \quad (2.2)$$

izražavaju nerastegljivost osa, dok konstitutivna jednačina Bernuli–Ojlerove teorije glasi

$$M = EI \frac{d\theta}{dS}. \quad (2.3)$$

U gornjim jednačinama  $x$  i  $y$  označavaju koordinate proizvoljne tačke stuba u koordinatnom sistemu  $xOy$ .



Slika 2. Stub dužine  $L$  pritisnut silom intenziteta  $F$

Granični uslovi koji odgovaraju stubu prikazanom na Slici 2 su:

$$\begin{aligned} H(L) &= -F, & V(0) &= 0, & M(0) &= 0, \\ \theta(L) &= 0, & x(0) &= 0, & y(0) &= 0, \end{aligned} \quad (2.4)$$

tako da je

$$H(S) = - \int_S^L q_0 A(\xi) d\xi - F, \quad V(S) = 0. \quad (2.5)$$

Neka je  $W$  zapremina stuba, odnosno

$$W = \int_0^L A(S) dS. \quad (2.6)$$

Pretpostavljamo da je

$$I(S) = \alpha A^2(S),$$

gde je  $\alpha$  konstanta i to

$$\alpha = \frac{1}{4\pi}$$

za kružni poprečni presek.

Uvedimo sada bezdimenzijske veličine

$$\begin{aligned} t = \frac{S}{L}, \quad a = \frac{A}{L^2}, \quad \lambda_1 = \frac{q_0 L}{\alpha E}, \quad \lambda_2 = \frac{F}{\alpha E L^2}, \\ u = \frac{x}{L}, \quad v = \frac{y}{L}, \quad w = \frac{W}{L^3}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Iz (2.1)–(2.7) dobijamo

$$\left( a^2 \dot{\theta} \right)' + \left( \lambda_1 \int_t^1 a(\xi) d\xi + \lambda_2 \right) \sin \theta = 0, \quad \dot{u} = \cos \theta, \quad \dot{v} = \sin \theta, \quad (2.8)$$

pri čemu je sada

$$u(0) = 0, \quad v(0) = 0, \quad \theta(1) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow 0} a^2(t) \dot{\theta}(t) = 0, \quad (2.9)$$

dok je bezdimenzijska zapremina

$$w = \int_0^1 a(t) dt.$$

Kao što smo već pomenuli, tačka iznad promenljive označava izvod te promenljive po  $t$ , odnosno

$$(\dot{\cdot}) = \frac{d(\cdot)}{dt}.$$

Očigledno je da

$$\theta_0 = 0, \quad u_0 = t, \quad v_0 = 0,$$

predstavlja trivijalno rešenje sistema (2.8), (2.9), za bilo kakve vrednosti  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$  i za proizvoljno  $a > 0$ . Naš zadatak je da ispitamo vrednosti parametara  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$  koje bi vodile do netrivialnog rešenja integro-diferencijalne jednačine (2.8) sa graničnim uslovima (2.9).

## 2.1 Ispitivanje vrednosti parametara $\lambda_1$ i $\lambda_2$ koje vode do netrivialnog rešenja integro-diferencijalne jednačine (2.8) sa graničnim uslovima (2.9)

Neka je  $(\lambda_1, \lambda_2) = P \in \mathbb{R}^2$ . Ako levu stranu prve jednačine<sup>3</sup> u (2.8) napišemo u formi operatora kao

$$R(P, \theta) = \left( a^2 \dot{\theta} \right)' + \left( \lambda_1 \int_t^1 a(\xi) d\xi + \lambda_2 \right) \sin \theta, \quad \theta \in \mathcal{T},$$

gde je

$$\mathcal{T} = \{ \theta : \theta \in C^2(0, 1), \theta(1) = 0, \lim_{t \rightarrow 0} a^2(t) \dot{\theta}(t) = 0 \},$$

tada je sistem  $(2.8)_1, (2.9)_{3,4}$  ekvivalentan sa

$$R(P, \theta) = 0. \tag{2.10}$$

Kao što smo već videli,  $\theta_0$  je trivijalno rešenje jednačine (2.10) za proizvoljno  $P \in \mathbb{R}^2$ . Frešev izvod preslikavanja  $R(P, \theta)$  u  $\theta_0 = 0$  je

$$DR_\theta(P, 0)\theta = B(P)\theta = \left( a^2 \dot{\theta} \right)' + \left( \lambda_1 \int_t^1 a(\xi) d\xi + \lambda_2 \right) \theta.$$

Da bi postojalo netrivialno rešenje sistema  $(2.8)_1, (2.9)_{3,4}$ , potrebno je

---

<sup>3</sup>U nastavku ćemo umesto konstrukcije, na primer, *prva jednačina u (2.8)* koristiti skraćenu oznaku  $(2.8)_1$ .

da postoji netrivialno rešenje linearizovane jednačine<sup>4</sup>

$$\left(a^2\dot{\theta}\right)' + \left(\lambda_1 \int_t^1 a(\xi)d\xi + \lambda_2\right) \theta = 0, \quad (2.11)$$

uz uslove

$$\theta(1) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow 0} a^2(t)\dot{\theta}(t) = 0. \quad (2.12)$$

Prema tome, razmatraćemo granični problem  $B(P)\theta = 0$ , odnosno

$$\left(a^2\dot{\theta}\right)' + \left(\lambda_1 \int_t^1 a(\xi)d\xi + \lambda_2\right) \theta = 0.$$

Pretpostavimo da gravitaciona sila nije podložna promenama, tj. neka je  $\lambda_1 = \lambda > 0$  fiksirano. Posmatrajmo  $\lambda_2 \in \mathbb{R}$  kao bifurkacioni parametar.

**Lema 2.1.** Neka je  $\lambda_1 = \lambda$  dato. Granični problem (2.11), (2.12) ima samo realne sopstvene vrednosti, kojih je beskonačno, ali prebrojivo mnogo, u oznaci  $\lambda_{2n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Pomenute sopstvene vrednosti mogu se urediti tako da važi

$$0 < \lambda_{21} < \lambda_{22} < \lambda_{23} < \lambda_{24} < \dots$$

Na intervalu  $(0, 1)$  postoji  $n - 1$  korena sopstvene funkcije  $\theta_{2n}$ . Važi i

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\lambda_{2n}}{n^2} = \frac{\pi^2}{\left(\int_0^1 \frac{dt}{a(t)}\right)^2}.$$

---

<sup>4</sup>Dokaz ovog stava je dat u Teoremi 2.1, a ističemo da se isti može dokazati korišćenjem Ljapunov–Šmitove redukcije. Tu analizu prikazaćemo u drugom delu rada kod analize problema izvicanja sa smicanjem.

**Dokaz.** Ako za koeficijente  $p$ ,  $q$  i  $w$  u Teoremi 4.3.1 iz [36] uzmemo

$$p = a^2, \quad q = \lambda_1 \int_t^1 a(\xi) d\xi, \quad w = 1,$$

tada dokaz naše leme sledi neposredno primenom navedene teoreme.  $\square$

Sledećom teoremom želimo pokazati da sistem (2.8), (2.9) za proizvoljno  $a(t)$ ,  $0 < t < 1$ , ima tačku bifurkacije u najmanjoj sopstvenoj vrednosti linearizovanog sistema (2.11), (2.12). Označimo tu najmanju sopstvenu vrednost sa  $\Lambda$ , tj. neka je

$$\lambda_{21} = \Lambda.$$

**Teorema 2.1.** Ako je  $\lambda_{21} = \Lambda$  najmanja sopstvena vrednost linearizovanog sistema (2.11), (2.12), tada nelinearni granični problem (2.10) ima tačku bifurkacije u

$$P = (\lambda, \Lambda),$$

tj. postoji neprekidno diferencijabilna kriva kroz  $((\lambda, \Lambda), 0)$  takva da važi

$$\{((\lambda, \Lambda(s)), \theta(s)), s \in (-\varepsilon, \varepsilon), ((\lambda, \Lambda(0)), \theta(0)) = ((\lambda, \Lambda), 0)\}, \quad (2.13)$$

pri čemu je

$$R(P = (\lambda, \Lambda(s)), \theta(s)) = 0, \quad s \in (-\varepsilon, \varepsilon). \quad (2.14)$$

**Dokaz.** Koristićemo Teoremu Krandal–Rabinovica, [16], [28] (Teorema I.5.1). Neka je  $\theta_0$  sopstvena funkcija sistema (2.11), (2.12) sa  $P(\lambda, \Lambda)$ , gde je  $\lambda$  dato, a  $\Lambda$  je najmanja sopstvena vrednost. Pretpostavljamo da je  $\theta_0$  normalizo-



vano, tako da je

$$\int_0^1 |\theta_0(t)|^2 dt = 1.$$

Primetimo da

$$\left(a^2\dot{\theta}\right)' + \left(\lambda \int_t^1 a(\xi)d\xi + \Lambda\right) \theta = 0,$$

uz uslove

$$\theta(1) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow 0} a^2(t)\dot{\theta}(t) = 0,$$

vodi do jedinstvene sopstvene funkcije  $\theta = \theta_0$ . Da bismo pokazali da je  $\theta_0$  jedinstvena takva funkcija, primetimo da je

$$a(1) \neq 0.$$

Naime, ako je  $a(1) = 0$ , iz (2.3) dobijamo da je  $M(1) = 0$ . Tada bismo iz jednačina ravnoteže zaključili da postoji samo trivijalno rešenje  $\theta_0 = 0$ . Kako je  $a(1) \neq 0$ , to se može primeniti Teorema 5, [12], pa je  $\theta_0$  zaista jedinstvena sopstvena funkcija. Sada određujemo

$$\frac{\partial B(P)\theta_0}{\partial \Lambda}$$

kao

$$D^2 R_{\theta, \Lambda}(P, 0)\theta_0 = \theta_0,$$

odakle sledi da važi

$$D^2 R_{\theta, \Lambda}(P, 0)\theta_0 \notin \text{Range } B(P = (\lambda, \Lambda)).$$

Prema tome, na osnovu Teoreme I.5.1, [28], dobijamo

$$\{((\lambda, \Lambda(s)), \theta(s)), s \in (-\varepsilon, \varepsilon), ((\lambda, \Lambda(0)), \theta(0)) = ((\lambda, \Lambda), 0)\},$$

pri čemu je

$$R(P = (\lambda, \Lambda(s)), \theta(s)) = 0, \quad s \in (-\varepsilon, \varepsilon),$$

što je i trebalo dokazati. □

## 2.2 Definisane probleme stabilnosti pritisnutog obrnutog stuba

Ovde ćemo definisati optimizacioni problem na sledeći način:

Za dato  $P_0 = (\lambda, \Lambda)$  treba odrediti  $a^*(t)$  iz sistema (2.11), (2.12) tako da postoji netrivialno rešenje i da je zapremina

$$w = \int_0^1 a^*(t) dt$$

minimalna.

Ovako zadat problem naziva se *problem stabilnosti pritisnutog obrnutog stuba*.

U nastavku bavićemo se određivanjem optimalne površine poprečnog preseka  $a^*(t)$ .

## Glava 3

# Uslovi za egzistenciju rešenja jednačina koje određuju optimalni oblik štapa

Pri optimizaciji oblika elastičnog štapa tako da je opterećenje fiksirano (parametar  $\lambda$  je dat) i da je štap pri tome stabilan, a da mu je zapremina minimalna, koristićemo metode varijacionog računa.

Za poglavlja iz varijacionog računa i teorije optimalnog upravljanja koja ćemo koristiti u disertaciji videti [1], [34], [35], [20]. U slučaju kada se na površinu poprečnog preseka ne nameću druga ograničenja osim pozitivnosti za minimizaciju zapremine, može biti korišćen i klasični varijacioni račun, tj. uopšteni problem Bolce, videti [34]. S obzirom na to da ćemo mi ostaviti mogućnost korišćenja dodatnih ograničenja na  $a$ , na primer,  $a \geq a_0 > 0$ , mi ćemo izložiti planiranu analizu gde je korišćen Pontrjaginov princip maksimuma. U nastavku ćemo ukratko opisati taj metod.

### 3.1 Pontrjaginov princip maksimuma

Neka je dat kriterijum optimalnosti koji je izražen u obliku određenog integrala

$$I = \int_0^1 \Psi(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) dt.$$

U gornjem integralu  $\mathbf{x}$  predstavlja *vektor stanja*, koji je određen sa  $n$  realnih funkcija vremena  $x_1(t), \dots, x_n(t)$ , odnosno

$$\mathbf{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)).$$

Funkcije  $x_1(t), \dots, x_n(t)$  se nazivaju *promenljive stanja* ili *parametri stanja*.

Vektor

$$\mathbf{u}(t) = (u_1(t), \dots, u_l(t))$$

jeste *vektor upravljanja*, gde se pretpostavlja da funkcije  $u_1(t), \dots, u_l(t)$ , tzv. *promenljive (parametri) upravljanja*, pripadaju skupu dopustivih upravljanja koji je, u slučajevima koje mi nameravamo razmatrati, dat kao

$$\mathcal{K} = \{h : h \in C^1([0, 1]), h(t) \geq 0\}.$$

Neka su parametri stanja određeni sledećim sistemom diferencijalnih jednačina

$$\dot{x}_i = f_i(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad i = 1, \dots, n,$$

koji opisuje promenu u vremenu svake koordinate stanja kao funkciju vremena, promenljivih stanja i parametara upravljanja, gde su  $f_1, \dots, f_n$  zadate

### 3. Uslovi za egzistenciju rešenja jednačina koje određuju optimalni oblik štapa

---

funkcije.

Ako vektor  $\mathbf{x}$  sadrži  $n$  komponenti, tada su granični uslovi

$$\begin{aligned}x_i(0) &= a_i, \quad i = 1, \dots, n - m, \\x_j(1) &= b_j, \quad j = n - m + 1, \dots, n,\end{aligned}\tag{3.1}$$

gde su  $a_i$  i  $b_j$  konstante.

Centralni rezultat Pontrjaginove teorije se može iskazati sledećom teoremom, [35].

**Teorema 3.1 (Princip maksimuma).** Ako je vektor upravljanja  $\mathbf{u}$  optimalan, tj. obezbeđuje maksimum (minimum) kriterijumu optimalnosti  $I$ , tada je Hamiltonova funkcija

$$H = H(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{u}) = \Psi(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) + \sum_{i=1}^n p_i f_i(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})\tag{3.2}$$

maksimalna (minimalna), u dozvoljenom skupu upravljanja, u odnosu na komponente vektora upravljanja  $\mathbf{u}$ .

Komponente  $p_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , vektora

$$\mathbf{p}(t) = (p_1(t), p_2(t), \dots, p_n(t))$$

nazivaju se *konjugovane promenljive (generalisani impulsi, neodređeni Lagranževi množitelji)*, koje su date kao rešenje sistema

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, n,\tag{3.3}$$

### 3. Uslovi za egzistenciju rešenja jednačina koje određuju optimalni oblik štapa

---

uz sledeće granične uslove

$$\begin{aligned} p_i(1) &= 0, \quad i = 1, \dots, n - m, \\ p_j(0) &= 0, \quad j = n - m + 1, \dots, n. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Jednačine (3.3) i

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad i = 1, \dots, n, \tag{3.5}$$

obrazuju sistem od  $2n$  diferencijalnih jednačina, sa  $2n+l$  nepoznatih funkcija

$$x_1(t), \dots, x_n(t), p_1(t), \dots, p_n(t), u_1(t), \dots, u_l(t),$$

koje se nazivaju *kanonske diferencijalne jednačine* i koje ostaju nepromenjene u čitavoj teoriji optimalnog upravljanja.

Dakle, iz Teoreme 3.1 vidimo da se biranje optimalnih komponenti vektora upravljanja vrši optimizacijom odgovarajuće Hamiltonove funkcije upravo po ovim komponentama.

U našoj primeni upravljanje će biti površina poprečnog preseka, a kriterijum optimalnosti biće jednak integralu poprečnog preseka, tj. zapremini. Prema tome,

$$\Psi(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) = u = a,$$

a  $f_i(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$  su definisane jednačinama modela.

Dakle, na osnovu Teoreme 3.1 zaključujemo da je neophodan uslov za minimum dat sa

$$\frac{\partial H}{\partial a} = 0. \tag{3.6}$$

### 3. Uslovi za egzistenciju rešenja jednačina koje određuju optimalni oblik štapa

---

Rešavajući ovu jednačinu po  $a$ , dobijamo optimalno upravljanje koje, u opštem slučaju, zavisi od  $t$ ,  $x_i$  i  $p_i$ , odnosno

$$a_{opt} = \varphi(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}). \quad (3.7)$$

Unoseći tako dobijeno  $a$  u jednačine za  $x_i$  i  $p_i$ , tj. u jednačine (3.5) i (3.3), dobijamo sistem od  $2n$  diferencijalnih jednačina prvog reda

$$\dot{x}_i = \alpha_i(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}), \quad \dot{p}_i = \beta_i(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}), \quad i = 1, \dots, n.$$

Rešavanjem gore dobijenog sistema određujemo promenljive stanja  $x_i$  i generalisane impulse  $p_i$ , koje će, u opštem slučaju, zavisiti od  $2n$  integracionih konstanti. Te konstante se nalaze iz graničnih uslova (3.1) i (3.4). Prema tome, sada iz (3.7) određujemo i optimalnu površinu poprečnog preseka  $a$ .

Treba istaći da jednačina

$$\frac{\partial H}{\partial a} = 0$$

određuje samo neophodan uslov za minimum  $H$  u tačkama u kojima  $a$  nije na granici ili u kojima  $H$  nije linearna funkcija po  $a$ . Što se tiče dovoljnih uslova za minimum  $H$ , neki tipovi tih uslova su dati, na primer, u referencama [31], [10], [30], [9].

