



УНИВЕРЗИТЕТ У НИШУ  
ГРАЂЕВИНСКО-АРХИТЕКТОНСКИ ФАКУЛТЕТ



Александра (Станко) Илић

**ВИШЕДИМЕНЗИОНАЛНИ ПРИСТУП  
ПРОРАЧУНУ МЕРОДАВНИХ ВЕЛИКИХ  
ВОДА НА СЕКТОРИМА РЕКА СА  
ПРИТОКАМА**

ДОКТОРСКА ДИСЕРТАЦИЈА

Ниш, 2021.





УНИВЕРЗИТЕТ У НИШУ  
ГРАЂЕВИНСКО-АРХИТЕКТОНСКИ ФАКУЛТЕТ



**Александра (Станко) Илић**

**ВИШЕДИМЕНЗИОНАЛНИ ПРИСТУП  
ПРОРАЧУНУ МЕРОДАВНИХ ВЕЛИКИХ  
ВОДА НА СЕКТОРИМА РЕКА СА  
ПРИТОКАМА**

ДОКТОРСКА ДИСЕРТАЦИЈА

Ниш, 2021.



UNIVERSITY OF NIŠ  
FACULTY OF CIVIL ENGINEERING AND  
ARCHITECTURE



**Aleksandra (Stanko) Ilić**

**A MULTIDIMENSIONAL APPROACH TO  
CALCULATION OF DESIGN FLOODS AT  
RIVER REACHES THAT INCLUDE  
TRIBUTARIES**

DOCTORAL DISSERTATION

Niš, 2021.

## Подаци о докторској дисертацији

Ментор:	Славиша Трајковић, редовни професор
Наслов:	Вишедимензионални приступ прорачуну меродавних великих вода на сектору река са притокама
Резиме:	<p>Планирање и пројектовање мера за адаптацију и заштиту од поплава заснива се на пробабилистичкој оцени параметара поплавног таласа. Дефинисање рачунског протока на рекама је неопходно за различите инжењерске потребе, где свакако предњачи потреба за одређивањем меродавних нивоа воде за димензионисање система за заштиту од поплава у који су укључени објекти попут насипа, зидова и слично. У ту сврху се усталила процедура усвајања највећег протока реке одређеног повратног периода (пик поплавног таласа) процењеног на основу историјских података о максималним годишњим протоцима. Са гледишта генезе поплавних таласа на речним деоницама које обухватају ушће притоке, дефинисањем вишедимензионалне зависности између параметара којима се описује хидрограм великих вода (у овом случају максимални проток) одређује се реалан простор у коме се одабрани параметри различитих комбинација вероватноће могу наћи. Стога, сложеност феномена настајања поплаве и његова оцена захтевају повезивање маргиналних расподела више варијабли са циљем дефинисања јединственог закона расподеле који поплаву описује.</p> <p>Основни циљ докторске дисертације је разрада процедуре која ће вероватноћу појаве поплаве на анализираном подручју дефинисати у вишедимензионалном простору вероватноћа и на тај начин одредити рачунске протоке за димензионисање система за заштиту од поплава у зони ушћа.</p> <p>Математички модели се базирају: 1) на дводимензионалној расподели вероватноћа (модел ПРОИЛ) и 2) на копула процедури (Архимедова фамилија копула) и прилагођавају се практичној примени у дводимензионалном простору расподеле вероватноћа. За релевантне случајне променљиве, разматрају се истовремене квантитативне карактеристике хидрограма поплавних таласа (проток воде) на главној реци и притоци.</p> <p>Студија случаја је сектор Дунава од границе Србије и Мађарске до Смедерева који обухвата три значајне притоке Драву, Тису и Саву.</p>
Научна област:	Грађевинарство
Научна дисциплина:	Заштита од поплава
Кључне речи:	Речна ушћа, модел ПРОИЛ, Архимедове копуле, рачунски проток великих вода, системи за заштиту од поплава

УДК:

627.51(043.3)  
556.54(043.3)  
519.87(043.3)

CERIF  
класификација:

T 220

Тип лиценце  
Креативне  
заједнице:

**CC BY-NC-ND**

## Data on Doctoral Dissertation

Doctoral Supervisor:	Slaviša Trajković
Title:	A multidimensional approach to calculation of design floods at river reaches that include tributaries
Abstract:	<p>Planning and design of flood mitigation and protection measures are based on a probabilistic assessment of flood wave parameters. Defining the design floods on rivers is necessary for various engineering needs, where the need to determine the design water levels in order to design flood protection system, which includes facilities such as embankments, walls and the like, is the most prominent. For this purpose, the procedure of adopting the maximum river flow of a certain return period (flood wave peak) estimated on the basis of historical data on maximum annual flows has been established.</p> <p>If river reach include tributaries, such an approach cannot be justified, because at least two flows (mainstem and tributary) have to be considered. Accordingly, the complexity of flood occurrence and its assessment require the linking of marginal distributions of multiple variables in order to define a unique distribution law that describes the flood.</p> <p>The main aim of doctoral dissertation is twofold: to elaborate a procedure that will define the flood exceedance probability in the analyzed area within a multidimensional probability space and to develop a methodology for defining flood coincidence in the mainstem reach with its main tributaries and thus determine design floods in order to design the flood control system in the confluence area.</p> <p>Mathematical models are based on (1) two-dimensional probability distribution (PROIL model) and (2) the copula function (Archimedean class of copulas), and fitted to a practical application in a two-dimensional probability distribution space. In case of random variables, simultaneous quantitative characteristics of flood wave (flood flow) hydrographs for the mainstem and a tributary are considered.</p> <p>The paper discusses the specific reach of the Danube, from the Hungarian-Serbian border to the city of Smederevo, which encompasses three significant tributaries – the Drava, the Tisa, and the Sava.</p>
Scientific Field:	Civil Engineering
Scientific Discipline:	Flood Control

Key Words: confluence, PROIL model, Archimedean copulas, design flood, flood control system

UDC: 627.51(043.3)  
556.54(043.3)  
519.87(043.3)

CERIF  
Classification: T 220

Creative  
Commons  
License Type: **CC BY-NC-ND**

*„Све може бити. Али једно не може: не може бити да ће посве и заувек нестати великих и умних а душевних људи који ће за божју љубав поодизати трајне грађевине, да би земља била лепша и човек на њој живео лакше и боље. Када би њих нестало, то би значило да ће и божја љубљв угаснути и нестати са света. То не може бити“ – Иво Андрић*

*Мом Војину, који ми је дао ветар у леђа и показао да у животу не постоје немогуће ствари!*



## ЗАХВАЛНИЦА

Пуно је година прошло и прегршт прича испричано на путу ка реализацији ове докторске дисертације. На том путу сам сусрела многе људе и не могу се речима свима захвалити, али ће се они у овим редовима препознати.

Посебну захвалност дугујем професорки др Оливери Потих која ме је увела у свет науке и показала правац, хвала до неба. Ништа мању захвалност дугујем професору др Стевану Прохаски који ме је својим саветима уверио да хидрологија није баук и који је помогао при формирању идеје и основних циљева дисертације.

Захваљујем се свом ментору, редовном професору др Славиши Трајковићу, који је „везао брод када је покушао да тоне“, хвала на подршци, свим саветима и лекцијама посебно везаним за публикување радова.

Хвала професорима др Драгану Милићевићу, др Милану Гоцићу и др Љубомиру Будинском који су својим сугестијама помогли уобличавању рукописа и прилога.

Хвала свим мојим пријатељима и сарадницима на корисним сугестијама из Института за водопривреду „Јарослав Черни“ и Грађевинско-архитектонског факултета Универзитета у Нишу.

Највећу захвалност дугујем својим родитељима и сестри на безусловној подршци и љубави, који нису одустали од мене када сам и сама хтела то да учиним. Такође, хвала Зорану који је ушао у мој живот када је било најтеже и оплеменио га на најлепши могући начин. Хвала од срца!

Докторска дисертација је резултат истраживања у оквиру научних пројеката Министарства просвете, науке и технолошког развоја ТР37005 „Оцена утицаја климатских промена на водне ресурсе Србије“ и ИИИ43007 „Истраживање климатских промена и њиховог утицаја на животну средину. Праћење утицаја, адаптација и ублажавање“. Овом приликом се захваљујем Министарству на пруженој финансијској помоћи.

У Нишу, марта 2021.

Александра Илић

## САДРЖАЈ

Списак слика: .....	I
Списак табела: .....	VI
Списак ознака: .....	IX
Списак скраћеница: .....	XIII
1 УВОД.....	1
1.1 Преглед примене вишедимензионалног приступа у хидрологији у свету и код нас .....	2
1.2 Циљ истраживања, примењена научна метода, нулта хипотеза.....	6
2 СТАТИСТИЧКО-ПРОБАБИЛИСТИЧКИ КАРАКТЕР ВЕЛИКИХ ВОДА У ПРИРОДНИМ ВОДОТОКОВИМА .....	9
2.1 Сектор река са притокама – вишедимензионални проблем .....	10
3 ВИШЕДИМЕНЗИОНАЛНЕ РАСПОДЕЛЕ СЛУЧАЈНО ПРОМЕНЉИВИХ .....	13
3.1 Маргиналне расподеле вероватноћа .....	15
3.1.1 Оцене параметара расподеле.....	16
3.1.1.1 Метод момената.....	16
3.1.1.2 Метода Л – момената (L-MOM).....	18
3.1.1.3 Метода максималне веродостојности (MLE).....	19
3.1.2 Емпиријске расподеле.....	20
3.1.3 Теоријске функције расподеле.....	21
3.1.3.1 Лог-нормална II расподела (ЛГН).....	21
3.1.3.2 Лог-нормална III расподела .....	23
3.1.3.3 Тропараметарска Гама расподела – Пирсон III .....	23
3.1.3.4 Лог Пирсон III расподела.....	24
3.1.3.5 Гумбелова двоструко експоненцијална расподела, расподела екстремних вредности ТИП 1 .....	27
3.1.3.6 Општа расподела екстремних вредности .....	29
3.1.4 Сумарни приказ оцена параметара расподела методом момената, методом Л-момената и максималне веродостојности .....	31

3.1.5	Тестови сагласности теоријских и емпиријских функција расподеле .....	38
3.1.5.1	Пирсонов $\chi^2$ тест.....	39
3.1.5.2	Непараметарски тест Колмогоров - Смирнов.....	40
3.1.5.3	Крамер - фон Мизес или $\rho\omega^2$ тест .....	41
3.1.5.4	Андерсон-Дарлинг тест.....	42
3.1.5.5	Корен средње квадратне грешке .....	42
3.2	ПРОИЛ МОДЕЛ .....	43
3.2.1	Трансформација променљивих – функција густине.....	44
3.2.2	Кумулативна функција расподеле .....	46
3.2.3	Прорачун вероватноће превазилажења.....	47
3.3	КОПУЛА МОДЕЛ.....	49
3.3.1	Математички опис копуле.....	51
3.3.2	График копула .....	52
3.3.3	Скларова теорема .....	54
3.3.4	Мере повезаности (зависности).....	55
3.3.5	Архимедова фамилија копула.....	56
3.3.5.1	Гумбелова копула .....	58
3.3.5.2	Клејтонова копула .....	59
3.3.5.3	Франкова копула.....	60
3.3.6	Копула преживљавања.....	61
3.3.7	Оцена квалитета прилагођавања копула узорку .....	63
3.3.8	Повратни период превазилажења.....	64
4	ПРАКТИЧНА ПРИМЕНА ВИШЕДИМЕНЗИОНАЛНИХ ФУНКЦИЈА РАСПОДЕЛЕ.....	66
4.1	Коинциденција великих вода реципијента и притоке (дводимензионални проблем) .....	67
4.2	Вишедимензионалне функције расподеле .....	71
5	ФОРМИРАЊЕ ВРЕМЕНСКИХ СЕРИЈА ЗА АНАЛИЗУ КОИНЦИДЕНЦИЈЕ ВЕЛИКИХ ВОДА НА ДЕОНИЦИ ДУНАВА ОД УЛАЗА У СРБИЈУ ДО СМЕДЕРЕВА . .....	75
5.1	Временске серије максималних и одговарајућих протока на хидролошким профилима РХМЗ-а .....	76

5.2	Тестирање хомогености временских серија.....	83
5.2.1	Параметарски тестови.....	83
5.2.1.1	Тестирање хипотезе о једнакости средњих вредности.....	84
5.2.1.2	Тестирање једнакости дисперзије два узорка.....	86
5.2.2	Непараметарски тестови.....	88
5.2.2.1	Мен – Витни, U - тест.....	88
5.3	Тестирање случајности временских серија.....	90
5.3.1	Тест квадрата узастопних разлика.....	91
5.3.2	Тест серијалне корелације првог реда (Тест Андерсона).....	92
5.4	Тестирање постојања изузетака у низовима података о протоцима.....	94
5.4.1	Анализа утицаја изузетака на маргиналне расподеле вероватноћа.....	98
6	РЕЗУЛТАТИ ПРОРАЧУНА ВИШЕДИМЕНЗИОНАЛНИХ ФУНКЦИЈА РАСПОДЕЛЕ ВЕРОВАТНОЋА НА ДЕОНИЦИ ДУНАВА ОД УЛАЗА У СРБИЈУ ДО СМЕДЕРЕВА.....	105
6.1	Маргиналне расподеле.....	105
6.1.1	Маргиналне вероватноће у моделу ПРОИЛ.....	105
6.1.2	Маргиналне вероватноће у моделу КОПУЛА.....	107
6.2	Дводимензионалне расподеле вероватноћа.....	112
6.2.1	Модел ПРОИЛ.....	112
6.2.2	КОПУЛА модел.....	117
7	ПРЕПОРУКЕ ЗА ПРИМЕНУ ДЕФИНИСАНИХ ВИШЕДИМЕНЗИОНАЛНИХ ФУНКЦИЈА РАСПОДЕЛЕ НА ДЕОНИЦИ ДУНАВА ОД УЛАЗА У СРБИЈУ ДО СМЕДЕРЕВА.....	123
7.1	Избор рачунских великих вода за потребе димензионисања линијских система за заштиту од поплава насекторима река са притокама.....	123
7.2	Вишедимензионалне коинциденције.....	130
7.3	Оцена статистичке значајности историјских поплава и идентификација изузетних догађаја („статистичких изузетака“ ).....	141
8	ЗАКЉУЧНА РАЗМАТРАЊА.....	151
8.1	Сумирање резултата истраживања.....	151
8.2	Осврт на предности и недостатке коришћених модела за вишедимензионалну анализу рачунских протока.....	158

8.3	Практичне користи од вишедимензионалног приступа прорачуну великих вода у зони ушћа реципијента и притока.....	159
8.4	Сумирање постигнутих циљева и научни допринос докторске дисертације ...	162
8.5	Правци даљег истраживања.....	163
ЛИТЕРАТУРА.....		165
БИОГРАФИЈА.....		174
ПРИЛОЗИ .....		175

---

СПИСАК СЛИКА:

---

Слика 2.1 Шематски приказ коинциденције поплавних таласа (Prohaska et al., 1999)...	11
Слика 3.1 Алгоритам за одређивање највероватнијих комбинација случајно променљивих у зони утицаја главне реке и притока.....	14
Слика 3.2 Густина Лог-нормалне расподеле максималних годишњих протока реке Дунав на х. с. Бездан за период 1931. – 2014. ....	22
Слика 3.3 Кумулативна функција Лог-нормалне расподеле вероватноћа максималних годишњих протока реке Дунав на х. с. Бездан за период 1931. – 2014. ....	23
Слика 3.4 Густина Лог-Пирсон III расподеле вероватноћа за параметре оцењене методама L-MOM и MLE, максималних годишњих протока реке Дунав на х. с. Бездан за период 1931. – 2014. ....	25
Слика 3.5 Кумулативна функција Лог-Пирсон III расподеле вероватноћа за параметре оцењене методама L-MOM и MLE и емпиријска расподела, максималних годишњих протока реке Дунав на х. с. Бездан за период 1931. – 2014. ....	26
Слика 3.6 Густина Гумбелове расподеле вероватноћа за параметре оцењене методама L-MOM и MLE, максималних годишњих протока реке Дунав на х. с. Бездан за период 1931. – 2014. ....	27
Слика 3.7 Кумулативна функција Гумбелове расподеле вероватноћа за параметре оцењене методама L-MOM и MLE и емпиријска расподела, максималних годишњих протока реке Дунав на х. с. Бездан за период 1931. – 2014. ....	28
Слика 3.8 Густина GEV расподеле вероватноћа за параметре оцењене методама L-MOM и MLE, максималних годишњих протока реке Дунав на х. с. Бездан за период 1931. – 2014. ....	30
Слика 3.9 Кумулативна функција GEV расподеле вероватноћа за параметре оцењене методама L-MOM и MLE и емпиријска расподела, максималних годишњих протока реке Дунав на х. с. Бездан за период 1931. – 2014. ....	30
Слика 3.10 Упоредни приказ теоријских и емпиријских функција расподела вероватноће максималних годишњих протока реке Дунав на профилу х. с. Бездан (период 1931.-2014.) .....	38
Слика 3.11 Функција густине и функција расподеле вероватноћа у моделу ПРОИЛ ....	48
Слика 3.12 Графичка интерпретација функције КОПУЛА .....	51

Слика 3.13 Графици W, M и P копуле.....	53
Слика 3.14 Контурни дијаграми W, M и P копуле.....	54
Слика 3.15 Гумбелова копула.....	59
Слика 3.16 Клејтонова копула.....	60
Слика 3.17 Франкова копула.....	61
Слика 3.18 Контурни дијаграми копула преживљавања: а) Гумбелова, б) Клејтонова, в) Франкова.....	62
Слика 4.1 Домен и критично поље вероватноће превазилажења.....	67
Слика 4.2 Шематски приказ деонице реципијента са ушћем притоке.....	67
Слика 4.3 Шематски приказ деонице низводно од ушћа притоке.....	68
Слика 4.4 Коинциденција максималног годишњег протока реципијента односно притоке узводно од ушћа и одговарајућег протока реципијента на излазном профилу за усвојену вероватноћу превазилажења.....	69
Слика 4.5 Коинциденција максималног годишњег протока реципијента низводно од ушћа и одговарајућег протока реципијента односно притокена узводно од ушћа за усвојену вероватноћу превазилажења.....	70
Слика 4.6 Шематски приказ конструкције вишедимензионалних зависности пикова поплавних таласа три улазна профила и излазног профила на сектору реципијента са две притоке.....	73
Слика 4.7 Вишедимензионална коинциденција поплавних таласа на сектору реке са две притоке.....	74
Слика 5.1 Слив Реке Дунав (ICPDR, 2015) и сектор од уласка у Србију до Смедерева.....	75
Слика 5.2 Прорачунска шема модела „Акумулације“ за деоницу Дунава од уласка у Србију до Великог Градишта.....	77
Слика 5.3 Комбинације хидролошких станица по чворовима за деоницу Дунава од уласка у Србију до Смедерева.....	78
Слика 5.4 Серије максималних годишњих и одговарајућих протока реке Дунав и притоке за ЧВОР 1, Комбинација 1.....	79
Слика 5.5 Серије максималних годишњих и одговарајућих протока реке Дунав и притоке за ЧВОР 1, Комбинација 2.....	79
Слика 5.6 Серије максималних годишњих и одговарајућих протока реке Дунав и притоке за ЧВОР 1, Комбинација 3.....	80
Слика 5.7 Серије максималних годишњих и одговарајућих протока реке Дунав и притоке за ЧВОР 2, Комбинација 1.....	80

Слика 5.8 Серије максималних годишњих и одговарајућих протока реке Дунав и притоке за ЧВОР 2, Комбинација 2.....	81
Слика 5.9 Серије максималних годишњих и одговарајућих протока реке Дунав и притоке за ЧВОР 2, Комбинација 3.....	81
Слика 5.10 Серије максималних годишњих и одговарајућих протока реке Дунав и притоке за ЧВОР 3, Комбинација 1.....	82
Слика 5.11 Серије максималних годишњих и одговарајућих протока реке Дунав и притоке за ЧВОР 3, Комбинација 2.....	82
Слика 5.12 Серије максималних годишњих и одговарајућих протока реке Дунав и притоке за ЧВОР 3, Комбинација 3.....	83
Слика 5.12 Оригинална и коригована Лог-Пирсон III расподела вероватноће и идентификација горњег изузетка у серији одговарајућих протока х.с. Доњи Михаљац за ЧВОР 1 у комбинацији 1 .....	100
Слика 5.13 Оригинална и коригована Лог-Пирсон III расподела вероватноће и идентификација горњег изузетка у серији максималних годишњих протока х.с. Доњи Михаљац за ЧВОР 1 у комбинацији 3 .....	100
Слика 5.14 Лог-Пирсон III расподела вероватноће за основни и кориговани низ као и низ без изузетка и идентификација доњег изузетка у серији одговарајућих протока х.с. Бездан за ЧВОР 1 у комбинацији 2 .....	102
Слика 5.15 Лог-Пирсон III расподела вероватноће за основни и кориговани низ као и низ без изузетка и идентификација доњег изузетка у серији одговарајућих протока х.с. Сланкамен за ЧВОР 2 у комбинацији 1 .....	102
Слика 5.16 Лог-Пирсон III расподела вероватноће за основни и кориговани низ као и низ без изузетка и идентификација доњег изузетка у серији одговарајућих протока х.с. Сента за ЧВОР 2 у комбинацији 1.....	103
Слика 5.17 Пирсон III расподела вероватноће за основни и кориговани низ као и низ без изузетка и идентификација доњег изузетка у серији одговарајућих протока х.с. Сремска Митровица за ЧВОР 3 у комбинацији 2.....	103
Слика 7.1 Рачунски максимални протоци за прорачун стогодишњег нивоа водног огледала дуж реке Дунав у зони ушће реке Драве (ЧВОР 1) .....	124
Слика 7.2 Рачунски максимални протоци за прорачун стогодишњег нивоа водног огледала дуж реке Дунав до ушћа реке Драве и уз Драву до профила х.с. Доњи Михаљац .....	125



Слика 7.3 Рачунски максимални протоци за прорачун стогодишњег нивоа водног огледала дуж реке Дунав у зони ушће реке Тисе (ЧВОР 2) .....	126
Слика 7.4 Рачунски максимални протоци за прорачун стогодишњег нивоа водног огледала дуж реке Дунав до ушћа реке Тисе и уз Тису до профила х.с. Сента.....	127
Слика 7.5 Рачунски максимални протоци за прорачун стогодишњег нивоа водног огледала дуж реке Дунав у зони ушће реке Саве (ЧВОР 3) .....	128
Слика 7.6 Рачунски максимални протоци за прорачун стогодишњег нивоа водног огледала дуж реке Дунав до ушћа реке Саве и уз Саву до профила х.с. Сремска Митровица .....	129
Слика 7.7 Деоница реке Дунав у Србији са означеним профилима хидролошких станица за анализу вишедимензионалне коинциденције поплавних таласа(Prohaska et al, 2008) .....	131
Слика 7.8 Комбинације пикова поплавних таласа на означеним профилима хидролошких станица за анализу вишедимензионалне коинциденције .....	132
Слика 7.9 Вишедимензионална коинциденција стогодишњег поплавног таласа Дунава у функцији вероватноћа појаве поплавних таласа на х.с Богојево, х.с Сента и х.с Сремска Митровица.....	133
Слика 8.10 Дводимензионална коинциденција полавних таласа на улазним профилима Дунава и Саве .....	134
Слика 7.11 Вишедимензионална коинциденција поплавних таласа различитог повратног периода на реци Дунав код Смедерева у функцији поплавних таласа на Дунаву код Богојева, Тиси код Сенте и Сави код Сремске Митровице .....	140
Слика 7.12 Подужни прикази неколико екстремних поплава дуж Дунава (Pekarova et al., 2019) .....	142
Слика 7.13 Положај емпиријских тачака из 1965. и 2006. године на графику вишедимензионалне коинциденције пикова поплавних таласа на Дунаву код Смедерева у функцији пикова поплавних таласа Дунава код Богојева, Тисе код Сенте и Саве код Сремске Митровице.....	145
Слика 7.14 Положај емпиријских тачака из 1932. и 1962. године на графику вишедимензионалне коинциденције пикова поплавних таласа на Дунаву код Смедерева у функцији пикова поплавних таласа Дунава код Богојева, Тисе код Сенте и Саве код Сремске Митровице.....	146
Слика 7.15 Интерполација пробабилистичке значајности одабраних поплава у сливу Дунава у Србији .....	147

Слика 7.16 Оцена статистичке значајности највећих регистрованих поплава на Дунаву 1965. и 2006. године моделом ПРОИЛ .....	149
Слика 7.17 Оцена статистичке значајности највећих регистрованих поплава на Дунаву 1965. и 2006. године КОПУЛА методом (MLE) .....	149
Слика 7.18 Оцена статистичке значајности највећих регистрованих поплава на Дунаву 1965. и 2006. године помоћу КОПУЛА (L-MOM).....	150
Слика 8.1 Највероватнији догађаји за ЧВОР 1 при дефинисаним комбинацијама меродавним за димензионисање система за заштиту од поплава.....	156
Слика 8.2 Највероватнији догађаји за ЧВОР 2 при дефинисаним комбинацијама меродавним за димензионисање система за заштиту од поплава.....	156
Слика 8.3 Највероватнији догађаји за ЧВОР 3 при дефинисаним комбинацијама меродавним за димензионисање система за заштиту од поплава.....	157
Слика 8.4 Вероватноћа превазилажења догађаја $QIN_{max1\%} - QTR_{max1\%}$ преко модела ПРОИЛ за ЧВОР1 .....	159
Слика 8.5 Вероватноћа превазилажења догађаја $QIN_{max1\%} - QTR_{max1\%}$ преко модела ПРОИЛ за ЧВОР2 .....	159
Слика 8.6 Вероватноћа превазилажења догађаја $QIN_{max1\%} - QTR_{max1\%}$ преко ..... модела ПРОИЛ за ЧВОР3 .....	160
Слика 8.7 Вероватноћа превазилажења догађаја $QIN_{max1\%} - QTR_{max1\%}$ преко КОПУЛЕ за ЧВОР1 .....	160
Слика 8.8 Вероватноћа превазилажења догађаја $QIN_{max1\%} - QTR_{max1\%}$ преко КОПУЛЕ за ЧВОР2 .....	160
Слика 8.9 Вероватноћа превазилажења догађаја $QIN_{max1\%} - QTR_{max1\%}$ преко КОПУЛЕ за ЧВОР3 .....	161

---

СПИСАК ТАБЕЛА:

---

Табела 3.1. Тачкасте оцене параметара расподела по метподи моменатау моделу ПРОИЛ.....	31
Табела 3.2. Тачкасте оцене параметара расподела по методи Л-момената у моделу КОПУЛА.....	33
Табела 3.3. Тачкасте оцене параметара расподела по методи Максималне веродостојности у моделу КОПУЛА .....	35
Табела 3.4 Квантили критеријума $\rho^2$ .....	41
Табела 3.5 Типови „Архимедових копула” .....	58
Слика 4.6 Шематски приказ конструкције вишедимензионалних зависности пикова поплавних таласа три улазна профила и излазног профила на сектору реципијента са две притоке .....	73
Слика 4.7 Вишедимензионална коинциденција поплавних таласа на сектору реке са две притоке.....	74
Табела 5.1 Преглед хидролошких станица и расположивих података о протоцима на Сектору Дунава од уласка у Србију до Смедерева и његовим притокама .....	78
Табела 5.2 Нормализован Z – тест временских серија за ЧВОР 1 .....	85
Табела 5.3 Нормализован Z – тест временских серија за ЧВОР 2 .....	85
Табела 5.4 Нормализован Z – тест временских серија за ЧВОР 3 .....	85
Табела 5.5 Фишеров тест дисперзије два узорка за ЧВОР 1 .....	86
Табела 5.6 Фишеров тест дисперзије два узорка за ЧВОР 2 .....	86
Табела 5.7 Фишеров тест дисперзије два узорка за ЧВОР 3 .....	87
Табела 5.8 Мен – Витни тест за ЧВОР 1.....	89
Табела 5.9 Мен – Витни тест за ЧВОР 2.....	90
Табела 5.10 Мен – Витни тест за ЧВОР 3.....	90
Табела 5.11 Тест случајности за ЧВОР 1 .....	91
Табела 5.12 Тест случајности за ЧВОР 2.....	92
Табела 5.13 Тест случајности за ЧВОР 3.....	92
Табела 5.14 Тест серијалне корелације првог реда за ЧВОР 1 .....	93
Табела 5.15 Тест серијалне корелације првог реда за ЧВОР 2.....	94
Табела 5.16 Тест серијалне корелације првог реда за ЧВОР 3 .....	94

Табела 5.17 Грубс и Бек тест за ЧВОР 1 .....	96
Табела 5.18 Грубс и Бек тест за ЧВОР 2 .....	96
Табела 5.19 Грубс и Бек тест за ЧВОР 3 .....	97
Табела 5.20 Идентификовани изузеци у серијама анализираних протока .....	98
Табела 5.21 Оригинални и кориговани статистички параметри серија протока са идентификованим горњим изузецима .....	99
Табела 5.22 Оригинални и кориговани статистички параметри серија протока са идентификованим доњим изузецима .....	101
Табела 6.1 Усвојене маргиналне вероватноће за ЧВОР1 у моделу ПРОИЛ .....	105
Табела 6.2 Усвојене маргиналне вероватноће за ЧВОР2 у моделу ПРОИЛ .....	106
Табела 6.3 Усвојене маргиналне вероватноће за ЧВОР3 у моделу ПРОИЛ .....	106
Табела 6.4 Преглед тестираних теоријских расподела у КОПУЛА моделу .....	108
Табела 6.5 Усвојене маргиналне вероватноће за КОПУЛЕ у ЧВОРy1 чији су параметри расподела оцењени методом максималне веродостојности (MLE) .....	109
Табела 6.6 Усвојене маргиналне вероватноће за КОПУЛЕ у ЧВОРy2 чији су параметри расподела оцењени методом максималне веродостојности (MLE) .....	109
Табела 6.8 Усвојене маргиналне вероватноће за КОПУЛЕ у ЧВОРy1 чији су параметри расподела оцењени методом Л-момената (L-MOM) .....	110
Табела 6.9 Усвојене маргиналне вероватноће за КОПУЛЕ у ЧВОРy2 чији су параметри расподела оцењени методом Л-момената (L-MOM) .....	111
Табела 6.10 Усвојене маргиналне вероватноће за КОПУЛЕ у ЧВОРy3 чији су параметри расподела оцењени методом Л-момената (L-MOM) .....	111
Табела 6.11 Резултати оцене статистичке значајности разматраних комбинација променљивих за ЧВОР1 .....	113
Табела 6.12 Резултати оцене статистичке значајности разматраних комбинација променљивих за ЧВОР2 .....	113
Табела 6.13 Резултати оцене статистичке значајности разматраних комбинација променљивих за ЧВОР3 .....	114
Табела 6.14 Рачунски протоци за различите вероватноће коинциденције великих вода Дунава и реке Драве - ЧВОР 1(ПРОИЛ) .....	115
Табела 6.15 Рачунски протоци за различите вероватноће коинциденције великих вода Дунава и реке Тисе - ЧВОР 2 (ПРОИЛ) .....	115
Табела 6.16 Рачунски протоци за различите вероватноће коинциденције великих вода Дунава и реке Саве - ЧВОР 3 (ПРОИЛ) .....	116

Табела 6.17 Коефицијенти корелације и параметри копула.....	117
Табела 6.18 Резултати оцене квалитета прилагођавања копула за ЧВОР 1.....	118
Табела 6.19 Резултати оцене квалитета прилагођавања копула за ЧВОР 2.....	119
Табела 6.20 Резултати оцене квалитета прилагођавања копула за ЧВОР 3.....	119
Табела 6.21 Рачунски протоци за различите вероватноће превазилажења великих вода на ушћу Дунава и реке Драве - ЧВОР 1 (КОПУЛА) .....	120
Табела 6.22 Рачунски протоци за различите вероватноће превазилажења великих вода на ушћу Дунава и реке Тисе - ЧВОР 2 (КОПУЛА) .....	121
Табела 6.23 Рачунски протоци за различите вероватноће превазилажења великих вода на ушћу Дунава и реке Саве - ЧВОР 3 (КОПУЛА) .....	121
Табела 7.1 Маргиналне вероватноће за прорачун вишедимензионалне коинциденције пикова поплавних таласа на деоници Дунава од Богојева до Панчева .....	131
Табела 7.2 Прорачун коинциденције на деоници Дунава од х. с. Богојево до х. с. Смедерево за вероватноћу превазилажења $\Phi=1\%$ .....	135
Табела 7.3 Прорачун коинциденције на деоници Дунава од х. с. Богојево до х. с. Смедерево за вероватноћу превазилажења $\Phi=0,1\%$ .....	136
Табела 7.4 Прорачун коинциденције на деоници Дунава од х. с. Богојево до х. с. Смедерево за вероватноћу превазилажења $\Phi=2\%$ .....	137
Табела 7.5 Прорачун коинциденције на деоници Дунава од х. с. Богојево до х. с. Смедерево за вероватноћу превазилажења $\Phi=5\%$ .....	138
Табела 7.6 Прорачун коинциденције на деоници Дунава од х. с. Богојево до х. с. Смедерево за вероватноћу превазилажења $\Phi=50\%$ .....	139
Табела 7.7 Највећи регистровани пикови поплавних таласа на Дунаву, Тиси и Сави и њихове вероватноће појаве .....	142
Табела 7.8 Приказ резултата графичке интерполације пробабилистичке значајности одабраних поплава у сливу Дунава у Србији.....	144
Табела 7.9 Резултати оцене статистичке значајности разматраних регистрованих поплава на делу слива Дунава на територији Србије.....	147
Табела 7.10 Највећи регистровани пик поплавног таласа на Дунаву и одговарајући на Тиси и његове вероватноће појаве, 1965. године .....	148
Табела 7.11 Највећи регистровани пик поплавног таласа на Дунаву и одговарајући на Сави и његове вероватноће појаве, 2006. године.....	148
Табела 8.1 Упоредни приказ координата највероватнијих догађаја у моделима ПРОИЛ и КОПУЛА са процентуалним разликама.....	154

---

СПИСАК ОЗНАКА:

---

$Q_{max}$  – максимална вредност протока

$W$  – запремина поплавног таласа изнад унапред утврђеног прага

$T$  – трајање поплавних таласа изнад задатог прага

$\tau_{max}$  – временска разлика између максималних протока у две различите тачке водотока

$X, Y$  – случајно променљиве

$X_{max}, Y_{max}$  – максималне вредности случајно променљивих

$X_{odg}, Y_{odg}$  – одговарајућа вредност случајно променљивих у дводимензионалној дистрибуцији када друга случајна променљива има максималну вредност

$F(x)$  – функција расподеле случајно променљиве  $X$

$p$  – вероватноћа појаве

$P(x)$  – функција расподеле вероватноће случајно променљиве  $X$

$T(x)$  – повратни период случајно променљиве  $X$

$E(x), \mu$  – математичко очекивање, средња вредност случајно променљиве  $X$  (популација)

$\bar{X}$  – средња вредност случајно променљиве  $X$  (узорак)

$\mu'_1, \mu'_2$  – први и други обични моменти

$m'_1, m'_2$  – непристрасне оцене првог и другог обичног момента

$D(x)$  – варијанса, дисперзија случајно променљиве  $X$  (популација)

$S^2$  - варијанса, дисперзија случајно променљиве  $X$  (узорак)

$m_2$  – непристрасна оцена

$\sigma$  – средње квадратно одступање, стандардна девијација случајно променљиве  $X$  (популација)

$S$  - средње квадратно одступање, стандардна девијација случајно променљиве  $X$  (узорак)

$Cv$  – коефицијент варијације

$\gamma_1$  – коефицијент асиметрије (популација)

$Cs$  – коефицијент асиметрије (узорак)

$b_0, b_1$  – вероватносно тежински коефицијенти

$\lambda_1$  - први Л-момент, средња вредност

$\lambda_2$  - други Л-момент, мера дисперзије око средње вредности узорка

$\tau_2$  – коефицијент варијације преко Л-момената  
 $\tau_3$  – коефицијент асиметрије преко Л-момената  
 $\tau_2$  – коефицијент скошености преко Л-момената  
 $N$  – обим серије (узорка)  
 $\Theta$  – вредност параметра којим се дефинише максимум функције веродостојности  
 $L(\Theta)$  – функција веродостојности  
 $\hat{\Theta}$  – оцена максималне веродостојности параметра  $\Theta$   
 $F_N(x)$  – емпиријска функција расподеле уређеног низа случајно променљиве  $X$   
 $p^*$  – учесталост догађаја  $X$   
 $m$  – број догађаја  $X$  у узорку  
 $\Phi_N(X)$  – емпиријска функција превазилажења  
 $f(x)$  – функција густине вероватноће  
 $F(y)$  – функција густине расподеле  
 $Z_i$  – стандардизована променљива  
 $K_N$  – фактор фреквенце  
 $\omega$  – параметар облика  
 $\beta$  – параметар размере  
 $\xi$  – параметар локације  
 $\Gamma(\cdot)$  – Гама функција  
 $\gamma(\cdot, \cdot)$  – одозго комплетна Гама функција  
 $\gamma$  – Ојлерова константа  
 $\pi$  – Лудолфов број  
 $erf(t)$  – функција грешке  
 $erf^{-1}(t)$  – инверзна функција грешке  
 $\chi^2$  – тест статистика  
 $\chi^2_{1-\alpha}$  – критична вредност  
 $f_j$  – апсолутна фреквенца  
 $f_{b,j}$  – теоријска фреквенца  
 $\delta$  – број класних интервала  
 $\nu$  – број степени слободе  
 $r$  – број параметара теоријске функције расподеле вероватноће  
 $\alpha$  – интервал поверења  
 $x_d, x_g$  – доња и горња граница класног интервала

$D_N$  – највећа апсолутна разлика теоријске и емпиријске функције расподеле код Колмогоров – Смирнов (КС) теста  
 $D_0$  – критична вредност КС теста  
 $n\omega^2$  – параметар Cramer – von Mises теста  
 $n\omega^2_\alpha$  – критична вредност Cramer – von Mises теста  
 $i$  – редни број члана опадајућег низа  
 $A^2$  – тест статистика Андерсон – дарлинг теста  
 RMSE – корен средње квадратне грешке (Root Mean Square Error, Eng.)  
 $f(x, \cdot), f(\cdot, y)$  – маргиналне густине дводимензионалне расподеле вероватноћа  
 $F(x, \cdot), F(\cdot, y)$  – маргиналне кумулативне функције дводимензионалне расподеле вероватноћа  
 $F(x, y)$  – кумулативна функција дводимензионалне расподеле вероватноћа  
 $\Phi(x, y)$  – вероватноћа превазилажења  
 $LX, LY$  – логаритмоване вредности случајно променљивих  
 $\rho$  – коефицијент корелације  
 $\psi, \varepsilon$  – стандардизоване нормалне променљиве  
 $R$  – коригован коефицијент корелације  
 $\lambda$  – константа  
 $h, k$  – координате корелационе елипсе  
 $\sigma_R$  – стандардна грешка коефицијента корелације  
 $H_{x,y}(x, y)$  – заједничка кумулативна функција расподеле две случајно променљиве X, Y  
 $S_1, S_2$  - елементи јединичног интервала I=[0, 1]  
 $C'$  – дводимензионална подкопула  
 $C$  – копула  
 $M$  – Фрешеова горње гранична копула  
 $W$  – Фрешеова доње гранична копула  
 $\Pi$  – независна копула  
 $\tau_k$  – Кендалов коефицијент  
 $\rho_s$  – Спирманов ранг коефицијент  
 $\varphi$  – генератор копуле  
 $\theta$  – параметар копуле  
 $\bar{F}(x)$  – функција преживљавања  
 $\bar{H}(x, y)$  – заједничка функција преживљавања случајно променљивих X, Y



$\hat{C}$  – копула преживљавања

$1(\cdot)$  – индикатор функција

$U, V$  – синтетичка серија

$S_n$  – Cramer – von Mises статистика

$\widehat{T}_{x,y}$  – повратни период преживљавања

$\mu_T$  – временски период између две поплаве

---

СПИСАК СКРАЋЕНИЦА:

---

$QIN_{max}$ ,  $QOUT_{max}$ ,  $QTR_{max}$  – максимална годишња вредност протока на улазном и излазном профилу главне реке и притока разматраног речног сектора

$QOUT_{од21}$ ,  $QTR_{од21}$  – одговарајуће вредности протока на излазном профилу главне реке и притоке разматраног речног сектора у тренутку појаве максималног протока на улазном профилу главне реке

$QIN_{од21}$ ,  $QTR_{од22}$  – одговарајуће вредности протока на улазном профилу главне реке и притоке разматраног речног сектора у тренутку појаве максималног протока на излазном профилу главне реке

$QIN_{од22}$ ,  $QOUT_{од22}$  – одговарајуће вредности протока на улазном и излазном профилу главне реке разматраног речног сектора у тренутку појаве максималног протока на притоци



Процес формирања поплава у зони ушћа притока, је сложен, како са гледишта генезе поплавних таласа на главном току и притокама, тако и са становишта избора рачунских протока великих вода за потребе пројектовања регулационих радова и планирање мера за одбрану од поплава на анализираном сектору реке.