## 3.2 Primena Pontrjaginovog principa u rešavanju jednačina koje određuju optimalni oblik štapa

Vratimo se sada rešavanju našeg problema. Uvedimo nove promenljive  $x_1$ ,  $x_2$  i  $x_3$  na sledeći način:

$$x_1 = \theta, \quad x_2 = a^2 \dot{\theta}, \quad x_3 = \int_t^1 a(\xi) d\xi. \quad (3.8)$$

Primetimo da promenljiva  $x_3$  predstavlja zapreminu stuba iznad proizvoljnog poprečnog preseka određenog promenljivom  $t$ .

Sada iz sistema (2.11), (2.12) dobijamo novi sistem diferencijalnih jednačina

$$\dot{x}_1 = \frac{x_2}{a^2}, \quad \dot{x}_2 = -\lambda x_1 x_3 - \Lambda x_1, \quad \dot{x}_3 = -a, \quad (3.9)$$

gde je

$$x_1(1) = 0, \quad x_2(0) = 0, \quad x_3(1) = 0. \quad (3.10)$$

Na osnovu izloženog, problem optimizacije oblika elastičnog štapa uz fiksirano opterećenje i minimalnu zapreminu, pri čemu štap treba biti stabilan, sada formulišemo kao:

*Odrediti upravljanje  $a^*(t) \in \mathcal{K}$  tako da je*

$$\min_{a \in \mathcal{K}} I = \min_{a \in \mathcal{K}} \int_0^1 a(t) dt = \int_0^1 a^*(t) dt,$$



### 3. Uslovi za egzistenciju rešenja jednačina koje određuju optimalni oblik štapa

---

uz diferencijalna ograničenja (3.9) i (3.10), gde je

$$\mathcal{K} = \{h : h \in C^1([0, 1]), h(t) \geq 0\}.$$

Da bismo rešili ovaj optimizacioni problem, korišćemo Pontrjaginov princip maksimuma. Hamiltonova funkcija (3.2) dobija oblik

$$H = a + p_1 \frac{x_2}{a^2} + p_2(-\lambda x_1 x_3 - \Lambda x_1) + p_3(-a),$$

gde su konjugovane promenljive  $p_1$ ,  $p_2$  i  $p_3$  date sistemom

$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = p_2(\lambda x_3 + \Lambda), \quad \dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\frac{p_1}{a^2}, \quad \dot{p}_3 = -\frac{\partial H}{\partial x_3} = \lambda x_1 p_2, \quad (3.11)$$

pri čemu je

$$p_1(0) = 0, \quad p_2(1) = 0, \quad p_3(0) = 0.$$

Uslov (3.6) za minimum nas vodi do jednačine

$$\frac{\partial H}{\partial a} = 1 - 2p_1 \frac{x_2}{a^3} - p_3 = 0,$$

odakle možemo izraziti upravljanje  $a$ , tj.

$$a = \sqrt[3]{\frac{2p_1 x_2}{1 - p_3}}. \quad (3.12)$$

Pokušajmo sada da izrazimo površinu  $a$  u nešto pogodnijem obliku. U tom cilju, uporedimo sistem

$$\dot{x}_1 = \frac{x_2}{a^2}, \quad \dot{x}_2 = -x_1(\lambda x_3 + \Lambda), \quad x_1(1) = 0, \quad x_2(0) = 0,$$

### 3. Uslovi za egzistenciju rešenja jednačina koje određuju optimalni oblik štapa

---

sa sistemom

$$\dot{p}_1 = p_2(\lambda x_3 + \Lambda), \quad \dot{p}_2 = -\frac{p_1}{a^2}, \quad p_1(0) = 0, \quad p_2(1) = 0.$$

Primećujemo da ova dva sistema postaju identična ako stavimo

$$p_1 = x_2, \quad p_2 = -x_1. \quad (3.13)$$

Tada (3.12) postaje

$$a = \sqrt[3]{\frac{2x_2^2}{1-p_3}}. \quad (3.14)$$

Diferenciranjem  $\frac{\partial H}{\partial a}$  po  $a$ , dobijamo

$$\frac{\partial^2 H}{\partial a^2} = 6p_1 \frac{x_2}{a^4}.$$

Uzimajući u obzir (3.13), imamo

$$\frac{\partial^2 H}{\partial a^2} = 6 \frac{x_2^2}{a^4} \geq 0, \quad (3.15)$$

odakle vidimo da je ispunjen potreban uslov za  $\min_{a \in \mathcal{K}} H$ .

Napomenimo ovde još činjenicu da, u opštem slučaju, u (3.13) možemo staviti

$$p_1 = kx_2, \quad p_2 = -kx_1,$$

gde je  $k \neq 0$  proizvoljna konstanta, videti [5]. Međutim, imajući u vidu da je  $a \geq 0$ , morali bismo uzeti  $k > 0$ , jer bi, u suprotnom, uslov (3.15) bio narušen.

### 3. Uslovi za egzistenciju rešenja jednačina koje određuju optimalni oblik štapa

---

Što se tiče dovoljnih uslova za minimalnost integrala

$$\int_0^1 a(t) dt, \quad a \in \mathbb{K},$$

postoje različiti pristupi tom problemu. Ovde ćemo navesti dve teoreme iz teorije optimalnog upravljanja koje se odnose na dovoljne uslove. Jedna od njih je *Mangasarianova teorema dovoljnosti*<sup>5</sup>, u kojoj se traži da ciljna funkcija<sup>6</sup> i ograničenja budu konveksni zajedno u promenljivim stanja i promenljivim upravljanja za probleme minimizacije, videti [31]. Druga teorema je Teorema Aroua<sup>7</sup>, koju ćemo ukratko opisati. Prvo promenljivu upravljanja (3.12) vratimo u Hamiltonovu funkciju

$$H = a + p_1 \frac{x_2}{a^2} + p_2(-\lambda x_1 x_3 - \Lambda x_1) + p_3(-a),$$

odakle dobijamo

$$H = 3p_1 \frac{x_2}{\left(\frac{2p_1 x_2}{1-p_3}\right)^{\frac{2}{3}}} + p_2(-\lambda x_1 x_3 - \Lambda x_1).$$

Uslov  $\min_{a \in \mathcal{K}} H$  je ispunjen ako je gore dobijena funkcija  $H$  konveksna funkcija u odnosu na  $x_1, x_2, x_3$ , kada su  $p_1, p_2, p_3$  fiksirani i pozitivni, [10]. Međutim, to nije slučaj kod nas. Otud, u daljoj analizi nećemo se baviti dovoljnim uslovima za minimum.

Sada ćemo izvesti jednačine na osnovu kojih određujemo optimalni oblik pritisnutog obrnutog stuba.

---

<sup>5</sup>Mangasarian's sufficiency theorem

<sup>6</sup>*Objective function*; realna funkcija čiju vrednost želimo maksimizovati ili minimizovati nad odgovarajućim domenom

<sup>7</sup>Arrow's theorem

3. Uslovi za egzistenciju rešenja jednačina koje određuju optimalni oblik štapa

---

Integraleći jednačinu (3.11)<sub>3</sub>, tj. jednačinu

$$\dot{p}_3 = \lambda x_1 p_2,$$

gde je  $p_3(0) = 0$ , a uzimajući u obzir da iz (3.13) imamo  $p_2 = -x_1$ , dobijamo

$$p_3 = -\lambda \int_0^t x_1^2(\xi) d\xi. \quad (3.16)$$

Iz (3.14) imamo

$$1 - p_3 = \frac{2x_2^2}{a^3},$$

odnosno, koristeći (3.16) i (3.8)<sub>2</sub>,

$$1 + \lambda \int_0^t x_1^2(\xi) d\xi = 2a\dot{\theta}^2, \quad (3.17)$$

čijim diferenciranjem jednostavno dobijamo

$$\left(a\dot{\theta}^2\right)' - \frac{\lambda}{2}\theta^2 = 0. \quad (3.18)$$

Prema tome, optimalni oblik pritisnutog obrnutog stuba određićemo iz (2.11) i (3.18), odnosno iz sledećeg sistema integro-diferencijalnih jednačina

$$\left(a^2\dot{\theta}\right)' + \left(\lambda \int_t^1 a(\xi) d\xi + \Lambda\right)\theta = 0, \quad \left(a\dot{\theta}^2\right)' - \frac{\lambda}{2}\theta^2 = 0, \quad (3.19)$$

uz granične uslove

$$\theta(1) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow 0} a^2(t)\dot{\theta}(t) = 0. \quad (3.20)$$

### 3. Uslovi za egzistenciju rešenja jednačina koje određuju optimalni oblik štapa

---

Imajući u vidu da je  $x_2(0) = 0$ , primetimo da iz (3.14) i (3.17) sledi

$$a(0) = 0, \quad a(0)\dot{\theta}^2(0) = \frac{1}{2}. \quad (3.21)$$

Ovde posebno ističemo da se naš uslov (3.19), (3.20) svodi na onaj dobijen u radu Kelera i Niordsona, [25]. Takođe, uslovi optimalnosti dobijeni u radovima Mekartija, [32], [33], poklapaju se sa našim uslovima, pri čemu treba naglasiti da su rezultati koji su prezentovani u [25], [32] i [33] dobijeni metodama koje se razlikuju od metoda koje su korišćene u ovoj disertaciji.

## Glava 4

# Primena varijacionih metoda u ispitivanju svojstava rešenja jednačina koje određuju optimalni oblik štapa

U ovom poglavlju transformisaćemo sistem (3.19), (3.20) i ispitaćemo svojstva rešenja koristeći varijacione metode. Formulisaćemo varijacioni princip i konstruisati prve integrale, koji slede iz činjenice da Hamiltonova funkcija  $H$  ne zavisi eksplicitno od  $t$ , kao i iz uslova

$$\frac{\partial H}{\partial a} = 0.$$

Za ove prve integrale odredićemo grupe transformacija koje ostavljaju njima odgovarajući varijacioni princip invarijantnim. Pri tome, koristićemo

poznatu Teoremu Emi Neter, [35]:

**Teorema 4.1 (Emi Neter).** Svakoj grupi infinitezimalnih transformacija generalisanih koordinata i vremena koje ostavlja Hamiltonovo dejstvo apsolutno ili gradijentno invarijantnim, odgovara neki zakon konzervacije (prvi integral) dinamičkog sistema.

Dakle, korišćenjem ove teoreme odredićemo grupe infinitezimalnih transformacija generalisanih koordinata i vremena, kao i gradijentnu funkciju, tako da te transformacije reprodukuju prve integrale. Ovako dobijene prve integrale koristićemo pri numeričkom rešavanju dobijenih sistema radi provere tačnosti integracije.

## 4.1 Prvi integrali sistema jednačina koje određuju optimalni oblik štapa

Pređimo sada na transformaciju sistema (3.19), (3.20). Neka je

$$s(t) = x_3 = \int_t^1 a(\xi) d\xi.$$

Očigledno je  $s(1) = 0$ . Tada je

$$\dot{s}(t) = -a(t),$$

a pošto je  $a(t) \geq 0$ , zaključujemo da je  $s(t)$  pozitivna opadajuća funkcija.

Pri ovako definisanoj promenljivoj  $s$ , sistem (3.19) se transformiše u si-

4. Primena varijacionih metoda u ispitivanju svojstava  
rešenja jednačina koje određuju optimalni oblik štapa

---

stem

$$\left(\dot{s}^2\dot{\theta}\right)' + \lambda\theta s + \Lambda\theta = 0, \quad \left(\dot{s}\dot{\theta}^2\right)' + \frac{\lambda}{2}\theta^2 = 0, \quad (4.1)$$

pri čemu je

$$\theta(1) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow 0} \dot{s}^2(t)\dot{\theta}(t) = 0, \quad s(0) = w^*, \quad s(1) = 0. \quad (4.2)$$

Naglasimo da, bez gubitka opštosti, možemo analizirati sistem (4.1), (4.2) za  $w^* = 1$ , tako da ćemo u analizi koja sledi posmatrati taj sistem upravo za  $w^* = 1$ . Dakle,

$$\left(\dot{s}^2\dot{\theta}\right)' + \lambda\theta s + \Lambda\theta = 0, \quad \left(\dot{s}\dot{\theta}^2\right)' + \frac{\lambda}{2}\theta^2 = 0, \quad (4.3)$$

pri čemu je

$$\theta(1) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow 0} \dot{s}^2(t)\dot{\theta}(t) = 0, \quad s(0) = 1, \quad s(1) = 0. \quad (4.4)$$

Sada ćemo navesti jedan od naših glavnih rezultata kroz sledeću teoremu.

**Teorema 4.2** ([24]). Za rešenje  $(s, \theta)$  graničnog problema (4.3), (4.4) važi sledeće:

(a) Funkcional

$$G(S, \Theta, \Lambda) = \frac{1}{2} \int_0^1 (\dot{S}^2\dot{\Theta}^2 - \lambda\Theta^2 S - \Lambda\Theta^2) dt \quad (4.5)$$

ima stacionarnu vrednost

$$\delta G(s, \theta, \Lambda) = 0$$



4. Primena varijacionih metoda u ispitivanju svojstava  
rešenja jednačina koje određuju optimalni oblik štapa

---

na rešenju  $(s, \theta)$ , nad skupom funkcija

$$\mathcal{R} = \left\{ r : r = (S, \Theta), \Theta(1) = 0, \lim_{t \rightarrow 0} \dot{S}^2(t) \dot{\Theta}(t) = 0, S(0) = 1, S(1) = 0, \right\}.$$

(b) Vrednost funkcionala  $F$  na rešenju problema (4.3), (4.4) iznosi nula, odnosno

$$G(s, \theta, \Lambda) = \frac{1}{2} \int_0^1 \left( \dot{s}^2 \dot{\theta}^2 - \lambda \theta^2 s - \Lambda \theta^2 \right) dt = 0. \quad (4.6)$$

(c) Postoje dva prva integrala sistema (4.3), (4.4) i to

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} \dot{s}^2 \dot{\theta}^2 + \frac{\lambda}{2} \theta^2 s + \frac{\Lambda}{2} \theta^2 &= C, \\ 8 \dot{s} \dot{\theta}^2 s - 5 \dot{s}^2 \dot{\theta} \theta + 4 + 4 \frac{\Lambda}{\lambda} \left( 1 + 2 \dot{s} \dot{\theta}^2 \right) &= 2Ct, \end{aligned} \quad (4.7)$$

gde je

$$C = \frac{3}{2} \dot{s}^2(1) \dot{\theta}^2(1), \quad (4.8)$$

a dato je sa

$$C = \frac{1}{6} \left( \sqrt{\left( 4 \frac{\Lambda}{\lambda} \right)^2 + 12 \left( 1 + \frac{\Lambda}{\lambda} \right) \frac{1}{\dot{\theta}^2(1)} + 4 \frac{\Lambda}{\lambda}} \right)^2 \dot{\theta}^2(1). \quad (4.9)$$

**Dokaz.** Neka je Lagranževa gustina data kao

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left( \dot{S}^2 \dot{\Theta}^2 - \lambda \Theta^2 S - \Lambda \Theta^2 \right).$$

Razmotrimo problem minimizacije funkcionala  $I(S, \Theta)$  definisanog sa

$$I(S, \Theta) = \int_0^1 \mathcal{L} dt,$$

4. Primena varijacionih metoda u ispitivanju svojstava  
rešenja jednačina koje određuju optimalni oblik štapa

---

pri čemu je  $(S, \Theta) \in \mathcal{R}$ . Lako je proveriti da su Ojler–Lagranževe jednačine

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{S}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial S} = 0, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Theta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Theta} = 0$$

ekvivalentne sa jednačinama

$$\left( \dot{s}^2 \dot{\theta} \right)' + \lambda \theta s + \Lambda \theta = 0, \quad \left( \dot{s} \dot{\theta}^2 \right)' + \frac{\lambda}{2} \theta^2 = 0.$$

Kako su Ojler–Lagranževe jednačine neophodan uslov za optimalnost funkcionala  $I$ , to je

$$\delta G(s, \theta, \Lambda) = 0,$$

čime je dokazan deo pod (a).

Dokažimo sada (b). Ako pomnožimo (4.3)<sub>1</sub> sa  $\theta$ , dobijamo

$$\left( \dot{s}^2 \dot{\theta} \right)' \theta + \lambda \theta^2 s + \Lambda \theta^2 = 0. \quad (4.10)$$

Primetimo da iz jednakosti (koristimo formulu za izvod proizvoda)

$$\left( \dot{s}^2 \dot{\theta} \theta \right)' = \left( \dot{s}^2 \dot{\theta} \right)' \theta + \dot{s}^2 \dot{\theta} \dot{\theta}$$

imamo

$$\left( \dot{s}^2 \dot{\theta} \right)' \theta = \left( \dot{s}^2 \dot{\theta} \theta \right)' - \dot{s}^2 \dot{\theta} \dot{\theta}. \quad (4.11)$$

Kada zamenimo (4.11) u (4.10) i integralimo dobijenu jednačinu, koristeći granične uslove za  $t = 0$  i  $t = 1$ , tj. uslove (4.4), dobijamo

$$\int_0^1 \left( -\dot{s}^2 \dot{\theta}^2 + \lambda \theta^2 s + \Lambda \theta^2 \right) dt = 0.$$

4. Primena varijacionih metoda u ispitivanju svojstava  
rešenja jednačina koje određuju optimalni oblik štapa

---

Konačno, množeći prethodnu jednakost sa  $-\frac{1}{2}$ , sledi

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \left( \dot{s}^2 \dot{\theta}^2 - \lambda \theta^2 s - \Lambda \theta^2 \right) dt = 0,$$

a to je upravo (4.6).

Pređimo sada na dokazivanje rezultata (c). Imajući u vidu činjenicu da

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left( \dot{S}^2 \dot{\Theta}^2 - \lambda \Theta^2 S - \Lambda \Theta^2 \right)$$

ne zavisi eksplicitno od  $t$ , zaključujemo da je Hamiltonijan konstantan, odnosno

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{s}} \dot{s} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \dot{\theta} - \mathcal{L} = \text{const.}$$

Prema tome, imamo sledeći Jakobijev integral za sistem (4.3), (4.4), videti [34],

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{s}} \dot{s} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \dot{\theta} - \mathcal{L} = \frac{3}{2} \dot{s}^2 \dot{\theta}^2 + \frac{\lambda}{2} \theta^2 s + \frac{\Lambda}{2} \theta^2 = \text{const.}$$

Koristeći granični uslov  $\theta(1) = 0$  u gornjem prvom integralu, dobijamo

$$\frac{3}{2} \dot{s}^2 \dot{\theta}^2 + \frac{\lambda}{2} \theta^2 s + \frac{\Lambda}{2} \theta^2 = \frac{3}{2} \dot{s}^2(1) \dot{\theta}^2(1). \quad (4.12)$$

Fokusirajmo se sada na vrednost konstante na desnoj strani jednakosti u (4.12). Za početak, pomnožimo (4.3)<sub>1</sub> sa  $\theta$ , a (4.3)<sub>2</sub> sa  $-2s$ . Sabirajući tako dobijene jednačine dobijamo

$$\left( \dot{s}^2 \dot{\theta} \right)' \theta + \Lambda \theta^2 - 2s \left( \dot{s} \dot{\theta}^2 \right)' = 0. \quad (4.13)$$

4. Primena varijacionih metoda u ispitivanju svojstava  
rešenja jednačina koje određuju optimalni oblik štapa

---

Koristeći, kao u (4.11), formulu za izvod proizvoda, a zatim integraleći (4.13), dobijamo

$$\int_0^t \dot{s}^2(\xi)\dot{\theta}^2(\xi)d\xi + \Lambda \int_0^t \theta^2(\xi)d\xi + \dot{s}^2(t)\dot{\theta}(t)\theta(t) - 2\dot{s}(t)\dot{\theta}^2(t)s(t) = c.$$

Na osnovu graničnih uslova (4.4), uzimajući  $t = 0$ , pa  $t = 1$ , dobijamo

$$\int_0^1 \dot{s}^2\dot{\theta}^2 dt + \Lambda \int_0^1 \theta^2 dt = -2\dot{s}(0)\dot{\theta}^2(0). \quad (4.14)$$

Kako iz (3.21)<sub>2</sub>, a imajući u vidu da je  $\dot{s}(t) = -a(t)$ , sledi

$$\dot{s}(0)\dot{\theta}^2(0) = -\frac{1}{2},$$

zaključujemo da (4.14) postaje

$$\int_0^1 \dot{s}^2\dot{\theta}^2 dt + \Lambda \int_0^1 \theta^2 dt = 1. \quad (4.15)$$

Primetimo da, ako u (3.17) stavimo  $t = 1$ , možemo dobiti

$$\int_0^1 \theta^2 dt = -\frac{2}{\lambda}\dot{s}(1)\dot{\theta}^2(1) - \frac{1}{\lambda}. \quad (4.16)$$

Kada zamenimo (4.16) u (4.15), dobijamo

$$\int_0^1 \dot{s}^2\dot{\theta}^2 dt - \frac{2\Lambda}{\lambda}\dot{s}(1)\dot{\theta}^2(1) - \frac{\Lambda}{\lambda} = 1. \quad (4.17)$$

4. Primena varijacionih metoda u ispitivanju svojstava  
rešenja jednačina koje određuju optimalni oblik štapa

---

Integraleći (4.12), imamo

$$\frac{1}{2} \int_0^t \left( 3\dot{s}^2(\xi)\dot{\theta}^2(\xi) + \lambda\theta^2(\xi)s(\xi) + \Lambda\theta^2(\xi) \right) d\xi = \frac{3}{2}\dot{s}^2(1)\dot{\theta}^2(1)t. \quad (4.18)$$

Iz (4.6) imamo

$$\int_0^1 (\lambda\theta^2 s + \Lambda\theta^2) dt = \int_0^1 \dot{s}^2\dot{\theta}^2,$$

čijim kombinovanjem sa (4.18), za  $t = 1$ , dobijamo

$$\int_0^1 \dot{s}^2\dot{\theta}^2 dt = \frac{3}{4}\dot{s}^2(1)\dot{\theta}^2(1). \quad (4.19)$$

Sada iz (4.17), a koristeći (4.19), sledi

$$\frac{3}{2}\dot{s}^2(1)\dot{\theta}^2(1) - 4\frac{\Lambda}{\lambda}\dot{s}(1)\dot{\theta}^2(1) - 2\left(1 + \frac{\Lambda}{\lambda}\right) = 0. \quad (4.20)$$

Rešavajući (4.20) kao kvadratnu jednačinu po  $\dot{s}(1)$  i koristeći tako dobijenu vrednost  $\dot{s}(1)$  u (4.12), konačno dobijamo prvi integral (4.7)<sub>1</sub>, gde je  $C$  dato sa (4.9).

Dokažimo sada da važi i (4.7)<sub>2</sub>. Ako pomnožimo (4.3)<sub>1</sub> sa  $\theta$  i (4.3)<sub>2</sub> sa  $s$ , dobijamo

$$\left( \dot{s}^2\dot{\theta}\theta \right)' = \dot{s}^2\dot{\theta}^2 - \lambda\theta^2 s - \Lambda\theta^2, \quad \left( \dot{s}\dot{\theta}^2 s \right)' = \dot{s}^2\dot{\theta}^2 - \frac{\lambda}{2}\theta^2 s. \quad (4.21)$$

4. Primena varijacionih metoda u ispitivanju svojstava rešenja jednačina koje određuju optimalni oblik štapa

---

Izrazimo sada  $\dot{s}^2\dot{\theta}^2$  iz (4.12) i zamenimo taj izraz u (4.21). Dakle,

$$\begin{aligned} \left(\dot{s}^2\dot{\theta}\theta\right)' &= \dot{s}^2(1)\dot{\theta}^2(1) - \frac{4}{3}(\lambda\theta^2s + \Lambda\theta^2), \\ \left(s\dot{s}\dot{\theta}^2\right)' &= \dot{s}^2(1)\dot{\theta}^2(1) - \frac{5}{6}\lambda\theta^2s - \frac{1}{3}\Lambda\theta^2. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Kada izrazimo  $\lambda\theta^2s$  iz (4.22)<sub>1</sub> i tako dobijen izraz zamenimo u (4.22)<sub>2</sub>, dobijamo

$$8\left(s\dot{s}\dot{\theta}^2\right)' - 5\left(\dot{s}^2\dot{\theta}\theta\right)' = 3\dot{s}^2(1)\dot{\theta}^2(1) + 4\Lambda\theta^2,$$

odakle, integracijom i korišćenjem graničnih uslova, sledi

$$8s\dot{s}\dot{\theta}^2 - 5\dot{s}^2\dot{\theta}\theta = 3\dot{s}^2(1)\dot{\theta}^2(1)t + 4\Lambda \int_0^t \theta^2(\xi)d\xi - 4. \quad (4.23)$$

Podsetimo se da je

$$3\dot{s}^2(1)\dot{\theta}^2(1) = 2C,$$

dok iz (3.17) imamo

$$\int_0^t \theta^2(\xi)d\xi = -\frac{1}{\lambda} \left(2s\dot{\theta}^2 + 1\right). \quad (4.24)$$

Prema tome, sada (4.23) postaje

$$8\dot{s}\dot{\theta}^2s - 5\dot{s}^2\dot{\theta}\theta + 4 + 4\frac{\Lambda}{\lambda} \left(1 + 2s\dot{\theta}^2\right) = 2Ct,$$

a to je upravo prvi integral (4.7)<sub>2</sub>. □

Istaknimo ovde da je u radu [8] razmatran problem određivanja optimalnog oblika obrnutog stuba koji je najotporniji na izvijanje, a koji nije

#### 4. Primena varijacionih metoda u ispitivanju svojstava rešenja jednačina koje određuju optimalni oblik štapa

---

pritisnut nikakvom silom na jednom od njegovih krajeva. Prema tome, naši rezultati, u specijalnom slučaju kada nemamo silu intenziteta  $F$  koja deluje na stub (videti Sliku 2), tj. kada je  $\Lambda = 0$ , poklapaju se sa rezultatima dobijenim u navedenom radu.

Naime, ako vrednost  $\Lambda = 0$  zamenimo u (4.9), sledi da je  $C = 2$ , tako da prvi integrali (4.7) sada postaju

$$\frac{3}{2}\dot{s}^2\dot{\theta}^2 + \frac{\lambda}{2}\theta^2s = 2,$$
$$8\dot{s}\dot{\theta}^2s - 5\dot{s}^2\dot{\theta}\theta + 4 = 4t,$$

a to su upravo prvi integrali (42) iz [8].

Dalje, kada je  $\Lambda = 0$  (pri čemu je  $C = 2$ ), iz prvog integrala (4.7)<sub>1</sub> za vrednost  $t = 0$  dobijamo

$$\theta(0) = \frac{2}{\sqrt{\lambda}},$$

što predstavlja početni uslov, dobijen kao rezultat, takođe, u radu [8].

## 4.2 Grupe transformacija prvih integrala koje njima odgovarajući varijacioni princip ostavljaju invarijantnim

U ovom odeljku bavićemo se prvim integralima (4.7) na drugačiji način od onog koji je prethodno korišćen. U tom cilju, videti [34] i [35], opisaćemo ukratko opšti metod za pronalaženje prvih integrala nekog sistema koji je okarakterisan varijacionim principom čija je Lagranževa gustina data funk-

#### 4. Primena varijacionih metoda u ispitivanju svojstava rešenja jednačina koje određuju optimalni oblik štapa

---

cijom

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n).$$

Taj metod se zasniva na proučavanju invarijantnih svojstava akcionog integrala (Hamiltonovog dejstva) u odnosu na infinitezimalne transformacije generalisanih koordinata i vremena, a baziran je na već pomenutoj Teoremi Emi Neter (Teorema 4.1), koja glasi:

*Svakoj grupi infinitezimalnih transformacija generalisanih koordinata i vremena koje ostavlja Hamiltonovo dejstvo apsolutno ili gradijentno invarijantnim, odgovara neki zakon konzervacije (prvi integral) dinamičkog sistema.*

Posmatrajmo infinitezimalne transformacije

$$\bar{x}_i(\bar{t}) = x_i(t) + \varepsilon F_i(t, \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)), \quad i = 1, \dots, n, \quad (4.25)$$

$$\bar{t} = t + \varepsilon f(t, \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)).$$

Za funkcije  $F_i$  i  $f$ ,  $i = 1, \dots, n$ , kažemo da su *generatorske funkcije (generatori)* infinitezimalne transformacije (4.25), pri čemu su  $F_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , *generatorske prostorne funkcije*, a  $f$  je *vremenska generatorska funkcija*. Parametar  $\varepsilon$  je mali konstantan pozitivan broj, odnosno

$$\varepsilon \ll 1.$$

Prema tome, jednačine (4.25) mogu se interpretirati na taj način da one preslikavaju neku tačku u njoj odgovarajuću „beskonačno” blisku tačku.



4. Primena varijacionih metoda u ispitivanju svojstava rešenja jednačina koje određuju optimalni oblik štapa

---

Da bi neki dinamički sistem imao prvi integral mora da važi

$$\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} (\dot{F}_i - \dot{x}_i f) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} F_i \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} f + \mathcal{L} f - \dot{P} = 0, \quad (4.26)$$

pri čemu je

$$P = P(t, \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t))$$

diferencijabilna funkcija koju zovemo *gradijentna funkcija*. Jednačina (4.26) naziva se *osnovni identitet* ili *identitet Emi Neter*. Taj prvi integral će onda biti oblika

$$\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} (F_i - \dot{x}_i f) \right) + \mathcal{L} f - P = \text{const.} \quad (4.27)$$

Primećujemo da Teorema Emi Neter obezbeđuje egzistenciju prvih integrala pod pretpostavkom da su već određene infinitezimalne transformacije koje ostavljaju Hamiltonovo dejstvo invarijantnim, ali ne daje nikakav način *kako* pronaći te transformacije. Prema tome, glavni zadatak jeste odrediti takvu infinitezimalnu transformaciju (4.25) i gradijentnu funkciju  $P(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$  koje zadovoljavaju jednačinu (4.26). Za tako pronađene veličine, odmah dobijamo prvi integral dat sa (4.27). Međutim, upravo u pronalaženju spomenutih funkcija koje zadovoljavaju navedeni uslov leži teškoća određivanja prvih integrala nekog sistema. Ali, treba dodati i to da se gradijentna funkcija  $P$  u izvesnom smislu može izabrati proizvoljno, što donekle olakšava naš zadatak.

Vratimo se sada našem integralu (4.5)

$$G(S, \Theta, \Lambda) = \frac{1}{2} \int_0^1 (\dot{S}^2 \dot{\Theta}^2 - \lambda \Theta^2 S - \Lambda \Theta^2) dt.$$

4. Primena varijacionih metoda u ispitivanju svojstava  
rešenja jednačina koje određuju optimalni oblik štapa

---

Razmotrimo infinitezimalnu transformaciju promenljivih koje figurišu u (4.5):

$$\begin{aligned}\bar{s}(\bar{t}) &= s(t) + \varepsilon F_s(t, s(t), \theta(t)), \\ \bar{\theta}(\bar{t}) &= \theta(t) + \varepsilon F_\theta(t, s(t), \theta(t)), \\ \bar{t} &= t + \varepsilon f(t, s(t), \theta(t)),\end{aligned}\tag{4.28}$$

pri čemu su funkcije

$$F_s(t, s(t), \theta(t)), \quad F_\theta(t, s(t), \theta(t)), \quad f(t, s(t), \theta(t))$$

generatori infinitezimalne transformacije (4.28) i to  $F_s$ ,  $F_\theta$  su generatoske prostorne funkcije, a  $f$  je vremenska generatorska funkcija. Pretpostavljamo da su  $F_s$ ,  $F_\theta$  i  $f$  neprekidno diferencijabilne funkcije u odnosu na sve svoje promenljive.

Kao što je gore rečeno, ako infinitezimalna transformacija (4.28) ostavlja integral (4.5) invarijantnim, onda teorema Emi Neter garantuje egzistenciju prvih integrala za Ojler–Lagranževe jednačine (4.3), tj. za sistem jednačina

$$\left(\dot{s}^2 \dot{\theta}\right)' + \lambda \theta s + \Lambda \theta = 0, \quad \left(\dot{s} \dot{\theta}^2\right)' + \frac{\lambda}{2} \theta^2 = 0.$$

Koristeći teoremu Emi Neter, možemo tvrditi sledeće.

**Teorema 4.3.** Ako generatori  $F_s$ ,  $F_\theta$  i  $f$  grupe infinitezimalnih transformacija (4.28) zadovoljavaju uslov

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s} F_s + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} F_\theta + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{s}} (\dot{F}_s - \dot{s} f) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} (\dot{F}_\theta - \dot{\theta} f) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} f + \mathcal{L} \dot{f} - \dot{P} = 0, \tag{4.29}$$

4. Primena varijacionih metoda u ispitivanju svojstava  
rešenja jednačina koje određuju optimalni oblik štapa

---

pri čemu je

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\dot{s}^2\dot{\theta}^2 - \lambda\theta^2s - \Lambda\theta^2),$$

a  $P = P(t, s(t), \theta(t))$  gradijentna funkcija, tada sistem (4.3) ima prvi integral oblika

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{s}}(F_s - \dot{s}f) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}(F_\theta - \dot{\theta}f) + \mathcal{L}f - P = const. \quad (4.30)$$

Primenimo sada Teoremu 4.3, tj. nađimo

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{s}}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t},$$

pa tako dobijene izraze zamenimo u (4.29). Dakle, imamo

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s} = -\frac{1}{2}\lambda\theta^2, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = -\lambda\theta s - \Lambda\theta,$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{s}} = \dot{s}\dot{\theta}^2, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = \dot{s}^2\dot{\theta}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0.$$

Sada uslov (4.29) postaje

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2}\lambda\theta^2 F_s - (\lambda\theta s + \Lambda\theta)F_\theta + \dot{s}\dot{\theta}^2(\dot{F}_s - \dot{s}f) + \dot{s}^2\dot{\theta}(\dot{F}_\theta - \dot{\theta}f) + \\ & + \frac{1}{2}(\dot{s}^2\dot{\theta}^2 - \lambda\theta^2s - \Lambda\theta^2)f - \dot{P} = 0. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Kao što smo već rekli, glavni zadatak sada jeste pronaći generatorske funkcije  $F_s$ ,  $F_\theta$ ,  $f$  grupe infinitezimalnih transformacija (4.28) i gradijentnu funkciju  $P$  koje će zadovoljiti uslov (4.31). Prema tome, razmotrimo dva specijalna slučaja generatorskih funkcija  $F_s$ ,  $F_\theta$ ,  $f$  i gradijentne funkcije  $P$ .