Како се хидротехнички објекти дефинишу са циљем да обезбеде захтевану сигурност низводног подручја, тако се и одређивање рачунске велике воде своди на дефинисање максималног протока и/или других карактеристика поплавног таласа одређене вероватноћи појаве. У ту сврху се ustalila процедура усвајања највећег протока реке одређеног повратног периода (пик поплавног таласа) процењеног на основу историјских података о максималним годишњим протоцима.

Међутим, у ситуацијама када се поплаве на два или више водотока не јављају истовремено, овакве оцене не дају задовољавајуће резултате у оцењивању угрожености од поплава. Примена једнодимензионалног приступа у оценама теоријских вредности различитих повратних периода има смисла само дуж деоница река које нису под директним утицајима међусобног успора, који се редовно јављају у зонама ушћа главне реке и притока. Тако се често долази до потцењених или прецењених меродавних нивоа за димензионисање система за заштиту од поплава на оваквим подручјима.

Постоји тежња да се развију нове мере за оцену ризика од поплава које ће се заснивати на вишедимензионалној пробабилистичкој анализи као додаток очекиваној вредности која је коришћена као једина мера ризика у прошлости (Haimes et al., 1992). Због тога и угроженост од поплава, која представља једну компоненту ризика и директно је зависна од режима вода, треба оценити на основу резултата вишедимензионалног проблема. Управљање ризицима захтева вишедимензионалну анализу у којој се компромис између трошкова, добити и ризика налази у вишедимензионалном простору.

У складу са тим чињеницама врло је важно омогућити сагледавање вероватноће појаве поплаве у простору вероватноће вишедимензионалног проблема који обухвата све релевантне величине од којих сама поплава зависи.

## 1.1 ПРЕГЛЕД ПРИМЕНЕ ВИШЕДИМЕНЗИОНАЛНОГ ПРИСТУПА У ХИДРОЛОГИЈИ У СВЕТУ И КОД НАС

Планирање и пројектовање мера за адаптацију и заштиту од поплава заснива се на пробабилистичкој оцени параметара поплавног таласа. Дефинисање рачунског протока на рекама је неопходно за различите инжењерске потребе (Bender et al., 2016). Овде свакако предњачи потреба за одређивањем меродавних нивоа воде за димензионисање система за заштиту од поплава у који су укључени насипи, зидови, црпне станице или канали.

Устаљено је да се у ту сврху користи пробабилистичка анализа где се одређују теоријске вредности максималних годишњих протока који су измерени на најближој хидролошкој станици. Међутим, сложеност поплаве је наметнула приступ оваквом догађају као вишедимензионалном феномену (Shiau et al., 2006). Уколико сектор реке обухвата притоке, такав приступ не може бити оправдан зато што се морају узети у обзир бар два протока (реципијента и притоке).

Сложеност феномена настајања поплаве и његова оцена захтевају повезивање маргиналних расподела више варијабли са циљем дефинисања јединственог закона расподеле који поплаву описује (Wang, 2007).

Прву хидролошку студију у којој се појављује дводимензионална анализа објављују Matalas и Langbein 1962. године (Ashkar and Aucoin, 2011). Они су расправљали на тему утицаја крос-корелације између две или више временских серија на тачност израчунавања математичког очекивања сваке серије понаособ када је модел урађен у дводимензионалном или вишедимензионалном простору. По Ashkar и Aucoin, (2011) после њих 1983. Stedinger предлаже употребу генерализоване регресије при прорачуну рачунске велике воде за димензионисање која узима у обзир регионалну зависност између хидролошких мерења. Проблемом дводимензионалне густине расподеле вероватноће се баве Morris и Calise (1987) и Raynal и Salas (1987), док се први пут појам истовремене поплаве на два водотока појављује у (Linsley et al., 1975).

Marsall и Olkin (1998) истичу повећање интересовања за вишеструким расподелама вероватноћа (двоструким, дводимензионалним са маргиналним вероватноћама као параметрима расподела). Genest и McKay (1986) показали су да се неколико таквих дистрибуција које су присутне у литератури могу добити на основу

јединственог метода. Сличан закључак се појављује и у овом раду стављајући акценат на тзв. мешовите моделе. Ови модели се могу са правом назвати моделима хазарда, вишеструке пропорционалности са случајним границама управо те пропорционалности. Посебно су погодни за две намене: 1) истичу особине већ формираних расподела, 2) понекада када је изложена позитивна зависност чланова предлаже се метода симулације података из њихових расподела. Најбитније је да мешовити модели омогућавају добијање неколико фамилија дводимензионалних расподела са маргиналним дистрибуцијама као параметрима расподеле и истичу очигледну могућност њиховог проширења на вишедимензионалне.

Концепт одређивања истовремене поплаве помиње се у смислу одређивања вероватноће поплавног таласа на притоци када је немогуће конструисати криву протока у зони ушћа а да она не буде под директним утицајем нивоа у реципијенту. Студија је рађена за ушће река Мерамек и Мисисипи (Morris and Calise, 1987).

Истраживачи из наше земље по први пут објављују на ову тему у оквиру интернационалног хидролошког програма УНЕСКА “Coincedence of flood flow of the Danube river and its tributaries, The Danube and its Basin – A Hydrological Monograph Follow – up volume IV” , (Prohaska et al., 1999). У монографији се поплава посматра у вишедимензионалном систему вероватноћа, али из угла сложеног феномена при чијој се анализи поред максималне ординате хидрограма отицаја у анализу укључује и запремина и трајање хидрограма директног отицаја. Студија обухвата секторе на реци Дунав од Хофкирхена у Аустрији до Цеатал Измаила у Румунији укључујући ушћа река: Ин, Енс, Мораве, Драве, Тисе, Саве, Велике Мораве, Сирит и Прут (период 1901-1993). И Плавшић и Иветић су 2017. представили методологију чија је примена омогућила процену великих вода узводно од ушћа Саве у Београду где се не организују хидролошка мерења. Она се састоји од анализе коинциденције великих вода Дунава, Тисе и Саве, формирања тродимензионалне расподеле којом се узима у обзир корелација између појаве великих вода на њима, Монте Карло симулације помоћу које је из формиране тродимензионалне расподеле формирана расподела великих вода узводно од ушћа Саве у Дунав на територији Београда и њихове коинциденције са великим водама Саве.

Израчунавање квантила расподеле у вишедимензионалном простору омогућавају различиту комбинацију варијабли које дају исти ризик (Chebana and Ouarda, 2011). Посматрајући сложене феномене, у вишедимензионалном простору примењивани су следећи закони вероватноће: двострука Гаусова расподела, и

експоненцијална расподела (Krstanović and Singh, 1987); двострука Гумбелова или мешовита Гумбелова расподела (Yue et al., 1999); двострука нормална расподела (Ilić et al., 2017, Ilić et al., 2021, Sackl and Bergmann, 1987; Prohaska, 2006; Prohaska and Ilić, 2010a, 2010b, 2019; Prohaska et al., 1999, 2008, 2009, 2012, 2017); двострука Лог-нормална (Yue, 2000), двострука Гама (Yue, 2001). Потпун преглед вишедимензионалних расподела вероватноће се може наћи у Kotz et al. (2000).

У већини студија вишедимензионална расподела вероватноћа је добијена на основу следећих претпоставки: варијабле се поковају истом закону расподеле вероватноће, сматра се да је заједничка расподела две варијабле нормална или се трансформише да би била нормална и опште познато је да се сматра да су варијабле независне.

Почетком 21. века, од 2003. године популаран алат за вишедимензионалне анализе у хидрологији постају копуле (*copulare*=упарити, сложити; Nelsen, 2006) које се примењују за формирање вишедимензионалних расподела вероватноће не ослањајући се на претходно наведене претпоставке.

Користе се за моделирање у области: 1) суша (Shiau, 2006; Kao and Govindaraju, 2010; Wong et al., 2010.; Liu et al., 2011; Reddy and Ganguli, 2012; Lee et al., 2013.; Ma et al., 2013.; Wong et al., 2013.); 2) киша (De Michele and Salvadori, 2003; Grimaldi and Serinaldi, 2006b; Salvadori and De Michele, 2007; Kao and Govindaraju, 2007; Singh and Zhang, 2007; Zhang and Singh, 2007a; Gargouri-Ellouize and Chebchoub, 2008; Ghosh, 2010; Vandenberghe et al., 2010; Balistrocci and Bacchi, 2011; Ariff et al., 2012); 3) подземних вода (Bárdossy, 2006); 4) одређивање ризика преливања бране (De Michele et al., 2005); 5) зависности протока и концентрације суспендованог наноса (Bezак et al., 2014); 6) пробабилистичке анализе поплава (Favre et al., 2004; Shiau et al., 2006; Zhang and Singh, 2006; Grimaldi and Serinaldi, 2006a; Genest and Favre, 2007; Renard and Lang, 2007; Zhang and Singh, 2007b; Karmakar and Simonovic, 2009); 7) коинциденције поплавих таласа (Chen et al., 2012; Bender et al., 2016; Prohaska et al., 2017; Huang et al., 2018).

Најједноставнији опис поступка за креирање модела прорачуна заједничке расподеле вероватноћа неколико случајно променљивих заснованог на копулама у хидрологији приказује се у Genest и Favre (2007). Њихов предлог је да се статистичка анализа која подразумева зависност између променљивих увек заснива на ранговима. Презентовани су прости графички алати и нумеричке технике не би ли се изабрао погодан модел, оценили параметри модела и одредила доброта прилагођавања модела

стварним подацима. Модел је примењен на реалне хидролошке податке о максималним годишњим протоцима и одговарајућим запреминама реке Хрцина на х. с. Амос у Канади, општина Квибек за период 1915-1999. (n=85).

У Favre et al. (2004) приказују се два практична примера моделирања сложених појава у хидролошкој пракси применом копула. Први је везан за теорију ризика од поплава при чему су примењене четири различите копуле на серије пикова у сливу реке Перибоука, Квебек, Канада. Други је везан за формирање заједничке (удружене) расподеле пикова и запремина поплавних таласа. У ту сврху примењене су три копуле на слив реке Римонски, Квибек, Канада. У првом случају планирана производња електричне енергије зависи од отицаја са слива чији је излазни профил на профилу хидро електране. Укупан отицај је једнак испуштању из узводног резервоара и отицаја међуслива. Зависност ових протока се успоставља у сврху одређивања производње електричне енергије.

Shiau и сарадници (2006) истичу да се реални ризик од поплава не може проценити на основу једнодимензионалног закона вероватноће и да се мора прихватити вишедимензионални приступ којим ће се одредити зависна структура параметара који у потпуности описују поплавни талас, пик, запремина и трајање. У раду се одређује ризик од поплава на основу максималних годишњих протока и запремина реке у Хошуи у Тајвану који се покорављају Гумбеловој и мешовитој лог-нормалној расподели респективно. Примењено је шест копула за одређивање заједничких вероватноћа и повратног периода пика и запремине поплавног таласа: Али-Микхаил-Хак, Клејтонова, Франкова, Гумбел-Хоугардова, Галамбос и Плакеова. Zhang и Singh (2007) примењују тропараметарску Гумбел-Хоугардова копулу из фамилије Архимедових копула и упоређују примену копула и тродимензионалне нормалне расподеле после Бокс – Кокс трансформације у сливу реке Амите у Луизијани.

И Grimaldi и Serinaldi (2006) проучавају зависност параметара хидрограма поплавног таласа. Они развијају модел за тродимензионалну густину и функцију расподеле променљивих пика, запремине и трајања и дводимензионалну густину и расподелу запремина – трајање условљено пиком таласа. Примењене су асиметричне Архимедова копуле и резултати упоређени са резултатима добијеним применом симетричних. Процедура је примењена на осам река у Италији и САДу.

Упоредни приказ копула методе и дводимензионалне нормалне расподеле приказују Прохаска и сарадници (2017). Архимедове копуле (Гумбел, Франк и Клејтон) примењене су за случај коинциденције максималних годишњих протока реке Дунав и



одговарајућих дневних протока реке Саве у Србији. Анализом је показано да су вредности добијене посматрајући поплаву у зони ушћа реке и њене притоке ниже у односу на конвенционални приступ одређивања меродавних великих вода за димензионисање система за заштиту од поплава на сектору река са притокама на основу једнодимензионалних вероватноћа појаве максималних годишњих протока на хидролошким станицама.

Примену копула у регионалним анализама ризика од поплава и одеђивања меродавног поплавног таласа за пројектовање система за заштиту од поплава описују Renard и Lang (2007).

Karmakar и Simonović (2009) проширују причу за избор маргиналних вероватноћа из скупа параметарских дистрибуција на непараметарске процедуре и приказују како се копуле могу применити за прорачун заједничких расподела вероватноће помоћу мешовитих маргиналних расподела. Дводимензионалне копуле се примењују за парове параметара хидрограма поплавног таласа: пик – запремина, пик – трајање, запремина – трајање и одређују условне вероватноће и одговарајући повратни периоди. Овакав приступ нема ограничења у избору копула из одређене фамилије. Методологија је примењена на низове од седамдесет година за Ред Ривер и Гранд Форкс у Северној Дакоти у САД.

Потпун преглед и опис копула може се наћи у Nelsen (2006) и Salvadori et al. (2007).

## 1.2 ЦИЉ ИСТРАЖИВАЊА, ПРИМЕЊЕНА НАУЧНА МЕТОДА, НУЛТА ХИПОТЕЗА

Сложеност феномена настајања поплаве у зони ушћа река и њена оцена захтевају повезивање маргиналних расподела више варијабли са циљем дефинисања јединственог закона расподеле који поплаву на таквим подручјима описује.

За случај деонице реке, ограничене са два или више улазних профила (на главној реци и притокама) и једног излазног (на главној реци), без значајног утицаја дотока са међуслива, треба дефинисати репрезентативне комбинације максималних годишњих протока и њихових одговарајућих (синхроних) вредности на осталим улазно/излазним профилима.

**Циљ докторске дисертације** је да да предлог за избор рачунских протока у зонама вишедимензионалног проблема на основу којих је могуће срачунати меродавне

нивое, где постоји међусобан утицај реципијента и притоке. Постављени циљ се може разложити на посебне и опште циљеве:

**Посебни циљеви** научног истраживања су:

- Дефинисати функције вероватноћа истовремених појава (функција густине вероватноћа) и кумулативних функција (функције превазилажења вероватноћа) различитих комбинација максималних годишњих протока, као и максималних годишњих и одговарајућих протока на разматраним профилима главног тока и притока,
- Дефинисати вишедимензионалне зависности коинциденција вероватноћа појаве максималног годишњег протока на излазном профилу главне реке у функцији вероватноћа појаве максималних годишњих протока на улазном профилу главног тока и разматраним улазним профилима притока (једној или више),
- Дефинисати комбинације коинциденција максималних годишњих и одговарајућих протока за димензионисање система за заштиту од поплава са захтеваним степеном заштите у зони међусобног утицаја главне реке и притоке:
  - Узводно од ушћа на реципијенту до границе простирања успора и
  - Узводно од ушћа на притоци до границе простирања успора.

**Општи циљеви** научног истраживања су да на основу дефинисаних вишедимензионалних зависности:

- Развити поступак за дефинисање статистичке значајности коинциденција максималних годишњих протока и њихових одговарајућих протока на главој реци и притоци у зонама непосредног ушћа,
- Успоставити вишедимензионалну зависност поплавних таласа на главној реци (реципијенту) и више притока,
- Проценити повратни период (учесталост) поплаве.

Општа научна метода која се примењује у дисертацији је метода моделовања којом се објашњава понашање предметних карактеристичних сектора река, демонстрира генеза поплава и усавршава теорија коинциденције поплавних таласа.

**Примењени математички модели** се базирају на дводимензионалној расподели вероватноћа и копулама и односе се на практичну примену вишедимензионалних функција расподеле вероватноће, односно њихових условних вероватноћа. За релевантне случајне променљиве, разматрају се истовремене квантитативне

карактеристике хидрограма поплавних таласа на главној реци, једној или више значајнијих притока.

**Полазна хипотеза** је да се формирање нивоа на секторима река са притокама посматра у вишедимензионалном простору као последица комбинације протока који су временски усаглашени. Изван зоне утицаја успора, ниво воде у притоци не зависи више од нивоа воде у реципијенту и проблем постаје једnodимензионалан што важи и када посматрамо сектор реципијента узводно од ушћа притоке.

Основна претпоставка је да нема значајног утицаја дотока са међу слива.

## 2 СТАТИСТИЧКО-ПРОБАБИЛИСТИЧКИ КАРАКТЕР ВЕЛИКИХ ВОДА У ПРИРОДНИМ ВОДОТОКОВИМА

Под појмом „велика вода“ подразумева се повећање протока а самим тим и нивоа воде и тада по правилу долази до изливања воде из минор корита када настаје поплава. Поплаве су сложена појава која настаје комбинацијом различитих услова (хидролошких, метеоролошких, топографских услова и стања терена).

Проток воде расте брзо и када достигне свој максимум онда почиње да опада, што се може описати поплавним таласом (промена протока у временском интервалу). Поплавни талас је представљен хидрограмом чији максимум превазилази унапред задату величину. Та задата величина може се изабрати са просечне линије трајања протока или на неки други начин.

За поплавни талас могу се анализирати следећи карактеристични параметри:

- максимална вредност протока –  $Q_{\max}$
- запремина поплавног таласа изнад унапред утврђеног протока –  $W$
- трајање поплавних таласа изнад задатог протока –  $T$
- временска разлика између максималног протока у две разматране тачке водотока –  $\tau_{\max}$ .

Појам „максимални годишњи проток“ се односи на највећу тренутну вредност речног протока измереног на профилу водотока у календарској години (Прохаска, 2003). Издавањем тих вредности формира се временска серија која подразумева да су њени чланови случајне величине и која се због тога подвргава пре примене процедура статистике и теорије вероватноће следећим тестовима репрезентативности за представљање процеса у целини:

- зависност чланова временске серије;
- хомогеност временске серије.

Дефинисање максималног протока се базира на теорији математичке статистике и теорије вероватноће. Постоје две методе дефинисања временских серија за анализу режима великих вода: 1) метода годишњих екстрема и 2) метода прага - протоци изнад унапред утврђеног прага. У овом истраживању коришћени су максимални годишњи

протоци зато што се показало да у домену већих повратних периода обе методе дају сличне резултате (Прохаска, 2003).

Из расположивог низа мерења се узима по један податак у години, максимална вредност  $X_{max}$  случајне променљиве  $X$ . Потом се на основу тако добијеног узорка добија емпиријска функција расподеле и израчунавају параметри функције расподеле вероватноће:

$$P(X_{max} > x) = 1 - F(x) \quad (2.1)$$

где је  $F(x)$  теоријска расподела случајно променљиве  $X$ .

О теоријским функцијама расподеле и тестовима сагласности емпиријске и теоријске расподеле биће речи у поглављу 3.

## 2.1 СЕКТОР РЕКА СА ПРИТОКАМА – ВИШЕДИМЕНЗИОНАЛНИ ПРОБЛЕМ

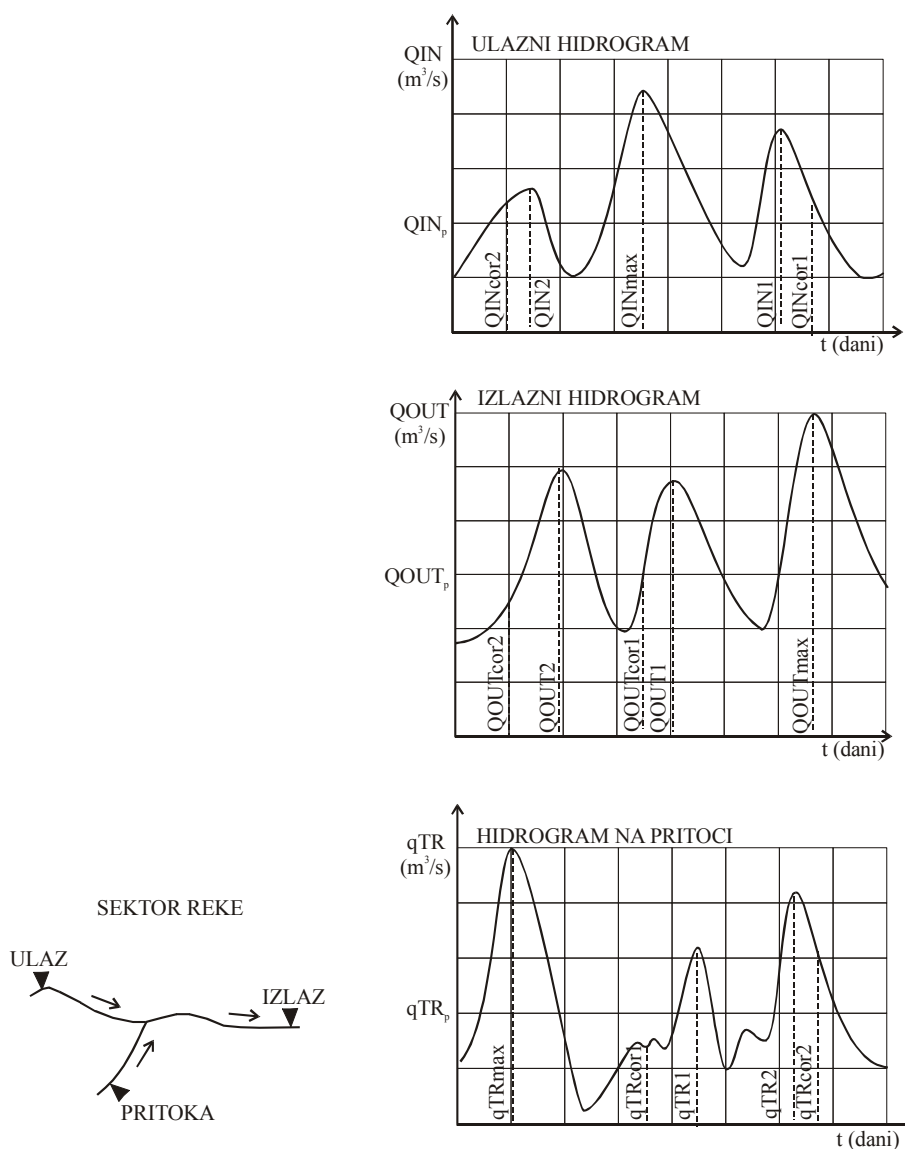
Проблеми који се односе на екстреме у природи су вишедимензионални тако да процедуре које омогућавају максималну употребу података и истовремену процену параметара сложене појаве као и њихову зависност и на крају вероватноће појаве нису развијене до новог који омогућава њихову лаку примену.

Поплаву на секторима река које обухватају притоке треба посматрати као сложен догађај који се једино може описати у вишедимензионалном простору. Тако се не ретко дешава да значајније притоке формирају поплавни талас на главној реци. (Chen et al., 2012).

Просторна неравномерност поплавних таласа ствара различите комбинације вероватноћа појаве поплавних таласа са узводних делова слива на вероватноћу појаве поплавног таласа на низводном делу слива. Због тога се вероватноћа појаве поплавног таласа на излазном профилу слива дефинише сложеном вероватноћом различитих комбинација вероватноћа поплавних таласа на узводним секторима реке и притокама (Слика 2.1).

Наиме, настанак и развој поплаве на два водотока су по правилу различити, тако да се максималне карактеристике поплавних таласа не јављају истовремено на оба водотока што подразумева да поплавни талас на једном водотоку може изазвати знатан утицај на режим течења у другом. Поред тога, хидролошки подаци се обично прикупљају на профилима хидролошких станица лоцираним изван зоне међусобног утицаја водотокова. У таквим условима посебно је значајно да се оцени коинциденција

појаве поплаве на реципијенту (главном току) и притоци, а систем за заштиту од поплава димензионисати на проток одређеног повратног периода који је дефинисан анализом дводимензионалне вероватноће. Коинциденција је појам који означава истовремену појаву протока (поплавних таласа) на два водотока (Прохаска, 2006). Зато је од пресудне важности одредити највећу заједничку (условну) вероватноћу параметара који учествују у дефинисању критичне комбинације протока који се дешавају у исто време (симултано).



Слика 2.1 Шематски приказ коинциденције поплавних таласа (Prohaska et al., 1999)

У сврху одређивања унапред задате вредности која се не сме превазићи када су поплаве у питању устаљена је процедура једнодимензионалне пробабилистичке

анализе екстремних догађаја (протока или пика поплавног таласа). Овакав приступ је једино оправдан када је за димензионисање објеката битна само једна варијабла или када разматрани параметри не показују међусобни утицај (Chebana, 2013).

Сагледавање присутних метода води до закључка да су направљени велики кораци када је реч о сакупљању података и опису процеса који доводе до поплава, па се са сигурношћу може рећи да је већи напредак направљен у рачунском смислу него ли у приступу прорачуна поплаве као сложеног феномена (Singh and Strupczewsky, 2002).

### 3 ВИШЕДИМЕНЗИОНАЛНЕ РАСПОДЕЛЕ СЛУЧАЈНО ПРОМЕНЉИВИХ

Хидролошки проблеми захтевају свеобухватно сагледавање феномена под дејством утицаја који често нису независни. Због тога је врло битно повезати расподеле појединачних догађаја са циљем дефинисања јединственог закона који описује сложени догађај.

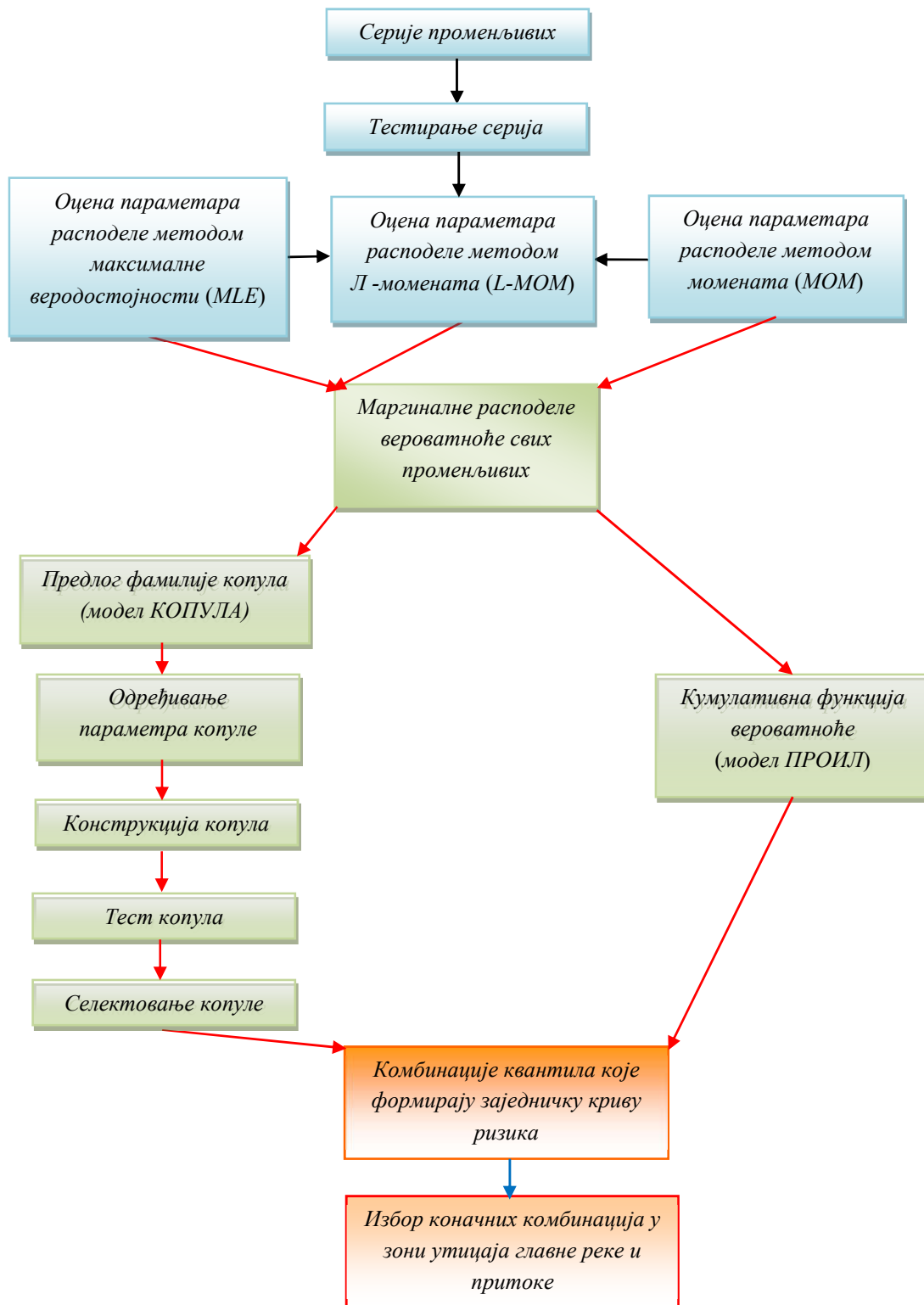
Историјски гледано вишедимензионалне расподеле су се развиле као директна проширења простих расподела вероватноће (нпр. двострука Парето или Гама). Пред крај XIX века Francis Galton је представио основно истраживање за разумевање вишеструких зависности уводом у регресиону анализу (Frees and Valdez, 1998). Повезао је податке о висини деце са расподелом висина њихових родитеља и показао да је свака расподела приближно нормална али и да заједничка расподела може бити нормална. Међутим, када се ради о различитим варијаблама које се покорвају различитим расподелама вероватноће проблем постаје сложенији.

Теоријска основа за развој методологије за оцену вишедимензионалне расподеле параметара великих вода на главном водотоку и притокама у Србији се први пут појављује 1997. године (Прохаска и сарадници, 1978). Заснива се на практичној примени вишеструких функција расподеле вероватноћа, односно њихових условних вероватноћа. За релевантне варијабле, односно случајне променљиве, узимају се истовремене квантитативне карактеристике хидрограма поплавних таласа на секторима река са притокама. То су следећи параметри великих вода: максимална ордината (пик) хидрограма, запремина поплавног таласа, трајање поплавног таласа или временски помак између пикова поплавних таласа на главној реци и притоци.

Методологија прорачуна вишедимензионалне коинциденције великих вода на сложеним речним системима полази од већ разрађене методологије за дефинисање коинциденције великих вода на два суседна водотока која је изложена у литератури (Prohaska et al., 1999). Израз "коинциденција" употребљава се да значи једновременост догађаја и еквивалент је вероватноћи истовремене појаве две случајне променљиве  $X$  и  $Y$ , које представљају разматране случајне догађаје (параметре великих вода) на суседним водотоцима. У овом истраживању су вишедимензионалне расподеле вероватноћа дефинисане у моделу ПРОИЛ чију теоријску основу чини дводимензионална нормална расподела и моделу КОПУЛА, процедуре која се заснива на моделирању зависности између две или више променљивих. Алгоритам за



одређивање највероватније комбинације променљивих у вишедимензионалном простору представљен је на Слици 3.1.



Слика 3.1 Алгоритам за одређивање највероватнијих комбинација случајно променљивих у зони утицаја главне реке и притока

Кораци при формирању вероватноћа у вишедимензионалном простору и комбинација променљивих које учествују у дефинисању сложеног процеса какве су поплаве биће описани у поглављу 3.