4. Primena varijacionih metoda u ispitivanju svojstava  
rešenja jednačina koje određuju optimalni oblik štapa

---

**Slučaj 1.** Neka je

$$F_s = 0, \quad F_\theta = 0, \quad P = 0, \quad f = a,$$

pri čemu je  $a$  konstanta različita od nule. Za ovako odabrane generatorske funkcije očigledno je ispunjen uslov (4.31), tako da prvi integral (4.30) sada postaje

$$\dot{s}\dot{\theta}^2(-\dot{s}a) + \dot{s}^2\dot{\theta}(-\dot{\theta}a) + \frac{1}{2}(\dot{s}^2\dot{\theta}^2 - \lambda\theta^2s - \Lambda\theta^2)a = const,$$

odnosno

$$\frac{3}{2}\dot{s}^2\dot{\theta}^2 + \frac{\lambda}{2}\theta^2s + \frac{\Lambda}{2}\theta^2 = C, \quad (4.32)$$

gde je  $C = const$ . Dakle, dobili smo prvi integral (4.7)<sub>1</sub>. Ovaj prvi integral možemo predstaviti i u obliku

$$2\dot{s}^2\dot{\theta}^2 - \mathcal{L} = C.$$

Primetimo da ovako odabrana transformacija predstavlja translaciju sistema uzduž nezavisne promenljive  $t$ .

**Slučaj 2.** Ovde ćemo pretpostaviti da je

$$F_s = s, \quad F_\theta = \frac{\theta}{2}, \quad f = 0.$$

Što se tiče gradijentne funkcije  $P$ , nju ćemo odrediti tako da uslov (4.31) bude zadovoljen.

Dakle, kada ovako odabrane generatorske funkcije zamenimo u (4.31),

4. Primena varijacionih metoda u ispitivanju svojstava  
rešenja jednačina koje određuju optimalni oblik štapa

---

dobijamo

$$-\frac{1}{2}\lambda\theta^2s - (\lambda\theta s + \Lambda\theta)\frac{\theta}{2} + \dot{s}\theta^2(\dot{s} - \dot{s} \cdot 0) + \dot{s}^2\dot{\theta}\left(\frac{\dot{\theta}}{2} - \dot{\theta} \cdot 0\right) - \dot{P} = 0,$$

odnosno

$$\dot{P} = -\lambda\theta^2s - \frac{\Lambda}{2}\theta^2 + \frac{3}{2}\dot{s}^2\theta^2. \quad (4.33)$$

Iz prvog integrala (4.32) imamo

$$\frac{3}{2}\dot{s}^2\theta^2 = C - \frac{\lambda}{2}\theta^2s - \frac{\Lambda}{2}\theta^2. \quad (4.34)$$

Kada (4.34) zamenimo u (4.33), dobijamo

$$\dot{P} = -\lambda\theta^2s - \frac{\Lambda}{2}\theta^2 + C - \frac{\lambda}{2}\theta^2s - \frac{\Lambda}{2}\theta^2,$$

odnosno

$$\dot{P} = C - \frac{3}{2}\lambda\theta^2s - \Lambda\theta^2. \quad (4.35)$$

Izrazimo sada  $\lambda\theta^2s$  i  $\Lambda\theta^2$  u nešto drugačijem obliku. Iz (4.22)<sub>1</sub> imamo

$$\lambda\theta^2s = \frac{3}{4}\dot{s}^2(1)\dot{\theta}^2(1) - \Lambda\theta^2 - \frac{3}{4}\left(\dot{s}^2\dot{\theta}\theta\right). \quad (4.36)$$

Sada, imajući u vidu (4.8), odnosno

$$\dot{s}^2(1)\dot{\theta}^2(1) = \frac{2}{3}C,$$

(4.36) postaje

$$\lambda\theta^2s = \frac{1}{2}C - \Lambda\theta^2 - \frac{3}{4}\left(\dot{s}^2\dot{\theta}\theta\right). \quad (4.37)$$

4. Primena varijacionih metoda u ispitivanju svojstava  
rešenja jednačina koje određuju optimalni oblik štapa

---

Vraćajući (4.37) u (4.35) dobijamo

$$\dot{P} = C - \frac{3}{2} \left( \frac{1}{2}C - \Lambda\theta^2 - \frac{3}{4} (\dot{s}^2\dot{\theta}\theta) \right) - \Lambda\theta^2,$$

ili, nakon sređivanja,

$$\dot{P} = \frac{1}{4}C + \frac{9}{8} (\dot{s}^2\dot{\theta}\theta) + \frac{1}{2}\Lambda\theta^2. \quad (4.38)$$

Da bismo još  $\Lambda\theta^2$  izrazili drugačije, podsetimo se da iz (3.17) sledi

$$\theta^2 = -\frac{1}{\lambda} (1 + 2\dot{s}\dot{\theta}^2),$$

tako da (4.38) postaje

$$\dot{P} = \frac{1}{4}C + \frac{9}{8} (\dot{s}^2\dot{\theta}\theta) - \frac{\Lambda}{2\lambda} (1 + 2\dot{s}\dot{\theta}^2).$$

Konačno, integraleći prethodnu jednačinu, za gradijentnu funkciju  $P$  dobijamo da je oblika

$$P = \frac{1}{4}Ct + \frac{9}{8}\dot{s}^2\dot{\theta}\theta - \frac{\Lambda}{2\lambda} (1 + 2\dot{s}\dot{\theta}^2) + C_p,$$

gde je  $C_p$  integraciona konstanta. Sada prvi integral (4.30) postaje

$$\dot{s}\dot{\theta}^2(s - \dot{s} \cdot 0) + \dot{s}^2\dot{\theta} \left( \frac{\theta}{2} - \dot{\theta} \cdot 0 \right) - P = const.,$$

nakon čijeg sređivanja dobijamo

$$8\dot{s}\dot{\theta}^2s - 5\dot{s}^2\dot{\theta}\theta + 4\frac{\Lambda}{\lambda} (1 + 2\dot{s}\dot{\theta}^2) - 2Ct = const.,$$

a to je upravo prvi integral (4.7)<sub>2</sub> kada odredimo vrednost konstante.

## Glava 5

# Numeričko rešavanje sistema jednačina koje određuju optimalni oblik štapa

Što se tiče numeričkog rešavanja sistema jednačina koje određuju optimalni oblik štapa, korišćemo standardne programe za rešenje dvotačkastih problema za sisteme običnih nelinearnih diferencijalnih jednačina prvog reda iz programskog paketa MathCad. Pri tome, korišćemo tzv. *shooting method*, odnosno *metod pogađanja* početnih vrednosti, a potom njihove korekcije prema rezultatima numeričke integracije za vreme  $t = 1$ .

Numeričku integraciju dobijenog Košijevog problema izvršićemo korišćenjem procedure Runge–Kuta s promenljivim korakom. Rezultate numeričke integracije, pre svega površinu poprečnog preseka optimalno oblikovanog štapa  $a(t)$ , prikazaćemo grafički. Takođe, prikazaćemo postkritično ponašanje optimalno oblikovanog štapa za jednu vrednost parametra opterećenja.

5. Numeričko rešavanje sistema jednačina koje određuju optimalni oblik štapa

---

Posmatrajmo sada naš sistem, tj. sistem

$$\dot{x}_1 = \frac{x_2}{a^2}, \quad \dot{x}_2 = -\lambda x_1 x_3 - \Lambda x_1, \quad \dot{x}_3 = -a, \quad (5.1)$$

gde je

$$x_1(1) = 0, \quad x_2(0) = 0, \quad x_3(1) = 0. \quad (5.2)$$

Koristeći promenljive (3.8), tj. promenljive

$$x_1 = \theta, \quad x_2 = a^2 \dot{\theta}, \quad x_3 = \int_t^1 a(\xi) d\xi,$$

kao i

$$x_4 = p_3 \quad \text{i} \quad x_5 = \Lambda,$$

sistem nelinearnih diferencijalnih jednačina (5.1), (5.2), uz (3.14) i (3.16), dobija oblik

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{x_2}{\left(\frac{2x_2^2}{1-x_4}\right)^{2/3}}; & \dot{x}_2 &= -\lambda x_1 x_3 - x_5 x_1; \\ \dot{x}_3 &= -\left(\frac{2x_2^2}{1-x_4}\right)^{1/3}; & \dot{x}_4 &= -\lambda x_1^2; & \dot{x}_5 &= 0, \end{aligned} \quad (5.3)$$

gde su granični uslovi

$$x_1(1) = 0, \quad x_2(0) = 0, \quad x_3(1) = 0, \quad x_4(0) = 0. \quad (5.4)$$

Što se tiče promenljive  $x_5 = \Lambda$ , nju ćemo odabrati tako da bude zadovoljen uslov

$$x_3(1) = \left( \int_t^1 a(\xi) d\xi \right) \Big|_{t=1} = 0.$$



5. Numeričko rešavanje sistema jednačina koje određuju optimalni oblik štapa

---

Pošto ćemo u rešavanju gornjeg sistema koristiti prve integrale (4.7) radi provere tačnosti, moramo napisati te prve integrale preko naših promenljivih  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$ . Prema tome, navedeni prvi integrali

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}\dot{s}^2\dot{\theta}^2 + \frac{\lambda}{2}\theta^2s + \frac{\Lambda}{2}\theta^2 &= C, \\ 8\dot{s}\dot{\theta}^2s - 5\dot{s}^2\dot{\theta}\theta + 4 + 4\frac{\Lambda}{\lambda}\left(1 + 2\dot{s}\dot{\theta}^2\right) &= 2Ct, \end{aligned}$$

gde je

$$C = \frac{1}{6} \left( \sqrt{\left(4\frac{\Lambda}{\lambda}\right)^2 + 12\left(1 + \frac{\Lambda}{\lambda}\right)\frac{1}{\dot{\theta}^2(1)} + 4\frac{\Lambda}{\lambda}} \right)^2 \dot{\theta}^2(1),$$

nakon pažljivog sređivanja, transformišu se u prve integrale sledećeg oblika

$$\frac{3}{2} \frac{x_2^2(t)}{\left(\frac{2x_2^2(t)}{1-x_4(t)}\right)^{2/3}} + \frac{\lambda}{2}x_1^2(t)x_3(t) + \frac{\Lambda}{2}x_1^2(t) = C, \quad (5.5)$$

$$-4(1 - x_4(t))x_3(t) - 5x_1(t)x_2(t) + 4 + 4\frac{\Lambda}{\lambda}x_4(t) = 2Ct,$$

gde je  $t \in (0, 1)$  i

$$C = \frac{1}{6} \left( \sqrt{\left(4\frac{\Lambda}{\lambda}\right)^2 + 12\left(1 + \frac{\Lambda}{\lambda}\right)\frac{1}{\dot{\theta}^2(1)} - 4\frac{\Lambda}{\lambda}} \right)^2 \dot{\theta}^2(1),$$

$$\dot{\theta}(1) = \frac{x_2(1)}{\left(\frac{2x_2^2(1)}{1-x_4(1)}\right)^{2/3}}.$$

Dakle, pri rešavanju sistema (5.3), (5.4), prvi integrali (5.5) služe nam da kontrolišemo tačnost integracije.

## 5.1 Analiza numeričkog rešenja za različite vrednosti parametra $\lambda$

U sledećoj tabeli su prikazani rezultati proračuna, pri čemu ističemo da smo sistem (5.3), (5.4) rešili sa  $\lambda$  kao datim parametrom. Sopstvena vrednost  $\Lambda = x_5$  je određena tako da važi

$$x_3(0) = 1,$$

tj. da je zapremina stuba  $w = 1$ .

$\lambda$	0	1	2	3	3.5	3.893026
$\Lambda$	3.289868	2.433148	1.583948	0.743068	0.326056	0

Tabela 1. Kritične vrednosti parametra opterećenja

Za vrednosti parametra  $\lambda$  koje su prikazane u Tabeli 1 prvi integrali (5.5) su konstante reda  $10^{-8}$ .

Na Slici 3 prikazan je optimalni poprečni presek za sledeće vrednosti parametra  $\lambda$ :

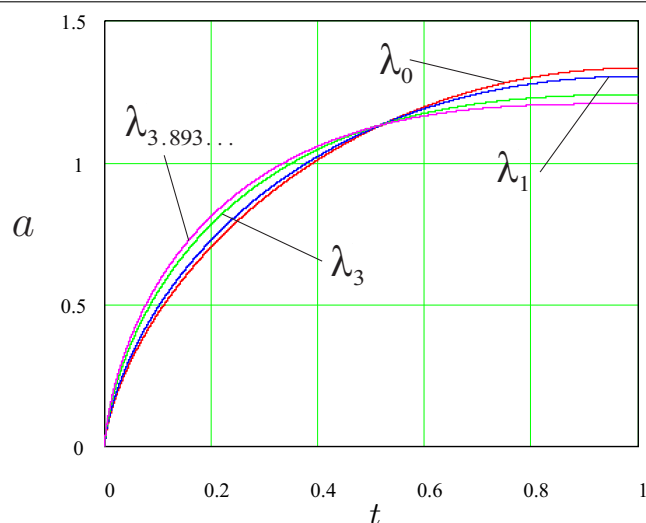
$$\lambda_0 = 0, \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_3 = 3, \quad \lambda = 3.893026,$$

dok su odgovarajuće vrednosti parametra  $\Lambda$  uzete iz Tabele 1. Ovde ćemo prokomentarisati dva specijalna slučaja koji su prikazani na Slici 3.

Prvi slučaj je za  $\lambda_0 = 0$ . Tada imamo

$$\Lambda = 3.289868133696451,$$

## 5. Numeričko rešavanje sistema jednačina koje određuju optimalni oblik štapa



Slika 3. Poprečni presek stuba za različite vrednosti parametra  $\lambda$

što vidimo iz Tabele 1. Pošto je ovde vrednost  $\lambda_0 = 0$ , tj. nemamo gravitacionu silu, ovaj slučaj predstavlja optimalni oblik lakog stuba, videti [7]. Tačna vrednost je

$$\Lambda = \frac{\pi^2}{3},$$

tako da se naš numerički rezultat prikazan u Tabeli 1 poklapa sa pravom vrednošću uz tačnost do na  $10^{-10}$ . Takođe, spomenimo da je analitički rezultat za laki optimalni stub

$$a(1) = \frac{4}{3},$$

dok smo mi numeričkim putem došli do rezultata

$$a(1) = 1.333435777857.$$

Drugi specijalni slučaj koji je prikazan na Slici 3 odgovara vrednosti

$$\lambda = 3.893026.$$

## 5. Numeričko rešavanje sistema jednačina koje određuju optimalni oblik štapa

---

Za takvu vrednost  $\lambda$  dobijamo da je pritisna sila  $\Lambda = 0$ , što znači da u tom slučaju zapravo nemamo pritisnu silu. Ovaj rezultat se poklapa sa rezultatom dobijenim u radu [8], u kojem je razmatran optimalni oblik obrnutog stuba koji je najotporniji na izvijanje.

### 5.2 Optimalni oblik stuba u postkritičnom stanju

Sada ćemo razmotriti ponašanje sistema diferencijalnih jednačina koje određuju optimalni oblik stub za one vrednosti parametra opterećenja koje su veće od  $\Lambda_{cr}$ . Naime, treba rešiti sistem jednačina

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \cos \Theta, & X(0) &= 0, & \dot{Y} &= \sin \Theta, & Y(0) &= 0, \\ \dot{\Theta} &= \frac{M}{(a^*)^2}, & \Theta(1) &= 0, \end{aligned} \tag{5.6}$$

$$\dot{M} = - \left( \lambda \int_t^1 a^*(\xi) d\xi + \Lambda \right) \sin \Theta, \quad M(0) = 0,$$

pri čemu je  $a^*$  dato sa (3.12), odnosno

$$a^* = \sqrt[3]{\frac{2p_1 x_2}{1 - p_3}}.$$

Rešenje sistema (5.6) je prikazano na Slici 4 za vrednosti

$$\lambda = \lambda_{cr}, \quad \Lambda = \Lambda_{cr} + 0.5,$$

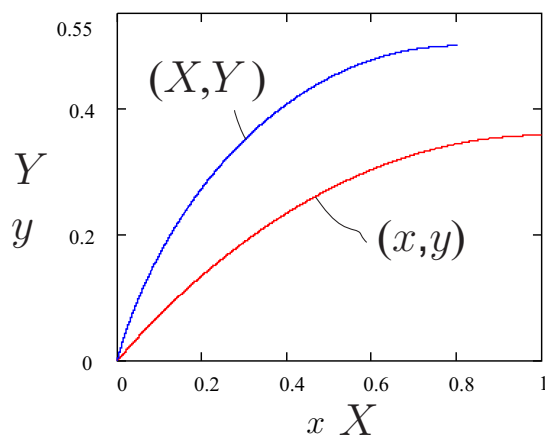
5. Numeričko rešavanje sistema jednačina koje određuju optimalni oblik štapa

---

gde je

$$\lambda_{cr} = 1 \quad \text{i} \quad \Lambda_{cr} = 2.433148,$$

videti Tabelu 1. Takođe, na Slici 4 je prikazan i oblik štapa  $x, y$  dobijen prema linearnoj teoriji, gde je  $\dot{y} = \theta$ , a  $\theta$  je sopstvena funkcija sistema (2.11), (2.12).



Slika 4. Postkritični oblik optimalno oblikovanih štapova  $X, Y$  i  $x = t, y$

## Glava 6

# Klauzenov problem sa smicanjem

### 6.1 Generalizacija problema određivanja optimalnog oblika štapa koji je najotporniji na izvijanje

U ovom delu disertacije izvršićemo generalizaciju problema određivanja optimalnog oblika štapa najotpornijeg na izvijanje. Proces optimizacije koji ćemo sprovesti ovde baziran je na Pontrjaginovom principu maksimuma, kao što je to bio slučaj i u prethodnom delu ovog rada (videti Teoremu 3.1 i objašnjenje nakon navedene teoreme). Ovde ćemo raditi s jednačinama ravnoteže za slučaj kada je štap napravljen od materijala takvog da može ispoljiti smicajne deformacije.

Pretpostavimo da se osa štapa u nedeformisanom, trivijalnom, položaju poklapa sa osom  $Ox$  Dekartovog pravouglog koordinatnog sistema  $xOy$ . Sma-

## 6. Klauzenov problem sa smicanjem

---

tramo da tačke na osi u deformisanom položaju pripadaju krivoj  $C$  koja nema samopreseka (tj. kriva  $C$  ne preseca samu sebe) i da se one mogu predstaviti na sledeći način:

$$\mathbf{r}(S) = x(S)\mathbf{e}_1 + y(S)\mathbf{e}_2,$$

pri čemu su  $x(S)$  i  $y(S)$  glatke funkcije, gde je  $S$  dužina luka ose štapa u nedeformisanom položaju i važi

$$S \in [0, L_{početno}],$$

gde je  $L_{početno}$  dužina štapa u nedeformisanom (početnom) stanju, dok smo sa  $\mathbf{e}_1$  i  $\mathbf{e}_2$  označili jedinične vektore uzduž  $x$  i  $y$  ose, respektivno. Imajući u vidu to da kriva  $C$  ne preseca samu sebe, zaključujemo da ona ima dobro definisanu tangentu u svakoj svojoj tački. Ako sa  $\mathbf{t}(S)$  označimo jedinični vektor tangente u tački  $(x, y)$ , tada je relacijama

$$\cos \theta(S) = \mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_1, \quad \sin \theta(S) = \mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_2,$$

određen jedinstven ugao  $\theta(S)$ .

U jednodimenzijskoj teoriji štapova<sup>8</sup> deformisana konfiguracija štapa je određena vektorskim funkcijama

$$\mathbf{r}(S) = x(S)\mathbf{e}_1 + y(S)\mathbf{e}_2 \quad \mathbf{b}(S), \quad \mathbf{a}(S), \quad S \in [0, L_{početno}],$$

gde  $\mathbf{r}(S)$  karakteriše tačke na osi štapa, a  $\mathbf{a}(S)$  i  $\mathbf{b}(S)$  definišu orijentaciju poprečnog preseka, gde pretpostavljamo da je  $\mathbf{b}(S)$  jedinične dužine i da leži u ravni  $xOy$ . S obzirom na to da u prirodnoj konfiguraciji nemamo napon,

---

<sup>8</sup>*One-dimensional theory of rods* ili *director theory of rods*; predstavlja jedan od pristupa matematičkoj teoriji štapova, u kojem se štap identifikuje sa osom štapa.

vektor  $\mathbf{b}(S)$  je u toj konfiguraciji, u kojoj nemamo opterećenje, ortogonalan na vektor  $\mathbf{e}_1$ . Neka je  $\varphi$  ugao rotacije poprečnog preseka, odnosno rotacije vektora  $\mathbf{b}(S)$ , tako da je

$$\mathbf{b}(S) = -\sin(\varphi)\mathbf{e}_1 + \cos(\varphi)\mathbf{e}_2.$$

Neka je

$$\mathbf{a}(S) = \cos(\varphi)\mathbf{e}_1 + \sin(\varphi)\mathbf{e}_2.$$

Vektor  $\mathbf{b}(S)$  leži u poprečnom preseku štapa u deformisanom položaju, dok je  $\mathbf{a}(S)$  ortogonalan na posmatrani poprečni presek, videti [7], [2].

Jednačine ravnoteže za horizontalnu  $H$  i vertikalnu  $V$  komponentu kontaktne sile i moment savijanja  $M$ , zajedno sa geometrijskim relacijama, imaju oblik

$$\begin{aligned} H' = 0, \quad V' = 0, \quad M' = -V(1 + \varepsilon) \cos \theta + H(1 + \varepsilon) \sin \theta, \\ x' = (1 + \varepsilon) \cos \theta, \quad y' = (1 + \varepsilon) \sin \theta, \end{aligned} \tag{6.1}$$

gde smo sa  $\varepsilon$  označili osnu deformaciju i gde je izvod promenljive po  $S$  označen sa  $(\cdot)'$ , odnosno

$$(\cdot)' = \frac{d}{dS}(\cdot).$$

U neopterećenoj konfiguraciji vektor položaja proizvoljne tačke je

$$\mathbf{R} = X\mathbf{e}_1,$$

dok je vektor položaja proizvoljne tačke u opterećenoj konfiguraciji dat sa

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2,$$



pa imamo da je

$$1 + \varepsilon = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dS} \right|.$$

Jednačinama (6.1) pridružujemo granične uslove

$$H = -F, \quad V = 0.$$

Sada su deformacije određene funkcijama  $\varphi'$ ,  $\xi(S)$  i  $\eta(S)$ , gde su funkcije  $\xi(S)$  i  $\eta(S)$  definisane sa

$$\mathbf{t} = \mathbf{r}' = (1 + \xi(S)) \mathbf{a} + \eta(S) \mathbf{b}.$$

Prema tome, konstitutivne jednačine imaju oblik

$$N = EA((1 + \varepsilon) \cos \gamma - 1), \quad Q = \frac{GA}{k_0}(1 + \varepsilon) \sin \gamma, \quad M = EI\varphi', \quad (6.2)$$

gde je  $k_0$  Timošenkov korekcionni faktor smicanja,  $EA$  je aksijalna krutost,  $GA$  i  $EI$  su krutosti pri smicanju i savijanju, redom, pri čemu je sa  $\gamma$  označen ugao smicanja, odnosno ugao između  $\mathbf{a}(S)$  i  $\mathbf{t}$ . Za komponente  $N$  i  $Q$  sile  $\mathbf{F}$  važi

$$\mathbf{F} = Q\mathbf{b} + N\mathbf{a} = -F\mathbf{e}_1,$$

odnosno

$$Q = F \sin \varphi, \quad N = -F \cos \varphi, \quad (6.3)$$

gde je

$$\gamma = \theta - \varphi. \quad (6.4)$$

Sada su deformacije  $\xi(S)$  i  $\eta(S)$ , uz (6.4), date sa

$$\xi = (1 + \varepsilon) \cos \gamma - 1, \quad \eta = (1 + \varepsilon) \sin \gamma.$$

Konstitutivne jednačine (6.2) proizlaze iz tzv. Rajznerove teorije štapa<sup>9</sup>, videti [2]. Prema tome, jednačine (6.2) odgovaraju jednačinama (6)–(8) iz rada [23] ili jednačinama (13)–(15) iz rada [17]. U radu [17] naše  $\varepsilon$  naziva se *izduženje (elongacija)*<sup>10</sup>, dok je izraz

$$(1 + \varepsilon) \cos \gamma - 1$$

nazvan *egzaktna osna deformacija*<sup>11</sup>. Granični slučajevi nerastegljivog štapa i štapa koji nije podložan smicanju slede kao specijalni slučajevi. U analizi koju ćemo sprovesti u nastavku pretpostavljamo da je osa stuba nerastegljiva, odnosno pretpostavljamo da je

$$\varepsilon = 0.$$

Tada, iz

$$x' = (1 + \varepsilon) \cos \theta,$$

zaključujemo da je  $x' = 1$ , tako da za male deformacije imamo

$$L_{početno} = L_{deformisano} = L.$$

Takođe, pretpostavljamo da je  $EI = EkA^2$ , gde je  $E$  modul elastičnosti, a  $k$  je konstanta koja zavisi od poprečnog preseka. Na primer, za kružni poprečni presek je  $k = 1/(4\pi)$ . Stoga, sistem jednačina koji opisuje male deformacije štapa glasi

$$M' = -F\theta, \quad x' = 1, \quad y' = \theta, \quad F\varphi = \frac{GA}{k_0}(\theta - \varphi), \quad M = EkA^2\varphi', \quad (6.5)$$

---

<sup>9</sup>Reissner theory of rods

<sup>10</sup>Elongation

<sup>11</sup>Exact axial strain

## 6. Klauzenov problem sa smicanjem

---

uz uslove

$$M(0) = M(L) = 0, \quad x(0) = 0, \quad y(0) = y(L) = 0. \quad (6.6)$$

Zapremina štapa je

$$W = \int_0^L A(S) dS.$$

Neka je  $A_c = \text{const.}$  površina poprečnog preseka,  $L$  dužina i  $F_c$  kritična sila izvijanja, koji su određeni kao rešenje graničnog problema (6.5), (6.6).

Primetimo da je zapremina štapa sada

$$W_c = A_c L.$$

Ako uvedemo bezdimenzijske veličine

$$\begin{aligned} t = \frac{S}{L}, \quad u = \frac{y}{L}, \quad \xi = \frac{x}{L}, \quad \lambda = \frac{F_c}{kEL^2}, \quad a = \frac{A}{L^2}, \\ m = \frac{M}{kEL^3}, \quad \beta = \frac{kk_0E}{G}, \quad w = \frac{W}{W_c}, \quad w_c = 1, \end{aligned} \quad (6.7)$$

tada iz (6.5)<sub>4</sub> jednostavnim računom dobijamo

$$\theta = \left(1 + \frac{\lambda\beta}{a}\right) \varphi.$$

Odgovarajući sistem jednačina onda postaje

$$\dot{m} = -\lambda \left(1 + \frac{\lambda\beta}{a}\right) \varphi, \quad \dot{\varphi} = \frac{m}{a^2}, \quad \dot{u} = \left(1 + \frac{\lambda\beta}{a}\right) \varphi, \quad \dot{\xi} = 1, \quad (6.8)$$

uz uslove

$$m(0) = m(1) = 0, \quad u(0) = u(1) = 0, \quad \xi(0) = 0, \quad (6.9)$$

gde, kao što smo i ranije naglasili, koristimo oznaku

$$(\dot{\cdot}) = \frac{d}{dt}(\cdot).$$

Vidimo da iz (6.8), kombinujući prve dve jednačine, dobijamo

$$(a^2\dot{\varphi})' + \lambda \left(1 + \frac{\lambda\beta}{a}\right) \varphi = 0, \quad (6.10)$$

pri čemu je

$$\lim_{t \rightarrow 0} a^2(t)\dot{\varphi}(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow 1} a^2(t)\dot{\varphi}(t) = 0. \quad (6.11)$$

Primetimo da granični problem (6.10), (6.11) pripada grupi nestandardnih problema, imajući u vidu činjenicu da se sopstvena vrednost  $\lambda$  pojavljuje u nelinearnom obliku. Dokazaćemo u nastavku da za klasu pozitivnih i neprekidnih funkcija  $a(t)$ ,  $t \in (0, 1)$ , koje predstavljaju površinu poprečnog preseka, postoje sopstvena vrednost  $\lambda$  i sopstvena funkcija  $\varphi$  koje zadovoljavaju sistem (6.10), (6.11).

**Lema 6.1.** Pretpostavimo da je  $a$  neprekidna i pozitivna funkcija i neka je  $\beta > 0$ . Tada postoji

$$\lambda > 0 \quad \text{i} \quad \varphi \in C^2((0, 1)),$$

tako da je sistem

$$(a^2\dot{\varphi})' + \lambda \left(1 + \frac{\lambda\beta}{a}\right) \varphi = 0,$$

uz uslove

$$\lim_{t \rightarrow 0} a^2(t)\dot{\varphi}(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow 1} a^2(t)\dot{\varphi}(t) = 0,$$

zadovoljen.

**Dokaz.** Razmotrimo sledeći granični problem

$$(a^2\varphi)' + \lambda_1 \left(1 + \frac{\Lambda\beta}{a}\right)\varphi = 0, \quad a^2(t)\dot{\varphi}(t) = 0, \quad \dot{\varphi}(0) = 0, \quad \dot{\varphi}(1) = 0,$$

pri čemo pretpostavljamo da je  $\Lambda > 0$  dato. Teorema 4.6.2, [36], obezbeđuje postojanje niza sopstvenih vrednosti, koje su ograničene odozdo i koje teže ka beskonačnosti. Neka je  $\widehat{\lambda}(\Lambda)$  prva pozitivna sopstvena vrednost, tj.  $\varphi$  nema nula u intervalu  $(0, 1)$ . Vrednost  $\widehat{\lambda}(0)$  je dobro definisana. Sada, na osnovu Teoreme o monotonosti za sopstvene vrednosti (Teorema 4.9.1), [36], povećavanjem vrednosti  $\Lambda$ , sopstvena vrednost  $\widehat{\lambda}(\Lambda)$  monotono se umanjuje. Prema tome, postoji  $\Lambda = \lambda$  tako da je  $\widehat{\lambda}(\lambda) = \lambda$ .  $\square$

Istaknimo da, u slučaju kada zanemarimo deformaciju smicanja, tj. kada je  $\beta = 0$ , sistem (6.10), (6.11) postaje

$$(a^2\dot{\varphi})' + \lambda\varphi = 0,$$

uz uslove

$$\lim_{t \rightarrow 0} a^2(t)\dot{\varphi}(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow 1} a^2(t)\dot{\varphi}(t) = 0.$$

Prema tome, dobijamo sistem koji predstavlja dobro poznate jednačine koje određuju opterećenje  $\lambda$  pri izvijanju stuba sa promenljivim poprečnim presekom.

## 6.2 Optimalni model štapa opisanog jednačinom (6.10)

Istaknimo ovde da se optimizacija oblika elastičnih štapova u odnosu na izvijanje može formulisati na jedan od sledećih načina:

1. Ako su date dužina i zapremina štapa, odrediti poprečni presek  $a(t) \in \mathcal{A}$  tako što će se maksimalno uvećati minimalna vrednost sopstvene vrednosti  $\lambda$  u diferencijalnoj jednačini (6.10), pod uslovom da bezdimenzijska zapremina štapa ima vrednost  $w = 1$ , odnosno

$$\lambda = \max_{a \in \mathcal{A}} \min_{\varphi} \frac{\int_0^1 a^2(t) \dot{\varphi}^2(t) dt}{\int_0^1 \varphi^2(t) dt},$$

uz uslov

$$\int_0^1 a(t) dt = 1,$$

pri čemu

$$\mathcal{A} = \{a : a \in C(0, 1), a \geq 0\}$$

predstavlja skup dopustivih funkcija površine poprečnog preseka.

2. Ako su date dužina štapa i sopstvena vrednost  $\lambda$ , odrediti  $a(t) \in \mathcal{A}$  tako da je zapremina štapa minimalna, odnosno

$$w_{optimalno} = \min_{a \in \mathcal{A}} \int_0^1 a(t) dt,$$

## 6. Klauzenov problem sa smicanjem

---

uz ograničenja

$$(a^2\dot{\varphi})' + \lambda \left(1 + \frac{\lambda\beta}{a}\right) \varphi = 0,$$
$$\lim_{t \rightarrow 0} a^2(t)\dot{\varphi}(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow 1} a^2(t)\dot{\varphi}(t) = 0.$$

Skup dopustivih funkcija je ovde dat sa

$$\mathcal{A} = \{a : a \text{ je deo po deo neprekidna na } (0, 1), a \geq 0\}.$$

Procedura 2, koja se inače koristi u mnogim konfiguracijama, biće korišćena i u nastavku naše analize.