### 3.1 МАРГИНАЛНЕ РАСПОДЕЛЕ ВЕРОВАТНОЋА

Вероватноћа са којом се разматрана хидролошка величина може десити у будућности се одређује теоријским функцијама расподеле (Прохаска, 2003). Задатак је пронаћи која се од понуђених расподела најбоље прилагођава емпиријској расподели. Маргиналне расподеле се могу бирати из широког спектра параметарских и непараметарских фамилија.

У тексту који следи описаће се особине теоријских функција расподеле непрекидних случајно променљивих (проток воде) које су коришћене у истраживању: Лог-нормална II, Лог-нормална III, Пирсон III, Лог-Пирсон III, Гумбелова (Расподела екстремних вредности – тип 1) и општа расподела екстремних вредности. Приказане су формуле функција густине и функција расподела вероватноћа, формуле за одређивање квантила расподела и параметара расподела по методи момената, Л-момената и максималне веродостојности. Више о теоријским функцијама расподела се може наћи у литератури (Chow, 1988; Rao and Named, 2000; Поповић и Благојевић, 1999; Прохаска, 2003; Прохаска и Ристић, 1996; Naghettini, 2017).

Свака променљива  $X$ , којој на случајан начи може да се придружи вредност са интервала  $(-\infty, +\infty)$  са вероватноћом  $p$  је случајно променљива  $X$ :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p dx = 1 \quad (3.1)$$

Функција расподеле случајно променљиве  $F(x)$  је вероватноћа да ће случајно променљива  $X$  бити мања (или једнака) од неке вредности  $x$ :

$$F(x) = P(X \leq x) \quad (3.2)$$

У случају максималних годишњих протока, случајно променљива је непрекидна и ограничена са доње стране. Функција расподеле вероватноће се дефинише у смислу превазилажења неке унапред задате вредности:

$$P(X > x) = P(x) = 1 - F(x) \quad (3.3)$$

Реципрочна вредност од вероватноће је повратни период  $T(x)$ :

$$T(x) = \frac{1}{P(x)} = \frac{1}{1 - F(x)} \quad (3.4)$$

### 3.1.1 Оцене параметара расподеле

У хидролошкој пракси, најчешће су параметри расподеле оцењивани методом момената. Метод максималне веродостојности (Maximum Likelihood Estimation (MLE), Eng.) се појављује двадесетих година деветнаестог века. Метода је везана за робусна израчунавања, али даје оцене које су за велике узорке ефикасније од било које друге методе (Markiewicz et al., 2010).

После 1990. године Hosking уводи Л-моменте који због добре могућности регионалне анализе вероватноће појаве постају све више у употреби.

Параметри маргиналних расподела у ПРОИЛ моделу су оцењивани методом момената, док су у моделу КОПУЛА, при конструкцији копула, коришћене друге две методе: Л-момената (Л-МОМ) и максималне веродостојности (MLE).

#### 3.1.1.1 Метод момената

Скуп чији елементи имају заједничке карактеристике назива се популација, а подскуп популације је узорак. Параметар је мерљива карактеристика популације, док је статистика је мера узорка добијеног случајним избором.

Намена узорка је да се на основу његових статистика оцене вредности параметара и одреде функције расподеле читаве популације. У овом истраживању за потребе одређивања маргиналних вероватноћа дводимензионалног закона расподеле, параметри су оцењени методом момената. Теоријски моменти су у општем случају функције параметара расподеле (Прохаска, 2003).

Под параметрима расподеле подразумевају се опште нумеричке карактеристике као што су: математичко очекивање (средња вредност), дисперзија, стандардна девијација, коефицијент варијације, коефицијент асиметрије и слично.

У једначинама (3.5) до (3.18) приказани су изрази емпиријских момената непрекидне случајно променљиве и једначине за непристрасну оцену параметара:

- математичко очекивање  $E(x) = \mu$  - средња вредност

$$\text{➤ први момент: } \mu_1' = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx = \mu \quad (3.5)$$

$$\text{➤ непристрасна оцена: } m_1' = \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{N} = \bar{x} \quad (3.6)$$

- други обични момент

$$\text{➤ } \mu_2' = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x) dx \quad (3.7)$$

$$\text{➤ непристрасна оцена: } m_2' = \sum_{i=1}^N \frac{x_i^2}{N} \quad (3.8)$$

- други централни момент – дисперзија  $D(x)$  – varijansa  $\sigma^2$

$$\text{➤ } \mu_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 \cdot f(x) dx = \sigma^2 = D(x) \quad (3.9)$$

$$\text{➤ непристрасна оцена: } m_2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 = S^2 \quad (3.10)$$

- стандардна девијација –  $\sigma$

$$\text{➤ } \sigma = \sqrt{\mu_2} = \sqrt{\mu_2 - \mu^2} \quad (3.11)$$

$$\text{➤ непристрасна оцена: } S = \sqrt{m_2} = \sqrt{m_2 - \bar{x}^2} \sqrt{\frac{N}{N-1}} \quad (3.12)$$

- коефицијент варијације –  $C_v$

$$\text{➤ } C_v = \frac{\sigma}{\mu} \quad (3.13)$$

$$\text{➤ непристрасна оцена: } C_v = \frac{S}{\bar{x}} \quad (3.14)$$

- мере асиметрије –  $\mu_3$

$$\text{➤ } \mu_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x_i - \mu)^3 \cdot f(x) dx \quad (3.15)$$

$$\text{➤ непристрасна оцена: } m_3 = \frac{N}{(N-1)(N-2)} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^3 \quad (3.16)$$

- коефицијент асиметрије –  $\gamma_1$

$$\text{➤ } \gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} \quad (3.17)$$

$$\text{➤ непрастрасна оцена: } C_s = \frac{m_3}{S^3} \quad (3.18)$$

### 3.1.1.2 Метода Л – момената (L-MOM)

Аналогно класичним моментима, узорачки Л-моменти омогућавају дефинисање параметара локације, размере и облика теоријских функција расподеле. Засновани су на идеји модификације класичних момената коришћењем вероватносних тежинских функција. Како представљају линеарне комбинације ранжираних података (Vogel and Wilson, 1996), одатле и префикс „Л“, издваја се тврдња да су мање пристрасне оцене параметара него у случају конвенционалних момената код којих се степенују разлике мерних података и средње вредности (Радић и Михајловић, 2010).

Још неке предности у односу на обичне моменте су (Hosking, 1990):

- Број расподела чији се параметри могу оцењивати је већи;
- Мање су осетљиви на изузетке у временским серијама;
- Ближе асимптотски апроксимирају расподелу узорка;
- Приближно су без бајаса за све комбинације величине узорка и популације.

Када се ради о узорцима који имају мали број података, Л - моменти се показују као адекватан алат за оцену параметара расподела вероватноће (Stredinger et al., 1993).

Вероватносно тежинске моменте први уводи Greenwood (1979), уз помоћ којих се могу дефинисати Л – моменати (идентична процедура као у Hosking (1990)). Они се рачунају из узорка  $(X_1, X_2, \dots, X_N)$  обима  $N$  и поређани у растући низ могу се дефинисати на следећи начин (Landwehr et al., 1979):

$$b_0 = N^{-1} \sum_{j=1}^N X_j \quad (3.19)$$

$$b_r = N^{-1} \sum_{j=r+1}^N \frac{(j-1)(j-2)\dots(j-r)}{(N-1)(N-2)\dots(N-r)} X_j \quad (3.20)$$

Линеарном комбинацијом израза (3.19) и (3.20) добијамо изразе за првих неколико момената (Sankarasubramanian and Srinivasan, 1999):

$$\lambda_1 = b_0 \quad (3.21)$$

$$\lambda_2 = 2b_1 - b_0 \quad (3.22)$$

$$\lambda_3 = 6b_2 - 6b_1 + b_0 \quad (3.23)$$

$$\lambda_4 = 20b_3 - 30b_2 + 12b_1 - b_0 \quad (3.24)$$

Први момент (3.21) представља средњу вредност узорка, параметар локације. Други (3.22) је мера дисперзије вредности око средње вредности узорка, параметар размере.

Аналогно обичним моментима, бездимензионалне величине – коефицијенти добијају се дељењем Л-момената. Коефицијент варијације се рачуна као (3.25):

$$\tau_2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \quad (3.25)$$

Дељењем Л-момената вишег реда мером дисперзије добијамо коефицијенте асиметрије (параметар облика) и скошености према једначинама:

$$\tau_3 = \frac{\lambda_3}{\lambda_2} \quad (3.26)$$

$$\tau_4 = \frac{\lambda_4}{\lambda_2} \quad (3.27)$$

Однос између параметара расподеле, Л-момената за одређену функцију расподеле приказан је у табели 3.2 (Hosking, 1990).

### 3.1.1.3 Метода максималне веродостојности (MLE)

Метод максималне веродостојности се појављује двадесетих година деветнаестог века. Идеја је да се за оцену параметра изабере вредност  $\theta$  при којој је вероватноћа реализације добијеног узорка највећа, тј. максимизира се кумулативна расподела, тражи се нула њеног извода по свим параметрима (Rao and Hamed, 2000).

Метода је везана за сложена израчунавања, али даје оцене које су за велике узорке ефикасније од било које друге методе (Markiewicz et al., 2010). Параметри расподела се одређују на овај начин са најмањом средњом грешком, али је проблем што неке расподеле не поседују могућност аналитичког израчунавања статистика и онда функција (4.28) се мора максимизирати нумеричким методама, што је тешко (Chow et al., 1988). Зато ова метода у односу на друге две методе тачкасте оцене параметара расподела није популарна у хидролошким круговима.

Нека је серија  $(X_1, X_2, \dots, X_N)$  обима  $N$  и нека је  $(x_1, x_2, \dots, x_N)$  реализација тог узорка.

Функција веродостојности се дефинише као:

$$L(\Theta) = L(x_1, x_2, \dots, x_N; \Theta) = f(x_1; \Theta) \cdot f(x_2; \Theta) \cdot \dots \cdot f(x_N; \Theta), \quad (3.28)$$

где је:

- $X$  – непрекидног типа;
- $f(x; \Theta)$  - густина расподеле  $F(x; \Theta)$ ;
- $\Theta = \psi(x_1, x_2, \dots, x_N)$  - вредност параметра којим се дефинише максимум функције  $L(\Theta)$  при фиксираним вредностима  $(x_1, x_2, \dots, x_N)$ .

Оцена максималне веродостојности параметра  $\Theta$  се дефинише преко статистике:

$$\hat{\Theta} = \psi(x_1, x_2, \dots, x_N) \quad (3.29)$$

### 3.1.2 Емпиријске расподеле

Емпиријска функција расподеле  $F^*(x)$  случајно променљиве  $X$  представља закон промене догађаја  $X < x$  у неком статистичком узорку:

$$F^*(x) = p^*(X < x) \quad (3.30)$$

где је

$$p^* = \frac{m}{N} \quad (3.31)$$

$p^*$  - учесталост догађаја  $X < x$ ;

$m$  – број догађаја  $X < x$  у узорку;

$N$  – обим узорка.

При  $N \rightarrow \infty$  и  $p^* \rightarrow p$ , где је  $p$  вероватноћа догађаја  $X < x$  и  $F^*(x) \rightarrow F(x)$ , где је  $F(x)$  функција расподеле случајно променљиве  $X$ .

У хидролошким прорачунима великих вода је потребна реципрочна вредност функције расподеле тј. емпиријска функција превазилажења:

$$\Phi_N(x) = p^*(X \geq x) \quad (3.32)$$

При  $N \rightarrow \infty$  и  $p^* \rightarrow p$ , где је  $p$  вероватноћа догађаја  $X > x$  и  $\Phi(x) \rightarrow P(x)$ , где је  $P(x)$  функција превазилажења.

Емпиријска функција расподеле се графички представља емпиријском кривом обезбеђености.

Од хронолошког низа података се формира уређен низ (елементи узорка поређани по растућем или опадајућем редоследу) а затим се добијају компромисне вероватноће по многим ауторима који су извели приближне формуле за прорачун емпиријских функција расподеле, Хазен, Вејбул, Чогодајев, Алексејев и други (Прохаска, 2003). У једначинама (3.33) и (3.34) приказане су формуле Weibulla и Alekseeva, респективно, које су коришћене у овом истраживању.

$$P_m = \frac{m}{N+1} \quad (3.33)$$

$$P_m = \frac{m-0.25}{N+0.5} \quad (3.34)$$

### 3.1.3 Теоријске функције расподеле

#### 3.1.3.1 Лог-нормална II расподела (ЛГН)

Случајно променљива  $X$  следи Лог-нормалан закон расподеле ако се њени логаритми  $y=\ln X$  поковавају нормалној расподели, са параметрима  $\mu$  и  $\sigma^2$ .

Функција густине вероварноће (Слика 3.2):

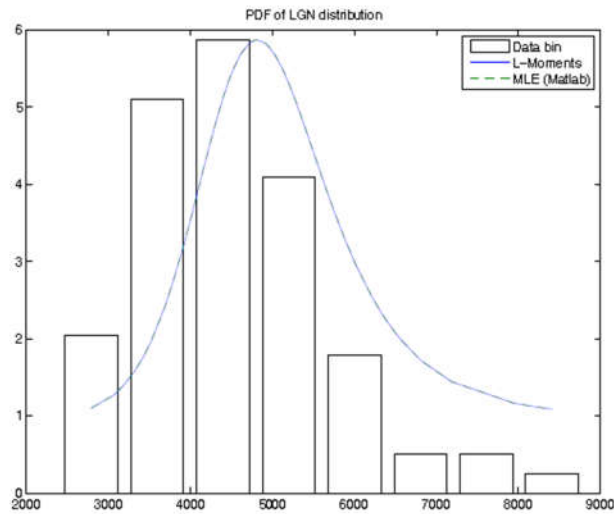
$$f(x) = \frac{1}{x\sigma_{\ln x}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x - \overline{\ln x})^2}{2\sigma_{\ln x}^2}}, \quad x > 0 \quad (3.35)$$

где је:

$\overline{\ln x}$  - средња вредност,

$\sigma_{\ln x}^2 = S_{\ln x}$  - стандардна девијација.





Слика 3.2 Густина Лог-нормалне расподеле максималних годишњих протока реке Дунав на х. с. Бездан за период 1931. – 2014.

Функција расподеле је (Слика 3.2):

$$F(y) = \frac{1}{\sigma_y \sqrt{2\pi}} \int_0^y e^{-\frac{(y-\mu_y)^2}{2\sigma_y^2}} dy \quad (3.36)$$

Параметри расподеле се тачкасто оцењују у моделу ПРОИЛ методом момената (једначине (3.64), (3.65)). При дефинисању маргиналних расподела копула оцењивање се врши методом Л-момената (једначине (3.80) - (3.83)) и методом максималне веродостојности (једначине (3.93), (3.94)). Једначине су приказане у табелама 3.1, 3.2, 3.3 у поглављу 3.1.4.

Увођењем стандардизоване променљиве:

$$z_i = \frac{y_i - \mu_y}{\sigma_y} = \frac{\ln x - \overline{\ln x}}{\sigma_{\ln x}} \quad (3.37)$$

добија се израз за прорачун теоријских вредности случајно променљиве која се померава Лог-нормалном II закону:

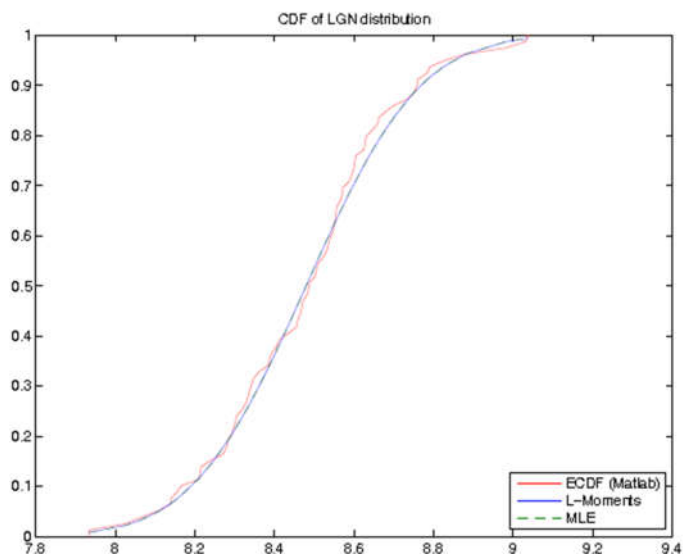
$$Y(T) = \ln x(T) = \mu_y + K_N(T)\sigma_y \quad (3.38)$$

или

$$X(T) = e^{Y(T)} \quad (3.39)$$

где је Т повратни период у годинама.

Фактор фреквенце  $K_M(T)$  се добија из табеле Т-III (Прохаска, 2003; Прохаска и Ристић, 1996).



Слика 3.3 Кумулативна функција Лог-нормалне расподеле вероватноћа максималних годишњих протока реке Дунав на х. с. Бездан за период 1931. – 2014.

### 3.1.3.2 Лог-нормална III расподела

Разлика је само у логаритамској трансформацији случајно променљиве  $X$ :

$$Y = \ln(X - x_0), \quad x_0 = \text{const.}, \quad x > x_0 \quad (3.40)$$

која има нормалну расподелу, па је случајно променљива дефинисана као:

$$X = e^Y + x_0 \quad (3.41)$$

Параметри расподеле се тачкасто оцењују у моделу ПРОИЛ методом момената (једначине (3.66), (3.67)). Једначине су приказане у табели 3.1 у поглављу 3.1.4.

### 3.1.3.3 Тропараметарска Гама расподела – Пирсон III

Пирсон III расподела добија се увођењем параметра локације  $\zeta$  у Гама расподелу.

Функција густине вероватноће:

$$f(x) = \frac{1}{\beta^\omega \cdot \Gamma(\omega)} (x - \zeta)^{(\omega-1)} e^{-\frac{x-\zeta}{\beta}}, \quad \zeta \leq x < +\infty \quad (3.42)$$

где је:

$\omega$  - параметар облика,

$\beta$  - параметар размере,

$\xi$  – параметар локације.

Функција расподеле је:

$$F(X) = \int_{\xi}^x \frac{1}{\beta^{\omega} \cdot \Gamma(\omega)} (t - \xi)^{(\omega-1)} e^{-\beta t} dt \quad (3.43)$$

Параметри расподеле се тачкасто оцењују у моделу ПРОИЛ методом момената (једначине (3.69) - (3.74)). Једначине су приказане у табели 3.1. у поглављу 3.1.4.

$$\text{Увођењем стандардизоване променљиве: } y = \frac{x - \xi}{\beta} \quad (3.44)$$

$$\text{може се написати: } x = \xi + \beta \cdot y \quad (3.45).$$

Израз за прорачун теоријских вредности случајно променљиве одређеног повратног периода је:

$$X(T) = \xi + \beta \cdot y(T) \quad (3.46)$$

или:

$$X(T) = \mu + \sigma \cdot K_p(T, C_s) \quad (3.47)$$

Фактор фреквенце  $K_p = f(T, C_s)$  чије се нумеричке вредности могу наћи у табели Т – IV (Прохаска, 2003; Прохаска и Ристић, 1996).

#### 3.1.3.4 Лог Пирсон III расподела

Лог Пирсон III или тропараметарска Гама расподела дефинисана је параметрима локације  $\xi$ , размере  $\alpha > 0$  и облика  $\omega$ . Проблем са овом расподелом настаје при горњим граничним вредностима, може да да ниске вредности што свакако ствара потешкоћу при анализи екстрема какве су поплаве (Millington et al., 2011).

Густина вероватноће и кумулативна вероватноћа су дефинисане у једначинама (3.48) и (3.49) и приказане на сликама 3.4 и 3.5, респективно:

$$f(x) = \frac{(x - \xi)^{\beta-1} \exp\left(-\frac{x - \xi}{\beta}\right)}{\beta^{\omega} \Gamma(\omega)} \quad (3.48)$$

где су:

$\omega$  - параметар облика,

$\beta$  - параметар размере,

$\xi$  - параметар локације.

Одозго некомплетна Гама функција  $\gamma(\cdot, \cdot)$  је дефинисана:

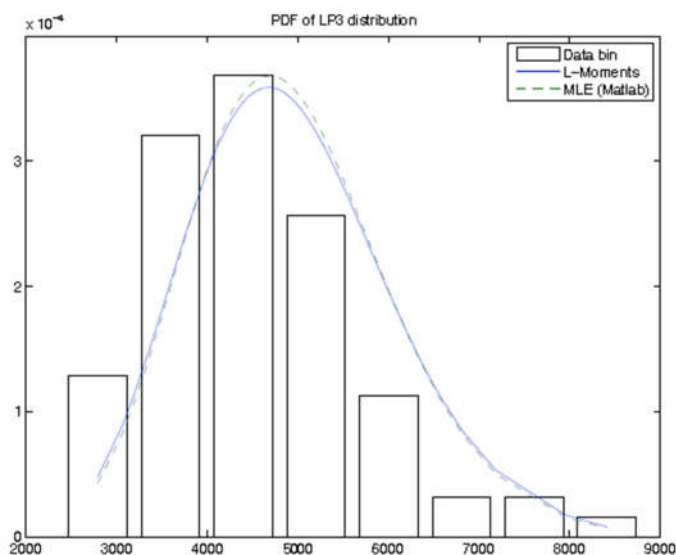
$$\gamma(s, t) = \int_s^{\infty} x^{t-1} e^{-x} dx \quad (3.49)$$

Гама функција  $\Gamma(\cdot)$  је при томе:

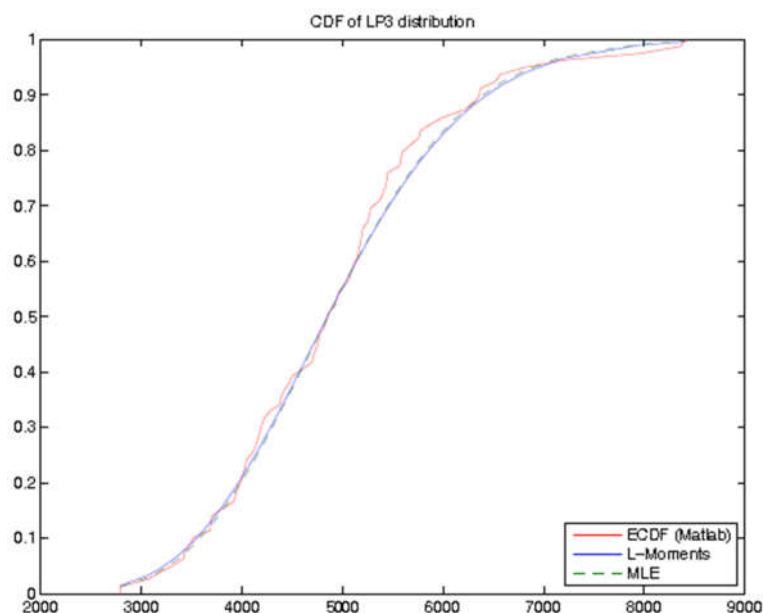
$$\Gamma(t) = \int_s^{\infty} x^{t-1} e^{-x} dx \quad (3.50)$$

$$F(x) = \frac{\gamma_1(\omega, \beta(x - \xi))}{\Gamma(\omega)} \quad (3.51)$$

Параметри расподеле се тачкасто оцењују у моделу ПРОИЛ методом момената (једначине (3.75) - (3.77)). При дефинисању маргиналних расподела копула оцењивање се врши методом Л-момената (једначине (3.84) - (3.86)) и методом максималне веродостојности (једначине (3.95) - (3.99)). Једначине су приказане у табелама 3.1, 3.2, 3.3. у поглављу 3.1.4.



Слика 3.4 Густина Лог-Пирсон III расподеле вероватноћа за параметре оцењене методама L-MOM и MLE, максималних годишњих протока реке Дунав на х. с. Бездан за период 1931. – 2014.



Слика 3.5 Кумулативна функција Лог-Пирсон III расподеле вероватноћа за параметре оцењене методама L-MOM и MLE и емпиријска расподела, максималних годишњих протока реке Дунав на x. с. Бездан за период 1931. – 2014.

Случајно променљива  $y$  се померава Лог-Пирсон III закону расподеле уколико се логаритми :

$$y = \log x, \quad y = \ln x \quad (3.52)$$

померавају Пирсон III закону.

Теоријска вредност случајно променљиве  $y$  за различите повратне периоде је:

$$y(T) = \mu_y + K_p(T) \cdot \sigma_y \quad (3.53)$$

где су:

$K_p(T)$  – фактор фреквенце за Пирсон III закон расподеле (Т – IV, Прохаска, 2003; Прохаска и Ристић, 1996)

$\mu_y$  - средња вредност случајно променљиве  $y$ ,

$\sigma_y$  - стандардна девијација случајно променљиве  $y$ .

Теоријске вредности случајно променљиве  $X(T)$  се добијају помоћу формуле:

$$X(T) = 10^{y(T)} \quad \text{или} \quad X(T) = e^{y(T)} \quad (3.54)$$

### 3.1.3.5 Гумбелова двоструко експоненцијална расподела, расподела екстремних вредности ТИП I

Гумбелова расподела вероватноће или EV1 (Extreme Value 1, Eng.) је двопараметарска расподела где фигуришу само параметар локације  $\xi$  и размере  $\alpha$ . То је гранични случај основне расподеле екстремних вредности када  $\kappa \rightarrow 0$ . Често је ова расподела вероватноће основна у пробабилистичким анализама екстремних догађаја нпр. падавине у Канади (Millington et al., 2011). Функција густине и функција расподеле су дефинисане у једначинама (3.55) и (3.56) и приказане на сликама 3.6 и 3.7.

Функција густине вероватноће:

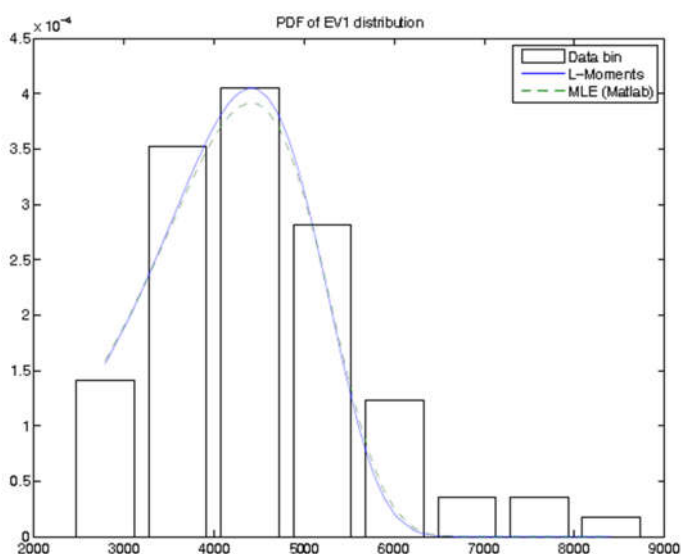
$$f(x) = \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x-\xi}{\beta}} e^{-\frac{x-\xi}{\beta}}, \quad -\infty \leq x < +\infty \quad (3.55)$$

Параметри расподеле су:

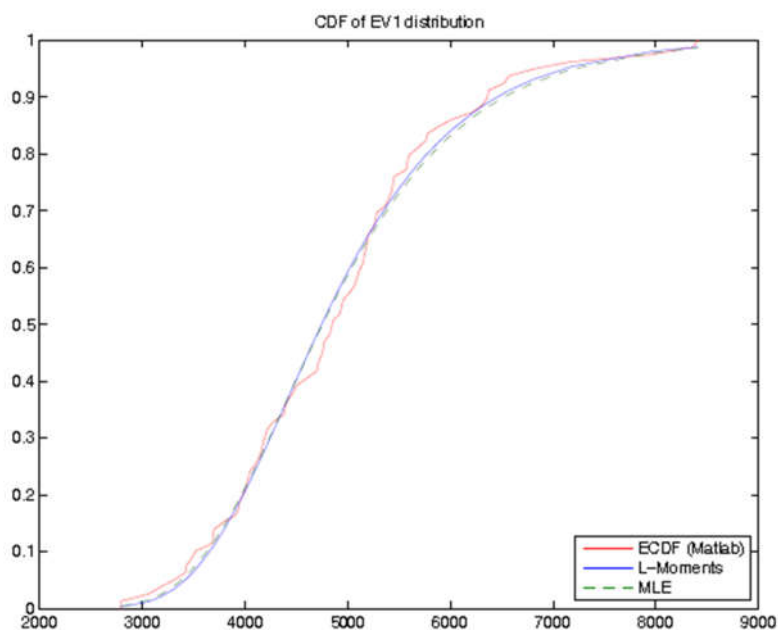
- $\xi > 0$  – параметар локације и мод расподеле ( $\xi = Mo$ );
- $\beta > 0$  – параметар размере.

Функција расподеле тада има облик:

$$F(X) = e^{-e^{-\frac{x-\xi}{\beta}}} \quad (3.56)$$



Слика 3.6 Густина Гумбелове расподеле вероватноћа за параметре оцењене методама L-MOM и MLE, максималних годишњих протока реке Дунав на х. с. Бездан за период 1931. – 2014.



Слика 3.7 Кумулативна функција Гумбелове расподеле вероватноћа за параметре оцењене методама L-MOM и MLE и емпиријска расподела, максималних годишњих протока реке Дунав на x. с. Бездан за период 1931. – 2014.

Параметри расподеле се тачкасто оцењују у моделу ПРОИЛ методом момената (једначине (3.78), (3.79)). При дефинисању маргиналних расподела копула оцењивање се врши методом Л-момената (једначине (3.87), (3.88)) и методом максималне веродостојности (једначине (3.100) - (3.103)). Једначине су приказане у табелама 3.1, 3.2, 3.3. у поглављу 3.1.4.

$$\text{Увођењем стандардизоване променљиве: } y = \frac{x - \xi}{\beta} \quad (3.57)$$

функција густине вероватноће се трансформише у:

$$g(y) = e^{-y - e^{-y}} = e^{-y} \cdot e^{-e^{-y}}, \quad -\infty \leq x < +\infty \quad (3.58)$$

а функција расподеле:

$$G(Y) = e^{-e^{-y}} \quad (3.59)$$

Веза између основне и стандардизоване променљиве је:

$$x = \xi + \beta \cdot y \quad (3.60)$$

Теоријске вредности случајно променљиве  $X(T)$  се добијају помоћу формуле:

$$X(T) = K_G(T) \cdot \sigma + \mu \quad (3.61)$$

где је  $T$  – повратни период у годинама.

$K_G(T)$  - Фактор фреквенце чије се нумеричке вредности могу наћи у табели T – VI (Прохаска, 2003; Прохаска и Ристић, 1996).

### 3.1.3.6 Општа расподела екстремних вредности

Када се ради о великим водама обично се за конструкцију копула бирају маргине из фамилије опште расподеле екстремних вредности, GEV (General Extreme Value, Eng.) која представља комбинацију EV1, Фрешеове (EV2, Extreme value 2, Eng.) и Вибулове (EV3, Extreme value 3, Eng.) расподеле. Ово је тропараметарска расподела која садржи параметре локације, размере и облика.

Густина вероватноће и кумулативна вероватноћа су дефинисане у једначинама (3.119) и (3.120) и приказане на сликама 3.8 и 3.9, респективно:

$$f(x) = \frac{1}{\beta} \left( 1 - \omega \frac{x - \omega}{\beta} \right)^{\frac{1}{\omega} - 1} F(x) \quad (3.62)$$

$$F(x) = \exp \left[ - \left( 1 - \omega \frac{x - \xi}{\beta} \right)^{\frac{1}{\omega}} \right] \quad (3.63)$$

где су:

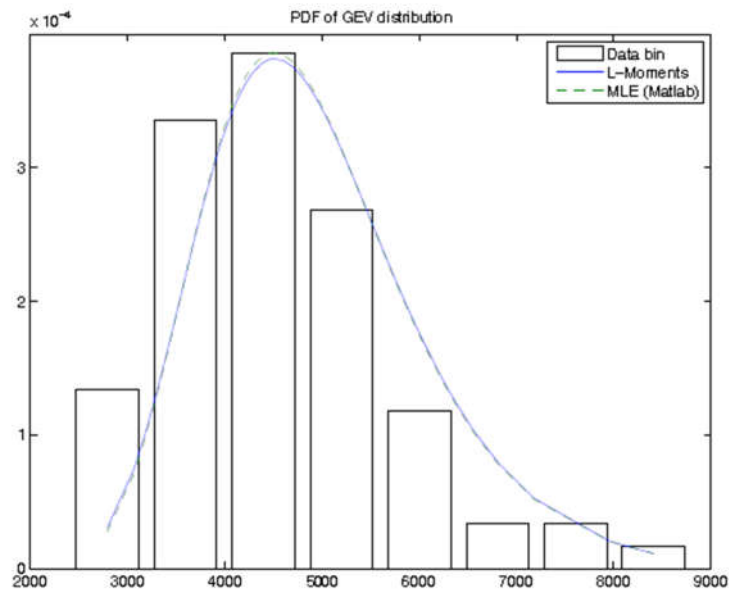
$\xi \in R$  - параметар локације,

$\beta > 0$  - параметар размере,

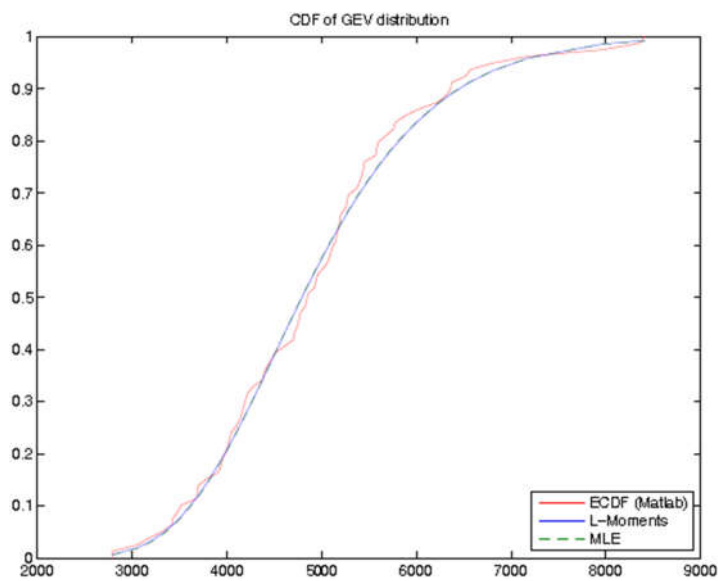
$\omega \neq 0$  - параметар облика који се добија из коефицијента асиметрије који је основни показатељ, репрезент репова расподела, тако при  $\omega = 0$  имамо EV1 расподелу, за  $\omega > 0$  EV2 расподелу док је за  $\omega < 0$  расподела EV3 (Millington et al., 2011).

Параметри расподеле се тачкасто оцењују при дефинисању маргиналних расподела копула методом Л-момената (једначине (3.89) - (3.92)) и методом максималне веродостојности (једначине (3.104) - (3.107)). Једначине су приказане у табелама 3.2, 3.3 у поглављу 3.1.4.





Слика 3.8 Густина  $GEV$  расподеле вероватноћа за параметре оцењене методама  $L$ - $MOM$  и  $MLE$ , максималних годишњих протока реке Дунав на х. с. Бездан за период 1931. – 2014.



Слика 3.9 Кумулативна функција  $GEV$  расподеле вероватноћа за параметре оцењене методама  $L$ - $MOM$  и  $MLE$  и емпиријска расподела, максималних годишњих протока реке Дунав на х. с. Бездан за период 1931. – 2014.

3.1.4 Сумарни приказ оцена параметара расподела методом момената, методом Л-момената и максималне веродостојности

Табела 3.1. Тачкасте оцене параметара расподела по методу моменатау моделу ПРОИЛ

Расподела	Конвенционални моменти
Лог-нормална II (Прохаска, 2003; Прохаска и Ристић, 1996)	$\mu_y = \overline{\ln x}$ (3.64) $\sigma_y = S_{\ln x}$ (3.65) $\mu_y$ - параметар локације (средња вредност), $\sigma_y$ - параметар размере (стандардна девијација).
Лог-нормална III (Прохаска, 2003; Прохаска и Ристић, 1996)	Познато $x_0 = \text{const}$ : $\mu_y = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ln(x_i - x_0)$ (3.66) $\sigma_y = \sqrt{\sum_{i=1}^N [\ln(x_i - x_0) - \bar{y}]^2 / (N - 1)}$ (3.67) Када је $x_0$ непознато, параметар се бира тако да расподела постане симетрична тј. $m_3 = 0$ . $m_3 = \frac{1}{N} \left[ \sum_{i=1}^N \ln(x_i - x_0) - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ln(x_i - x_0) \right]^3 = 0$ (3.68) $\mu_y$ - параметар локације (средња вредност), $\sigma_y$ - параметар размере (стандардна девијација), $m_3$ – мера асиметрије.

<p>Тропараметарска Гама расподела – Пирсон III (Прохаска, 2003; Прохаска и Ристић, 1996)</p>	$\mu'_1 = E(x) = \mu = \xi + \beta\omega \quad (3.69)$ $\mu'_2 = D(x) = \beta^2 \cdot \omega = \sigma^2 \quad (3.70)$ <p><math>\mu'_1</math> - први обични момент, <math>\mu'_2</math> - други централни момент.</p> <p>Параметри расподеле су:</p> $C_s = \frac{2}{\sqrt{\omega}} \Rightarrow \omega = \left( \frac{2}{\sqrt{C_s}} \right)^2 \quad (3.71)$ $(3.69) \Rightarrow \xi = \mu - \beta\omega \quad (3.72)$ $(3.70) \Rightarrow \beta = \frac{\sigma^2}{\omega} = \frac{\sigma}{\sqrt{\omega}} \quad (3.73)$ <p>(3.71), (3.73) <math>\rightarrow</math> (3.72):</p> $\xi = \mu - \left( \frac{4}{C_s^2} \right) \cdot \left( \frac{\sigma \cdot C_s}{2} \right) = \mu - 2 \frac{\sigma}{C_s} \quad (3.74)$
<p>Лог-Пирсон III (Прохаска, 2003; Прохаска и Ристић, 1996)</p>	$\mu = \xi + \beta\omega \quad (3.75)$ $\sigma = \beta\omega^{1/2} \quad (3.76)$ $\gamma_1 = 2 / \omega^{1/2} \quad (3.77)$ <p><math>\mu</math> - средња вредност, <math>\sigma</math> - стандардна девијација (<math>\sigma &gt; 0</math>), <math>\gamma_1</math> – коефицијент асиметрије, <math>\xi</math> – параметар локације, <math>\beta</math> – параметар размере, <math>\omega</math> – параметар облика.</p>

	$\mu_1' = \mu = \xi + \gamma \cdot \beta \quad (3.78)$
	$\mu_2' = D(x) = \frac{\pi^2 \cdot \beta^2}{6} \quad (3.79)$
<p>Гумбелова расподела (Extreme value Type I) (Прохаска, 2003; Прохаска и Ристић, 1996)</p>	<p><math>\mu_1'</math> - први обични момент, <math>\mu_2'</math> - други централни момент, <math>\xi</math> – параметар локације, <math>\beta</math> – параметар размере, <math>\gamma</math> - Ојлерова константа (<math>\approx 0.577216</math>), <math>\pi</math> - Лудолфов број (<math>\pi = 3,14159</math>), <math>C_s = 1.14</math> - коефицијент асиметрије.</p>

Табела 3.2. Тачкасте оцене параметара расподела по методи Л-момената у моделу КОПУЛА

Расподела	Л - моменти
	$\mu_y = \ln \lambda_1 - \frac{\sigma_y^2}{2} \quad (3.80)$
	$\sigma_y = 2 \operatorname{erf}^{-1}(t) \quad (3.81)$
<p>Лог-нормална II (Naghattini, 2017)</p>	<p><math>\mu_y</math> - параметар локације (средња вредност), <math>\sigma_y</math> - параметар размере (стандардна девијација),</p> $\operatorname{erf}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-u^2} du \text{ - функција грешке} \quad (3.82)$ $\operatorname{erf}^{-1}(t) = \frac{u}{\sqrt{2}} \text{ - инверзна функција грешке} \quad (3.83)$ <p><math>u</math> – стандардизована случајно променљива која се покорава нормалној расподели: <math>\Phi[(t + 1)/2]</math></p>
<p>Лог-Пирсон III (Naghattini, 2017)</p>	$\mu = \lambda_1 \quad (3.84)$

	$\sigma = \frac{\lambda_2 \pi^{1/2} \omega^{1/2} \Gamma(\omega)}{\Gamma(\omega + 0.5)} \quad (3.85)$ $\gamma_1 = 2\omega^{1/2} \text{sign}(\tau_3) \quad (3.86)$ <p> <math>\mu</math> - средња вредност,  <math>\sigma</math> - стандардна девијација (<math>\sigma &gt; 0</math>),  <math>\gamma_1</math> - коефицијент асиметрије,  <math>\omega</math> - параметар облика,  <math>\Gamma(\cdot)</math> - Гама функција (3.50).         </p>
<p>Гумбелова расподела (Extreme value Type I) (Hosking, 1990; Naghetini, 2017)</p>	$\beta = \frac{\lambda_2}{\log 2} \quad (3.87)$ $\xi = \lambda_1 - \beta\gamma \quad (3.88)$ <p> <math>\xi</math> - параметар локације,  <math>\beta</math> - параметар размере,  <math>\gamma</math> - Ојлерова константа (<math>\approx 0.577216</math>),  <math>\pi</math> - Лудолфов број (3,14159).         </p>
<p>Опште расподела екстремних вредности (GEV) (Hosking, 1985; Sankarasubramanian and Srinivasan 1999; Naghetini, 2017)</p>	$\omega = 7.8590c + 2.9554c^2 \quad (3.89)$ $c = \frac{\{2\beta_1 - \beta_0\}}{\{3\beta_2 - \beta_0\}} - \frac{\{\log 2\}}{\{\log 3\}} \quad (3.90)$ $\lambda_2 = \beta(1 - 2^{-\omega})\Gamma(1 + \omega) / \omega \quad (3.91)$ $\lambda_1 = \xi + \left(\frac{\beta}{\omega}\right)(1 - \Gamma(1 + \omega)) \quad (3.92)$ <p> <math>\xi</math> - параметар локације,  <math>\beta</math> - параметар размере,  <math>\omega</math> - параметар облика.         </p>

Табела 3.3. Тачкасте оцене параметара расподела по методи Максималне веродостојности у моделу КОПУЛА

Расподела	Параметри
Лог-нормална II (Kite, 1974; Naghettini, 2017)	$L(\mu_y, \sigma_y) = L(X_1, X_2, \dots, X_N, \mu_y, \sigma_y)$
	$\mu_y = \sum_{i=1}^N \frac{\ln X_i}{N} \quad (3.93)$
	$\sigma_y^2 = \sum_{i=1}^N \frac{(\ln X_i - \mu_y)^2}{N} \quad (3.94)$
	$\mu_y$ - средња вредност (параметар локације), $\sigma_y$ - стандардна девијација (параметар размере).
Лог-Пирсон III (Abramowitz and Stegun, 1972; Naghettini, 2017)	$L(\omega, \beta, \xi) = L(X_1, X_2, \dots, X_N, \omega, \beta, \xi)$
	$\sum_{i=1}^N \ln(X_i - \xi) = N\omega\beta \quad (3.95)$
	$N\psi(\beta) = \sum_{i=1}^N \ln \left[ \frac{\ln(X_i - \xi)}{\omega} \right] = N\omega\beta \quad (3.96)$
	$N = \omega(\beta - 1) \sum_{i=1}^N \frac{1}{\ln X_i - \xi} \quad (3.97)$
	$\psi(\beta) = \frac{\Gamma'(\beta)}{\Gamma(\beta)} \quad (3.98)$
	$\psi(\beta) \cong \ln \beta - \frac{1}{2\beta} - \frac{1}{12\beta^2} + \frac{1}{120\beta^4} - \frac{1}{252\beta^6} - \frac{1}{240\beta^8} - \frac{1}{132\beta^{10}} \quad (3.99)$ <p> <math>\Gamma(\cdot)</math> - Гама функција (3.50),  <math>\xi</math> – параметар локације,  <math>\beta</math> – параметар размере,  <math>\omega</math> – параметар облика.                 </p>

<p>Гумбелова расподела (Rao and Named, 2000)</p>	$L(\beta, \xi) = L(X_1, X_2, \dots, X_N, \beta, \xi)$ $\frac{\partial}{\partial \beta} \ln[L(\beta, \xi)] = -\frac{N}{\beta} + \frac{1}{\beta^2} \sum_{i=1}^N (X_i - \xi) - \frac{1}{\beta^2} \sum_{i=1}^N (X_i - \xi) e^{\left(-\frac{X_i - \xi}{\beta}\right)} = 0 \quad (3.100)$ $L(\beta, \xi) = \frac{N}{\beta} - \frac{1}{\beta} \sum_{i=1}^N e^{\left(-\frac{X_i - \xi}{\beta}\right)} = 0 \quad (3.101)$ <p>Комбинацијом једначина (3.100) и (3.101) добија се израз за <math>F(\beta)</math>:</p> $F(\beta) = \sum_{i=1}^N X_i e^{\left(-\frac{X_i}{\beta}\right)} - \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i - \beta\right) \sum_{i=1}^N e^{\left(-\frac{X_i}{\beta}\right)} = 0 \quad (3.102)$ <p>Из једначине (3.102) се добија параметар <math>\beta</math>, док се <math>\xi</math> израчунава помоћу израза (3.101) као:</p> $\xi = \beta \ln \left[ \frac{N}{\sum_{i=1}^N e^{\left(-\frac{X_i}{\beta}\right)}} \right] \quad (3.103)$ <p><math>\xi</math> – параметар локације, <math>\beta</math> – параметар размере.</p>
<p>Општа расподела екстремних вредности (GEV) (Hosking, 1985; Naghattini, 2017)</p>	$L(\beta, \xi, \omega) = L(X_1, X_2, \dots, X_N, \beta, \xi, \omega)$ $\frac{1}{\beta} \left[ \sum_{i=1}^N e^{(-Y_i - \omega Y_i)} - (1 - \omega) \sum_{i=1}^N e^{(\omega Y_i)} \right] = 0 \quad (3.104)$ $\frac{1}{\omega \beta} \left[ \sum_{i=1}^N e^{(-Y_i - \omega Y_i)} - (1 - \omega) \sum_{i=1}^N e^{(\omega Y_i)} + N - \sum_{i=1}^N e^{(-Y_i)} \right] = 0 \quad (3.105)$ $\frac{1}{\omega^2} \left[ \sum_{i=1}^N e^{(-Y_i - \omega Y_i)} - (1 - \omega) \sum_{i=1}^N e^{(\omega Y_i)} + N - \sum_{i=1}^N e^{(-Y_i)} \right] + \frac{1}{\omega} \left[ -\sum_{i=1}^N Y_i + \sum_{i=1}^N Y_i e^{(Y_i)} + N \right] = 0 \quad (3.106)$

$$Y_i = \frac{1}{\omega} \ln \left[ 1 - \omega \left( \frac{X_i - \xi}{\beta} \right) \right] \quad (3.107)$$

$\xi$  – параметар локације,

$\beta$  – параметар размере,

$\omega$  – параметар облика.

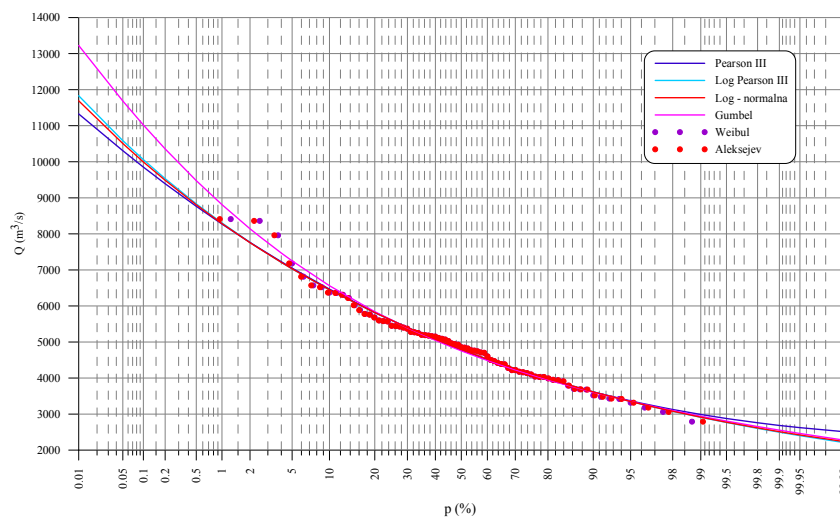


### 3.1.5 Тестови сагласности теоријских и емпиријских функција расподеле

За тестирање сагласности теоријских и емпиријских функција расподеле у моделу ПРОИЛ користе се следећи тестови: непараметарски Колмогоров – Смирнов, Пирсонов  $\chi^2$  тест и Крамер – фон Мизес или  $\rho\omega^2$  тест. На слици 3.10 илустративно су приказане теоријске функције расподеле вероватноћа: Пирсон III, Лог-Пирсон III, Лог-нормал II.

У копула процедури квалитет прилагођавања расподеле узорку процењује се применом Андерсон – Дарлинг и Колмогоров-Смирнов тестова. При избору маргиналне расподеле највећа тежина је дата Андерсон - Дарлинг тесту из разлога што он „боље третира“ репове расподела (ближе екстремним вредностима).

Увек се намеће питање избора расподеле. Генерално правило је да дистрибуција са већим бројем параметара боље описује серије мерених података. У хидролошкој пракси се показало да је код мањег узорка ефикасна EV1 расподела, али са порастом броја чланова низа изнад педесет боље прилагођавање даје GEV расподела (Millington et al., 2011).



Слика 3.10 Упоредни приказ теоријских и емпиријских функција расподела вероватноће максималних годишњих протока реке Дунав на профилу x. с. Бездан (период 1931.-2014.)

3.1.5.1 Пирсонов  $\chi^2$  тест

Користи се за тестирање функције густине. Нултом хипотезом ( $H_0$ ) се претпоставља да емпиријска расподела следи неку теоријску функцију густине, супротно алтернативној хипотези.

Прво је потребно срачунати тест статистику:

$$\chi^2 = \sum_{j=k}^1 \frac{(f_j - f_{t,j})^2}{f_{t,j}} \quad (3.108)$$

где су:

$f_j$  – апсолутна фреквенца  $j$ -тог класног интервала,

$f_{t,j}$  – теоријска фреквенца  $j$ -тог класног интервала,

$\delta$  – број класних интервала.

Функција густине вероватноће по  $\chi^2$  расподели је:

$$f(\chi^2) = \frac{1}{2^{\nu/2} \cdot \Gamma(\nu/2)} \cdot (\chi^2)^{\frac{\nu-2}{2}} e^{-\frac{1}{2}\chi^2}, \quad \nu > 0; 0 \leq \chi^2 \leq +\infty \quad (3.109)$$

где су:

- $\nu = \delta - r - 1$  - број степени слободе,
- $r$  – број параметара теоријске расподеле,
- Гама расподела:  $\Gamma(\nu/2) = \int_0^{\infty} \chi^2^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-x} dx$  (3.110)

Са усвојеним прагом значајности  $\alpha$ , може се тврдити да ће статистика  $\chi^2$  по једначини (3.108) бити већа од критичне вредности  $\chi_{1-\alpha}^2$  по једначини (3.109).

Нумеричке вредности  $\chi_{1-\alpha}^2$  се могу наћи у табели Т – VII (Прохаска, 2003).

Математички написано:

$$P(\chi^2 > \chi_{2_{1-\alpha}}^2) = \alpha \quad (3.111)$$

Поље одбацивања нулте хипотезе је  $(\chi_{2_{1-\alpha}}^2, +\infty)$ , док је поље прихватања нулте хипотезе  $(0, \chi_{2_{1-\alpha}}^2)$ .

Израз за теоријску апсолутну фреквенцу је:

$$f_{t,j} = \Delta p \sum_{j=\delta}^1 f_j \quad (3.112)$$

где је:

- $\Delta p_j = F(x_g) - F(x_d)$  - теоријска вероватноћа случајно променљиве  $x$  на  $j$ -том класном интервалу,
- $x_g$  и  $x_d$  – горња и доња граница интервала  $j$ , респективно.

$$\text{Услов прихватања нулте хипотезе је: } \chi^2 \leq \chi_{2,1-\alpha}^2 \quad (3.113)$$

### 3.1.5.2 Непараметарски тест Колмогоров - Смирнов

За разлику од Пирсоновог  $\chi^2$  теста користи се за тестирање прилагођавања функције расподеле, тако да се нулта хипотеза дефинише:

$$H_0 : F_N(x) \equiv F(x),$$

супротно алтернативна:

$$H_a : F_N(x) \neq F(x)$$

где су:

- $F(x)$  – теоријска функција расподеле;
- $F_N(x)$  – емпиријска функција расподеле уређеног низа;
- $N$  – обим узорка.

За оцену величине одступања расподела узима се највећа апсолутна разлика између теоријске и емпиријске функције расподеле:

$$D_N = \max |F_N(x) - F(x)|, \quad -\infty < x < +\infty \quad (3.114)$$

Како је променљива  $X$  случајна величина онда је и  $D_N$  случајна величина која се покорава Колмогоровом закону расподеле. Нова случајно променљива је:  $D_N \sqrt{N}$ , чија вероватноћа да неће бити већа од задатог прага  $\lambda$  износи:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P(D_N \sqrt{N} \leq \lambda) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2 \lambda^2} = Q(\lambda) \quad (3.115)$$

независно од типа теоријске расподеле  $F(x)$ .

При тестирању критична вредност се дефинише као:

$$D_0 = \frac{\lambda_0}{\sqrt{N}} \quad (3.116)$$

$$\text{тако да је } P(D_N \geq D_0) = \alpha \quad (3.117)$$

Зависно од прага значајности  $\alpha$  и обима узорка  $N$ , критичне вредности  $D_0$  се могу наћи у табели Г – VIII (Прохаска, 2003; Прохаска и Ристић, 1996).

Уколико је  $D_N \leq D_0$ , прихвата се нулта хипотеза и са вероватноћом  $P(D_N \geq D_0) = 1 - \alpha$  се случајно променљива  $X$  покорава теоријском закону расподеле.

### 3.1.5.3 Крамер - фон Мизес или $n\omega^2$ тест

Ако је временска серија хомогена и чланови серије независни  $N \geq 40$ , то се за оцену сагласности емпиријске и теоријске расподеле може користити тест  $n\omega^2$ .

Параметар  $n\omega^2$  одређује се на основу израза (Stephens, 1974):

$$n\omega^2 = \frac{1}{12N} + \sum_{i=1}^N \left[ P(x_i) - \frac{i-1}{2N} \right]^2 \quad (3.118)$$

где је:

- $P(x_i)$  – вредност функције расподеле случајне променљиве  $x_i$  по теоријској функцији расподеле,
- $i$  – редни број члана опадајућег низа,
- $N$  – укупан број података.

Сагласност емпиријске и теоријске расподеле при нивоу поверења  $\alpha$  одређује се на основу упоређења прорачунате вредности  $n\omega^2$  и критичне вредности  $n\omega_\alpha^2$ .

Критичне вредности за дати ниво поверења  $\alpha(\%)$ , приказане су у табели 3.4. (Stephens, 1974).

Табела 3.4 Квантили критеријума  $n\omega^2$

$\alpha$ (%)	50	20	10	5	3	2	1	0,1
$n\omega_\alpha^2$	0,1184	0,2412	0,3473	0,4614	0,5489	0,6198	0,7435	1,1679

Поступак прорачуна је следећи:

- временска серија се уреди у опадајући низ,

- рачуна се емпиријска расподела по формули  $\frac{2i-1}{2N}$  (3.119)
- рачуна се обезбеђеност  $x_i$  по теоријском закону расподеле,
- рачуна се вредност  $n\omega^2$ ,
- упоређује се вредност  $n\omega^2$  са критичном вредношћу  $n\omega_\alpha^2$  за ниво поверења  $\alpha$ .

Уколико је  $n\omega^2 > n\omega_\alpha^2$  хипотеза се одбацује и уколико имамо више расподела усваја се она са најмањом вредношћу  $n\omega^2$ .

#### 3.1.5.4 Андерсон-Дарлинг тест

Тест одбацује хипотезу уколико је добијена тест статистика већа од критичне вредности за усвојени интервал поверења ( $\alpha$ ). Најчешће се усваја  $\alpha=0,05$  који даје критичну вредност 2,5018. Овај број се онда упоређује са тест статистиком (3.120) (Stephens, 1974). Низ осматрања се поређа у растући поредак  $Y_1 < Y_2 < \dots < Y_n$ .

$$A^2 = -n - \sum_{i=1}^n \frac{2i-1}{n} [\ln(F(Y_i)) + \ln(1 - F(Y_{n+1-i}))] \quad (3.120)$$

#### 3.1.5.5 Корен средње квадратне грешке

Квадратни корен средње квадратне грешке (Root mean square error, RMSE, Eng.) представља меру разлике теоријских и емпиријских вредности. Дефинише се помоћу релације:

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (F(x_i) - F_N(x_i))^2} \quad (3.121)$$

где су:

- $F(x_i)$  – теоријска функција расподеле;
- $F_N(x_i)$  – емпиријска функција расподеле уређеног низа;
- $N$  – број чланова низа.

Што је корен средње квадратне грешке мањи, то је прецизност модела већа. У КОПУЛа моделу је коришћен за оквирну процену сагласности између теоријских и

емпиријске расподеле вероватноћа, док се коначни суд о најбољем слагању доноси на основу Колмогоров – Смирнов (Поглавље 3.1.4.2) и Андерсон – Дарлинг тестова (Поглавље 3.1.4.4).

### 3.2 ПРОИЛ МОДЕЛ

Теорија вишедимензионалне коинциденције поплавних таласа на сектору река са притокама се ослања на практичну примену вишедимензионалних функција расподеле вероватноћа, односно њихове условне вероватноће. За репрезентативне варијабле, односно случајне променљиве, усвајају се истовремене квантитативне карактеристике хидрограма поплавних таласа на главној реци, односно на једној или више значајних притока. Ова докторска дисертација обухвата проблем истовремене појаве поплавног таласа на главној реци (реципијенту) и притокама и основни параметар хидрограма великих вода када се ради о систему заштите од поплава, проток (пик) поплавног таласа.

У складу са теоријом статистике, функција густине за димензионалну случајну променљиву се дефинише као (Прохаска и сарадници, 1978):

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{x-\mu_x}{\sigma_x} \left\{ \frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[ \frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_x^2} - \frac{2\rho(x-\mu_x)(y-\mu_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-\mu_y)^2}{\sigma_y^2} \right] \right\}} \quad (3.122)$$

где су:

$X$  и  $Y$  случајно променљиве (карактеристике поплавног таласа) главног тока и његове притоке,

$x$  и  $y$  једновремене реализације случајно променљивих  $X$  и  $Y$ ,

$\mu_x$  и  $\mu_y$  математичка очекивања случајно променљивих  $X$  и  $Y$ ,

$\sigma_x$  и  $\sigma_y$  стандардне девијације случајно променљивих  $X$  и  $Y$ ,

$\rho$  коефицијент корелације између случајно променљивих  $X$  и  $Y$ :

$$\rho = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_x)(y - \mu_y) \cdot f(x, y) dx dy}{\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_x) f(x) dx} \cdot \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (y - \mu_y) f(y) dy}} \quad (3.123)$$

За функцију густине дводимензионалне случајно променљиве  $f(x,y)$ , маргиналне густине  $f(x, \cdot)$  и  $f(\cdot, y)$  су дефинисане као:

$$f(x, \cdot) = \int_{y=-\infty}^{y=\infty} f(x, y) dy \quad (3.124)$$

$$f(\cdot, y) = \int_{x=-\infty}^{x=\infty} f(x, y) dx \quad (3.125)$$

Маргиналне кумулативне функције вероватноће се одређују на следећи начин:

$$F(x, \cdot) = \int_{t=-\infty}^{t=x} f(t, \cdot) dt \quad (3.126)$$

и

$$F(\cdot, y) = \int_{z=-\infty}^{z=y} f(\cdot, z) dz \quad (3.127)$$

Кумулативна функција вероватноће  $F(x,y)$ , дефинисана је на следећи начин:

$$F(x, y) = P[X \leq x \cap Y \leq y] = \int_{t=-\infty}^{t=x} \int_{z=-\infty}^{z=y} f(t, z) dt dz \quad (3.128)$$

Кумулативна функција вероватноће  $\Phi(x,y)$ , се може срачунати помоћу израза:

$$\Phi(x, y) = \int_{t=x}^{t=+\infty} \int_{z=y}^{z=+\infty} f(t, z) dt dz = P[X > x \cap Y > y] = 1 - P[X > x \cup Y > y] = 1 - F(x, \cdot) - F(\cdot, y) + F(x, y) \quad (3.129)$$

### 3.2.1 Трансформација променљивих – функција густине

У вишедимензионалним статистичким анализама карактеристика поплавних таласа, хидролози се суочавају са чињеницом да већина разматраних карактеристика поплавног таласа не подлеже нормалној расподели. Ова чињеница се превазилази претпоставком да подлежу Лог-нормалној расподели и због тога их је потребно прво логаритмовати (Prohaska et al., 1999):

$$LX = \log X \quad (3.130)$$

$$LY = \log Y \quad (3.131)$$

Претходно описан модел служи за одређивање кумулативних функција вероватноће, поступак постаје сложенији уколико се ради о тродимензионалном

простору  $X$ ,  $Y$ , и  $\rho$ . Из тог разлога се користи графо-аналитичка метода која се може наћи у Abramowitz and Stegun (1972).

Метода се односи на стандардизоване нормалне променљиве, па због тога поменуте карактеристике поплавних таласа треба трансформисати на следећи начин:

$$\psi = (lx - \overline{LX}) / \sigma_{lx} \quad (3.132)$$

$$\xi = (ly - \overline{LY}) / \sigma_{ly} \quad (3.133)$$

Стандардизоване променљиве  $\psi$  и  $\xi$  имају очекиване вредности  $\mu_\psi = \mu_\xi = 0$  и варијансе  $\sigma_\psi = \sigma_\xi = 1$ .

После свих претходно наведених трансформација, функција густине за стандардизовану дводимензионалну случајну променљиву се дефинише на следећи начин:

$$f(\psi, \xi) = \frac{1}{2\pi \cdot \sqrt{1-\rho^2}} e^{\left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} [\psi^2 - 2\rho\psi\xi + \xi^2] \right\}} \quad (3.134)$$

Вредност коефицијента корелације  $\rho$  замењује се величином  $R$ , која се може прорачунати из измерених, трансформисаних серија (3.135).

$$R = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2}} \quad (3.135)$$

Користећи овај параметар, након поједностављења једначине (3.134), може се написати следећи израз:

$$\iint_A f(\psi, \xi) d\psi d\xi = 1 - e^{\left\{ -\frac{\lambda^2}{2(1-R^2)} \right\}} \quad (3.136)$$

Површински интеграл дат једначином (3.136), на пример над површином  $\psi, \xi \in A$ , представља вероватноћу реализације догађаја  $\psi = h$  и  $\xi = k$  унутар површине  $A$  која је одређена елипсом по следећој једначини:

$$\psi^2 - 2\rho\psi\xi + \xi^2 = \lambda^2 \quad (3.137)$$

Вредност  $\lambda$  је константа при решавању интеграла (3.136) и зависи од променљивих  $\psi$  и  $\xi$  и од коефицијента корелације  $\rho$ .



За сваку вредност  $\lambda = const$ , може се срачунати вероватноћа унутар елипсе дефинисане изразом (3.137).

Изједначавањем експоненцијалног дела једначине (3.134) са експоненцијалним делом једначине (3.136), добија се једначина (3.137) која се може написати на следећи начин:

$$\xi^2 - 2\rho\psi\xi + (\psi^2 - \lambda^2) = 0 \quad (3.138)$$

Као што је претходно речено свакој вредности  $\lambda = const$ . одговара елипса где за сваку вредност  $\psi = h$  добијамо два пресека  $\xi$ ,  $\xi = k_1$  и  $\xi = k_2$ .

Тако, решавањем квадратне једначине (3.138) за сваку вредност  $\lambda = const$ . и за одговарајућу вероватноћу дефинисану једначином (3.136), добијају се две координате ( $\xi = k_1$  и  $\xi = k_2$ ) представљајући пресек корелационе елипсе и линије  $\psi = h_0$ . Понављајући прорачун за неколико вредности  $\lambda$ , мењајући вредност  $\psi = h_0$ , конструише се неколико елипси.

После сваког прорачуна је потребно извршити трансформацију у складу са једначинама (3.132) и (3.133) како би се добиле стварне (нестандардизоване) вредности параметара поплавног таласа уместо стандардизованих логаритмованих вредности.

### 3.2.2 Кумулативна функција расподеле

У математичком моделу који даје функцију густине (3.143) се могу јавити потешкоће због сложености прорачуна.

Како би се оне превазишле одређује се кумулативна функција расподеле коју су развили Abramowitz и Stegun (1972). У прорачунској шеми се користи графо-аналитички поступак којим се дефинише кумулативна вероватноћа  $\Phi(h, k, R)$ , у функцији вероватноћа  $\Phi(h, 0, R)$  и  $\Phi(k, 0, R)$  где се уместо коефицијента корелације  $\rho$ , рачуна коефицијент корелације  $R$ . Конкретније, вероватноћа  $\Phi(h, k, \rho)$  се може срачунати на следећи начин:

$$\Phi(h, k, R) = \Phi\left(h, 0, \frac{(Rh - k) \cdot \operatorname{sgnh}}{\sqrt{h^2 - 2Rhk + k^2}}\right) + \Phi\left(k, 0, \frac{(Rk - h) \cdot \operatorname{sgnk}}{\sqrt{h^2 - 2Rhk + k^2}}\right) - \begin{cases} 0 & hk \geq 0 \text{ и } h + k \geq 0 \\ 1 \\ 2 \end{cases} \quad (3.139)$$

где су  $\operatorname{sgnh}$  и  $\operatorname{sgnk}$  једнаки јединици када су  $h$  и  $k$  веће или једнаке нули, односно -1 када су  $h$  и  $k$  негативне вредности.

## 3.2.3 Прорачун вероватноће превазилажења

На крају се може усвојити алгоритам прорачуна вероватноће превазилажења који се састоји из следећих корака:

1. Саставити серије у складу са једначинама (3.130) и (3.131) –  $LX, LY$ ;
2. Одредити статистике усвојених серија којима ће се дефинисати функција густине расподеле (средње вредности -  $\overline{LX}, \overline{LY}$ ; варијансе -  $\sigma_{Lx}^2, \sigma_{Ly}^2$  и коефицијент корелације  $R$ );
3. Стандардизовати случајне променљиве  $LX$  и  $LY$  по једначинама (3.132) и (3.133) не би ли се добиле стандардизоване случајне променљиве које се померавају нормалном закону расподеле вероватноће,  $\psi$  и  $\xi$ ;
4. Направити мрежу у координатном систему не би ли се издвојиле све вредности  $X$  и  $Y$  за које ће се рачунати вероватноће превазилажења;
5. Изабрати одговарајуће вредности  $\psi = h_0 = g(x)$  и  $\xi = k_0 = g(y)$  за које ће се рачунати вероватноће превазилажења;
6. Користити дијаграм 26.2 из литературе (Abramowitz and Stegun, 1972) да би се срачунала вероватноћа  $\Phi(h_0, k_0)$  по једначини (3.139);
7. Добијене вероватноће графички представити у  $x$ - $y$  координатном систему;
8. Понављати кораке 5-7 док се све тачке не добију и исцртају;
9. Формирати изолиније једнаке вероватноће превазилажења тј. линије које означавају вероватноћу да ће  $X$  и  $Y$  истовремено бити превазиђено.

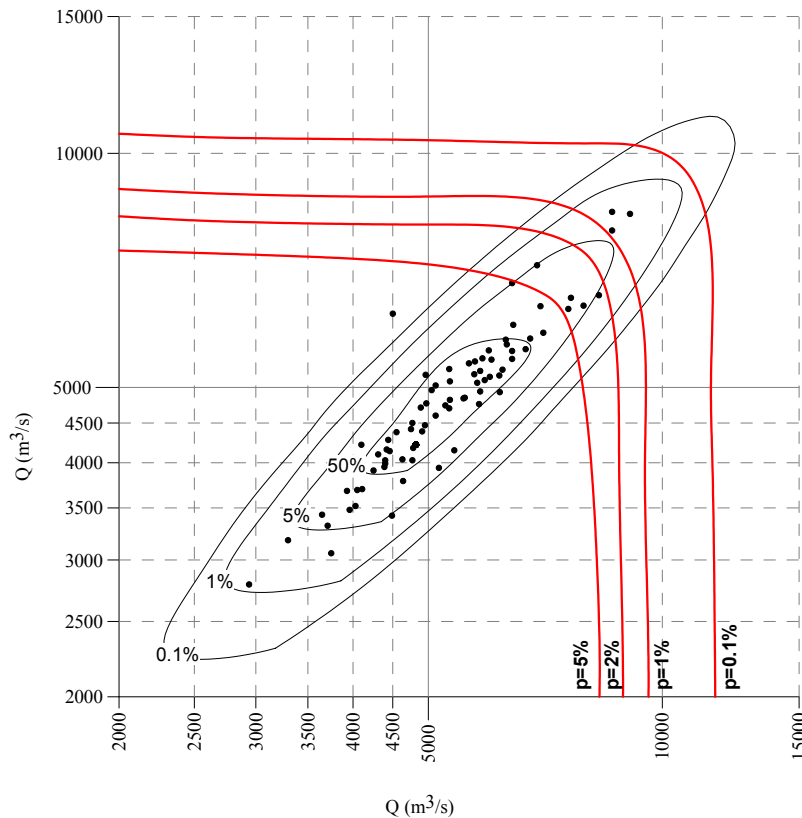
Још једном треба истаћи да приказана процедура захтева логаритмоване и стандардизоване вредности случајно променљивих  $X$  и  $Y$ . Због тога вредности  $h_0$  и  $k_0$  за које је срачуната вероватноћа превазилажења треба вратити у изворни облик помоћу израза (3.140) и (3.141), респективно:

$$x = 10^u = 10^{(\sigma_{Lx}\psi + \overline{LX})} = 10^{(\sigma_{Lx}h_0 + \overline{LX})} \quad (3.140)$$

$$y = 10^v = 10^{(\sigma_{Ly}\xi + \overline{LY})} = 10^{(\sigma_{Ly}k_0 + \overline{LY})} \quad (3.141)$$

Вредност добијена по описаној процедури представља вероватноћу да ће поплава коју описују вредности  $x_o$  и  $y_o$  превазићи изабрану комбинацију  $X$  и  $Y$ .

У Институту Јарослав Черни је направљен програм помоћу FORTRAN 77 програмског језика, „KOIN“ који се користи за рачунање описаних вероватноћа превазилажења. На слици 3.11 приказане су функција густине (елипсе) и кумулативна функција димензионалне расподеле вероватноћа (црвене линије). Црне тачке на графику представљају емпиријске вредности.



Слика 3.11 Функција густине и функција расподеле вероватноћа у моделу ПРОИЛ

Може се уочити да у релацијама, које су описане у овом поглављу, фигурише коефицијент корелације  $R$  као мера зависности поплавних таласа на два водотока. На основу релације (3.142) одређује се јачина успостављених зависности којом се одређује стандардна грешка коефицијента корелације:

$$\sigma_R = \frac{1-R^2}{\sqrt{N}} \quad (3.142)$$

где су:

$\sigma_R$  - грешка коефицијента корелације  $R$ ;

$N$  - укупан број података.

Усвојен је критеријум да се коефицијент корелације разликује од нуле уколико је његова апсолутна вредност три пута већа од грешке  $\sigma_R$ :

$$|R| \geq 3 \cdot \sigma_R \quad (3.143)$$

Према апсолутној вредности коефицијента корелације разликујемо три степена статистичке значајности коинциденције две случајне променљиве према критеријумима (Yevjevich, 1972):

Приближно апсолутно статистички значајне коинциденције:

$$a) |R| \geq 0.95 - 1.0 \quad (3.144)$$

Статистички значајне коинциденције:

$$b) |R| \geq 3 \cdot \sigma_R - 0.95 \quad (3.145)$$

Статистички безначајне коинциденције:

$$c) |R| \leq 3 \cdot \sigma_R \quad (3.146)$$

### 3.3 КОПУЛА МОДЕЛ

Дуго година су примат у анализи сложених феномена имале вишедимензионалне расподеле, пре свих нормална која је у потпуности била описана маргиналним расподелама варијабли и додатним параметром, Пирсоновим коефицијентом корелације. Она је у основи модела ПРОИЛ (поглавље 3.2).