Posmatrajmo štap dužine  $L_c$  i konstantnog poprečnog preseka  $A_c$ , koji je prikazan na Slici 5 a). Neka je štap izložen sili intenziteta  $F$  i na jednoj i na drugoj svojoj krajnjoj tački, gde vrednost  $F$  odgovara najmanjem opterećenju pri kojem dolazi do izvijanja štapa. Cilj nam je da odredimo poprečni presek  $A(S)$ , tako da će se štap pri datoj dužini  $L$  i sili intenziteta  $F$  izviti pod dejstvom sile  $F$ , videti Sliku 5 b), i tako da zapremina štapa bude minimalna, odnosno

$$w = w_{optimalno} = \min_{a \in \mathcal{A}} \int_0^1 a(t) dt,$$

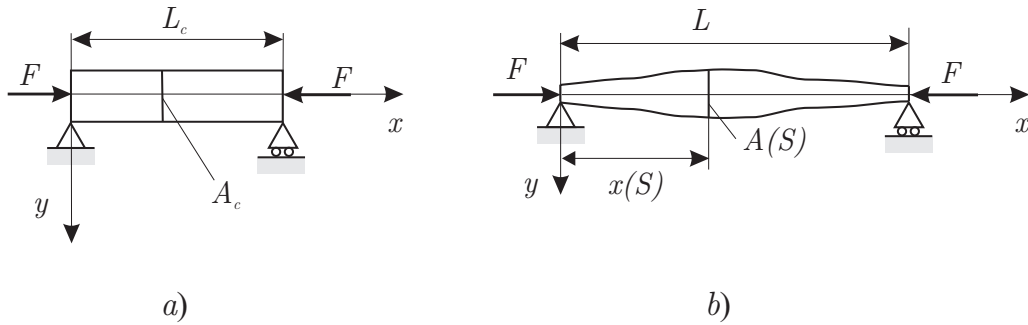
gde je

$$\int_0^L A(S) dS = A_c L_c = W_c.$$

Neka je

$$\varphi = x_1, \quad m = a^2\dot{\varphi} = x_2.$$

6. Klauzenov problem sa smicanjem



Slika 5. Štap sa konstantnim poprečnim presekom dužine  $L_c$  i štap sa optimalnim poprečnim presekom dužine  $L$

Sada se sistem (6.8), (6.9) transformiše u sistem

$$\dot{x}_1 = \frac{x_2}{a^2}, \quad \dot{x}_2 = -\lambda \left( 1 + \frac{\lambda\beta}{a} \right) x_1, \quad t \in (0, 1), \quad (6.12)$$

gde je

$$x_2(0) = 0, \quad x_2(1) = 0. \quad (6.13)$$

Sada možemo formulisati sledeći problem:

*Odrediti  $a(t) \in \mathcal{A}$  tako da je zapremina štapa minimalna, odnosno*

$$w = \min_{a \in \mathcal{A}} \int_0^1 a(t) dt,$$

*pri čemu važe diferencijalna ograničenja*

$$\dot{x}_1 = \frac{x_2}{a^2}, \quad \dot{x}_2 = -\lambda \left( 1 + \frac{\lambda\beta}{a} \right) x_1, \quad t \in (0, 1),$$

*uz uslove*

$$x_2(0) = 0, \quad x_2(1) = 0.$$



## 6. Klauzenov problem sa smicanjem

---

Pri rešavanju postavljenog problema korišćićemo Pontrjaginov princip maksimuma, [1], [34]. U ovom slučaju Hamiltonova funkcija (3.2) ima oblik

$$H = a + p_1 \frac{x_2}{a^2} - p_2 \lambda \left( 1 + \frac{\lambda \beta}{a} \right) x_1, \quad (6.14)$$

pri čemu su konjugovane promenljive  $p_1$  i  $p_2$  definisane sistemom

$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = p_2 \lambda \left( 1 + \frac{\lambda \beta}{a} \right), \quad \dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\frac{p_1}{a^2}, \quad (6.15)$$

uz uslove

$$p_1(0) = 0, \quad p_1(1) = 0.$$

Optimalno upravljanje, a u našem problemu je to  $a = a^*$ , zadovoljava uslov (3.6) za minimum, odnosno

$$\left. \frac{\partial H}{\partial a} \right|_{a^*} = 1 - 2p_1 \frac{x_2}{a^3} + x_1 p_2 \frac{\lambda^2 \beta}{a^2} = 0,$$

gde je  $a^*$  optimalni poprečni presek. Primećujemo da Hamiltonova funkcija  $H$  ne zavisi eksplicitno od  $t$ , odnosno

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0.$$

Prema tome, zaključujemo da je

$$H = \text{const.},$$

odnosno, na osnovu (6.14),

$$H = a + p_1 \frac{x_2}{a^2} - p_2 \lambda \left( 1 + \frac{\lambda \beta}{a} \right) x_1 = C, \quad C = \text{const.}$$

## 6. Klauzenov problem sa smicanjem

---

Ako uporedimo sisteme diferencijalnih jednačina (6.12) i (6.15), odnosno sisteme

$$\dot{x}_1 = \frac{x_2}{a^2}, \quad \dot{x}_2 = -\lambda \left(1 + \frac{\lambda\beta}{a}\right) x_1$$

i

$$\dot{p}_1 = p_2 \lambda \left(1 + \frac{\lambda\beta}{a}\right), \quad \dot{p}_2 = -\frac{p_1}{a^2},$$

uočićemo da je

$$p_1 = cx_2, \quad p_2 = -cx_1, \quad c = \text{const.} \quad (6.16)$$

Dakle, sada imamo

$$\begin{aligned} H &= a + c \frac{x_2^2}{a^2} + c\lambda \left(1 + \frac{\lambda\beta}{a}\right) x_1^2 = C, \\ \frac{\partial H}{\partial a} &= 1 - 2c \frac{x_2^2}{a^3} - cx_1^2 \frac{\lambda^2\beta}{a^2} = 0. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Ako diferenciramo  $\frac{\partial H}{\partial a}$  po  $a$ , dobijamo

$$\frac{\partial^2 H}{\partial a^2} = 6c \frac{x_2^2}{a^4} + 2cx_1^2 \frac{\lambda^2\beta}{a^3}.$$

Odavde zaključujemo da u (6.16) mora biti

$$c > 0,$$

jer, u suprotnom, potreban uslov za  $\min_{a \in \mathcal{A}} H$ , tj. uslov

$$\frac{\partial^2 H}{\partial a^2} > 0,$$

ne bi bio zadovoljen. Kako je  $c > 0$ , iz (6.17)<sub>1</sub> onda sledi da je i  $C > 0$ .

Primetimo da je

$$x_1(0) \neq 0.$$

Naime, ako bi bilo  $x_1(0) = 0$ , tada bismo, a imajući u vidu da je  $x_2(0) = 0$ , iz (6.17)<sub>1</sub>, za  $t = 0$ , dobili  $H = a = \text{const.}$ , što bi značilo da je površina poprečnog preseka zapravo konstantna. Prema tome, zaista je  $x_1(0) \neq 0$ . Znajući to, iz (6.17)<sub>2</sub>, za  $t = 0$ , dobijamo

$$cx_1^2(0) \frac{\lambda^2 \beta}{a^2(0)} = 1,$$

odakle zaključujemo da je

$$a(0) \neq 0, \tag{6.18}$$

što znači da poprečni presek, kada imamo smicanje, nije jednak nuli na svom kraju, što će i grafički biti prikazano kasnije (Slika 8).

Probajmo sada da poprečni presek  $a$  izrazimo eksplicitno preko ostalih promenljivih. Najpre primetimo da iz (6.17)<sub>2</sub> možemo izraziti  $c \frac{x_2^2}{a^2}$  na sledeći način

$$c \frac{x_2^2}{a^2} = \frac{a}{2} - \frac{1}{2} cx_1^2 \frac{\lambda^2 \beta}{a}.$$

Kada tako dobijen izraz zamenimo u (6.17)<sub>1</sub>, dobijamo

$$a + \frac{a}{2} - \frac{1}{2} cx_1^2 \frac{\lambda^2 \beta}{a} + c\lambda \left(1 + \frac{\lambda\beta}{a}\right) x_1^2 = C.$$

Nakon pažljivog sređivanja gore dobijene jednačine, dobijamo kvadratnu jednačinu po  $a$  oblika

$$\frac{3}{2}a^2 + a(\lambda cx_1^2 - C) + \frac{1}{2}c\lambda^2\beta x_1^2 = 0, \tag{6.19}$$

čija su rešenja

$$a_{1,2} = \frac{C - \lambda cx_1^2 \pm \sqrt{(C - \lambda cx_1^2)^2 - 3c\lambda^2\beta x_1^2}}{3}.$$

Imajući u vidu to da su i  $C$  i  $c$  pozitivne konstante, možemo izabrati da je  $C = c$ , tako da pozitivno rešenje kvadratne jednačine (6.19) onda postaje

$$a = C \frac{1 - \lambda x_1^2 + \sqrt{(1 - \lambda x_1^2)^2 - \frac{3}{C}\lambda^2\beta x_1^2}}{3}. \quad (6.20)$$

Sada, uzimajući u obzir ovako dobijen poprečni presek  $a$ , kompletan sistem jednačina, uzimajući u obzir i ugib  $u$ , videti jednačinu (6.8)<sub>3</sub>, postaje

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 9 \frac{x_2}{C^2 \left(1 - \lambda x_1^2 + \sqrt{(1 - \lambda x_1^2)^2 - \frac{3}{C}\lambda^2\beta x_1^2}\right)^2}, \\ \dot{x}_2 &= -\lambda \left(1 + 3 \frac{\lambda\beta}{C \left(1 - \lambda x_1^2 + \sqrt{(1 - \lambda x_1^2)^2 - \frac{3}{C}\lambda^2\beta x_1^2}\right)}\right) x_1, \\ \dot{u} &= \left(1 + 3 \frac{\lambda\beta}{C \left(1 - \lambda x_1^2 + \sqrt{(1 - \lambda x_1^2)^2 - \frac{3}{C}\lambda^2\beta x_1^2}\right)}\right) x_1, \\ \dot{C} &= 0, \end{aligned} \quad (6.21)$$

uz uslove

$$x_2(0) = 0, \quad x_2(1) = 0, \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 0. \quad (6.22)$$

# Glava 7

## Bifurkacija i postkritično ponašanje optimalno oblikovanog štapa

### 7.1 Nelinearne diferencijalne jednačine koje opisuju velike deformacije štapa

U ovom delu disertacije ispitaćemo ponašanje štapa u slučaju kada je opterećenje *preveliko*, tj. kada je opterećenje takvo da dolazi do izvijanja štapa. Pretpostavljamo da je štap, prikazan na Slici 5, optimizovan, kao i da je optimalna površina poprečnog preseka određena iz (6.20), tj. iz

$$a = C \frac{1 - \lambda x_1^2 + \sqrt{(1 - \lambda x_1^2)^2 - \frac{3}{C} \lambda^2 \beta x_1^2}}{3}.$$

## 7. Bifurkacija i postkritično ponašanje optimalno oblikovanog štapa

---

Izvešćemo nelinearne jednačine koje opisuju ponašanje štapa nakon njegovog izvijanja u specijalnom slučaju kada je elongacija jednaka nuli, tj. kada je  $\varepsilon = 0$ . Iz jednačina (6.2), (6.3) i uslova

$$\gamma = \theta - \varphi,$$

dobijamo

$$\sin(\theta - \varphi) = \sin \gamma = \frac{\lambda\beta}{a} \sin \varphi,$$

pri čemu smo koristili bezdimenzijske veličine (6.7). Primetimo da je maksimalna vrednost ugla smicanja  $\gamma = \frac{\pi}{2}$ , tako da je

$$\frac{\lambda\beta}{a} \sin \varphi < 1.$$

Imajući u vidu da je

$$\theta = \varphi + \gamma,$$

iz (6.1) dobijamo sledeći sistem nelinearnih diferencijalnih jednačina koje opisuju velike deformacije štapa

$$\dot{\varphi} = \frac{m}{a^2},$$

$$\dot{m} = -\lambda \left( \sin \varphi \sqrt{1 - \left( \frac{\lambda\beta}{a} \sin \varphi \right)^2} + \frac{\lambda\beta}{a} \sin \varphi \cos \varphi \right), \quad (7.1)$$

$$\dot{u} = \sin \varphi \sqrt{1 - \left( \frac{\lambda\beta}{a} \sin \varphi \right)^2} + \frac{\lambda\beta}{a} \sin \varphi \cos \varphi,$$

$$\dot{\xi} = \cos \varphi \sqrt{1 - \left( \frac{\lambda\beta}{a} \sin \varphi \right)^2} - \frac{\lambda\beta}{a} \sin^2 \varphi,$$

uz uslove

$$\varphi(0) = -\varphi(1), \quad m(0) = m(1) = 0, \quad u(0) = u(1) = 0, \quad \xi(0) = 0. \quad (7.2)$$

Sada ćemo (7.1)<sub>1,2</sub> napisati u operatorskoj formi

$$K(\lambda, \varphi) = (\dot{\varphi}a^2)' + \lambda \left( \sin \varphi \sqrt{1 - \left( \frac{\lambda\beta}{a} \sin \varphi \right)^2} + \frac{\lambda\beta}{a} \sin \varphi \cos \varphi \right) = 0, \quad (7.3)$$

pri čemu je

$$\dot{\varphi}(0) = 0, \quad \dot{\varphi}(1) = 0. \quad (7.4)$$

Imajući u vidu da poprečni presek  $a$  zadovoljava (6.17)<sub>1</sub>, zaključujemo da je

$$a(t) \neq 0, \quad t \in [0, 1].$$

Primetimo da sistem (7.1), (7.2), odnosno (7.3), (7.4), ima trivijalno rešenje

$$\varphi = m = u = 0, \quad \text{za svako } \lambda \in \mathbb{R}^+.$$

Prema tome, imamo

$$K(\lambda, 0) = 0,$$

za sve vrednosti parametra  $\lambda$ . Netrivijalno rešenje  $\varphi$  vodi do netrivijalnog rešenja sistema (7.1), (7.2). Prema tome, u nastavku ćemo ispitati bifurkacione tačke operatora  $K$ . Jedan od glavnih rezultata našeg rada je dat sledećom teoremom.

**Teorema 7.1** ([6]). Neka je poprečni presek  $a(t)$ ,  $t \in [0, 1]$ , dat sa (6.20),

odnosno

$$a = C \frac{1 - \lambda x_1^2 + \sqrt{(1 - \lambda x_1^2)^2 - \frac{3}{c} \lambda^2 \beta x_1^2}}{3}.$$

Tada je tačka

$$(\lambda_1, \varphi_1) \in \mathbb{R}^+ \times C^2((0, 1))$$

tačka bifurkacije operatora  $K$ , gde je

$$(\dot{\varphi}_1 a^2)' + \lambda_1 \varphi_1 \left(1 + \frac{\lambda_1 \beta}{a}\right) = 0, \quad (7.5)$$

uz uslove

$$\dot{\varphi}_1(0) = 0, \quad \dot{\varphi}_1(1) = 0.$$

U tački  $(\lambda_1, \varphi_1)$  imamo superkritičnu vilastu bifurkaciju<sup>12</sup>.

**Dokaz.** Koristićemo Ljapunov–Šmitovu redukciju, [28]. Prvo ćemo operator  $K(\lambda, \varphi)$  napisati u obliku

$$K(\lambda, \varphi) = B(\lambda)\varphi + N(\lambda, \varphi),$$

gde je  $B(\lambda) : C^2([0, 1]) \rightarrow C([0, 1])$  Frešev izvod operatora  $K(\lambda, \varphi)$  u tački  $(\lambda, 0)$ . U ovom slučaju je

$$B(\lambda)\varphi = (\dot{\varphi} a^2)' + \lambda \varphi \left(1 + \frac{\lambda \beta}{a}\right),$$

$$N(\lambda, \varphi) = \lambda \left( \sin \varphi \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda \beta}{a} \sin \varphi\right)^2} + \frac{\lambda \beta}{a} \sin \varphi \cos \varphi - \varphi \left(1 + \frac{\lambda \beta}{a}\right) \right).$$

---

<sup>12</sup>Supercritical pitchfork bifurcation (*superkritična ili natkritična vilasta bifurkacija*)



Uslov

$$B(\lambda_1)\varphi = 0 \quad (7.6)$$

vodi do zaključka da je  $\varphi = \varphi_1$ , koje je određeno u (6.12) i (7.5). Prema tome, potreban uslov da tačka  $(\lambda_1, 0)$  bude tačka bifurkacije operatora  $K(\lambda, \varphi)$  je zadovoljen. Primetimo da je  $B(\lambda)$  samo-adjungovani operator, odnosno

$$\langle B(\lambda)\varphi, q \rangle = \langle \varphi, B^*(\lambda)q \rangle,$$

gde je  $B(\lambda) = B^*(\lambda)$ . Dakle, sada iz

$$B^*(\lambda_1)q_1 = 0$$

zaključujemo da je  $q_1 = \varphi_1$ . Neka je

$$\Lambda = \lambda_1 + \Delta\lambda, \quad \Delta\lambda \ll 1.$$

Određićemo rešenje diferencijalne jednačine  $K(\Lambda, \varphi) = 0$ , odnosno jednačine

$$K(\Lambda, \varphi) = (\dot{\varphi}a^2) + \Lambda \left( \sin \varphi \sqrt{1 - \left( \frac{\Lambda\beta}{a} \sin \varphi \right)^2} + \frac{\Lambda\beta}{a} \sin \varphi \cos \varphi \right) = 0. \quad (7.7)$$

Najpre, primetimo svojstvo antisimetričnosti operatora  $K(\Lambda, \varphi)$ . Naime, imamo

$$\begin{aligned} K(\Lambda, -\varphi) &= ((-\varphi)a^2) + \\ &+ \Lambda \left( \sin(-\varphi) \sqrt{1 - \left( \frac{\Lambda\beta}{a} \sin(-\varphi) \right)^2} + \frac{\Lambda\beta}{a} \sin(-\varphi) \cos(-\varphi) \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -(\dot{\varphi}a^2)' + \Lambda \left( -\sin \varphi \sqrt{1 - \left(\frac{\Lambda\beta}{a} \sin \varphi\right)^2} - \frac{\Lambda\beta}{a} \sin \varphi \cos \varphi \right) = \\
 &= - \left( (\dot{\varphi}a^2)' + \Lambda \left( \sin \varphi \sqrt{1 - \left(\frac{\Lambda\beta}{a} \sin \varphi\right)^2} + \frac{\Lambda\beta}{a} \sin \varphi \cos \varphi \right) \right) = \\
 &= -K(\Lambda, \varphi).
 \end{aligned}$$