Побољшања у примењеној математици показују да копуле могу да представљају користан алат за проучавање зависно променљивих. Коришћењем копула напушта се конвенционални приступ унапред задате функције расподеле вероватноће случајне променљиве и омогућава њен избор из различитих група расподела.

Копуле су алат за одређивање зависности неколико случајно променљивих. Термин копула потиче из латинског језика (copulare) што значи повезати или удружити. Први га уводи Sklar 1959. Године (Schmith, 2006), а главна намена је описивање веза неколико случајно променљивих.

Овакав приступ обухвата моделирање вероватноће појаве у вишедимензионалном простору моделирајући зависност појединачних чланова независно од закона расподеле вероватноће коме се сваки појединачно покорава чији је

крајњи циљ одређивање условних расподела вероватноће и повратног периода поплаве, као сложеног феномена (Nelsen, 2006).

Одређивање ризика у разним областима је увек актуелно, посебно када се ради о актуарској математици где су копуле одавно присутне, од краја XX века. Оне помажу не би ли се на основу односа између различитих варијабли и излаза дефинисала финансијска стабилност система који је пред доносиоцима одлука (Frees and Valdez, 1997).

Тако ризик од настајања поплаве и његова оцена захтевају вишедимензионалност, повезивање маргиналних расподела више варијабли са циљем дефинисања јединственог закона расподеле који поплаву описује. Обично се зависност између варијабли као што су пик, запремина и трајање протока приказивала помоћу биваријантних расподела. Најуобичајније расподеле у том контексту биле су нормална, лог-нормална, гама и расподела екстремне вредности. Главно ограничење оваквог приступа је појединачно понашање сваке варијабле или њихових трансформисаних вредности које се карактерише истом теоријском расподелом вероватноће појаве (Genest and Favre, 2007). Копуле, превазилазе ограничења овакве природе и њихова популарност у хидролошкој литератури постаје све већа.

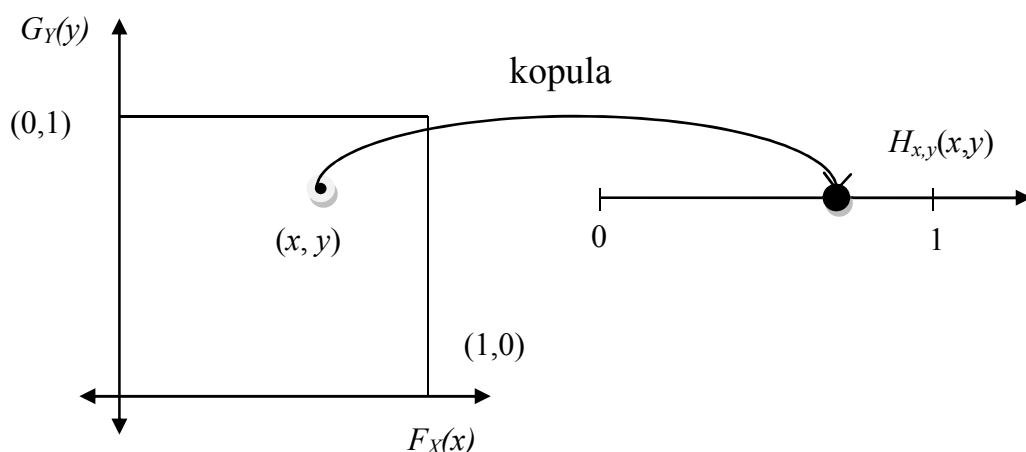
Математички модел се базира на вишедимензионалним функцијама расподеле вероватноће, односно њиховим условним вероватноћама. За релевантне случајне променљиве, разматрају се истовремене величине врха хидрограма поплавних таласа (пик) на главној реци и притоци.

Дефиниције, теореме и докази и појмови из овог поглавља су детаљније описани у (Favre et al., 2004; Frees and Valdez, 1997; Genest and Favre, 2007; Joe, 1997; Nelsen, 2006; Karmakar and Simonovic, 2009; Salvadori and De Michele, 2007; Salvadori et al., 2007; Shiao et al., 2006).

**Деф 3.3.1:** Копула је функција којом се спајају више функција расподеле вероватноће у једну заједничку расподелу (Слика 3.12).

Нека је дат пар случајно променљивих  $(X, Y)$  и нека су кумулативне функције расподеле од  $X$ ,  $F_X(x)=P[X\leq x]$ , а од  $Y$   $G_Y(y)=P[Y\leq y]$ . Њихова заједничка кумулативна функција расподеле биће  $H_{X,Y}(x, y)$ . Са слике 3.12. се види да сваки пар  $(x, y)$  одговара тачки јединичног четвороугла  $[0,1] \times [0,1]$  и он уређен као такав одговара броју  $H_{X,Y}(x, y)$  на интервалу  $[0,1]$  (Genest and Favre, 2007).

Све наведено вежиће под условом да су једнодимензионалне маргиналне расподеле униформне и неоппадајуће функције.



Слика 3.12 Графичка интерпретација функције КОПУЛА

### 3.3.1 Математички опис копуле

Функција копула се математички дефинише преко подкопула које представљају врсту „утемељених“, „2-растућих“ функција. Она је у ствари подкопула са доменом  $\mathbf{I}^2$ .

**Деф 3.3.1.1:** Дводимензионална подкопула је функција  $C'$  са следећим особинама:

- i.  $DomC' = S_1 \times S_2$ ,  
где су  $S_1$  и  $S_2$  елементи јединичног интервала  $\mathbf{I} = [0,1]$ .
- ii.  $C'$  је „2-растућа“ и „утемељена“ функција.
- iii. За свако  $u \in S_1$  и  $v \in S_2$  важи:  $C'(u,1) = u$  и  $C'(1,v) = v$ ,  
уз напомену да за сваки пар  $(u,v)$  из  $DomC'$ ,  $0 \leq C'(u,v) \leq 1$ , тако да је  $RanC'$  такође подскуп  $\mathbf{I}$ .

Нека је  $\mathfrak{R}$  реална права  $(-\infty, +\infty)$ , проширена реална права је онда  $\overline{\mathfrak{R}}$ ,  $[-\infty, +\infty]$ ,  $\overline{\mathfrak{R}}^2$  проширена реална равна  $\overline{\mathfrak{R}} \times \overline{\mathfrak{R}}$ . Четвороугао  $B$  у  $\overline{\mathfrak{R}}^2$  је Декартов производ два затворена интервала  $B = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$ . Углови четвороугла  $B$  су дефинисани тачкама:  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_1, y_2)$ ,  $(x_2, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$ .

Јединични квадрат  $\mathbf{I}^2$  је производ  $\mathbf{I} \times \mathbf{I}$  где је  $\mathbf{I} = [0,1]$ .

Двострука реална функција  $H$  је функција чији је домен  $(DomH)$  подскуп скупа  $\overline{\mathfrak{R}}^2$ , док је област дефинисаности (ранг),  $RanH$ , подскуп  $\mathfrak{R}$ .

**Деф 3.3.1.2:** Нека су  $S_1$  и  $S_2$  непразни подскупови скупа  $\overline{\mathfrak{R}}$ , и нека је  $H$  дводимензионална реална функција са доменом  $DomH = S_1 \times S_2$ . Четвороугао  $B = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$  је дефинисан Декартовим производом темена које су у  $DomH$ .

Тада је запремина  $V_H(B)$  једнака:

$$V_H(B) = H(x_2, y_2) - H(x_2, y_1) - H(x_1, y_2) + H(x_1, y_1) \quad (3.147)$$

**Деф 3.3.1.3:** Дводимензионална реална функција  $H$  је „2-растућа“ ако је  $V_H(B) \geq 0$  за све четвороуглове  $B$  чија се темена налазе у  $DomH$ .

**Деф 3.3.1.4:** Копула је дводимензионална подкопула  $C$  са доменом  $\mathbf{I}^2$ .

Копула је функција пресликавања  $C$  из  $\mathbf{I}^2$  у  $\mathbf{I}$  са следећим особинама:

i. За свако  $(u, v)$  у  $\mathbf{I}$ :

$$C(u, 0) = 0 = C(0, v) \text{ и} \quad (3.148)$$

$$C(u, 1) = u \text{ и} C(1, v) = v \quad (3.149)$$

Уколико је  $u = 0 \Rightarrow C = 0$  и  $v = 0 \Rightarrow C = 0$  што представља услов да функција буде „утемељена“.

ii. За свако  $u_1, u_2, v_1, v_2$  из  $\mathbf{I}$  тако да је  $u_1 \leq u_2$  и  $v_1 \leq v_2$ ,

$$C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) + C(u_1, v_1) \geq 0 \quad (3.150)$$

### 3.3.2 График копула

График било које копуле представља континуалну површину унутар јединичне коцке  $\mathbf{I}^3$  између Фреше-Хофдигових граница.

**Теорема 3.3.2.1:** Ако је  $C$  подкопула, тада за свако  $(u, v)$  у  $DomC$  важи:

$$\max(u + v - 1) \leq C(u, v) \leq \min(u, v) \quad (3.151)$$

Доказ теореме се може наћи у Nelsen (2006).

Како је свака подкопула, сама по себи копула, границе у неједнакости (3.151) представљају копуле (Nelsen, 2006) које се могу дефинисати изразима за свако  $(u, v) \in \mathbf{I}^2$ :

$$M(u, v) = \min(u, v) \quad (3.152)$$

$$W(u, v) = \max(u + v - 1) \quad (3.153)$$

Фрешеова горње гранична копула  $M$  представља јединично масовно ширење над главном дијагономом  $u = v$  јединичног квадрата. Аналогно доње гранична копула  $W$

представља јединично масовно ширење над споредном дијагоналом  $u = 1 - v$  јединичног квадрата.

Како су копуле дводимензионалне функције расподеле са јединичним униформним маргиналним расподелама, следи неједнакост:

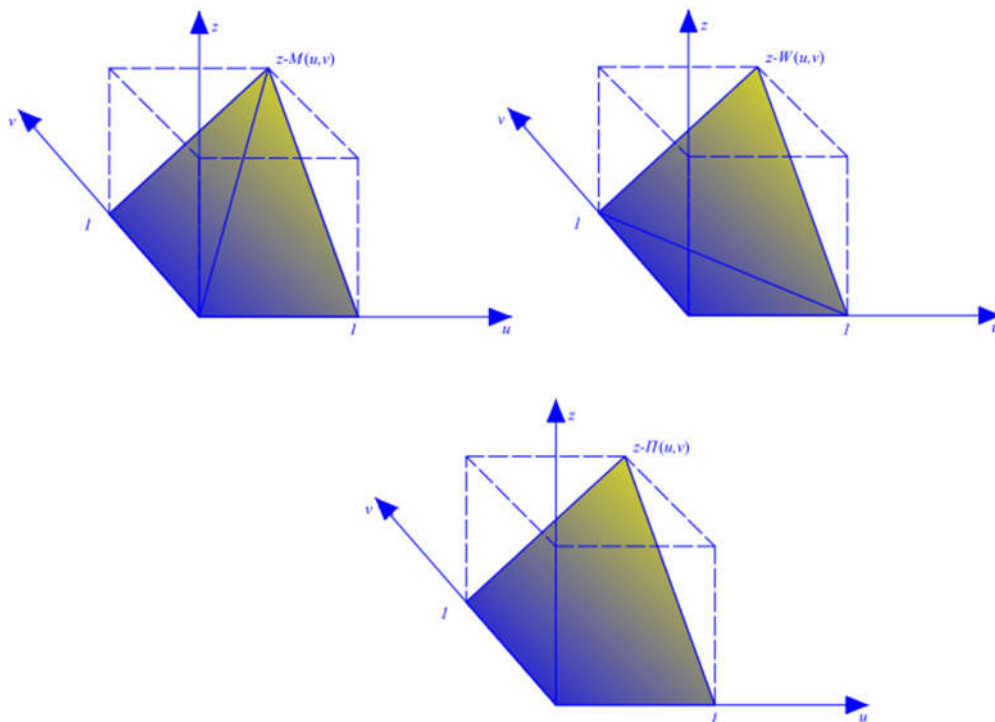
$$W(u, v) \leq C(u, v) \leq M(u, v) \text{ за } \forall (u, v) \in [0, 1]^2 \quad (3.154)$$

Из (3.154) се може закључити да је график сваке копуле ограничен одоздо са два троугла који заједно чине површ  $W$  и одозго са два троугла који заједно чине површ  $M$ .

Трећа врло важна копула у смислу граница је независна копула:

$$\Pi(u, v) = uv \text{ за } \forall (u, v) \in [0, 1]^2 \quad (3.155)$$

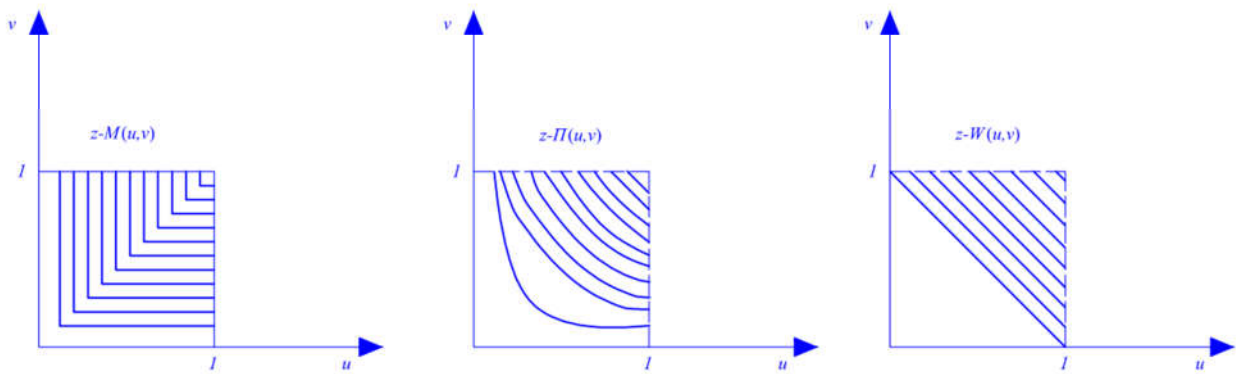
Независна копула одговара константној функцији расподеле једнакој 1 на јединичном квадрату.



Слика 3.13 Графици  $W$ ,  $M$  и  $\Pi$  копуле

Једноставнији начин графичког приказивања функције копула су тзв. контурни дијаграми (Слика 3.14).



Слика 3.14 Контурни дијаграми  $W$ ,  $M$  и  $\Pi$  копуле

### 3.3.3 Скларова теорема

У статистици копуле добијају на значају после 1959. године када је Sklar формулисао теорему (Nelsen, 2006) која носи његово име. Ова теорема разјашњава улогу коју копула има између вишедимензионалних функција расподела и њихових маргиналних расподела.

Ако је  $H$  заједничка расподела вероватноћа случајно променљивих  $X$  и  $Y$  са доменом  $\overline{\mathfrak{R}}^2$  тако да је:

- i.  $H$  је 2-растућа,
- ii.  $H(x, -\infty) = H(-\infty, y) = 0$  и  $H(\infty, \infty) = 1$ .

Тада је  $H$  „утемељена“ и како је  $\text{Dom}H = \overline{\mathfrak{R}}^2$ , има маргине  $F(x) = H(x, \infty)$  и  $G(y) = H(\infty, y)$ .

**Теорема 3.3.3:** Нека је  $H_{X,Y}(x,y)$  заједничка расподела вероватноће маргиналних вероватноћа  $F_X(x)$  и  $G_Y(y)$ . Онда постоји копула  $C$ :

$$H_{X,Y}(x,y) = C\{F_X(x), G_Y(y)\}, \forall (x,y) \in \overline{\mathfrak{R}}^2 \quad (3.156)$$

Ако су  $F_x$  и  $G_y$  непрекидне онда је копула јединствена функција у супротном је јединствено дефинисана на  $\text{Ran}F_X \times \text{Ran}G_Y$ .

Доказ теореме се може наћи у Nelsen (2006).

Последица Скларове теореме је следећи облик кумулативне функције расподеле  $H_{X,Y}(x,y)$  пара непрекидних случајно променљивих  $(X,Y)$  (Genest and Favre, 2007):

$$H(x,y) = C\{F(x), G(y)\}, x, y \in \mathfrak{R} \quad (3.157)$$

где су:

$F(x)$ ,  $G(y)$  – маргиналне расподеле;

$C: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$  = копула.

### 3.3.4 Мере повезаности (зависности)

Конструкција копула је уско повезана са мерама зависности. Маргиналне расподеле  $F_x(x)$  и  $G_y(y)$  могу бити саставни део било које копуле не носећи информацију о начину слагања, тако било која копула  $C$  у коју је „уграђен“ пар маргиналних расподела не носи директне информације о њима. Због тога је корисно дефинисати меру повезаности која се омогућује копулом.

У поглављу 3.2. приказан је Пирсонов коефицијент корелације али он није одговарајућа мера повезаности за вишедимензионалне расподеле вероватноћа које нису нормалне, коваријанса неће дати информације о зависности две случајно променљиве.

Најраспрострањеније мере зависности су Кендалов  $\tau_k$  и Спирманов ранг коефицијент  $\rho_s$ .

Кендалов коефицијент корелације је непараметарска мера повезаности и заснива се на броју слагања или неслагања у узорку пара мерења. Када парови случајно променљивих заједно варирају дешава се слагање, док када је варирање различито дешава се неслагање (Genest and Favre, 2007).

За пар  $(X, Y)$  са кумулативном функцијом расподеле  $H_{x,y}(x,y)$ ,  $\tau_k$  се дефинише као разлика између вероватноћа слагања и неслагања за два независна пара:

$(X_1, Y_1)$  и  $(X_2, Y_2)$  сваки са расподелом  $H_{x,y}(x,y)$  (Depuis, 2007):

$$\begin{aligned} \tau_{x,y} &= P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0] = \\ &= 2P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - 1 = 4 \int_0^1 \int_0^1 C(u,v) dC(u,v) - 1 \end{aligned} \quad (3.158)$$

где је:

$$\begin{aligned} P\{\text{saglasnost}\} &= P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] \\ P\{\text{nesaglasnost}\} &= P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0] \end{aligned} \quad (3.159)$$

Спирманов ранг коефицијент корелације  $\rho_s$ , се обично дефинише као Пирсонов коефицијент за рангове  $F_x(x)$  и  $G_y(y)$  за пар непрекидних случајно променљивих  $(X, Y)$  (Genest and Favre, 2007):

Нека је  $R_i$  ранг  $X_i$  у  $(X_1, X_2, \dots, X_N)$  и  $S_i$  у  $(Y_1, Y_2, \dots, Y_N)$  онда ће корелација између парова  $(R_i, S_i)$  бити једнака:

$$\rho_s = \frac{\sum_{i=1}^N (R_i - \bar{R})(S_i - \bar{S})}{\sqrt{\sum_{i=1}^N (R_i - \bar{R})^2 \sum_{i=1}^N (S_i - \bar{S})^2}} \quad (3.160)$$

где је:

$$\bar{R} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N R_i = \frac{N+1}{2} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N S_i = \bar{S} \quad (3.161)$$

На други начин се Спирманов коефицијент корелације може приказати:

$$\rho_s = \frac{12}{N(N+1)(N-1)} \sum_{i=1}^N R_i S_i - 3 \frac{N+1}{N-1} \quad (3.162).$$

или:

$$\rho_s = 12 \int_{[0,1]^2} uv dC(u, v) - 3 = 12 \int_{[0,1]^2} C(u, v) dv du - 3 \quad (3.163)$$

Веза између Кендаловог и Спирмановог коефицијента корелације може бити у случају непрекидних случајно променљивих дефинисана (Theorem 5.1.10, Nelsen, 2006):

$$-1 \leq 3\tau_k - 2\rho_s \leq 1 \quad (3.164)$$

### 3.3.5 Архимедова фамилија копула

Популарна фамилија копула тзв. Архимедове копуле су коришћене у овој докторској дисертацији. Велики број копула припада овој фамилији, лако их је конструисати, флексибилне су и покривају потпуно зависност на „репу“ расподела, тако да су погодне за анализу поплава. Клејтонова копула приказује зависност на доњем „репу“ расподеле, Франкова копула не показује зависност на „реповима“ док је Гумбелова копула погодна за одређивање зависности на горњем „репу“ (Nelsen, 2006).

**Деф 3.3.5.1:** Нека је  $\varphi : I \rightarrow [0, \infty]$  непрекидна, опадајућа функција таква да је  $\varphi(1) = 0$  и нека је  $\varphi^{[-1]}$  псеудо инверзна функција са  $Dom\varphi^{[-1]} = [0, \infty]$  и  $Ran\varphi^{[-1]} = I$  дефинисана као:

$$\varphi^{[-1]}(t) = \begin{cases} \varphi^{-1}(t), & 0 \leq t \leq \varphi(0) \\ 0, & \varphi(0) \leq t \leq \infty \end{cases} \quad (3.165)$$

Треба истаћи да је  $\varphi^{[-1]}$  непрекидна и нерастућа на  $[0, \infty]$ , и стриктно опадајућа на  $[0, \varphi(0)]$ . Даље  $\varphi^{[-1]}(\varphi(u)) = u$  на  $I$  и

$$\varphi(\varphi^{[-1]}(t)) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq \varphi(0) \\ \varphi(0), & \varphi(0) \leq t \leq \infty \end{cases} = \min(t, \varphi(0)) \quad (3.166)$$

Коначно, уколико је  $\varphi(0) = \infty$  тада је  $\varphi^{[-1]} = \varphi^{-1}$ .

Нека је  $\varphi : I \rightarrow [0, \infty]$  опадајућа функција таква да је  $\varphi(1) = 0$  и нека је  $\varphi^{[-1]}$  псеудо инверзна функција дефинисана изразом (3.163). Нека је функција  $C: I^2 \rightarrow I$  дефинисана као:

$$C(u, v) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v)) \quad (3.167)$$

при чему су задовољени услови (3.145) и (3.146).

Израз (3.166) је лема 4.1.2. из Nelsen (2006) и доказ се може наћи у наведеној литератури. На овај начин је дефинисана „Архимедова копула“ са генератором  $\varphi$ .

Уколико је  $\varphi(0) = \infty$ ,  $\varphi$  је стриктно генератор и  $\varphi^{[-1]} = \varphi^{-1}$  и  $C(u, v) = \varphi^{-1}(\varphi(u) + \varphi(v))$  је стриктно Архимедова копула.

Постоји више начина конструкције, али се најчешће користе познате фамилије копула које зависе од једног параметра, а који се одређује на основу узорка.

У табели 3.5 приказане су три Архимедове копуле: Гумбелова, Клејтонова и Франкова. Све копуле су једнопараметарске са параметром  $\theta$  (Nelsen, 2006).

Табела 3.5 Типови „Архимедових копула”

Копула	Параметар	$C(u, v, \theta)$
Gumbel	$\theta \geq 1$	$\exp\left\{-\left[(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta\right]^{\frac{1}{\theta}}\right\}$ (3.168)
Clayton	$\theta > 0$	$\left[\max\{u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1, 0\}\right]^{\frac{1}{\theta}}$ (3.169)
Frank	$\theta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$-\frac{1}{\theta} \log\left[1 + \frac{(e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)}{(e^{-\theta} - 1)}\right]$ (3.170)

Особине коришћених Архимедових копула и начин конструкције описан је у поглављима 3.3.5.1 – 3.3.5.3, а опширније се може наћи у Appendix C, Salvadore et al. (2007) и Chapter 4, Nelsen (2006).

### 3.3.5.1 Гумбелова копула

Израз (3.168) за Гумбелову копулу (Слика 3.15) је приказан у табели 3.5 где  $u, v \in I$ , а  $\theta \geq 1$ .

Када  $\theta = 1$  постиже се независност:

$$C_\theta(u, v) = uv = \Pi(u, v) \quad (3.171)$$

У суштини ова копула има позитивну зависност где када  $\theta \rightarrow +\infty$ :

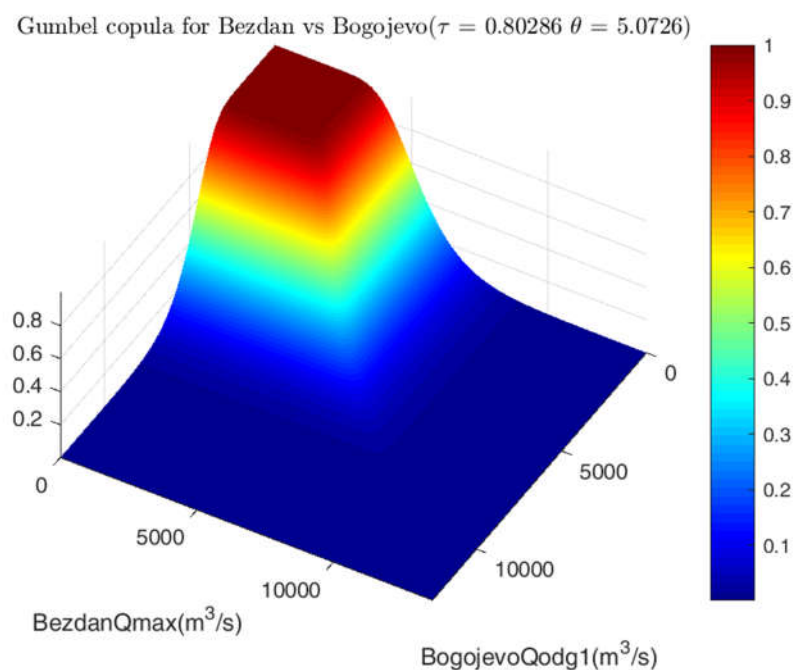
$$C_\infty(u, v) = \min\{u, v\} = M(u, v) \quad (3.172)$$

Копула је стриктно Архимедова (Слика 3.15), генератор је за  $t \in I$  једнак:

$$\varphi(t) = (-\ln t)^\theta \quad (3.173)$$

Веза између Кендаловог коефицијента корелације  $\tau_k$  и параметра копуле  $\theta$  дефинише се изразом (3.174):

$$\tau_k(\theta) = \frac{\theta - 1}{\theta} \quad (3.174)$$



Слика 3.15 Гумбелова копула

### 3.3.5.2 Клејтонова копула

Клејтонова копула (Слика 3.16) је дефинисана изразом (3.169). Копуле које припадају фамилији Клејтонових копула су стриктно Архимедове копуле при  $\theta > 0$ , када копула показује позитивну квадрант зависност (Denuit et al., 2005). Генератор је за  $t \in I$  једнак:

$$\varphi(t) = \frac{1}{\theta} (t^{-\theta} - 1) \quad (3.175)$$

Процена вредности параметра копуле вршена је путем апроксимације (3.176) која везује параметар  $\theta$  и Кендалов коефицијент корелације  $\tau_k$ :

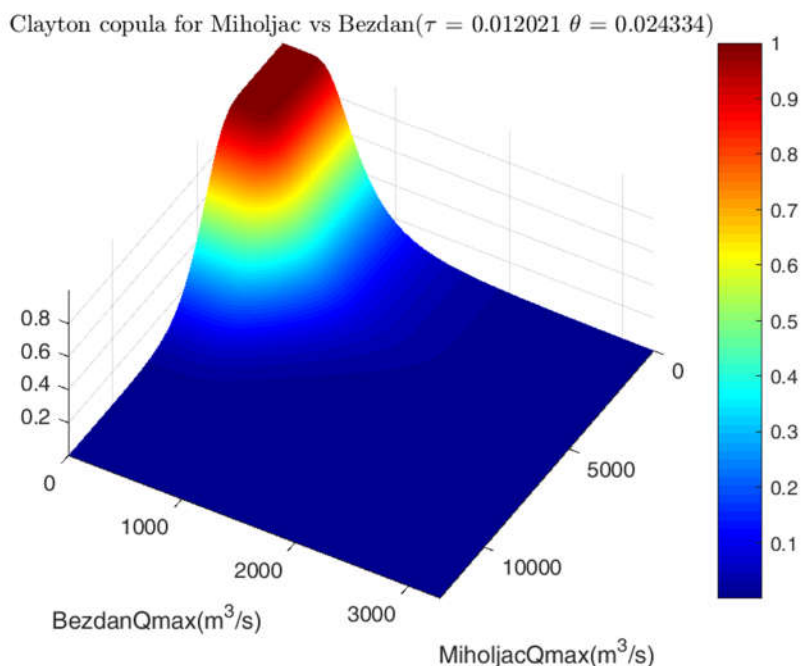
$$\tau_k(\theta) = \frac{\theta}{\theta + 2} \quad (3.176)$$

Параметар  $\theta$  је мера јачине зависности између  $u$  и  $v$ , тако да када  $\theta \rightarrow +\infty$  копула се приближава горњој Фрешеовој граници  $M$ :

$$\lim_{\theta \rightarrow +\infty} C_\theta(u, v) = \min\{u, v\} = M(u, v) \quad (3.177)$$

Када  $\theta \rightarrow 0$  постиже се независност:

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} C_\theta(u, v) = uv = \Pi(u, v) \quad (3.178)$$



Слика 3.16 Клејтонова копула

### 3.3.5.3 Франкова копула

Франкова копула (Слика 3.17) је дефинисана изразом (3.170) где је  $\theta \geq 0$ .

Генератор је за  $t \in I$  једнак:

$$\varphi(t) = -\ln\left(\frac{\theta^t - 1}{\theta - 1}\right) \quad (3.179)$$

Кендалов коефицијент корелације  $\tau_k$  за процену параметра копуле је дефинисан изразом (3.180):

$$\tau_k(\theta) = 1 - 4 \frac{D_1(-\ln \theta) - 1}{\ln \theta} \quad (3.180)$$

где је:

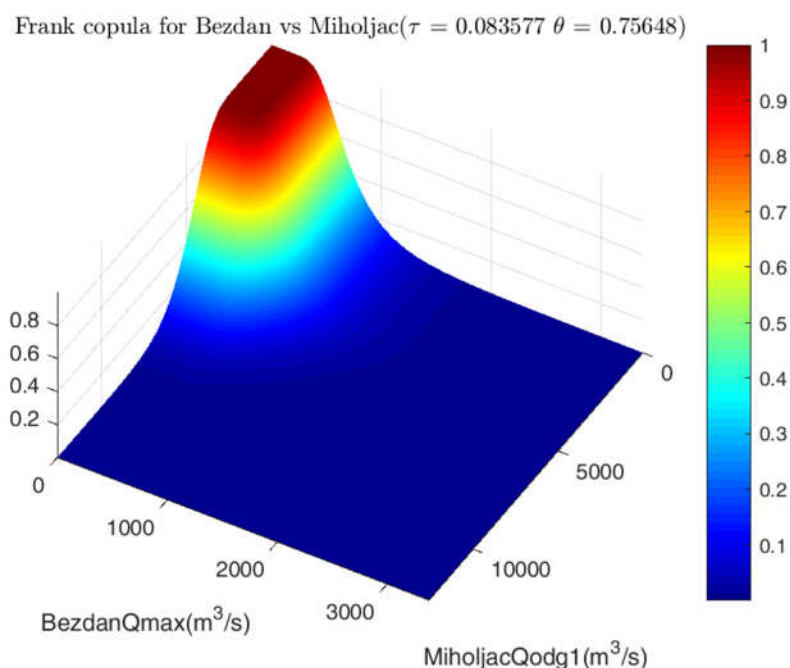
$$D_1 = \int_x^\infty \frac{t^n}{e^t - 1} dt = \sum_{k=1}^\infty e^{-kx} \left[ \frac{x^n}{k} + \frac{nx^{n-1}}{k^2} + \dots + \frac{n!}{k^{n+1}} \right], x > 0, n \geq 1 - \text{Дебајева функција}$$

првог реда (табела 27.1, Abramowitz and Sengun, 1972)

Када  $\theta = 1$  постиже се независност:

$$C_\theta(u, v) = uv = \Pi(u, v) \quad (3.181)$$

За  $\theta \approx 0$ ,  $C_\theta(u, v) = M(u, v)$ , док је за  $\theta \gg 1$ ,  $C_\theta(u, v) = W(u, v)$ .



Слика 3.17 Франкова копула

### 3.3.6 Копула преживљавања

У теорији ризика је обично неопходно проценити могућност превазилажења пројектовани животног века неког система. Ово се одређује вероватноћом превазилажења времена  $x$  која се дефинише функцијом „преживљавања“ која у једнодимензионалном случају има облик:

$$\bar{F}(x) = P[X > x] = 1 - F(x) \quad (3.182)$$

где је  $F$ – функција расподеле случајно променљиве  $X$ .

За пар случајно променљивих  $(X, Y)$  који има заједничку расподелу вероватноћа  $H$ , заједничка функција преживљавања је:

$$\bar{H}(x, y) = P[X > x, Y > y] \quad (3.183)$$

Маргине функције преживљавања су такође функције које одговарају једнодимензионалним функцијама преживљавања:

$$\bar{F} = \bar{H}(x, -\infty) \quad (3.184)$$

$$\bar{G} = \bar{H}(-\infty, y) \quad (3.185)$$

У складу са Скларовом теоремом (3.3.3) нека је копула  $C$  случајно променљивих  $X$  и  $Y$ :



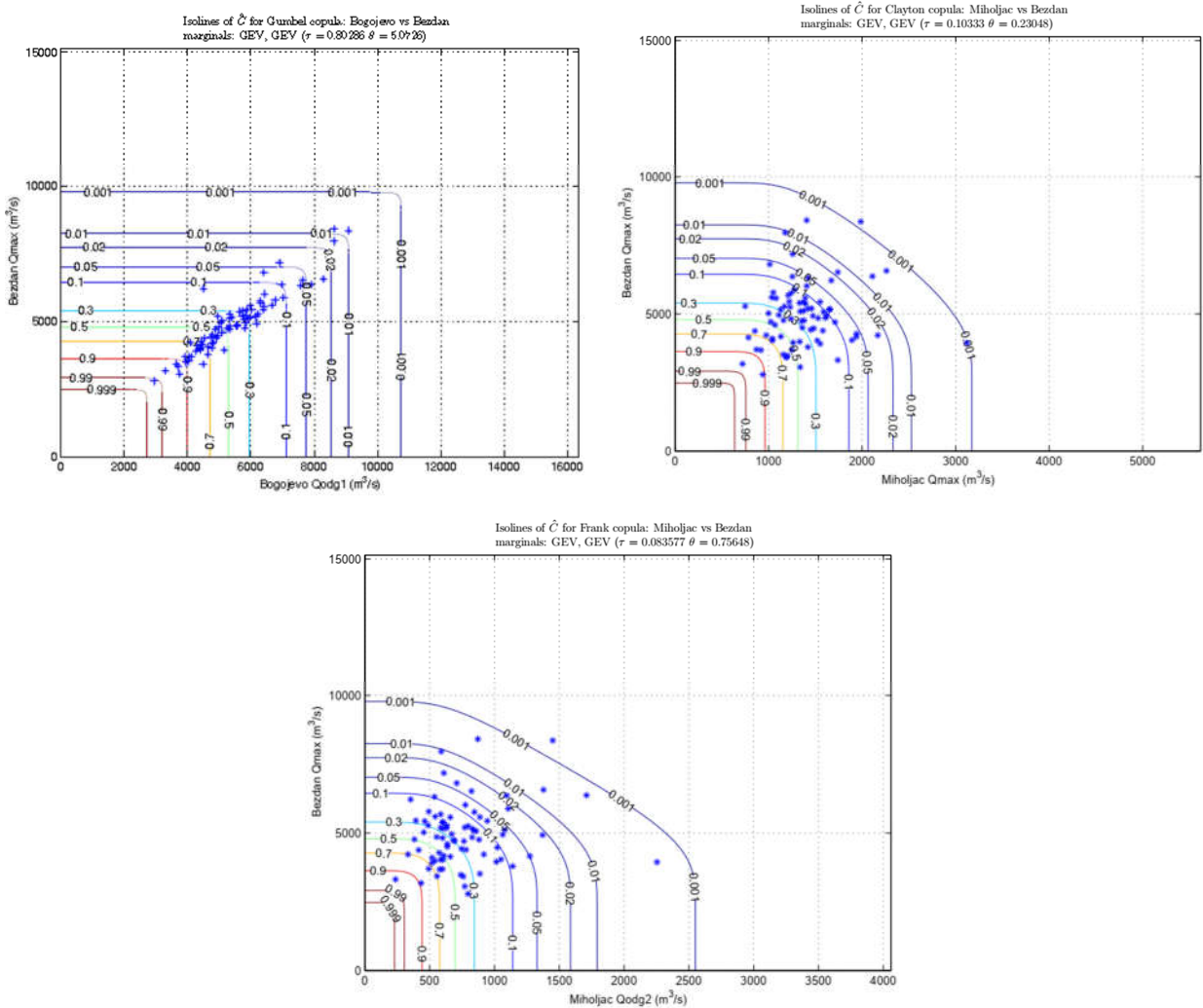
$$\begin{aligned} \bar{H}(x, y) &= 1 - F(x) - G(y) + H(x, y) = \bar{F}(x) + \bar{G}(y) - 1 + C(F(x), G(y)) = \\ &= \bar{F}(x) + \bar{G}(y) - 1 + C(1 - \bar{F}(x), 1 - \bar{G}(y)) \end{aligned} \quad (3.186)$$

Тако се може дефинисати функција  $\hat{C} : \mathbf{I}^2 \rightarrow \mathbf{I}$ , која представља заједничку функцију преживљавања, као:

$$\hat{C}(u, v) = u + v - 1 + C(1 - u, 1 - v) \quad (3.187)$$

$$\Rightarrow \bar{H}(x, y) = \hat{C}(\bar{F}(x), \bar{G}(y)) \quad (3.188)$$

На слици 3.18 приказани су контурни дијаграми Архимедових копула преживљавања: Гумбелове, Клејтонове и Франкове, респективно.