Dakle, uočavamo da važi

$$K(\Lambda, \varphi) = -K(\Lambda, -\varphi).$$

Prateći proceduru iz [21], napisaćemo rešenje jednačine (7.7) u obliku

$$\varphi = a\varphi_1 + u(a\varphi_1, \Delta\lambda).$$

Iz antisimetričnosti imamo da je

$$\varphi = a\varphi_1 + \hat{u}((a\varphi_1)^3, \Delta\lambda).$$

Bifurkaciona jednačina, uz  $q_1 = \varphi_1$ , postaje

$$\begin{aligned}
 f(a, \Delta\lambda) &= \Delta\lambda a \int_0^1 \left(1 + 2\frac{\lambda\beta}{a(t)}\right) \varphi_1^2(t) dt - \\
 & - \frac{a^3}{6} \int_0^1 \varphi_1^3(t) \left(1 + \frac{\lambda\beta}{a(t)}\right) dt + O(a^3\Delta\lambda, a\Delta\lambda^2, a^5) = 0,
 \end{aligned} \tag{7.8}$$

odnosno

$$f(a, \Delta\lambda) = c_1\Delta\lambda a - c_3a^3 + O(a^3\Delta\lambda, a\Delta\lambda^2, a^5) = 0, \tag{7.9}$$

pri čemu je

$$c_1 = \int_0^1 \left(1 + 2\frac{\lambda\beta}{a(t)}\right) \varphi_1^2(t) dt > 0,$$

$$c_3 = \frac{1}{6} \int_0^1 \varphi_1^3(t) \left(1 + \frac{\lambda\beta}{a(t)}\right) dt > 0,$$

kao i

$$f(a, \Delta\lambda) = \frac{\partial f(a, \Delta\lambda)}{\partial a} = \frac{\partial^2 f(a, \Delta\lambda)}{\partial a^2} = \frac{\partial f(a, \Delta\lambda)}{\partial \Delta\lambda} = 0, \quad (7.10)$$

za  $a = \Delta\lambda = 0$ . Sada, iz (7.9), (7.10) i [27], zaključujemo da je  $f$  kontaktno ekvivalentno<sup>13</sup> sa

$$\bar{f}(a, \Delta\lambda) = \Delta\lambda a - a^3,$$

što znači da se izrazi reda  $O(a^3\Delta\lambda, a\Delta\lambda^2, a^5)$  mogu zanemariti pri analizi broja rešenja jednačine (7.8), u blizini tačke bifurkacije  $(\lambda_1, 0)$ . Prema tome, analiziraćemo samo

$$\bar{f}(a, \Delta\lambda) = \Delta\lambda a - a^3 = 0. \quad (7.11)$$

Rešavajući jednačinu (7.11) po  $a$ , dobijamo korene

$$a_1 = 0 \quad \text{i} \quad a_{2,3} = \pm\sqrt{\Delta\lambda}.$$

Ovo nas vodi do dva netrivialna rešenja sistema (7.3), (7.4) u okolini tačke  $(\lambda_1, 0) \in \mathbb{R}^+ \times C^2([0, 1])$ , koja dobijamo iz (7.9),

$$\varphi = \pm\sqrt{\frac{\Delta\lambda c_1}{c_3}} \varphi_1.$$

Prema tome, (7.3), a samim tim i (7.1), (7.2), ispoljavaju superkritičnu vila-

---

<sup>13</sup>Contact equivalent

stu bifurkaciju u tački  $(\lambda, \varphi) = (\lambda_1, \varphi_1)$ . □

## 7.2 Varijacioni princip za velike deformacije optimalno oblikovanog štapa

U ovom odeljku izvešćemo varijacioni princip za sistem diferencijalnih jednačina (7.3), (7.4). Razmotrimo sledeći problem minimizacije: odrediti minimum funkcionala  $I$

$$\min_{\varphi \in M} I = \min_{\varphi \in M} \int_0^1 L(\dot{\varphi}, \varphi) dt,$$

gde je

$$M = \{\varphi : \varphi \in C^2((0, 1)), \dot{\varphi}(0) = 0, \dot{\varphi}(1) = 0\}, \quad (7.12)$$

dok je Lagranževa gustina data sa

$$L(\dot{\varphi}, \varphi) = \frac{\dot{\varphi}^2 a^2}{2} + \lambda \left[ \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda\beta}{a}\right)^2 \sin^2 \varphi}}{2} \cos \varphi + \right. \\ \left. + \frac{1 - \left(\frac{\lambda\beta}{a}\right)^2}{2\frac{\lambda\beta}{a}} \ln \left( \frac{\lambda\beta}{a} \cos \varphi + \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda\beta}{a}\right)^2 \sin^2 \varphi} \right) - \frac{\lambda\beta}{2a} \sin^2 \varphi \right]. \quad (7.13)$$

Lako se proverava da je uslov stacionarnosti

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

ekvivalentan sa

$$K(\lambda, \varphi) = (\dot{\varphi}a^2)' + \lambda \left( \sin \varphi \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda\beta}{a} \sin \varphi\right)^2} + \frac{\lambda\beta}{a} \sin \varphi \cos \varphi \right) = 0,$$

pri čemu je skup dopustivih funkcija dat sa (7.12). Naime, kako je

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \dot{\varphi}a^2,$$

to je

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{d}{dt} (\dot{\varphi}a^2) = (\dot{\varphi}a^2)'. \quad (7.14)$$

Dalje, pažljivim računom dobijamo da je

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -\lambda \left( \sin \varphi \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda\beta}{a}\right)^2 \sin^2 \varphi} + \frac{\lambda\beta}{a} \sin \varphi \cos \varphi \right), \quad (7.15)$$

tako da iz (7.14) i (7.15) zaista sledi da je  $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$  ekvivalentno sa  $K(\lambda, \varphi) = 0$ .

Primetimo da za  $\beta = 0$ , iz (7.13) dobijamo

$$L(\dot{\varphi}, \varphi) = \frac{\dot{\varphi}^2 a^2}{2} + \lambda \cos \varphi, \quad (7.16)$$

što predstavlja dobro poznat rezultat. Ovde skrećemo pažnju da drugi sabirak u uglastoj zagradi Lagranževe gustine  $L(\dot{\varphi}, \varphi)$ , u (7.13), za  $\beta = 0$  dobija oblik  $\frac{0}{0}$  (neodređen izraz), tako da, na primer, Lopitalovim pravilom, kada  $\beta \rightarrow 0$ , relativno jednostavno dobijamo

$$\begin{aligned}
 & \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{1 - \left(\frac{\lambda\beta}{a}\right)^2}{2\frac{\lambda\beta}{a}} \ln \left( \frac{\lambda\beta}{a} \cos \varphi + \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda\beta}{a}\right)^2 \sin^2 \varphi} \right) = \\
 & = \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{1 - \left(\frac{\lambda\beta}{a}\right)^2}{2\frac{\lambda}{a}} \cdot \frac{\ln \left( \frac{\lambda\beta}{a} \cos \varphi + \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda\beta}{a}\right)^2 \sin^2 \varphi} \right)}{\beta} = \\
 & = \frac{1}{2\frac{\lambda}{a}} \cdot \frac{\lambda}{a} \cos \varphi = \frac{1}{2} \cos \varphi,
 \end{aligned}$$

odakle lako dobijamo (7.16).

Takođe, vidimo da je Lagranževa gustina  $L(\dot{\varphi}, \varphi)$  parna po  $\varphi$ , pa je

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

neparno po  $\varphi$ . Dalje, dimenzija prostora nula<sup>14</sup> operatora  $B(\lambda_1)$  u (7.6) je konačna, odnosno, tačnije, jednaka je 1. Prema tome, na osnovu Teoreme 11.4 iz [11], za svako  $\varepsilon > 0$  dovoljno malo, postoji najmanje jedan par rešenja sistema (7.3), (7.4) u okolini tačke

$$(\lambda_1, \varphi = 0) \in \mathbb{R}^+ \times C^2((0, 1)),$$

sa normom  $\varepsilon$ . Ističemo da upravo izložena analiza predstavlja još jedan dokaz da je tačka  $(\lambda_1, \varphi = 0)$  tačka bifurkacije. Videli smo u Teoremi 7.1, Ljapunov–Šmitovom procedurom, da u datoj tački imamo superkritičnu vilastu bifurkaciju.

U delu koji sledi sistem (7.1), (7.2) rešićemo numerički.

---

<sup>14</sup>Null space ili kernel (jezgro)

## Glava 8

# Numeričko rešenje sistema nelinearnih diferencijalnih jednačina (7.1), (7.2)

Kao i u prvom delu disertacije, pri numeričkom rešavanju sistema jednačina koje određuju optimalni oblik štapa, koristićemo standardne programe za rešenje dvotačkastih problema za sisteme običnih nelinearnih diferencijalnih jednačina prvog reda iz programskog paketa MathCad. Numeričku integraciju pretpostavljenog Košijevog problema izvršićemo korišćenjem procedure Runge–Kuta s promenljivim korakom. Koristićemo prvi integral (6.17)<sub>1</sub> i uslov optimalnosti (6.17)<sub>2</sub> da bismo pratili tačnost numeričke integracije.

Rezultate numeričke integracije, pre svega površinu poprečnog preseka optimalno oblikovanog štapa  $a(t)$ , prikazaćemo grafički. Takođe, prikazaćemo grafički i prvi mod izvijanja optimalno oblikovanog štapa, što, na primer, nije prikazano u [26]. Osim toga, odredićemo i uštede materijala koje optimizacija

## 8. Numeričko rešenje sistema nelinearnih diferencijalnih jednačina (7.1), (7.2)

donosi za fiksne parametre opterećenja  $\lambda$ . U nastavku ćemo prvo razmotriti slučaj kada je  $\beta = 0$ , odnosno klasičan slučaj kada nemamo smicanje.

### 8.1 Slučaj kada je parametar smicanja $\beta = 0$

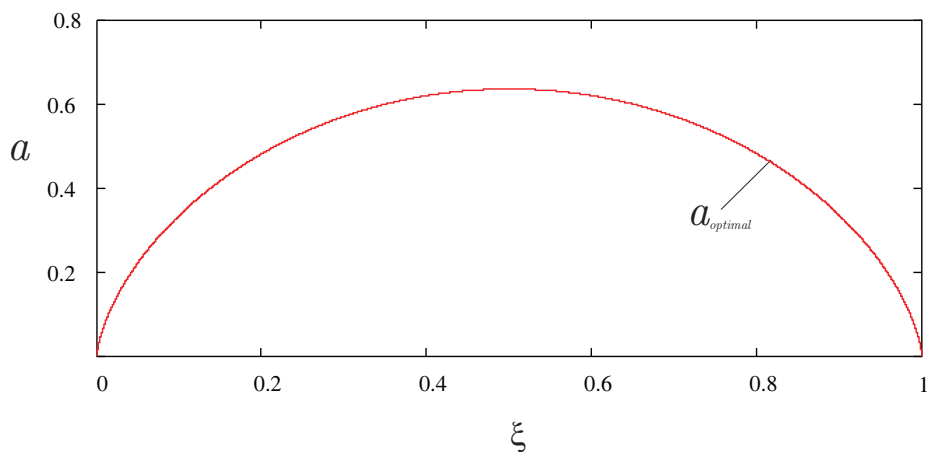
Za slučaj  $\beta = 0$ , sistem (6.21), (6.22) dobija oblik

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 9 \frac{x_2}{4C^2(1 - \lambda x_1^2)^2}, & \dot{x}_2 &= -\lambda x_1, \\ \dot{u} &= x_1, & \dot{C} &= 0, \end{aligned} \quad (8.1)$$

$$\dot{w} = \frac{2C(1 - \lambda x_1^2)}{3},$$

uz uslove

$$x_2(0) = 0, \quad x_2(1) = 0, \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 0, \quad w(0) = 0. \quad (8.2)$$



Slika 6. Poprečni presek optimalno oblikovanog štapa, pri sili izvijanja  $\lambda = 3$

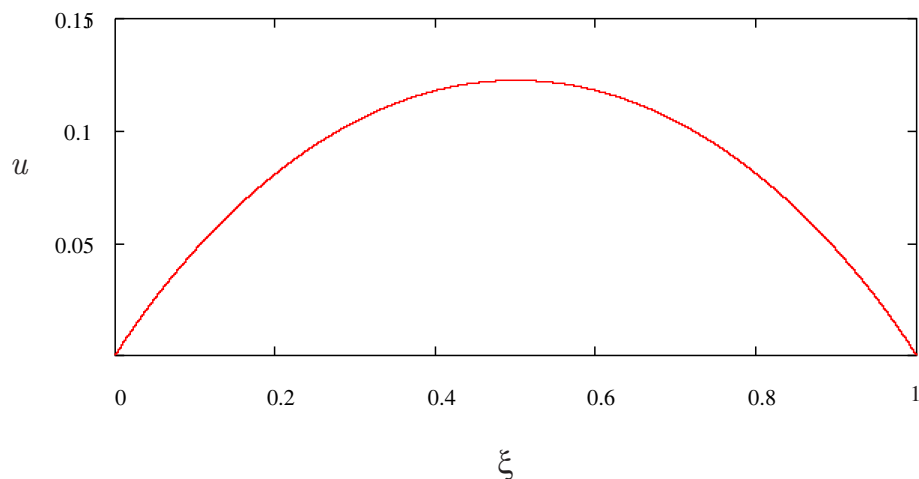


## 8. Numeričko rešenje sistema nelinearnih diferencijalnih jednačina (7.1), (7.2)

---

Sistem (8.1), (8.2) rešen je numerički. Rezultati su prikazani na Slikama 6 i 7. Na Slici 6 je prikazan poprečni presek optimalno oblikovanog štapa.

Na Slici 7 je prikazan prvi mod izvijanja optimalno oblikovanog štapa.



Slika 7. Prvi mod izvijanja optimalno oblikovanog štapa, pri sili izvijanja  $\lambda = 3$

Sada ćemo uporediti naše rezultate, koje smo dobili numerički, sa analitičkim rešenjem datim u parametarskom obliku, koje je prikazano u Kelerovom radu [26]. Naime, Keler je u navedenom radu razmatrao problem određivanja oblika stuba koji ima najveće opterećenje, odnosno koji je najotporniji na izvijanje, pretpostavljajući da su dužina i zapremina stuba date i pri čemu su svi poprečni preseki konveksni. Jednačina koja opisuje oblik stuba koji je najotporniji na izvijanje predstavljena je parametarski na sledeći način

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{\pi} \left( \psi - \frac{1}{2} \sin 2\psi \right) \\ a &= \frac{4}{3} \frac{V}{l} \sin^2 \psi, \end{aligned} \tag{8.3}$$

pri čemu je parametar  $\psi \in [0, \pi]$ . Razlika u površini poprečnog preseka koju

## 8. Numeričko rešenje sistema nelinearnih diferencijalnih jednačina (7.1), (7.2)

---

smo mi dobili numerički iz sistema (8.1), za  $\beta = 0$ , u odnosu na poprečni presek  $a$  iz (8.3) jeste reda  $10^{-8}$ .

Takođe, u istom radu, [26], za parametar opterećenja  $\lambda$  imamo izraz

$$\lambda = \frac{4\pi^2}{3} \left( \frac{w_{Kel}}{L} \right)^2, \quad (8.4)$$

gde smo sa  $w_{Kel}$  označili zapreminu dobijenu u tom radu. Naši numerički rezultati pokazuju da za vrednost parametra opterećenja

$$\lambda = 3,$$

imamo

$$w_{num} = 0.477464832,$$

gde smo sa  $w_{num}$  označili zapreminu dobijenu numeričkim putem. Sada, ako u (8.4) stavimo  $\lambda = 3$ , uzimajući da je  $L = 1$ , dobijamo

$$w_{Kel} = 0.477464829.$$

Prema tome, razlika u navedenim vrednostima zapremine je

$$w_{num} - w_{Kel} = 0.477464832 - 0.477464829 = 3 \cdot 10^{-9},$$

odakle vidimo da je postignuta velika tačnost u računu.

Za štap sa konstantnim poprečnim presekom, iz (6.10) i (6.11), za  $\beta = 0$  i  $\lambda = 3$  dobijamo

$$\left( a_{const}^2 \dot{\varphi} \right)' + 3\varphi = 0, \quad (8.5)$$

8. Numeričko rešenje sistema nelinearnih diferencijalnih  
jednačina (7.1), (7.2)

---

pri čemu je

$$\lim_{t \rightarrow 0} a_{const}^2(t) \dot{\varphi}(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow 1} a_{const}^2(t) \dot{\varphi}(t) = 0. \quad (8.6)$$

Ako napišemo homogenu diferencijalnu jednačinu drugog reda (8.5) u obliku

$$\ddot{\varphi} + \frac{3}{a_{const}^2} \varphi = 0,$$

lako dobijamo njeno rešenje

$$\varphi(t) = c_1 \cos \frac{\sqrt{3}t}{a_{const}} + c_2 \sin \frac{\sqrt{3}t}{a_{const}},$$

gde su  $c_1$  i  $c_2$  konstante. Iz graničnog uslova (8.6)<sub>1</sub> dobijamo

$$c_2 \frac{\sqrt{3}}{a_{const}} \cos \frac{\sqrt{3} \cdot 0}{a_{const}} = c_2 \frac{\sqrt{3}}{a_{const}} = 0,$$

odakle je  $c_2 = 0$ . Koristeći sada uslov (8.6)<sub>2</sub>, dobijamo

$$-c_1 \frac{\sqrt{3}}{a_{const}} \sin \frac{\sqrt{3}}{a_{const}} = 0.$$

Kako ne može biti i  $c_1 = 0$ , jer bismo tada imali trivijalno rešenje  $\varphi = 0$ , to mora biti

$$\sin \frac{\sqrt{3}}{a_{const}} = 0,$$

odakle je

$$\frac{\sqrt{3}}{a_{const}} = \pi,$$

odnosno

$$a_{const} = \frac{\sqrt{3}}{\pi} = 0.551328895.$$

## 8. Numeričko rešenje sistema nelinearnih diferencijalnih jednačina (7.1), (7.2)

---

Prema tome, zapremina štapa sa konstantnim poprečnim presekom je

$$w_{const} = 0.551328895.$$

Sada imamo

$$w_{const} - w_{num} = 0.551328895 - 0.477464832 = 0.073864063,$$

odakle zaključujemo da nam sprovedena optimizacija obezbeđuje uštedu u zapremini, odnosno u materijalu od kojeg je napravljen štap, koja iznosi približno

$$\frac{w_{const} - w_{num}}{w_{const}} \cdot 100 = \frac{0.073864063}{0.551328895} \cdot 100 = 13.4\%.$$

## 8.2 Slučaj kada je parametar smicanja $\beta \neq 0$

U nastavku razmotrićemo slučaj kada imamo smicanje štapa, odnosno slučaj kada je

$$\beta \neq 0.$$

Na primer, neka je  $\beta = 0.1$ . Rezultat je prikazan na Slici 8.