Слика 3.18 Контурни дијаграми копула преживљавања: а) Гумбелова, б) Клејтонова, в) Франкова

## 3.3.7 Оцена квалитета прилагођавања копула узорку

Квалитет прилагођавања копуле узорку оцењен је на основу статистичког теста (Reddy and Ganguli, 2012) који су прво предложили Genest, Remillard и Beaudoin 2009. године.

Тест се заснива на параметарској бутстрап методи. За сваку копулу генерише се  $n$  случајних независних узорака и утврђује синтетички низ осматрања који се упоређује са синтетичким серијама генерисаних помоћу Монте Карло симулације на основу мерних података. Тест се заснива на мерењима и не зависи од изабране маргиналне вероватноће.

За оцену статистичке значајности користи се  $p$  вредност која се рачуна на основу Крамер – фон Мизес статистике  $S_n$  (Reddy and Ganguli, 2012) и упоређује се са  $\alpha$  нивоом значајности.

У наставку текста приказује се алгоритам теста за оцену доброте прилагођавања (Reddy and Ganguli, 2012):

- i. На основу синтетичке серије мерења одређује се емпиријска копула  $C_n$   $(U_{1,n}, V_{1,n}), \dots, (U_{n,n}, V_{n,n})$ :

$$C_n(u, v) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1(U_{i,n} \leq u, V_{i,n} \leq v), (u, v) \in [0, 1] \quad (3.189)$$

где је:

$1(\cdot)$  - индикатор функција,

$(U_{1,n}, V_{1,n})$  - синтетичка мерења добијена на основу низа мерења  $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ :

$$U_{i,n} = \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^n 1(X_j \leq X_i) \quad (3.190)$$

$$V_{i,n} = \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^n 1(Y_j \leq Y_i), i \in \{1, \dots, n\}$$

Параметар копуле  $\theta$  се процењује на основу одговарајућег генератора.

Величина узорка је  $n=10000$ .

- ii. Крамер – фон Мизес статистика се рачуна на основу израза:

$$\begin{aligned}
 S_n &= \int_{[0,1]^2} n \{C_n(u, v) - C_{\theta_n}(u, v)\}^2 dC_n(u, v) = \\
 &= \sum_{i=1}^n \{C_n(U_{i,n}, V_{i,n}) - C_{\theta_n}(U_{i,n}, V_{i,n})\}^2
 \end{aligned}
 \tag{3.191}$$

iii. За свако  $k \in \{1, \dots, N\}$  понављају се следећи кораци:

а) Случајан узорак  $(U_1^k, V_1^k), \dots, (U_n^k, V_n^k)$  се генерише из копуле  $C_{\theta_n}$  и формира ју синтетичке серије из мерења  $(U_{1,n}^k, V_{1,n}^k), \dots, (U_{n,n}^k, V_{n,n}^k)$ .

б) Нека  $C_n^{(k)}$  и  $\theta_n^{(k)}$  одговарају  $C_n$  и  $\theta_n$  за синтетичку серију  $(U_{1,n}^k, V_{1,n}^k), \dots, (U_{n,n}^k, V_{n,n}^k)$ .

в) Рачуна се  $S_n^{(k)}$ :

$$S_n^{(k)} = \sum_{i=1}^n \left\{ C_n^{(k)}(U_{i,n}^k, V_{i,n}^k) - C_{\theta_n^{(k)}}(U_{i,n}^k, V_{i,n}^k) \right\}^2
 \tag{3.192}$$

iv. На крају се рачуна  $p$  вредност као:

$$p = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N 1(S_n^{(k)} \geq S_n)
 \tag{3.193}$$

Ако је  $p < \alpha$ , резултат није статистички значајан, у супротном резултат није статистички значајан. Што је  $p$  вредност већа, то тестирана копула боље описује међусобну зависност серија.

### 3.3.8 Повратни период превазилажења

Под заједничком функцијом расподеле подразумева се када су копуле у питању вероватноћа да ће обе случајно променљиве  $X$  и  $Y$  бити мање или једнаке од унапред утврђеног прага  $x$  и  $y$ , респективно (израз 3.156).

У анализи поплава се дефинише заједничка вероватноћа превазилажења у дводимензионалном простору што подразумева превазилажење унапред утврђене вредности и случајно променљивих  $X$  и  $Y$  (једначина 3.139). У случају копула се може написати:

$$\begin{aligned}
 P(X > x, Y > y) &= 1 - F_X(x) - F_Y(y) + F_{X,Y}(x, y) = \\
 &= 1 - F_X(x) - F_Y(y) + C(F_X(x), F_Y(y))
 \end{aligned}
 \tag{3.194}$$

Приказана зависност (3.194) показује да је заједничка вероватноћа појаве приказана у функцији маргиналних вероватноћа појаве и копуле, док се копуле такође приказују у функцији маргиналних вероватноћа (3.156). Тако да за познате маргиналне вероватноће, заједничка вероватноћа појаве може лако бити дефинисана копулом (Shiau et al., 2006).

Како је повратни период дефинисан као време које протекне између два догађаја исте величине, он представља стандард у пројектовању система за заштиту од поплава.

Заједнички повратни период (повратни период превазилажења) је дефинисан у (Salvadori et al., 2007). Заснива се на кумулативној вероватноћи  $F_{X,Y}(x,y)$  која се може изразити и преко дводимензионалне копуле  $C_{U,V}(u,v)$  и кумулативних вероватноћа маргиналних расподела и обележава са  $\hat{T}$  (Bender et al., 2016).

Заједнички повратни период  $\hat{T}_{X,Y}$  је дефинисан преко вероватноћа превазилажења и  $x$  и  $y$  у исто време. Ова вероватноћа се увек изражава копулом преживљавања (Поглавље 3.3.6)

Ако су функције преживљавања маргиналних распореда дефинисане као:

$$\bar{F}_X(x) = 1 - F_X(x) \text{ и } \bar{F}_Y(y) = 1 - F_Y(y) \quad (3.195)$$

и заједничка функција преживљавања дефинисана копулом  $\hat{C}(\bar{F}_X(x), \bar{F}_Y(y))$ , онда се "повратни период преживљавања" може дефинисати као (Salvadori and De Michele, 2007; Serinaldi, 2015):

$$\begin{aligned} \hat{T}_{X,Y} &= \frac{\mu_T}{P(X \geq x \wedge Y \geq y)} = \\ &= \frac{\mu_T}{1 - F_X(x) - F_Y(y) + C[F_X(x), F_Y(y)]} = \\ &= \frac{\mu_T}{\hat{C}[\bar{F}_X(x), \bar{F}_Y(y)]} \end{aligned} \quad (3.196)$$

где је  $\mu_T$  – време које протекне између две појаве, обично једна година.

#### 4 ПРАКТИЧНА ПРИМЕНА ВИШЕДИМЕНЗИОНАЛНИХ ФУНКЦИЈА РАСПОДЕЛЕ

Анализа коинциденције великих вода главног тока и притока се заснива на двопараметарском закону расподеле вероватноћа (моделу ПРОИЛ и КОПУЛА) следећих комбинација променљивих:

1. максимална годишња вредност одабраног параметра поплавног таласа на главној реци  $X_{\max}$  – максимална годишња вредност истог параметра поплавног таласа на притоци  $Y_{\max}$ ,
2. максимална годишња вредност одабраног параметра поплавног таласа на главној реци  $X_{\max}$  – одговарајућа вредност истог параметра поплавног таласа на притоци  $Y_{odg}$ ,
3. максимална годишња вредност одабраног параметра поплавног таласа на притоци  $Y_{\max}$  – одговарајућа вредност истог параметра поплавног таласа на главној реци  $X_{odg}$ .

Конструкција вероватноћа превазилажења се ослања на изресе (4.1), (4.2) и (4.3) под условом да је коефицијент корелације одабраних параметара великих вода у границама  $0 \leq R < 1.0$ .

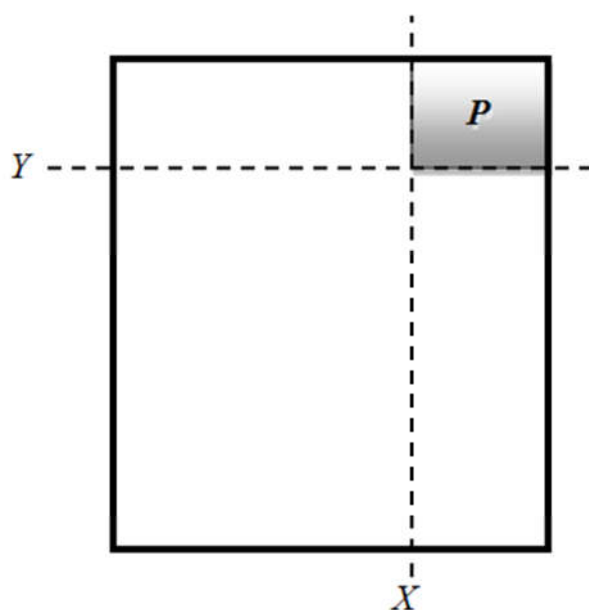
$$P[X_{\max} > X_1; Y_{\max} > Y_1] = \int_{X_1}^{\infty} \int_{Y_1}^{\infty} g(X_{\max}, Y_{\max}, R) dx dy \quad (4.1)$$

$$P[X_{\max} > X_1; Y_{odg} > Y_1] = \int_{X_1}^{\infty} \int_{Y_1}^{\infty} g(X_{\max}, Y_{odg}, R) dx dy_{odg} \quad (4.2)$$

$$P[X_{odg} > X_1; Y_{\max} > Y_1] = \int_{X_1}^{\infty} \int_{Y_1}^{\infty} g(X_{odg}, Y_{\max}, R) dx_{odg} dy \quad (4.3)$$

где је  $R$  –коефицијент корелације, у случају копула је то  $\tau_k$  – Кендалов коефицијент.

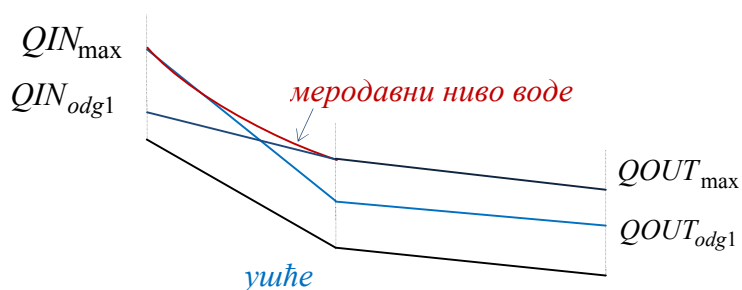
Критично поље у складу са описаном вероватноћом превазилажења  $P$  је приказано на слици 4.1. Квадрат представља домен за прорачун вероватноће док је сивом бојом осенчено поље превазилажења и једне и друге случајне променљиве у дводимензионалном простору.



Слика 4.1 Домен и критично поље вероватноће превазилажења

#### 4.1 КОИНЦИДЕНЦИЈА ВЕЛИКИХ ВОДА РЕЦИПИЈЕНТА И ПРИТОКЕ (ДВОДИМЕНЗИОНАЛНИ ПРОБЛЕМ)

За сагледавање поплавних таласа у зони ушћа притоке у главни ток (реципијент), усвојен је проток као главна карактеристика хидрограма великих вода. Коинциденција појављивања поплаве је базирана на анализи најближих хидролошких профила на главном току узводно и низводно од притоке. Усвојене карактеристике коинциденције поплавних таласа описане су на сликама 4.2 и 4.3.



Слика 4.2 Шематски приказ деонице реципијента са ушћем притоке

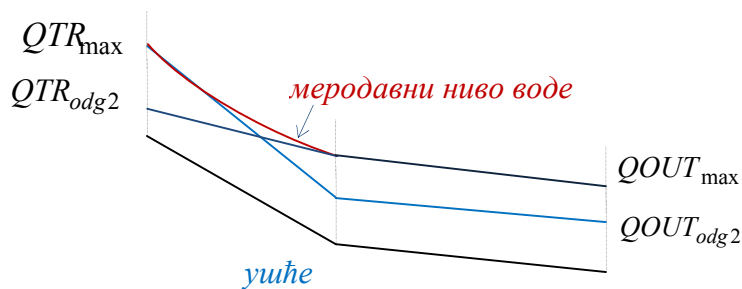
Симболи на слици 4.2 означавају:

$QIN_{\max}$  – максималан годишњи проток главне реке на улазном профилу разматраног речног сектора,

$QIN_{odg1}$  – одговарајући проток главне реке у улазном профилу у тренутку појаве максималног годишњег протока на излазном профилу главне реке на разматраном речном сектору,

$QOUT_{\max}$  – максималан годишњи проток главне реке на излазном профилу разматраног речног сектора,

$QOUT_{odg1}$  – одговарајући проток главне реке на излазном профилу у тренутку појаве максималног годишњег протока на улазном профилу главне реке на разматраном речном сектору.



Слика 4.3 Шематски приказ деонице низводно од ушћа притоке

Симболи на слици 4.3 означавају:

$QTR_{\max}$  – максималан годишњи проток притоке на разматраном речном сектору,

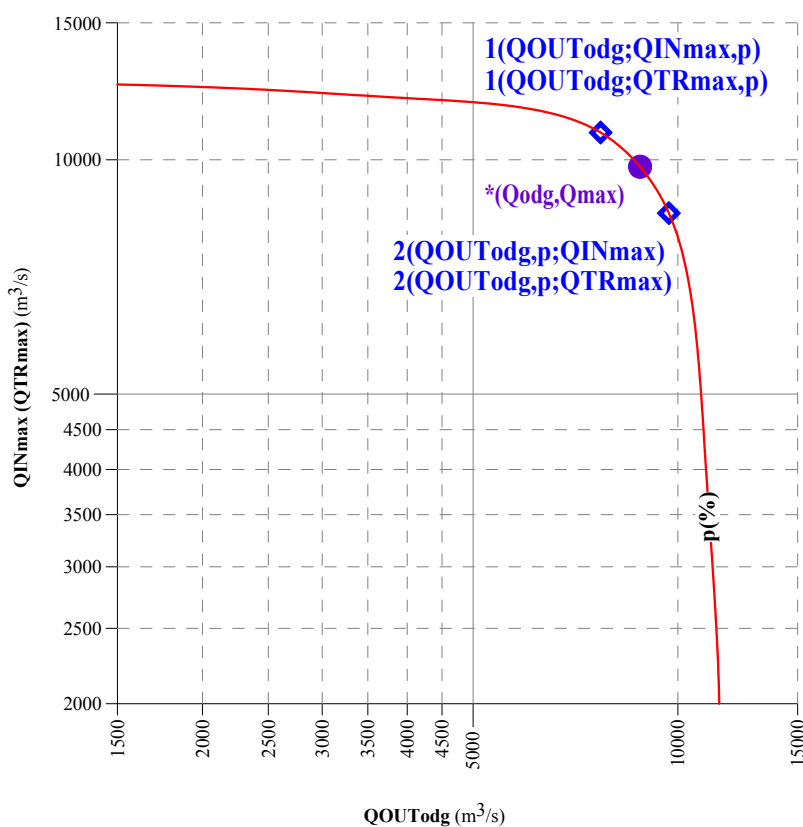
$QTR_{odg2}$  – одговарајући проток притоке у тренутку појаве максималног годишњег протока на излазном профилу главне реке на разматраном сектору,

$QOUT_{\max}$  – максималан годишњи проток главне реке на излазном профилу разматраног речног сектора,

$QOUT_{odg2}$  – одговарајући проток главне реке на излазном профилу у тренутку појаве максималног годишњег протока на притоци.

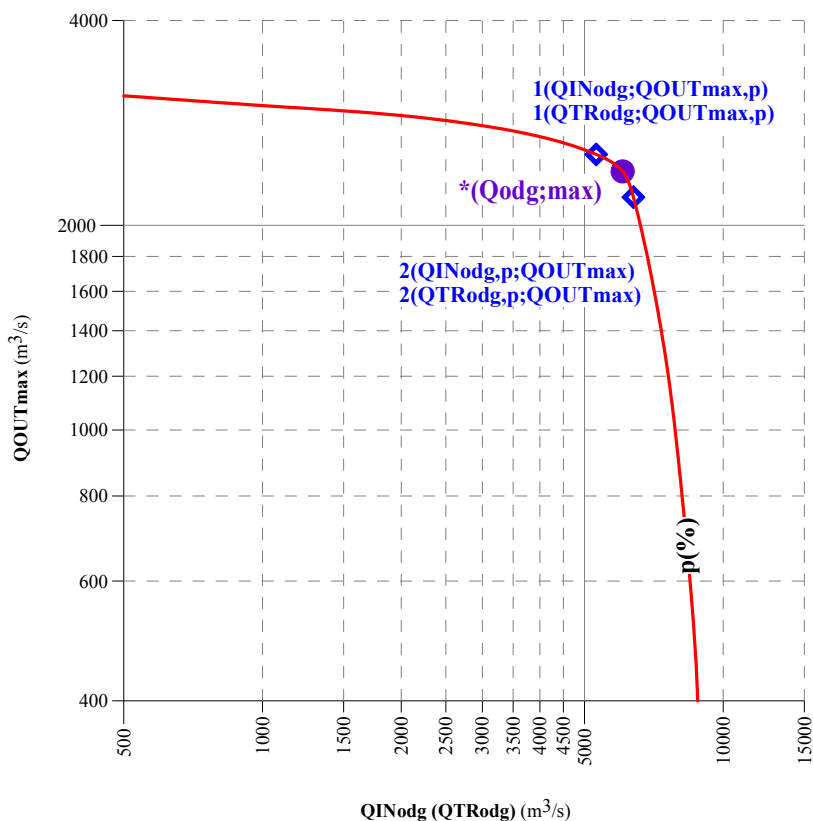
Описане променљиве представљају улаз у моделе ПРОИЈЛ и КОПУЛА помоћу којих се дефинише њихова зависност у дводимензионалном простору вероватноћа по процедури приказаној у поглављима 3.2 и 3.3. На овај начин се поплава може сагледати у дводимензионалном простору вероватноћа и одредити рачунски проток за димензионисање система за заштиту од поплава у зони ушћа две реке.

На основу успостављених зависности дефинишу се тачке 1, 2 и \*, које представљају основу за одређивање протока на основу којих се рачунају меродавни нивои у сврху димензионисања система за заштиту од поплава у зони међусобног утицаја главне реке и притоке (Слике 4.4. и 4.5.).



Слика 4.4 Коинциденција максималног годишњег протока реципијента односно притоке узводно од ушћа и одговарајућег протока реципијента на излазном профилу за усвојену вероватноћу превазилажења





Слика 4.5 Коинциденција максималног годишњег протока реципијента низводно од уића и одговарајућег протока реципијента односно притокена узводно од уића за усвојену вероватноћу превазилажења

Координате тачака 1 и 2 су:

- За случај 1 (Слика 4.4):
  - тачке 1  $(QOUT_{odg}^1 : QIN_{max}^1(QTR_{max}^1))_p$ ,
  - тачке 2  $(QOUT_{odg,p}^2 : QIN_{max}^2(QTR_{max}^2))_p$
- За случај 2 (Слика 4.5):
  - тачке 1  $(QIN_{odg}^1(QTR_{odg}^1) : QOUT_{max,p}^1)_p$ ,
  - тачке 2  $(QIN_{odg,p}^2(QTR_{odg,p}^2) : QOUT_{max}^2)_p$

Са линије коинциденције (Слике 4.4. – 4.5.) се може очитати и највероватнији догађај (\*), једначина (4.4), са координатама  $(QIN^*_{odg}(QTR^*_{odg}) : QOUT^*_{max})_p$  и  $(QOUT^*_{max} : QIN^*_{odg}(QTR^*_{odg}))_p$  за оба случаја, респективно (Bender et al., 2016).

$$(x^*, y^*) = \arg \max F_{X,Y}(F_X^{-1}(x), F_Y^{-1}(y)) \quad (4.4)$$

## 4.2 ВИШЕДИМЕНЗИОНАЛНЕ ФУНКЦИЈЕ РАСПОДЕЛЕ

Методологија за дефинисање вишедимензионалне коинциденције поплава на сложеном речном систему помоћу модела ПРОИЛ развијена је за деоницу реке која се састоји од главне реке и две значајне притоке, без значајног утицаја бочног дотока. За оцену статистичке значајности поплаве усвојен је врх (пик) поплавног таласа. Основа за дефинисање вишедимензионалне зависности вероватноће појаве поплавног таласа на излазном профилу у функцији вероватноћа појаве поплавног таласа на свим разматраним улазним профилима реципијента и притока су функције расподеле вероватноћа пика поплавних таласа:

$$P(Q \geq q) = p \quad (4.5)$$

где је:

$P(Q \geq q)$  – вероватноћа да ће пик поплавног таласа на свим улазним/излазним профилима бити превазиђен;

$p$  – вероватноћа превазилажења.

Потребно је још срачунати коинциденцију максималних годишњих протока на два улазна профила,  $j$  и  $k$ :

$$P((Q_j \geq q_j) \cap (Q_k \geq q_k)) = \Phi \quad (4.6)$$

где је:

$P((Q_j \geq q_j) \cap (Q_k \geq q_k))$  вероватноћа превазилажења коинциденције максималних годишњих протока на два разматрана улазна профила,  $j$  и  $k$ ;

$\Phi$  вероватноћа превазилажења.

Поступак за дефинисање вишедимензионалне коинциденције пикова поплавних таласа развијен је за случај постојања улазних профила на главној реци  $j$ , на притокама  $k$  и  $i$  и излазног профила на главној реци је „OUT“.

Први корак је израчунавање коинциденције максималних годишњих протока на излазном профилу главне реке са унијом максималних годишњих протока на улазним профилима разматране деонице реке, тј. дефинисање следеће зависности:

$$P\{(Q_{OUT} \geq q_{OUT}) \cap [(Q_i \geq q_i) \cup ((Q_j \geq q_j) \cap (Q_k \geq q_k))]\} = \Phi \quad (4.7)$$

где је:

$Q_{out}$  пик поплавног таласа на излазном профилу за одабрану вероватноћу,

$Q_i$  пик поплавног таласа на  $i$ -том улазном профилу за одабрану вероватноћу,

$Q_j$  пик поплавног таласа на  $j$ -том улазном профилу за произвољно одабрану вероватноћу, у складу са вероватноћом превазилажења  $P((Q_j \geq q_j) \cap (Q_r \geq q_r))$ ,

$Q_k$  пик поплавног таласа на  $k$ -том улазном профилу за произвољно одабрану вероватноћу, у складу са вероватноћом превазилажења  $P((Q_k \geq q_k) \cap (Q_z \geq q_z))$ .

У друго кораку се за изабрану вероватноћу превазилажења  $\Phi$ , користећи зависност (4.7), одређују коресподентне следећих вероватноћа превазилажења за произвољно одабране вероватноће  $p$ :

$$P(Q_{OUT} \geq q_{OUT})_p \text{ и } P[(Q_i \geq q_i)_p \cup ((Q_j \geq q_j) \cap (Q_k \geq q_k))_p] \quad (4.8)$$

где се променљива  $[(Q_i \geq q_i)_p \cup ((Q_j \geq q_j) \cap (Q_k \geq q_k))_p]$  може назвати условна вредност пика поплавног таласа на излазном профилу главне реке, скраћено дефинисане као  $Q_{OUT}$

Уводи се додатни услов, да у случају (4.8), мора бити задовољена једнакост:

$$[(Q_i \geq q_i)_p \cup ((Q_j \geq q_j) \cap (Q_k \geq q_k))_p] = (Q_i \geq q_i)_p + ((Q_j \geq q_j) \cap (Q_k \geq q_k))_p \quad (4.9)$$

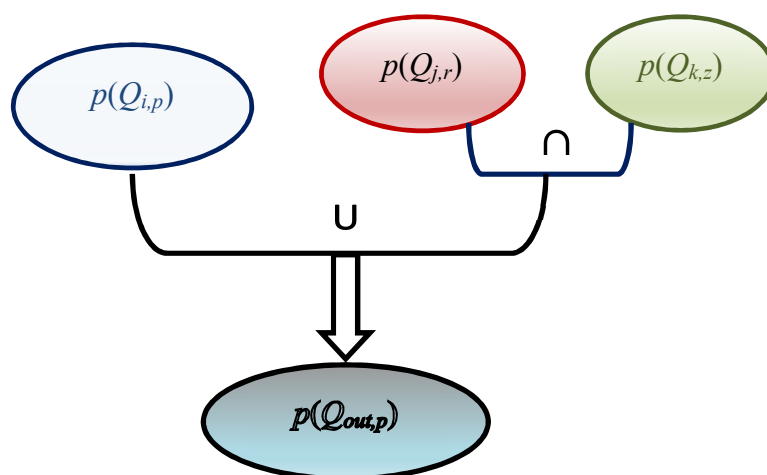
За фиксирану вредност вероватноће излазног хидрограма  $p = \Phi$  и одабрану вредност  $p$ , по једначини (4.7), односно (4.5) добијају се одговарајуће теоријске вредности пика поплавног таласа  $Q_{OUT,p}$  и  $Q_{i,p}$ . Произвољним избором једне од вероватноћа  $r$  или  $z$ , на профилима  $j$  и  $k$ , респективно, на пример  $r$ , помоћу једначине (4.9), добијају се теоријске вредности  $Q_{j,r}$  и  $Q_{k,z}$ , за различите комбинације параметра  $r$  и  $z$ . На тај начин дефинисане су све комбинације одговарајућих вероватноћа:  $p(Q_{out,p=\Phi})$ ,  $p(Q_{i,p})$ ,  $p(Q_{j,r})$  и  $p(Q_{k,z})$ , што омогућује формирање вишедимензионалне зависности вероватноћа појаве поплавних таласа на главној реци и притокама у виду:

$$p(Q_{out,p}) = P\{p(Q_{i,p}) \cup P[p(Q_{j,r}) \cap p(Q_{k,z})]\} \quad (4.10)$$

где:

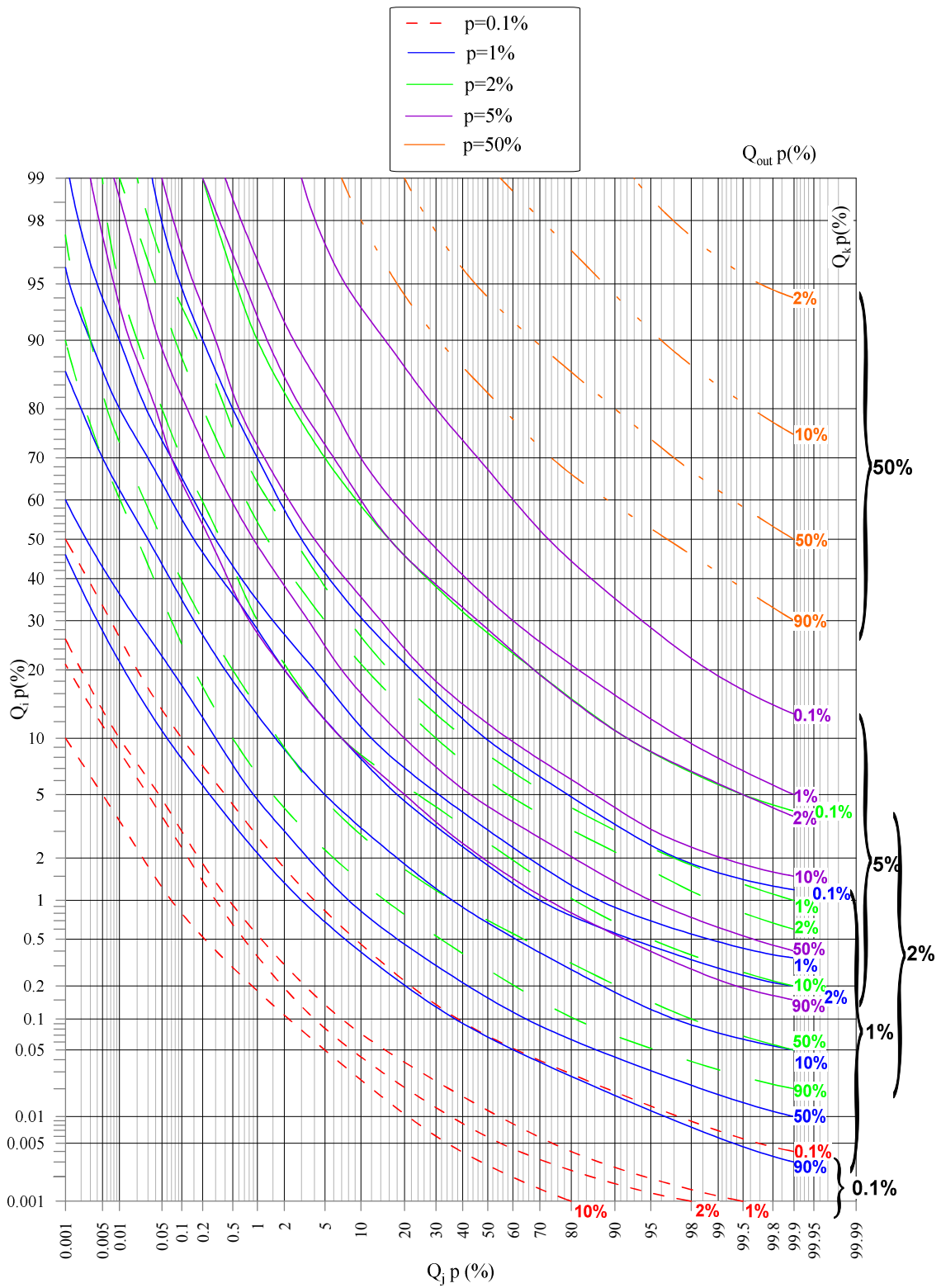
- $p(Q_{out,p})$  - вероватноћа превазилажења пика поплавног таласа на излазном профилу;
- $p(Q_{i,p})$  - вероватноћа превазилажења пика поплавног таласа на улазном профилу  $i$ ;
- $p(Q_{j,r})$  - вероватноћа превазилажења пика поплавног таласа на улазном профилу  $j$ ;
- $p(Q_{k,z})$  - вероватноћа превазилажења пика поплавног таласа на улазном профилу  $k$ ;
- $P[p(Q_{j,r}) \cap p(Q_{k,z})]$  вероватноћа превазилажења коинциденције пика хидрограма на улазном профилу  $j$  и излазном профилу  $k$ .

Шематски приказ предложене процедуре приказан је на Слици 5.6.



Слика 4.6 Шематски приказ конструкције вишедимензионалних зависности пикова поплавних таласа три улазна профила и излазног профила на сектору реципијента са две притоке

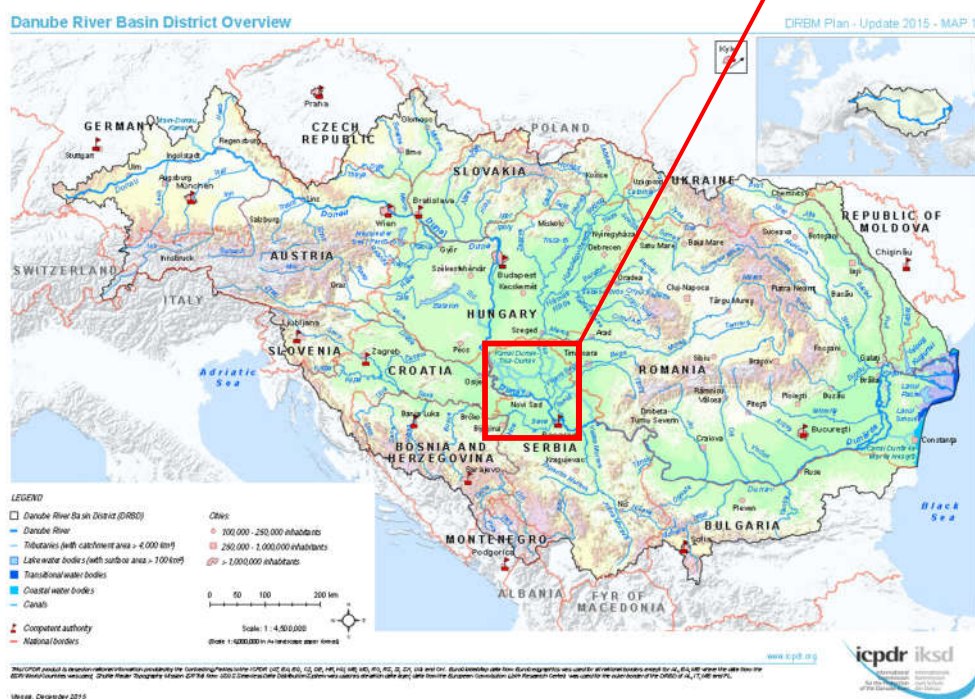
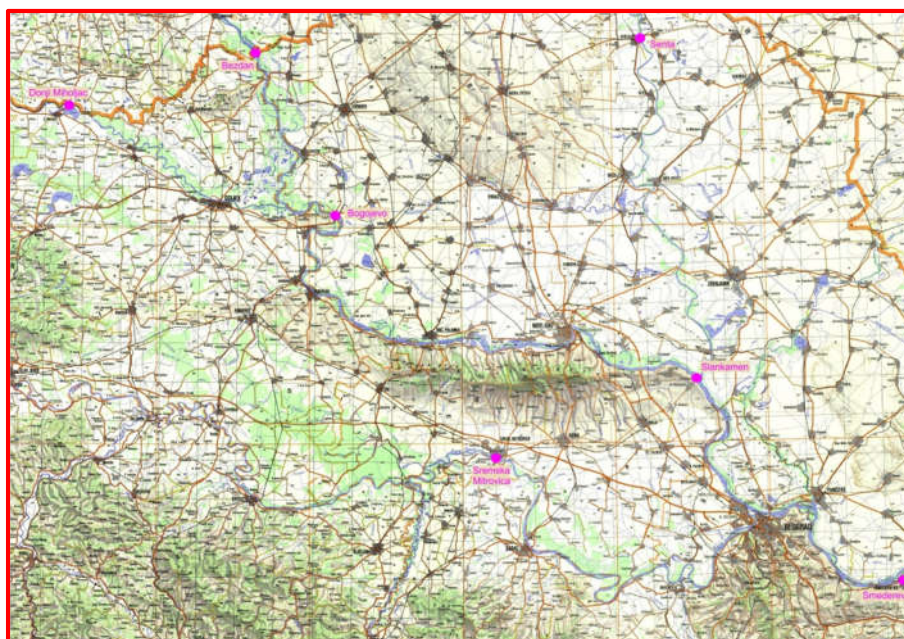
Према томе, за познате пикове поплавних таласа на улазним профилима, преко једначина (4.6) - (4.10), могу се добити рачунске вредности вероватноћа пика поплавног таласа на излазном профилу разматраног речног сектора. На слици 4.7 приказан је излазни цртеж из модела ПРОИЛ.