Primećujemo da optimalno oblikovani štap sa smicanjem ima poprečni presek takav da je na svojim krajevima različit od nule, a već smo i analitički zaključili da je

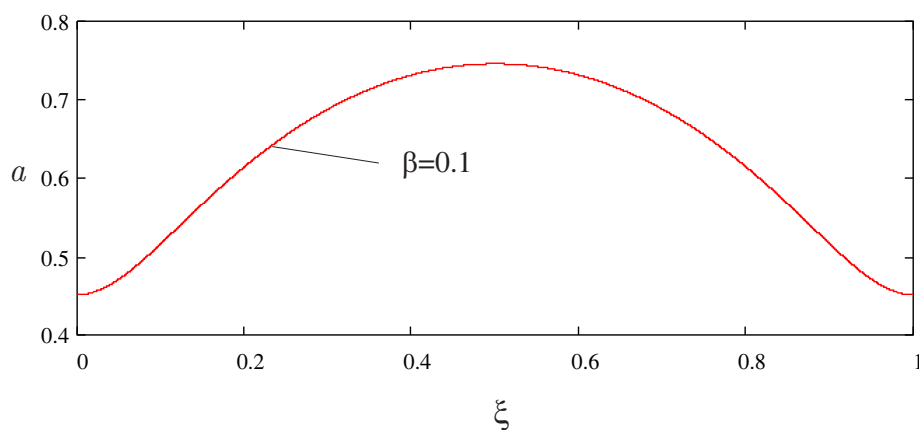
$$a(0) \neq 0,$$

8. Numeričko rešenje sistema nelinearnih diferencijalnih  
jednačina (7.1), (7.2)

---

videti (6.18). Numeričkim putem dobili smo da je konkretno

$$a(0) = 0.451307171.$$



Slika 8. Poprečni presek optimalno oblikovanog štapa sa smicanjem,  
pri sili izvijanja  $\lambda = 3$

Zapremina optimalno oblikovanog štapa je

$$w_{opt} = 0.629662003782512.$$

Na osnovu Slike 8 vidimo tendenciju da s povećanjem vrednosti parametra  $\beta$  oblik štapa postaje uniformniji, tj. postaje sve više jednoličan.

Ako sada posmatramo štap sa konstantnim poprečnim presekom, iz (6.10) i (6.11) dobijamo

$$(a_{const}^2 \dot{\varphi})' + \lambda \left( 1 + \frac{\lambda \beta}{a_{const}} \right) \varphi = 0, \quad (8.7)$$

8. Numeričko rešenje sistema nelinearnih diferencijalnih  
jednačina (7.1), (7.2)

---

pri čemu je

$$a_{const}^2(0)\dot{\varphi}(0) = 0, \quad a_{const}^2(1)\dot{\varphi}(1) = 0, \quad (8.8)$$

gde smo koristili činjenicu da je

$$a_{const}(0) = a_{const}(1) \neq 0.$$

Slično kao kada smo analizirali slučaj  $\beta = 0$ , tako i sada, ako napišemo homogenu diferencijalnu jednačinu drugog reda (8.7) u obliku

$$\ddot{\varphi} + \frac{\lambda}{a_{const}^2} \left( 1 + \frac{\lambda\beta}{a_{const}} \right) \varphi = 0,$$

bez mnogo problema dobijamo njeno rešenje

$$\varphi(t) = c_1 \cos \left( \frac{\sqrt{\lambda}}{a} \sqrt{1 + \frac{\lambda\beta}{a}} \cdot t \right) + c_2 \sin \left( \frac{\sqrt{\lambda}}{a} \sqrt{1 + \frac{\lambda\beta}{a}} \cdot t \right),$$

gde su  $c_1$  i  $c_2$  konstante. Iz graničnog uslova (8.8)<sub>1</sub> dobijamo

$$c_2 \frac{\sqrt{\lambda}}{a} \sqrt{1 + \frac{\lambda\beta}{a}} \cos \left( \frac{\sqrt{\lambda}}{a} \sqrt{1 + \frac{\lambda\beta}{a}} \cdot 0 \right) = c_2 \frac{\sqrt{\lambda}}{a} \sqrt{1 + \frac{\lambda\beta}{a}} = 0,$$

odakle je  $c_2 = 0$ . Koristeći sada uslov (8.8)<sub>2</sub>, dobijamo

$$-c_1 \frac{\sqrt{\lambda}}{a} \sqrt{1 + \frac{\lambda\beta}{a}} \sin \left( \frac{\sqrt{\lambda}}{a} \sqrt{1 + \frac{\lambda\beta}{a}} \right) = 0.$$

Slično kao i ranije, ako bi bilo  $c_1 = 0$ , tada bismo imali trivijalno rešenje  $\varphi = 0$ , tako da mora biti

$$\sin \left( \frac{\sqrt{\lambda}}{a} \sqrt{1 + \frac{\lambda\beta}{a}} \right) = 0,$$

8. Numeričko rešenje sistema nelinearnih diferencijalnih  
jednačina (7.1), (7.2)

---

odakle je

$$\frac{\sqrt{\lambda}}{a} \sqrt{1 + \frac{\lambda\beta}{a}} = \pi,$$

odnosno

$$\frac{\lambda}{a_{const}^2} \left(1 + \frac{\lambda\beta}{a_{const}}\right) = \pi^2. \quad (8.9)$$

Iz (8.9) dobijamo jednačinu trećeg stepena po  $a_{const}$ , oblika

$$\pi^2 a_{const}^3 - \lambda a_{const} - \lambda^2 \beta = 0.$$

Za  $\lambda = 3$  i  $\beta = 0.1$ , gornja jednačina postaje

$$\pi^2 a_{const}^3 - 3a_{const} - 0.9 = 0.$$

Dobijena kubna jednačina ima jedinstveno rešenje, koje iznosi

$$a_{const} = 0.6642609.$$

Sada je zapremina štapa sa konstantnim poprečnim presekom jednaka

$$w_{const} = 0.6642609.$$

Prema tome, kako je

$$w_{const} - w_{opt} = 0.6642609 - 0.629662003782512 = 0.0345989,$$

to je, približno,

$$\frac{w_{const} - w_{opt}}{w_{const}} \cdot 100 = \frac{0.0345989}{0.6642609} \cdot 100 = 5.2\%.$$

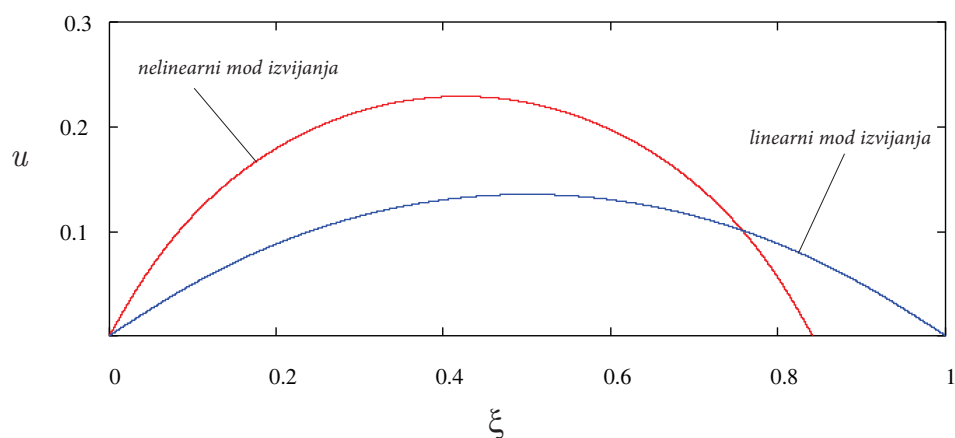
## 8. Numeričko rešenje sistema nelinearnih diferencijalnih jednačina (7.1), (7.2)

Dakle, optimizacija nam u ovom slučaju obezbeđuje nešto manju uštedu u materijalu od kojeg je napravljen štap, tj. samo 5.2%.

Sada ćemo opisati postkritično ponašanje štapa. Prema tome, uzećemo opet  $\lambda = 3$ ,  $\beta = 0.1$  i dobiti optimalni oblik poprečnog preseka štapa onako kako je to prikazano na Slici 8. Uzmimo sada

$$\Lambda = 3 + \Delta\lambda, \quad \text{gde je } \Delta\lambda = 0.25.$$

Postojanje rešenja za ovakav slučaj je obezbeđeno Teoremom 7.1. Numerički smo rešili nelinearni sistem (7.1), (7.2) za navedene vrednosti parametara  $\lambda = 3$  i  $\beta = 0.1$  i na Slici 9 prikazali rezultat za osu štapa, tj.  $(u, \xi)$ .



Slika 9. Optimalno oblikovani štap i štap u postkritičnom stanju, pri parametru opterećenja  $\lambda = 3.25$



# Literatura

- [1] Alekseev, V. M., Tikhomirov, V. M., Fomin, S. V. *Optimal Control*, Springer Science+Business Media, 1987.
- [2] Antman, S. S. *Nonlinear Problems of Elasticity*, Springer-Verlag, New York, 2005.
- [3] Atanackovic, T. M., Seyranian, A. P. *Application of Pontryagin's Principle to Bimodal Optimization Problems*, Struct Multidisc Optim, 2008, 25, 393–410.
- [4] Atanackovic, T. M. *Optimal Shape of a Column with Own Weight: Bi and Single Modal Optimization*, Meccanica, 2006, 41, 173–196.
- [5] Atanackovic, T. M. *On the Optimal Shape of a Compressed Rotating Rod*, Meccanica, 2004, 39, 147–157.
- [6] Atanackovic, T. M., Kacapor, E., Dolicanin, C. *On the Generalized Clausen Problem*, Z Angew Math Mech. 2022;e202100183. <https://doi.org/10.1002/zamm.202100183>.
- [7] Atanackovic, T. M. *Stability Theory of Elastic Rods*, World Scientific, Singapore, 1997.

- [8] Atanackovic, T. M. *Optimal Shape of a Strongest Inverted Column*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 2007, 203, 209–218.
- [9] Athans, M., Falb, P. L. *Optimal Control: An Introduction to the Theory and Its Applications*, Dover Publications, New York, USA, 2007.
- [10] Chiang, A. C. *Elements of Dynamic Optimization*, McGraw-Hill, New York, USA, 1992.
- [11] Chow, S. N., Hale, J. K. *Methods of Bifurcation Theory. Second Edition*, Springer, 2012.
- [12] Churchill, R. *Fourier series and boundary value problems*, McGraw-Hill, New York, USA, 1969.
- [13] Clausen, T. *Über die form architektonischer säulen*, Bull. cl, physico math. Acad. St. Pétersbourg, 1851, 9, 369–380.
- [14] Cox, S. J. *The Shape of the Ideal Column*, The Mathematical Intelligencer, 1992, 14, 16–24.
- [15] Cox, S. J., McCarthy, C. M. *The Shape of the Tallest Column*, SIAM J. Math. Anal., 1998, 29, No. 3, 547–554.
- [16] Crandall, M.G., Rabinowitz, P.H. *Bifurcation from simple eigenvalues*, Journal of Functional Analysis, 1971, 8, 321–340.
- [17] Emam, S., Lacarbonara, W. *Buckling and Postbuckling of Extensible, Shear-deformable Beams: Some Exact Solutions and New Insights*, International Journal of Non-Linear Mechanics 2021, 129(103667).

- [18] Euler, L. *Determinatio onerum, quae columnae gestare valent*, Leonhardi Euleri Opera Omnia 2, Vol. 17, C. Blanc and P. de Haller, eds., Orrel Füssli Turici, Switzerland, 1982, 232–251.
- [19] Euler, L. *Examen insignis paradoxi in theoria columnarum occurrentis*, Leonhardi Euleri Opera Omnia 2, Vol. 17, C. Blanc and P. de Haller, eds., Orrel Füssli Turici, Switzerland, 1982, 252–265.
- [20] Fempl, S. *Elementi varijacionog računa*, Građevinska knjiga, Beograd, 1965.
- [21] Golubitsky, M., Schaeffer, D. *Singularities and Groups in Bifurcation Theory, volume I*, Springer-Verlag, Berlin, 1985.
- [22] Haftka, R. T., Gurdal, Z. *Elements of Structural Optimization*, Kluwer, 1992.
- [23] Humer, A. *Exact Solutions for the Buckling and Post-buckling of Shear-deformable Beams*, Acta Mechanica, 2013, 224, 1493.
- [24] Kacapor, E., Atanackovic, T. M., Dolicanin, C. *Optimal Shape and First Integrals for Inverted Compressed Column*, Mathematics, 2020, 8, 334. <https://doi.org/10.3390/math8030334>.
- [25] Keller, J. B., Niordson, F. I. *The Tallest Column*, Journal of Mathematics and Mechanics, 1966, 16, 433–446.
- [26] Keller, J. B. *The Shape of the Strongest Column*, Arch. Rational Mech. Anal., 1960, 5, 275–285.
- [27] Keyfitz, B. L. *Classification of One-state-variable Bifurcation Problems up to Codimension Seven*, Dynamics and Stability of Systems, 1986, 1:1, 1–41.

- [28] Kielhöfer, H. *Bifurcation Theory: An Introduction with Applications to PDEs*, Springer-Verlag, New York, USA, 2004.
- [29] Lagrange, J. L. *Sur la figure des colonnes*. In *Oeuvres de Lagrange V. 2*, Serret, M. J. A., Gauthier-Villars, Paris, France, 1868, 125–170.
- [30] Malanowski, K., Maurer, H., Pickenhain, S. *Second-order Sufficient Conditions for State-constrained Optimal Control Problems*, Journal of Optimization theory and applications, 2004, 123, 595–617.
- [31] Mangasarian, O. L. *Sufficient Conditions for the Optimal Control of Nonlinear Systems*, SIAM Journal on Control, 1966, 4, 139–152.
- [32] McCarthy, C. M. *An Investigation of the Optimal Design of the Tallest Unloaded Column*, PhD Thesis, Rice University, Houston, Texas, USA, 1997.
- [33] McCarthy, C. M. *The Tallest Column – Optimality Revisited*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 1999, 101, 27–37.
- [34] Vujanovic, B. D., Atanackovic, T. M. *An Introduction to Modern Variational Techniques in Mechanics and Engineering*, Birkhäuser, Boston, USA, 2004.
- [35] Vujanovic, B. D., Spasic, D. T. *Metodi optimizacije*, FTN Izdavaštvo, Novi Sad, 2009.
- [36] Zettl, A. *Sturm–Liouville Theory, Volume 121*, American Mathematical Society, Mathematical Surveys and Monographs, Providence, Rhode Island, USA, 2005.

---

## Biografija

Enes Kačapor je rođen 21. 11. 1993. godine u Novom Pazaru, gde je završio osnovnu i srednju školu. Diplomirao je 2016. godine na Departmanu za matematičke nauke Državnog univerziteta u Novom Pazaru, studijski program Matematika. Master akademske studije je završio 2017. godine na Državnom univerzitetu u Novom Pazaru na Departmanu za matematičke nauke, studijski program Matematika. Doktorske akademske studije je upisao 2017. godine takođe na Departmanu za matematičke nauke Državnog univerziteta u Novom Pazaru, studijski program Matematika.

Enes Kačapor je radio na Državnom univerzitetu u Novom Pazaru kao demonstrator od 2016. do 2018. godine, zatim kao saradnik u nastavi od 2018. do 2019. godine, a od 2019. godine do danas radi kao asistent.

Pored toga, Enes Kačapor do sada ima objavljen jedan rad u časopisu kategorije M21a, jedan rad u časopisu kategorije M22, jedno predavanje po pozivu sa međunarodnog skupa štampano u celini (kategorija M31) i dva saopštenja sa međunarodnih skupova štampana u izvodu (kategorija M34), što ukupno čini 5 bibliografskih jedinica.

---

**Naučni radovi objavljeni u naučnim časopisima međunarodnog značaja (M20)**

1. Kacapor, E., Atanackovic, T. M., Dolicanin, C. *Optimal Shape and First Integrals for Inverted Compressed Column*, Mathematics, 2020, 8 (3), 334, <https://doi.org/10.3390/math8030334>, M21a
2. Atanackovic, T. M., Kacapor, E., Dolicanin, C. *On the Generalized Clausen Problem*, Z Angew Math Mech. 2022;e202100183 <https://doi.org/10.1002/zamm.202100183>, M22

**Zbornici međunarodnih naučnih skupova (M30)**

3. Kacapor, E. *The Strongest Inverted Compressed Column*, Kongres mladih matematičara u Novom Sadu, 3. 10. 2019 – 5. 10. 2019, Srpsko naučno matematičko društvo, Novi Sad, Srbija, M34
4. Dolicanin, C., Atanackovic, T. M., Kacapor, E. *A Boundary Value Problem Arising in Elastic Column Theory*, XXXII Международная научная конференция МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ТЕХНИКЕ И ТЕХНОЛОГИЯХ – ММТТ-32, 28. 10. 2019 – 1. 11. 2019, Белорусский национальный технический университет, Минск, Белорусија, M31
5. Kacapor, E., Atanackovic, T. M., Dolicanin, C. *On the Problem of Heavy Inverted Column with Concentrated Force at the End*, The 6th International Conference CONTEMPORARY PROBLEMS OF MATHEMATICS, MECHANICS AND INFORMATICS, September 21–22, 2020, State University of Novi Pazar, Novi Pazar, Serbia, M34