Слика 4.7 Вишедимензионална коинциденција поплавних таласа на сектору реке са две притоке

## 5 ФОРМИРАЊЕ ВРЕМЕНСКИХ СЕРИЈА ЗА АНАЛИЗУ КОИНЦИДЕНЦИЈЕ ВЕЛИКИХ ВОДА НА ДЕОНИЦИ ДУНАВА ОД УЛАЗА У СРБИЈУ ДО СМЕДЕРЕВА

Методe и поступци дефинисани у поглављу 3 примењени су на деоници реке Дунав од уласка у Србију до Смедерева (Слика 5.1).



Слика 5.1 Слив Реке Дунав (ICPDR, 2015) и сектор од уласка у Србију до Смедерева

Дунав са површином слива од  $817000 \text{ km}^2$  и средњим протоком код ушћа у Црно море од  $6500 \text{ m}^3/\text{s}$  је по величини 24. река на свету а друга у Европи (после Волге са сливом од  $1308000 \text{ km}^2$  и протоком од  $9900 \text{ m}^3/\text{s}$ ). Долазећи из Мађарске прима главне притоке: Драву, Тису, Саву и Велику Мораву.

Драва је прва значајна десна притока Дунава у Србији. Дужине је  $707 \text{ km}$  са површином слива  $11828 \text{ km}^2$ . Извире у јужном Тиролу у Италији а код Аљмаша на граници Србије и Хрватске се улива у Дунав.

Највећа лева притока Дунава је Тиса ( $157200 \text{ km}$ ). Извире у Украјини, на Карпатима у области Буковина. На територију Србије улази из Мађарске код банатског села Ђале, а улива се у Дунав код Сланкамена.

Десна притока Дунава, Сава је највећа река која се на територији Србије улива у Дунав. Површина њеног слива износи  $96400 \text{ km}^2$ , а дужина  $206 \text{ km}$  на територији Србије (од сремског села Јамене до ушћа). Настаје од Саве Долињке и Саве Бохињке у Словенији и одводи значајан део воде са Динарских Алпа.

Веће десне притоке Дунава, низводно од Саве су: Велика Морава, Млава, Пек, Поречка река и Тимок.

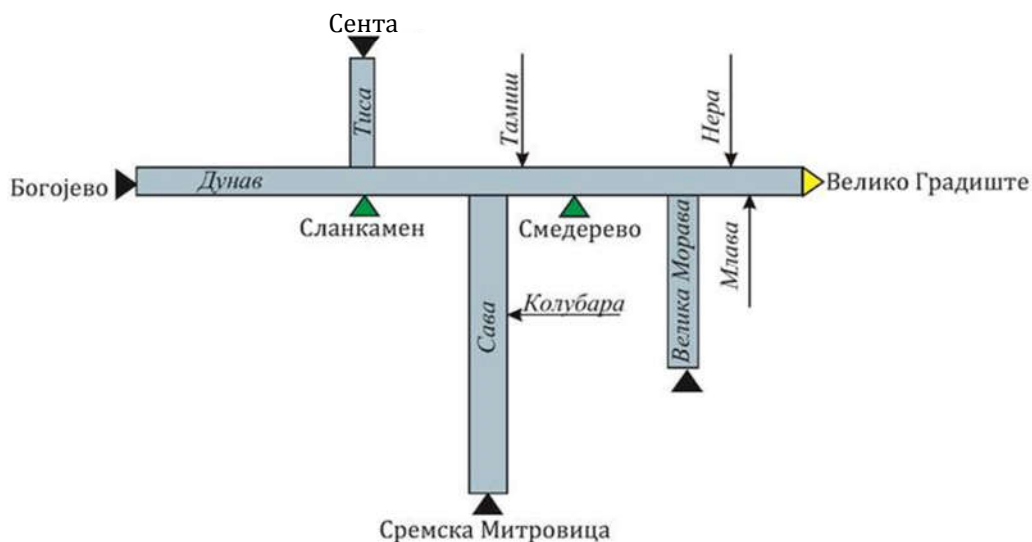
Из кратког приказа општих информација о Дунаву и његовим значајним притокама на територији Србије, може се закључити да су оне по природи јако различите и указује на различитост у погледу режима вода. Идеја студије случаја у докторској дисертацији јесте да се обухвати деоница Дунава која укључује највеће притоке, Тису и Саву.

## 5.1 ВРЕМЕНСКЕ СЕРИЈЕ МАКСИМАЛНИХ И ОДГОВАРАЈУЋИХ ПРОТОКА НА ХИДРОЛОШКИМ ПРОФИЛИМА РХМЗ-А

За потребе прорачуна великих вода на ушћима значајнијих притока у реку Дунав коришћени су подаци оригиналних серија максималних годишњих протока и одговарајући средњи дневни протоци, преузети од РХМЗ-а Србије и допуњени подацима из базе података Института „Јарослав Черни“ за профил хидролошке станице Сланкамен.

Хидролошки подаци о максималним годишњим протоцима и профилу х. с. Сланкамен добијени су коришћењем адаптираног модела „Акумулација“ који служи за прорачун пропагације поплавних таласа дуж главног тока и притока дуж Дунава.

Шема хидролошког модела за прорачун пропагације поплавних таласа, приказана на слици 5.2 обухвата главни ток Дунава од хидролошке станице Богојево до Великог Градишта, реку Тису од х.с. Сента до профила на Дунаву низводно од ушћа Тисе условно везано за х. с. Сланкамен, реку Саву од хидролошке станице Сремска Митровица до ушћа у Дунав и реку Велику Мораву од хидролошке станице Љубичевски Мост до ушћа у Дунав. Протоци Тамиша, Колубаре, Нера и Млаве узимају се директно као улаз у модел, без претходних прорачуна пропагације дуж корита. Улазни подаци за модел су протоци Дунава код Богојева, Тисе код Сенте, Саве код Сремске Митровице, Велике Мораве код Љубичевског Моста, Тамиша, Колубаре, Нера и Млаве. Контролни профили су хидролошке станице Сланкамен и Смедерево на Дунаву, а излаз из модела су протоци Дунава на профилима хидролошке станице Велико



Слика 5.2 Прорачунска шема модела „Акумулације“ за деоницу Дунава од уласка у Србију до Великог Градишта

Преглед усвојених профила и расположивих периода мерења приказан је у табели 5.1.

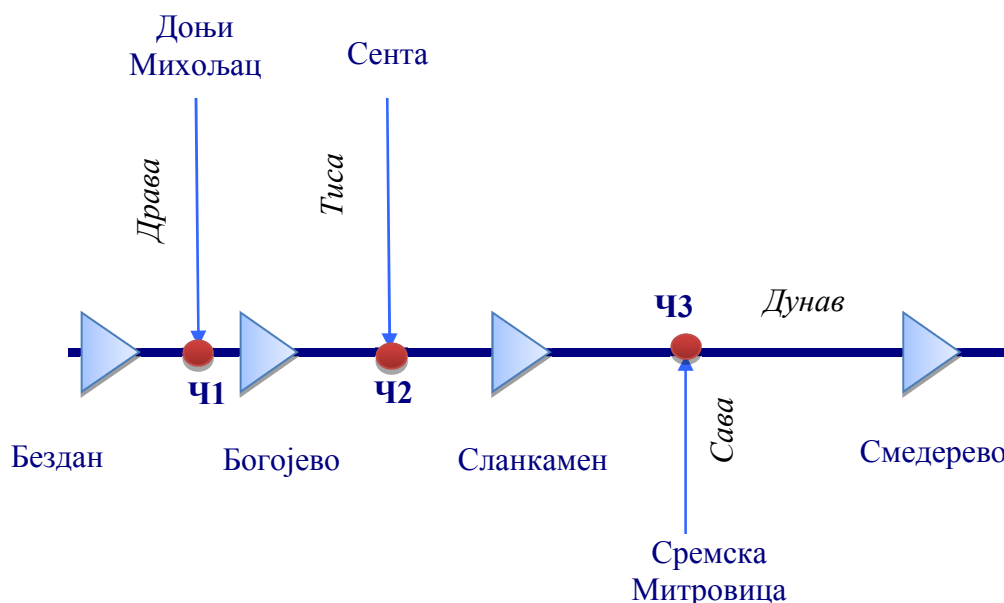
Разматране комбинације хидролошких станица приказане су на слици 5.3. а формиране серије протока како су дефинисане у поглављу 5.1 по комбинацијама приказане су у прилогу 1 и на сликама 5.4. – 5.12.



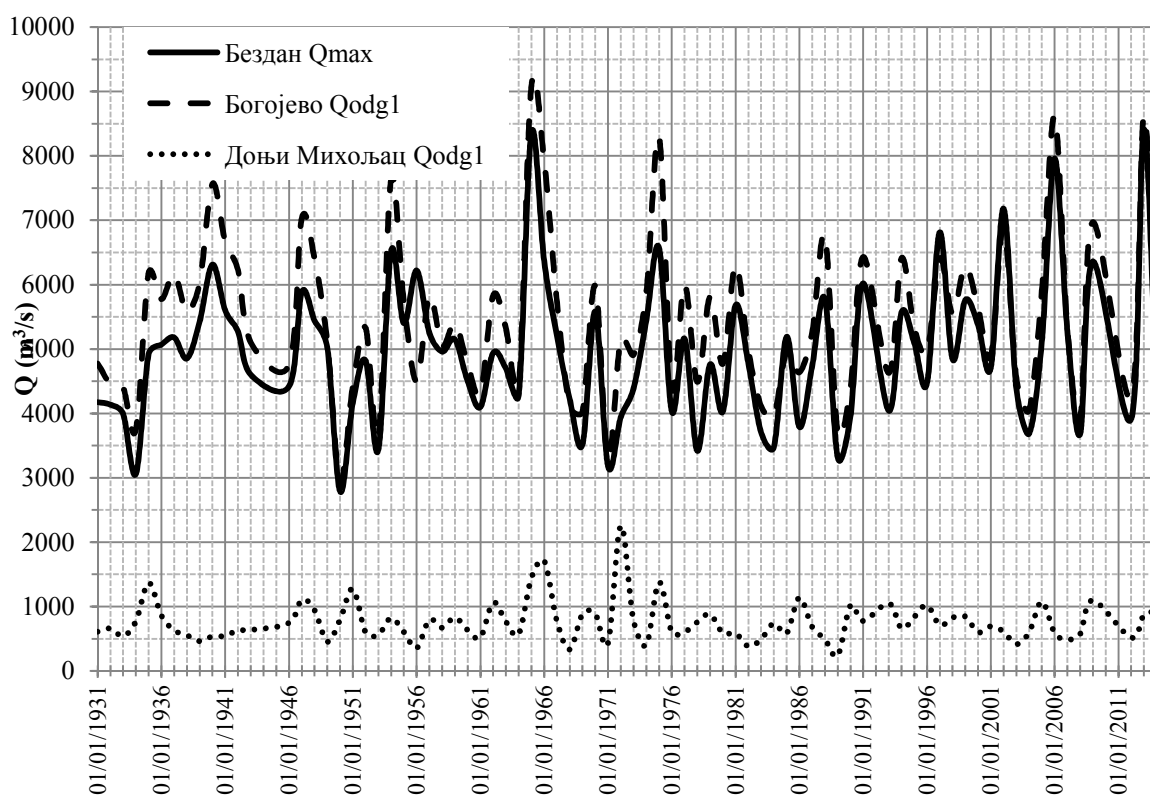
Табела 5.1 Преглед хидролошких станица и расположивих података о протоцима на Сектору Дунава од уласка у Србију до Смедерева и његовим притокама

Број	Шифра Станице	Река	Станица	Удаљеност од ушћа (km)	Површина слива (km <sup>2</sup> )	Расположивост података	
						Q <sub>dn</sub> (m <sup>3</sup> /s)	Q <sub>max.god</sub> (m <sup>3</sup> /s)
1	42010	Дунав	Бездан	1425,59	210250	1931-1949.	1950-2014.
2	42020	Дунав	Богојево	1367,25	251593	1931-1949.	1950-2014 (недостају: 1996, 1997, 2010, 2011.)
3	42040	Дунав	Сланкамен	1216,02	254961	1931-1945.	1946-2014. (подаци РХМЗ-а 1961-2003)
4	42055	Дунав	Смедерево	1116,23	525820 (525009)	1931-1945.	1946-2014.
5	5150	Драва	Доњи Михољац	80,50	37142	1931-1951. 1958. 1990-2014. (недостају 1944. и 1945)	1952-1989.
6	44020	Тиса	Сента	123,50	141715	1931-1945.	1946-2014.
7	45090	Сава	Сремска Митровица	139,24	87996	1931-1945.	1946-2014.

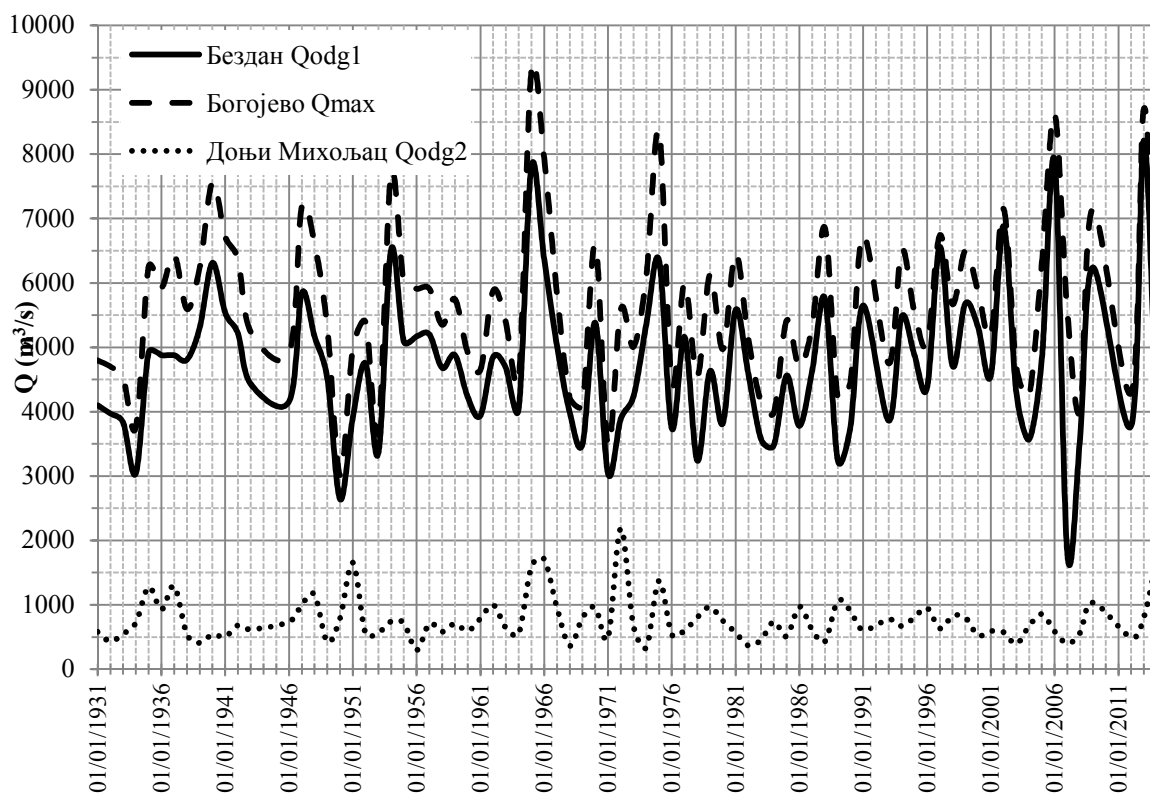
Статистички параметри формираних серија приказани су у прилогу 2.



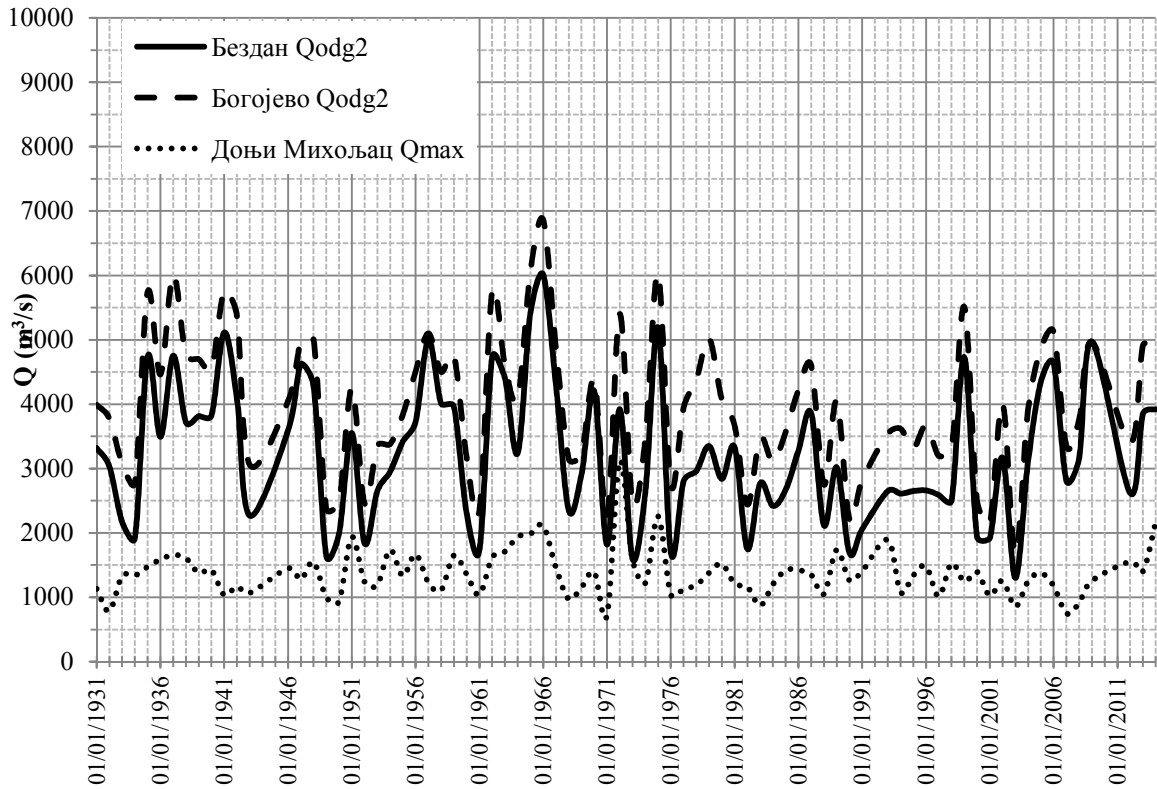
Слика 5.3 Комбинације хидролошких станица по чворовима за деоницу Дунава од уласка у Србију до Смедерева



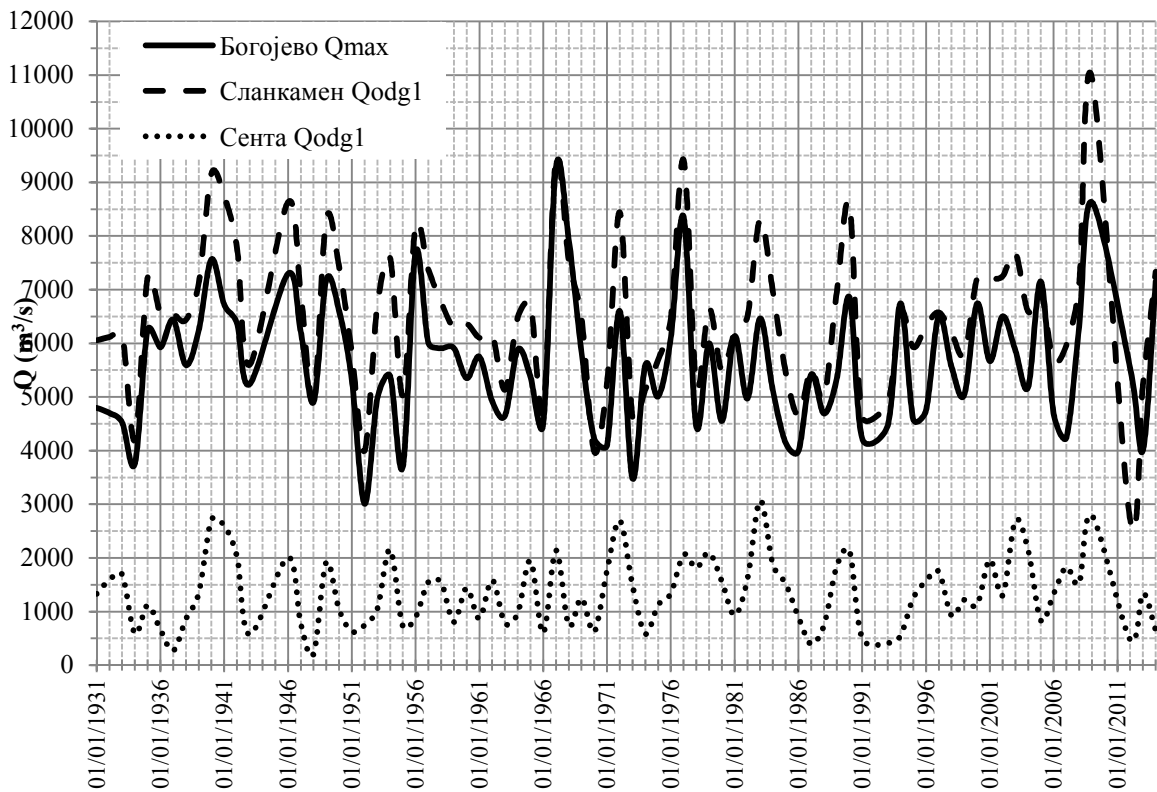
Слика 5.4 Серије максималних годишњих и одговарајућих протока реке Дунав и притоке за ЧВОР 1, Комбинација 1



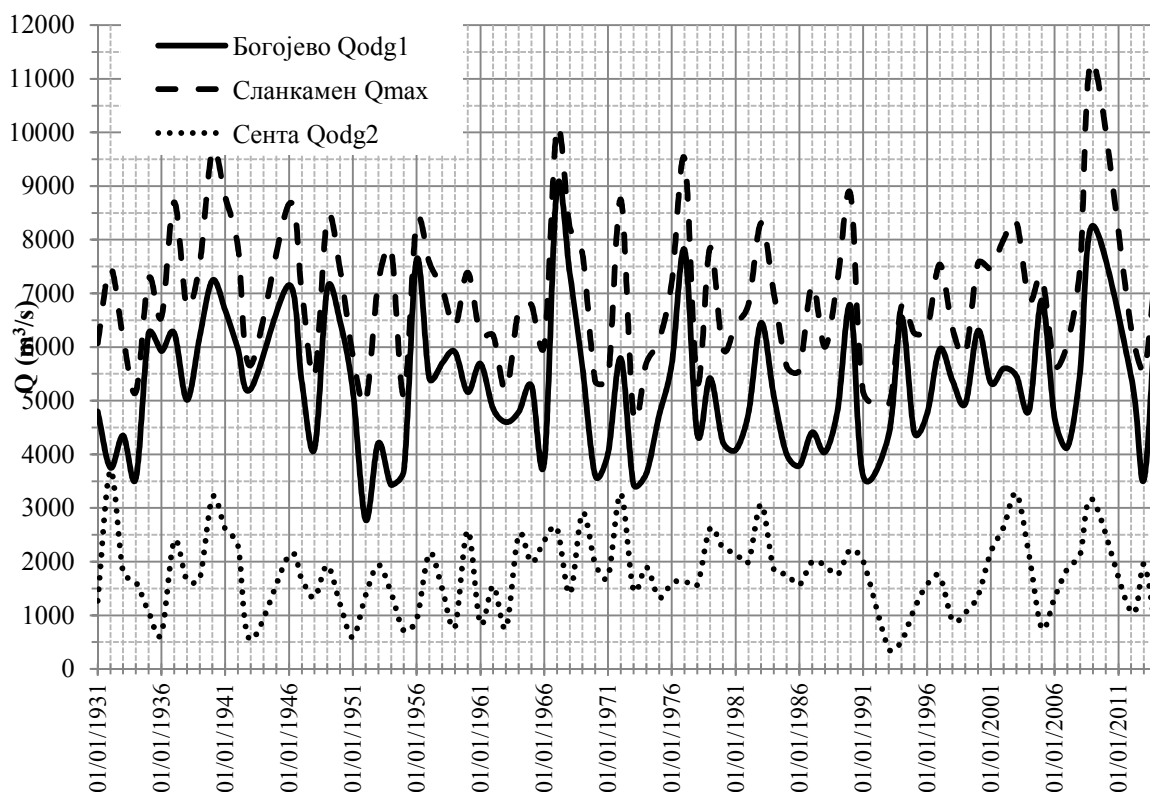
Слика 5.5 Серије максималних годишњих и одговарајућих протока реке Дунав и притоке за ЧВОР 1, Комбинација 2



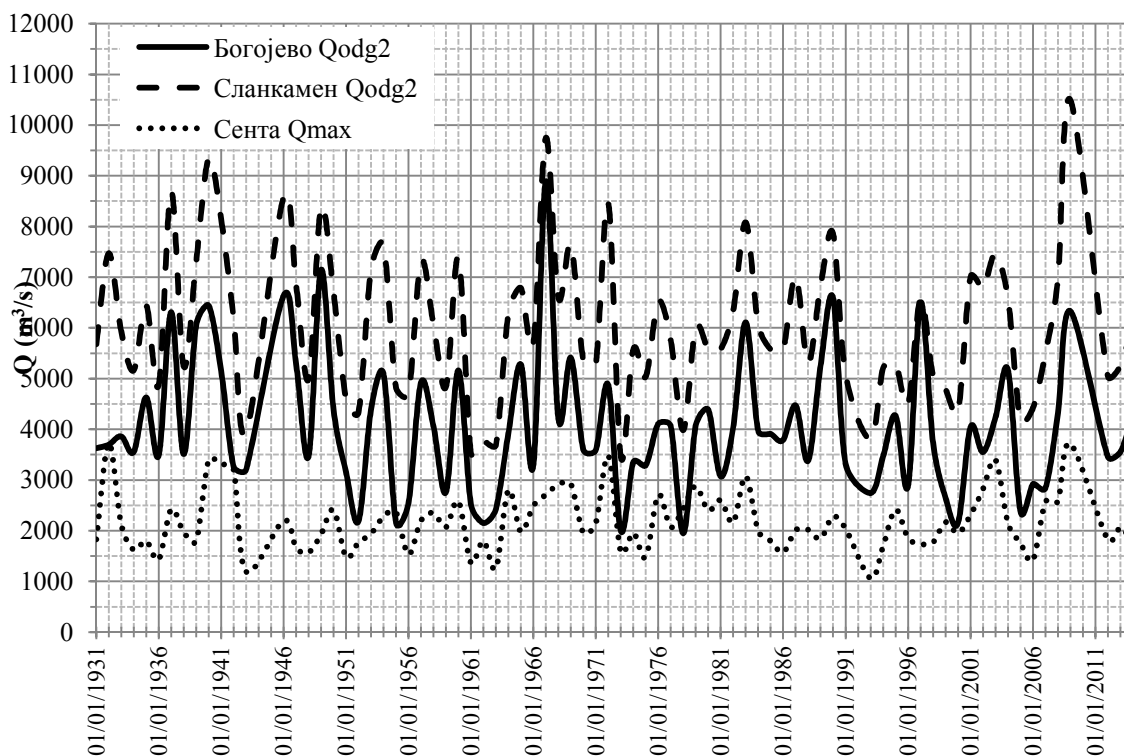
Слика 5.6 Серије максималних годишњих и одговарајућих протока реке Дунав и притоке за ЧВОР 1, Комбинација 3



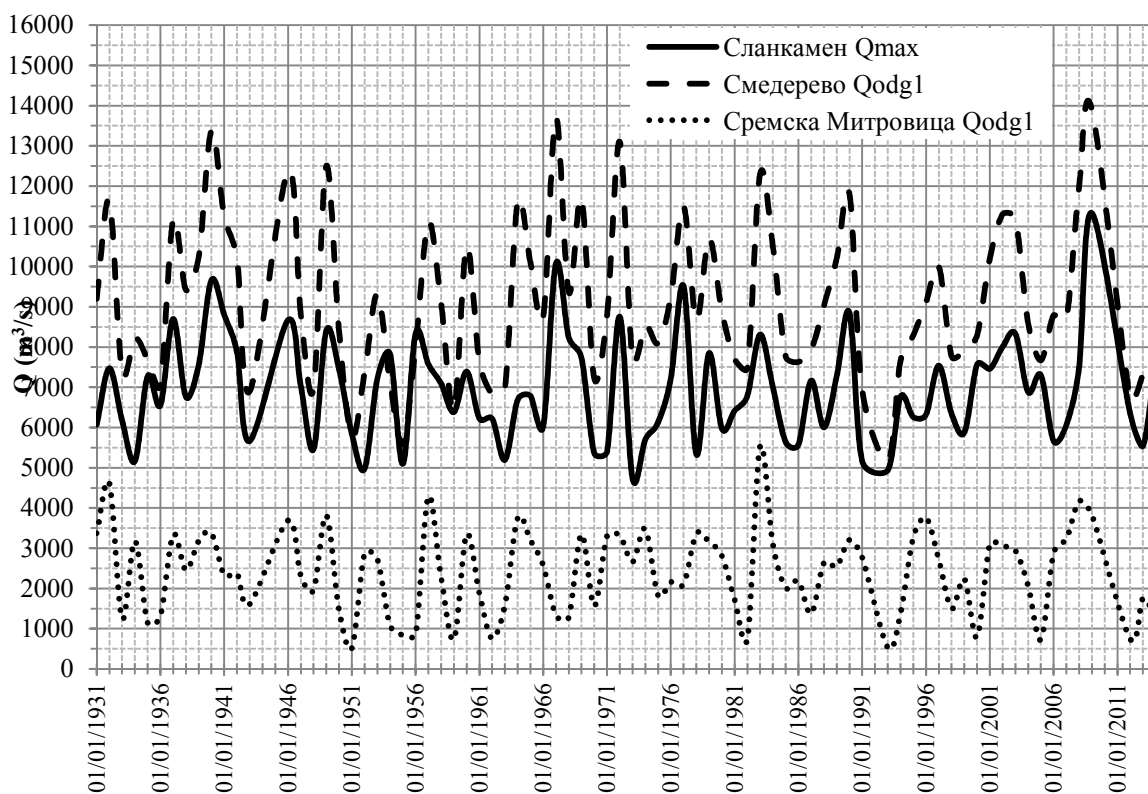
Слика 5.7 Серије максималних годишњих и одговарајућих протока реке Дунав и притоке за ЧВОР 2, Комбинација 1



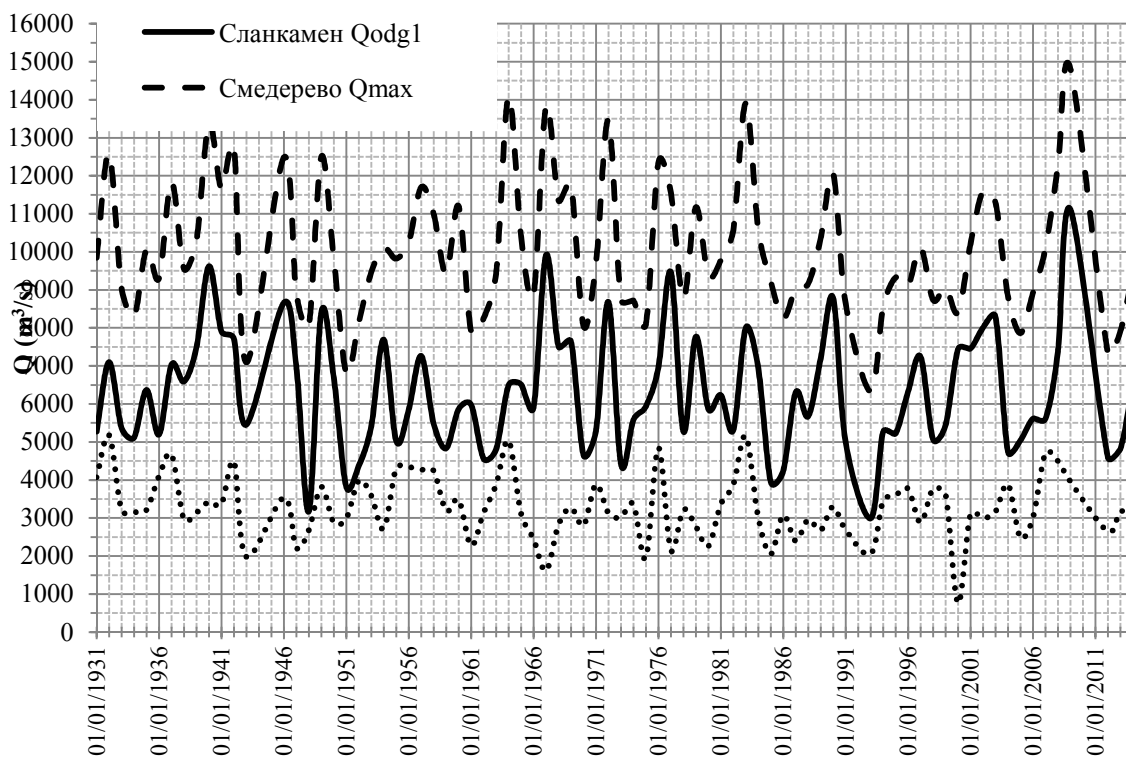
Слика 5.8 Серије максималних годишњих и одговарајућих протока реке Дунав и притоке за ЧВОР 2, Комбинација 2



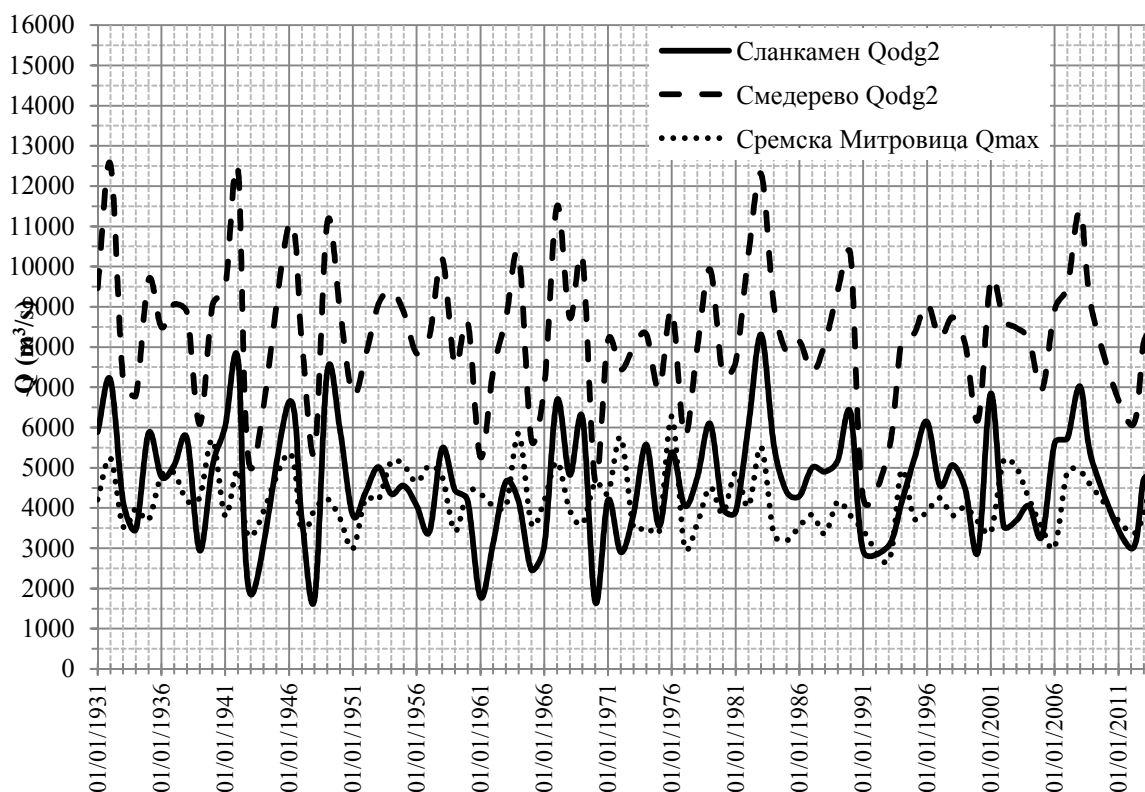
Слика 5.9 Серије максималних годишњих и одговарајућих протока реке Дунав и притоке за ЧВОР 2, Комбинација 3



Слика 5.10 Серије максималних годишњих и одговарајућих протока реке Дунав и притоке за ЧВОР 3, Комбинација 1



Слика 5.11 Серије максималних годишњих и одговарајућих протока реке Дунав и притоке за ЧВОР 3, Комбинација 2



Слика 5.12 Серије максималних годишњих и одговарајућих протока реке Дунав и притоке за ЧВОР 3, Комбинација 3

## 5.2 ТЕСТИРАЊЕ ХОМОГЕНОСТИ ВРЕМЕНСКИХ СЕРИЈА

Формирање временских серија репрезентативних за хидролошке прорачуне и анализе подразумева испитивање односа чланова серије. Уколико је дошло до радова, промена у сливу чију водност оцењујемо на основу мерења на хидролошком профилу може доћи до промене у просечним месечним или годишњим протоцима, али и у екстремима. Због свега тога је потребно да се најпре провери хомогеност низа.

Тестове за утврђивање хомогености низа можемо поделити у две групе: параметарске и непараметарске.

### 5.2.1 Параметарски тестови

Ове тестове карактеришу оцене једног или више параметара узорка случајно променљиве (средња вредност, стандардна девијација). Њима се испитује да ли статистички параметри оцењени на основу два узорка величине  $n_1$  и  $n_2$  припадају истој

популацији при чему претпостављају нормалност расподеле у основном скупу. Најчешће тестиране хипотезе су о једнакости средњих вредности и дисперзије узорака.

Како параметарски тестови претпостављају да се узорак покорави нормалној расподели, а применом једног од статистичких тестова вредност  $p$  буде мања од усвојеног прага значајности  $\alpha$  (најчешће 0,05 или 0,1) емпиријска расподела значајно одступа од нормалне расподеле.

Графикон кутије („box-plot“) омогућује визуелну оцену да ли се серија покорави нормалном закону расподеле. Медијана мора да буде у центру кутије и уколико постоје неке екстремне вредности оне указују на одступање од нормалне расподеле (Прилог 3).

### 5.2.1.1 Тестирање хипотезе о једнакости средњих вредности

У сврху тестирања поставља се нулта хипотеза:  $H_0 : \mu_{X1} = \mu_{X2} = \mu_X$  и алтернативна хипотеза:  $H_a : \mu_{X1} \neq \mu_{X2}$ .

Из Прилога 1 се види да формиране серије протока имају око 80 чланова низа тако да ће се применити  $Z$  – тест ( $n_1, n_2 > 30$ , Прохаска, 2003).

Као што је напред поменуто, ако се претпоставља да два узорка потичу из популације са нормалном расподелом онда ће и разлика њихових средњих вредности представљати случајну променљиву која се покорави нормалној расподели вероватноће.

Тест статистика гласи:

$$z = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}} \quad (5.1)$$

где је:

$z$  – променљива која има нормалну расподелу  $N(0,1)$ ;

$$\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_{x1}^2}{n_1} + \frac{\sigma_{x2}^2}{n_2}} \quad (5.2)$$

За задати праг значајности нулта хипотеза се прихвата ако је:

$$z_{\alpha/2} < z < z_{1-\alpha/2} \quad (5.3)$$

Резултати теста приказани су у табелама 5.2 – 5.4 и потврђују прихватање нулте хипотезе за задати праг значајности  $\alpha=0,05$  осим за серију Бездан Qodg2 у ЧВОРУ 1 (Табела 5.2).

Табела 5.2 Нормализован  $Z$  – тест временских серија за ЧВОР 1

ЧВОР 1	Бездан $Q_{max}$	Доњи Михољац $Q_{odg1}$	Богојево $Q_{odg1}$	Доњи Михољац $Q_{max}$	Бездан $Q_{odg2}$	Богојево $Q_{odg2}$	Богојево $Q_{max}$	Бездан $Q_{odg1}$	Доњи Михољац $Q_{odg2}$
$\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}$	0,025	0,042	0,025	0,029	0,038	0,032	0,025	0,028	0,045
$z_{\alpha/2} < z < z_{1-\alpha/2} (\alpha = 0,05) \rightarrow -1,96 < z < 1,96$									
Статистика теста, $Z$	-0,372	0,650	-0,315	0,976	<b>2,070</b>	1,730	-0,245	0,039	0,781

Табела 5.3 Нормализован  $Z$  – тест временских серија за ЧВОР 2

ЧВОР 1	Богојево $Q_{max}$	Сента $Q_{odg1}$	Сланкамен $Q_{odg1}$	Сента $Q_{max}$	Богојево $Q_{odg2}$	Сланкамен $Q_{odg2}$	Сланкамен $Q_{max}$	Богојево $Q_{odg1}$	Сента $Q_{odg2}$
$\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}$	0,025	0,063	0,025	0,032	0,036	0,028	0,021	0,027	0,054
$z_{\alpha/2} < z < z_{1-\alpha/2} (\alpha = 0,05) \rightarrow -1,96 < z < 1,96$									
Статистика теста, $Z$	0,000	-0,619	0,476	0,350	0,649	0,858	0,286	0,172	0,157

Табела 5.4 Нормализован  $Z$  – тест временских серија за ЧВОР 3

ЧВОР 1	Слан. $Q_{max}$	Срем. Мит. $Q_{odg1}$	Смед. $Q_{odg1}$	Срем. Мит. $Q_{max}$	Слан. $Q_{odg2}$	Смед. $Q_{odg2}$	Смед. $Q_{max}$	Слан. $Q_{odg1}$	Срем. Мит. $Q_{odg2}$
$\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}$	0,021	0,061	0,025	0,021	0,037	0,025	0,020	0,029	0,032
$z_{\alpha/2} < z < z_{1-\alpha/2} (\alpha = 0,05) \rightarrow -1,96 < z < 1,96$									
Статистика теста, $Z$	-0,148	-0,075	-0,189	1,431	-1,141	0,229	0,831	0,073	0,965



## 5.2.1.2 Тестирање једнакости дисперзије два узорка

И за овај тест важи услов нормалности два узорка. Нулта хипотеза је:  
 $H_0 : \sigma_{X1} \cong \sigma_{X2}$ .

Статистика теста гласи:

$$F = \frac{\sigma_{X1}}{\sigma_{X2}}, \left( \sigma_{X1} > \sigma_{X2} \right) \quad (5.4)$$

Ова статистика има Фишерову расподелу са  $\nu_1 = n_1 - 1$  и  $\nu_2 = n_2 - 1$  степени слободе.

За задати праг значајности нулта хипотеза се прихвата ако је:

$$F < F_{1-\alpha}(\nu_1, \nu_2) \quad (5.5)$$

Резултати тестирања су приказани у табелама 5.5 – 5.7, нулта хипотеза је усвојена у свим случајевима осим за ЧВОР 3 и серије Сремска Митровица Qodg2 и Сланкамен Qodg2 (Табела 5.7).

Табела 5.5 Фишеров тест дисперзије два узорка за ЧВОР 1

ЧВОР 1	Бездан <i>Qmax</i>	Доњи Михољац <i>Qodg1</i>	Богојево <i>Qodg1</i>	Доњи Михољац <i>Qmax</i>	Бездан <i>Qodg2</i>	Богојево <i>Qodg2</i>	Богојево <i>Qmax</i>	Бездан <i>Qodg1</i>	Доњи Михољац <i>Qodg2</i>
Статистика теста, <i>F</i>	1,139	1,318	1,220	1,447	1,157	1,089	1,217	1,684	1,590
$\nu_1 = 39, \nu_2 = 38 \quad (\alpha = 0,05) \rightarrow F_{0,95}(\nu_1, \nu_2) = 1,70$ Tabela X (Прохаска и Ристић, 1996)									

Табела 5.6 Фишеров тест дисперзије два узорка за ЧВОР 2

ЧВОР 1	Богојево <i>Qmax</i>	Сента <i>Qodg1</i>	Сланкамен <i>Qodg1</i>	Сента <i>Qmax</i>	Богојево <i>Qodg2</i>	Сланкамен <i>Qodg2</i>	Сланкамен <i>Qmax</i>	Богојево <i>Qodg1</i>	Сента <i>Qodg2</i>
Статистика теста, <i>F</i>	1,279	1,108	1,159	1,034	1,576	1,660	1,100	1,346	1,031
$\nu_1 = 40, \nu_2 = 40 \quad (\alpha = 0,05) \rightarrow F_{0,95}(\nu_1, \nu_2) = 1,69$ Tabela X (Прохаска и Ристић, 1996)									

Табела 5.7 Фишеров тест дисперзије два узорка за ЧВОР 3

ЧВОР 1	Слан. $Q_{max}$	Срем. Мит. $Q_{odg1}$	Смед. $Q_{odg1}$	Срем. Мит. $Q_{max}$	Слан. $Q_{odg2}$	Смед. $Q_{odg2}$	Смед. $Q_{max}$	Слан. $Q_{odg1}$	Срем. Мит. $Q_{odg2}$
Статистика теста, $F$	1,010	1,049	1,288	1,589	<b>2,260</b>	1,588	1,029	1,174	<b>1,862</b>
$\nu_1 = 41, \nu_2 = 41 \ (\alpha = 0,05) \rightarrow F_{0,95}(\nu_1, \nu_2) = 1,69$ Tabela X (Прохаска и Ристић, 1996)									

## 5.2.2 Непараметарски тестови

За разлику од параметарских тестова, непараметарски тестови не захтевају познавање облика и нормалност расподеле у основном скупу. Примењују се у случају када нису испуњене претпоставке за примену параметарских тестова и када се ради о малој величини узорка, али уколико јесу испуњени услови за примену параметарским тестовима увек треба дати предност.

Сваки параметарски тест има одговарајући међу непараметарским тестовима и зато када не можемо са сигурношћу тврдити да је нека променљива нормално распоређена, боље користити тестове који се односе на тестирање хипотезе о истородности расподеле два подузорка.

Најчешће коришћен је Мен–Витни U тест који је непараметарска алтернатива Студентовом t тесту.

## 5.2.2.1 Мен – Витни, U - тест

Полазна хипотеза је да су расподеле непрекидних случајно променљивих  $X$  и  $Y$  једнаке на основу два случајна подузорка  $(X_1, X_2, \dots, X_{n_1})$  и  $(Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2})$  при чему је  $n_2 \geq n_1$ , тј.

$$H_0(F_x(x) = F_y(y)); H_1(F_x(x) \neq F_y(y)).$$

Алгоритам теста се састоји у следећем (Mann and Witney, 1947):

$$1. \text{ Формира се јединствен неоппадајући низ и дефинише се } h_{ij} = \begin{cases} 1, & Y_j < X_i \\ 0, & Y_j \geq X_i \end{cases} \quad (5.6);$$

$$2. \text{ Израчунава се статистика за тестирање нулте хипотезе: } U = \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} h_{ij} \quad (5.7);$$

$$3. \text{ Важи да је: } \mu_U = \frac{1}{2} n_1 n_2, \quad \sigma_U^2 = \frac{1}{12} n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 1) \quad (5.8);$$

4. Стандардизација статистике  $U$  се врши на следећи начин:

$$u = \frac{U - \frac{n_1 n_2}{2}}{\sqrt{n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 1)}} \sqrt{12} \quad (5.9);$$

5. Вредност  $p$  (критична област) се одређује из услова:  $P\{u \leq c_1\} = P\{u \geq c_2\} = \frac{\alpha}{2}$   
(5.10)

Статистика  $U$  се може на други начин рачунати преко рангова случајно променљивих  $X$  и  $Y$ . У том случају се вредност тест статистике рачуна као

$$U_X = R_X - \frac{n_1(n_1+1)}{2}, U_Y = -R_Y + n_1n_2 + \frac{n_2(n_2+1)}{2} \quad (5.11)$$

$$U = \min\{U_X, U_Y\} \quad (5.12)$$

Услов стандардизације овако одређене тест статистике је да обим узорка буде  $n_1, n_2 \geq 8$ .

Статистика  $u$  прати стандардну нормалну расподелу ако је за праг значајности  $\alpha$  испуњен услов:  $u_{\alpha/2} < u < u_{1-\alpha/2}$  (5.13)

За праг значајности ( $\alpha = 0,05$ )  $\rightarrow -1,96 < u < 1,96$  из табеле ТШ (Прохаска и Ристић, 1996).

Резултати теста приказани су у Табелама 5.8 – 5.10. и показују да је полазна хипотеза задовољена осим у случају ЧВОРА 1 и серију Богојево Qodg2 (Табела 5.8)

Табела 5.8 Мен – Витни тест за ЧВОР 1

ЧВОР 1	Бездан $Q_{max}$	Доњи Михољац $Q_{odg1}$	Богојево $Q_{odg1}$	Доњи Михољац $Q_{max}$	Бездан $Q_{odg2}$	Богојево $Q_{odg2}$	Богојево $Q_{max}$	Бездан $Q_{odg1}$	Доњи Михољац $Q_{odg2}$
Мен-Витни $U$	769,5	744,0	762,0	666,0	531,0	589,0	778,0	755,0	735,0
Статистика теста, $u$	-0,103	-0,353	-0,177	-1,118	<b>-2,442</b>	-1,873	-0,020	-0,245	-0,441

$$u_{\alpha/2} < u < u_{1-\alpha/2} \quad (\alpha = 0,05) \rightarrow -1,96 < u < 1,96$$

Прихватање хипотезе	ДА	ДА	ДА	ДА	НЕ	ДА	ДА	ДА	ДА
------------------------	----	----	----	----	----	----	----	----	----

Табела 5.9 Мен – Витни тест за ЧВОР 2

ЧВОР 2	Богојево $Q_{max}$	Сента $Q_{odg1}$	Слан. $Q_{odg1}$	Сента $Q_{max}$	Богојево $Q_{odg2}$	Слан. $Q_{odg2}$	Слан. $Q_{max}$	Богојево $Q_{odg1}$	Сента $Q_{odg2}$
Мен - Витни $U$	807,0	770,5	767,5	826,0	761,0	717,0	789,0	790,0	830,0
Статистика теста, $u$	-0,311	-0,649	-0,677	-0,134	-0,737	-1,145	-0,478	-0,468	-0,097

$$u_{\alpha/2} < u < u_{1-\alpha/2} \quad (\alpha = 0,05) \rightarrow -1,96 < u < 1,96$$

Прихватање хипотезе	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА
------------------------	----	----	----	----	----	----	----	----	----

Табела 5.10 Мен – Витни тест за ЧВОР 3

ЧВОР 3	Слан $Q_{max}$	Сремска Митровица $Q_{odg1}$	Смед $Q_{odg1}$	Сремска Митровица $Q_{max}$	Слан $Q_{odg2}$	Смед $Q_{odg2}$	Смед $Q_{max}$	Слан $Q_{odg1}$	Сремска Митровица $Q_{odg2}$
Мен - Витни $U$	881,0	850,5	868,5	672,0	775,0	841,0	768,0	872,0	763,5
Статистика теста, $u$	-0,009	-0,282	-0,121	-1,721	-0,783	-0,182	-1,020	-0,089	-1,060

$$u_{\alpha/2} < u < u_{1-\alpha/2} \quad (\alpha = 0,05) \rightarrow -1,96 < u < 1,96$$

Прихватање хипотезе	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА
------------------------	----	----	----	----	----	----	----	----	----

### 5.3 ТЕСТИРАЊЕ СЛУЧАЈНОСТИ ВРЕМЕНСКИХ СЕРИЈА

Поред услова хомогености хидролошке временске серије морају да задовоље и услов случајности што подразумева да су чланови серије међусобно независни. За проверу независности примењује се више тестова од којих је у овој докторској дисертацији примењен тест квадрата узастопних разлика.

## 5.3.1 Тест квадрата узастопних разлика

Нулта хипотеза:  $H_0$  гласи: узорак се састоји од међусобно независних података тако да се тест статистика (Поповић и Благојевић, 1997; Прохаска, 2003):

$$u = \frac{\frac{d^2}{2} - 1}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n-2}}} \quad (5.14)$$

покрава нормалном закону расподеле  $N(0,1)$ , где је:

$$d^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)^2 \quad (5.15)$$

Нулта хипотеза се прихвата уколико је

$$u_{\alpha/2} < u < u_{1-\alpha/2} \quad (5.16)$$

За праг значајности ( $\alpha = 0,05$ )  $\rightarrow -1,96 < u < 1,96$  из табеле ТШ (Прохаска и Ристић, 1996).

Резултати прорачуна приказани су у табелама 5.11 – 5.13.

Табела 5.11 Тест случајности за ЧВОР 1

ЧВОР 1	Бездан $Q_{max}$	Доњи Михољац $Q_{odg1}$	Богојево $Q_{odg1}$	Доњи Михољац $Q_{max}$	Бездан $Q_{odg2}$	Богојево $Q_{odg2}$	Богојево $Q_{max}$	Бездан $Q_{odg1}$	Доњи Михољац $Q_{odg2}$
$d^2$	2660225	202760	3206679	267117	1917481	2108071	3257303	2958518	223306
$\sigma$	1142.88	319.95	1266.90	378.34	1076.27	1112.60	1261.63	1166.71	350.25
$u$	0.1650	-0.0868	-0.0094	-0.6025	-1.5513	-1.3370	0.2089	0.7807	-0.8088
$u_{\alpha/2} < u < u_{1-\alpha/2} \quad (\alpha = 0,05) \rightarrow -1,96 < u < 1,96$									
Прихватање хипотезе	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА

Табела 5.12 Тест случајности за ЧВОР 2

ЧВОР 2	Богојево $Q_{max}$	Сента $Q_{odg1}$	Слан. $Q_{odg1}$	Сента $Q_{max}$	Богојево $Q_{odg2}$	Слан. $Q_{odg2}$	Слан. $Q_{max}$	Богојево $Q_{odg1}$	Сента $Q_{odg2}$
$d^2$	3231740	768757	4472155	632776	3487167	4331286	3702897	3095680	883724
$\sigma$	1258.71	663.30	1421.32	604.79	1335.04	1503.31	1333.90	1297.08	730.30
$u$	0.1824	-1.1582	0.9799	-1.2376	-0.1993	-0.3826	0.3717	-0.7332	-1.5724
$u_{\alpha/2} < u < u_{1-\alpha/2} \quad (\alpha = 0,05) \rightarrow -1,96 < u < 1,96$									
Прихватање хипотезе	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА

Табела 5.13 Тест случајности за ЧВОР 3

ЧВОР 3	Слан $Q_{max}$	Сремска Митровица $Q_{odg1}$	Смед $Q_{odg1}$	Сремска Митровица $Q_{max}$	Слан $Q_{odg2}$	Смед $Q_{odg2}$	Смед $Q_{max}$	Слан $Q_{odg1}$	Сремска Митровица $Q_{odg2}$
$d^2$	3780538	2303908	7472895	1372944	4205157	6678509	6481488	4684863	1265866
$\sigma$	1369.04	1100.84	2017.61	813.39	1413.27	1755.36	1856.89	1600.63	849.80
$u$	0.0791	-0.4584	-0.7618	0.3465	0.4859	0.7721	-0.5577	-0.7950	-1.1461
$u_{\alpha/2} < u < u_{1-\alpha/2} \quad (\alpha = 0,05) \rightarrow -1,96 < u < 1,96$									
Прихватање хипотезе	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА

### 5.3.2 Тест серијалне корелације првог реда (Тест Андерсона)

Серијална корелација је веза две узастопне варијабле временске серије, тако да се може дефинисати статистика:

$$r_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} (x_i - \bar{X}_1) \cdot (x_{i+1} - \bar{X}_2)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} (x_i - \bar{X}_1)^2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - \bar{X}_2)^2}} \quad (5.17)$$

где је:

$r_1$  – серијални коефицијент првог реда;

$$\bar{X}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} x_1}{n-1} \quad (5.18)$$

$$\bar{X}_2 = \frac{\sum_{i=2}^n x_1}{n-1} \quad (5.19)$$

Уводи се нулта хипотеза (Anderson, 1941):  $H_0 : r_1 \cong 0$ .

Статистика:

$$z = \frac{r_1 + \frac{1}{n-1}}{\frac{n-2}{(n-1)^{3/2}}} \quad (5.20)$$

има нормалну расподелу па за праг значајности ( $\alpha = 0,05$ )  $\rightarrow -1,96 < z < 1,96$  из табеле ТШ (Прохаска и Ристић, 1996) када се нулта хипотеза прихвата.

Резултати прорачуна приказани су у табелама 5.14 – 5.16.

Табела 5.14 Тест серијалне корелације првог реда за ЧВОР 1

ЧВОР 1	Бездан $Q_{max}$	Доњи Михољац $Q_{odg1}$	Богојево $Q_{odg1}$	Доњи Михољац $Q_{max}$	Бездан $Q_{odg2}$	Богојево $Q_{odg2}$	Богојево $Q_{max}$	Бездан $Q_{odg1}$	Доњи Михољац $Q_{odg2}$
$\bar{X}_1$	4946,23	754,45	5457,64	1360,04	3218,76	3961,32	5638,48	4737,03	750,90
$\bar{X}_2$	4946,81	758,22	5458,22	1373,31	3226,45	3973,12	5644,80	4733,06	765,41
$r_1$	0,994	0,996	0,996	0,968	0,997	0,995	0,997	0,994	0,949
$z$	0,239	0,239	0,239	0,233	0,239	0,239	0,239	0,239	0,228
$z_{\alpha/2} < z < z_{1-\alpha/2} \quad (\alpha = 0,05) \rightarrow -1,96 < z < 1,96$									
Прихватање хипотезе	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА



Табела 5.15 Тест серијалне корелације првог реда за ЧВОР 2

ЧВОР 2	Богојево $Q_{max}$	Сента $Q_{odg1}$	Слан. $Q_{odg1}$	Сента $Q_{max}$	Богојево $Q_{odg2}$	Слан. $Q_{odg2}$	Слан. $Q_{max}$	Богојево $Q_{odg1}$	Сента $Q_{odg2}$
$\bar{X}_1$	5653,04	1337,95	6502,44	2169,26	4041,18	6028,28	6939,08	5285,42	1743,99
$\bar{X}_2$	5659,13	1326,53	6493,40	2158,00	4052,98	6020,70	6931,81	5284,84	1739,40
$r_1$	0,997	0,988	0,995	0,971	0,998	0,997	0,990	0,998	0,989
$z$	0,237	0,235	0,237	0,231	0,238	0,237	0,236	0,238	0,235
$z_{\alpha/2} < z < z_{1-\alpha/2} (\alpha = 0,05) \rightarrow -1,96 < z < 1,96$									
Прихватање хипотезе	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА

Табела 5.16 Тест серијалне корелације првог реда за ЧВОР 3

ЧВОР 3	Слан $Q_{max}$	Сремска Митровица $Q_{odg1}$	Смед $Q_{odg1}$	Сремска Митровица $Q_{max}$	Слан* $Q_{odg2}$	Смед $Q_{odg2}$	Смед $Q_{max}$	Слан $Q_{odg1}$	Сремска Митровица $Q_{odg2}$
$\bar{X}_1$	6986,90	2365,94	9119,46	4211,89	4727,20	8391,95	10028,28	6289,00	3295,84
$\bar{X}_2$	6979,80	2383,53	9142,35	4161,17	4655,43	8277,95	10044,60	6290,90	3306,69
$r_1$	0,990	0,964	0,994	0,869	0,993	0,882	0,998	0,996	0,971
$z$	0,234	0,228	0,235	0,205	0,235	0,208	0,235	0,235	0,229
$z_{\alpha/2} < z < z_{1-\alpha/2} (\alpha = 0,05) \rightarrow -1,96 < z < 1,96$									
Прихватање хипотезе	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА

\*недостаје податак за 2007. годину

#### 5.4 ТЕСТИРАЊЕ ПОСТОЈАЊА ИЗУЗЕТАКА У НИЗОВИМА ПОДАТАКА О ПРОТОЦИМА

Изузеци („outliers“) су догађаји који значајно одступају или превазилазе суседну вредност у опадјућем низу временске серије која се разматра. Они могу бити такви да су знатно мањи од осталих података у серији (доњи изузеци) или знатно већи (горњи изузеци). Порекло ових података може бити: грешка у прикупљању и обради података,

промене у сливу које су изазвале овакву појаву или феномени који су другачији од догађаја представљених преосталим подацима у разматраној временској серији.

За идентификацију изузетака у овом истраживању је коришћен статистички тест предложен у Grubbs (1969) и Grubbs и Beck (1972).

Горња и доња граница за идентификацију изузетака се рачуна на основу логаритмованих вредности временске серије према формулама (5.21) и (5.22):

- Горња граница

$$Y_H = \bar{Y} + K_N \sigma_y \quad (5.21)$$

- Доња граница

$$Y_L = \bar{Y} - K_N \sigma_y \quad (5.22)$$

где је:

- $Y_H$  – логаритам горње границе за идентификацију изузетка;
- $Y_L$  – логаритам доње границе за идентификацију изузетка;
- $Y_{av}$  – average value of the time series  $Y$ ;
- $Y_i = \log X_i$  – логаритам члана временске серије,
- $X_i$  - члан временске серије;
- $\sigma_y$  – стандардна девијација временске серије  $Y$ ;
- $C_{sy}$  – коефицијент асиметрије  $Y$ ;
- $K_N$  – фактор фреквенце (критична вредност) за праг значајности  $\alpha=10\%$
- $N$  – број чланова временске серије  $Y$ .

Фактор фреквенце,  $K_N$ , се рачуна (Pilon et al., 1985):

$$K_N = -3.6220 + 6.2844 N^{0.25} - 2.49835 N^{0.5} + 0.491436 N^{0.75} - 0.037911 N \quad (5.23)$$

Уколико је  $-0.4 > C_{sy}$ , временска серија се тестира на постојање доњег изузетка (5.20) и ако је  $C_{sy} > 0.4$  на постојање горњег изузетка (5.21). Временска серија са коефицијентом асиметрије између ове две вредности се тестира за оба изузетка (Bulletin 17, 1982).

Процедура се своди на упоређивање емпиријске расподеле са дефинисаним границама (једначине 5.20 и 5.21). Уколико било која емпиријска тачка, чија је вероватноћа 90% или  $1 - \alpha = 0.90$  превазиђе горњу или доњу границу сматра се изузетком.

Статистички параметри и резултати тестирања приказани су у табелама 5.17 – 5.19.

Табела 5.17 Грубс и Бек тест за ЧВОР 1

ЧВОР 1	Бездан $Q_{max}$	Доњи Михољац $Q_{odg1}$	Богојево $Q_{odg1}$	Доњи Михољац $Q_{max}$	Бездан $Q_{odg2}$	Богојево $Q_{odg2}$	Богојево $Q_{max}$	Бездан $Q_{odg1}$	Доњи Михољац $Q_{odg2}$
$\bar{Y}$	3,682	2,847	3,725	3,122	3,484	3,581	3,740	3,661	2,846
$C_{sy}$	0,1251	0,2434	0,1164	0,2797	0,2701	-0,4069	-0,0240	0,4441	0,5058
$\sigma_y$	0,09789	0,1641	0,0986	0,1119	0,1511	0,1278	0,0965	0,1093	0,1741
$K_N$	2,93522								
$N$	79								
$Y_{max}$	3,924	3,353	3,958	3,494	3,779	-	3,968	-	3,340
$Y_{min}$	3,446	2,375	3,468	2,858	3,114	3,223	3,478	3,250	-
$Y_H$	3,970	3,329	4,015	3,451	3,927	-	4,023	-	3,357
$Y_L$	3,395	2,365	3,436	2,794	3,040	3,206	3,457	3,341	-
<i>Изузетак</i>	НЕ	<b>Горњи</b>	НЕ	<b>Горњи</b>	НЕ	НЕ	НЕ	<b>Доњи</b>	НЕ

Табела 5.18 Грубс и Бек тест за ЧВОР 2

ЧВОР 2	Богојево $Q_{max}$	Сента $Q_{odg1}$	Слан. $Q_{odg1}$	Сента $Q_{max}$	Богојево $Q_{odg2}$	Слан. $Q_{odg2}$	Слан. $Q_{max}$	Богојево $Q_{odg1}$	Сента $Q_{odg2}$
$\bar{Y}$	3,741	3,061	3,802	3,316	3,585	3,766	3,832	3,710	3,316
$C_{sy}$	-0,0396	-0,6028	0,5445	-0,1826	0,0355	0,0290	0,2313	0,056	-0,1826
$\sigma_y$	0,0962	0,2464	0,0984	0,1226	0,1397	0,1081	0,0816	0,1053	0,1226
$K_N$	2,94833								
$N$	82								
$Y_{max}$	3,968	-	-	3,572	3,950	4,021	4,054	3,952	3,572
$Y_{min}$	3,479	2,322	3,432	2,963	3,290	3,539	3,675	3,444	2,963

ЧВОР 2	Богојево $Q_{max}$	Сента $Q_{odg1}$	Слан. $Q_{odg1}$	Сента $Q_{max}$	Богојево $Q_{odg2}$	Слан. $Q_{odg2}$	Слан. $Q_{max}$	Богојево $Q_{odg1}$	Сента $Q_{odg2}$
$Y_H$	4,025	-	-	3,678	4,000	4,085	4,073	4,020	3,678
$Y_L$	3,458	2,335	3,511	2,955	3,173	2,948	2,948	3,399	2,955
<i>Изузетак</i>	НЕ	<b>Доњи</b>	<b>Доњи</b>	НЕ	НЕ	НЕ	НЕ	НЕ	НЕ

Табела 5.19 Грубс и Бек тест за ЧВОР 3

ЧВОР 3	Слан $Q_{max}$	Сремска Митровица $Q_{odg1}$	Смед $Q_{odg1}$	Сремска Митровица $Q_{max}$	*Слан $Q_{odg2}$	Смед $Q_{odg2}$	Смед $Q_{max}$	Слан $Q_{odg1}$	Сремска Митровица $Q_{odg2}$
$\bar{Y}$	3,835	3,324	3,951	3,615	3,647	3,912	3,995	3,784	3,504
$C_{sy}$	0,2396	-0,7397	0,0005	0,1883	0,8496	0,6699	0,0152	0,2385	-1,5278
$\sigma_y$	0,0831	0,2372	0,0956	0,0826	0,1460	0,0967	0,0800	0,1123	0,1272
$K_N$	2,95677(*2,95258)								
$N$	84(*83)								
$Y_{max}$	4,054	-	4,143	3,820	-	-	4,171	4,046	
$Y_{min}$	3,675	2,711	3,713	3,430	3,221	3,628	3,799	3,476	2,878
$Y_H$	4,081	-	4,233	3,860	-	-	4,231	4,116	
$Y_L$	3,589	2,622	3,668	3,371	2,953	3,626	3,758	3,452	2,957
<i>Изузетак</i>	НЕ	НЕ	НЕ	НЕ	НЕ	НЕ	НЕ	НЕ	<b>Доњи</b>

\*односи се на серију Сланкамен  $Q_{odg2}$  где је  $N=83$

Идентификовани изузеци су приказани у табели 5.20.

Табела 5.20 Идентификовани изузеци у серијама анализираних протока

ЧВОР	Комбинација	Хидролошка станица	Параметар	Проток (m <sup>3</sup> /s)	Изузетак	Датум
1	1	Доњи Михољац	$Q_{odg1}$	2254	Горњи	21.07.1972.
1	2	Бездан	$Q_{odg1}$	1780	Доњи	15.06.2007.
1	3	Доњи Михољац	$Q_{max}$	3120	Горњи	22.07.1972.
2	1	Сланкамен	$Q_{odg1}$	2704	Доњи	15.06.2007.
2	1	Сента	$Q_{odg1}$	210	Доњи	20.07.1946.
3	2	Сремска Митровица	$Q_{odg2}$	755	Доњи	03.08.1997.

#### 5.4.1 Анализа утицаја изузетака на маргиналне расподеле вероватноћа

Према алгоритму 12-3 и препорукама из Bulletin 17В (1982) након идентификације изузетака врши се анализа расподела вероватноћа.

Уколико је идентификован горњи изузетак статистички параметри се коригују према једначинама у наставку.

Како су подаци логаритмовани процедура модификације статистичких параметара је следећа:

1. Рачуна се тежински коефицијент  $W$  према броју изузетака који падају изван дефинисаних граница:

$$W = \frac{N - Z}{n + L} \quad (5.24)$$

где је:

$Z$  - број горњих изузетака;

$L$  – број доњих изузетака.

2. Прерачунавају се статистички параметри:

- Средња вредност -  $\bar{Y}_L^*$

$$\bar{Y}_L^* = \frac{W \sum_{i=1}^n Y_{i,L} + \sum_{j=1}^Z Y_{j,L}}{N - WL} \quad (5.25)$$

- Стандардна девијација -  $\sigma_L^*$

$$\sigma_L^* = \sqrt{\frac{W \sum_{i=1}^n (Y_{i,L} - \bar{Y}_L^*)^2 + \sum_{j=1}^Z (Y_{j,L} - \bar{Y}_L^*)^2}{N - WL - 1}} \quad (5.26)$$

- Коефицијент асиметрије -  $G_L^*$

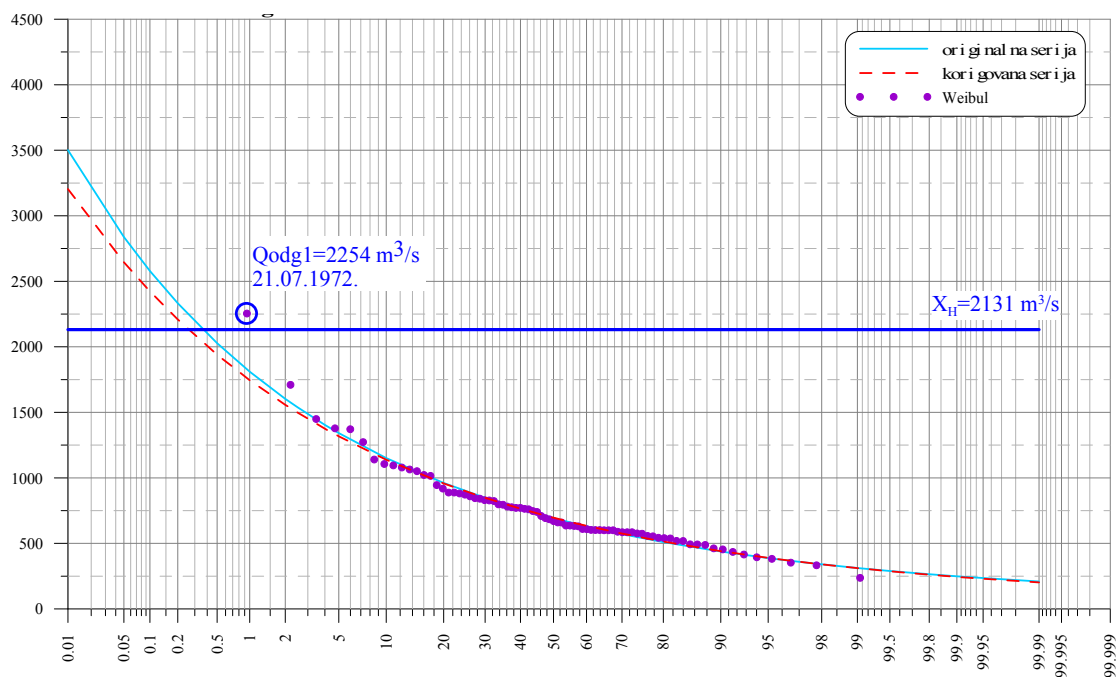
$$G_L^* = \frac{N - WL}{(N - WL - 1)(N - WL - 2)} \left[ \frac{W \sum_{i=1}^n (Y_{i,L} - \bar{Y}_L^*)^3 + \sum_{j=1}^Z (Y_{j,L} - \bar{Y}_L^*)^3}{(S_L^*)^3} \right] \quad (5.27)$$

Упоредни оригинални и кориговани статистички параметри за серије протока на хидролошкој станици Доњи Михољац на реци Драви где су идентификовани горњи изузеци приказани су у табели 5.21.

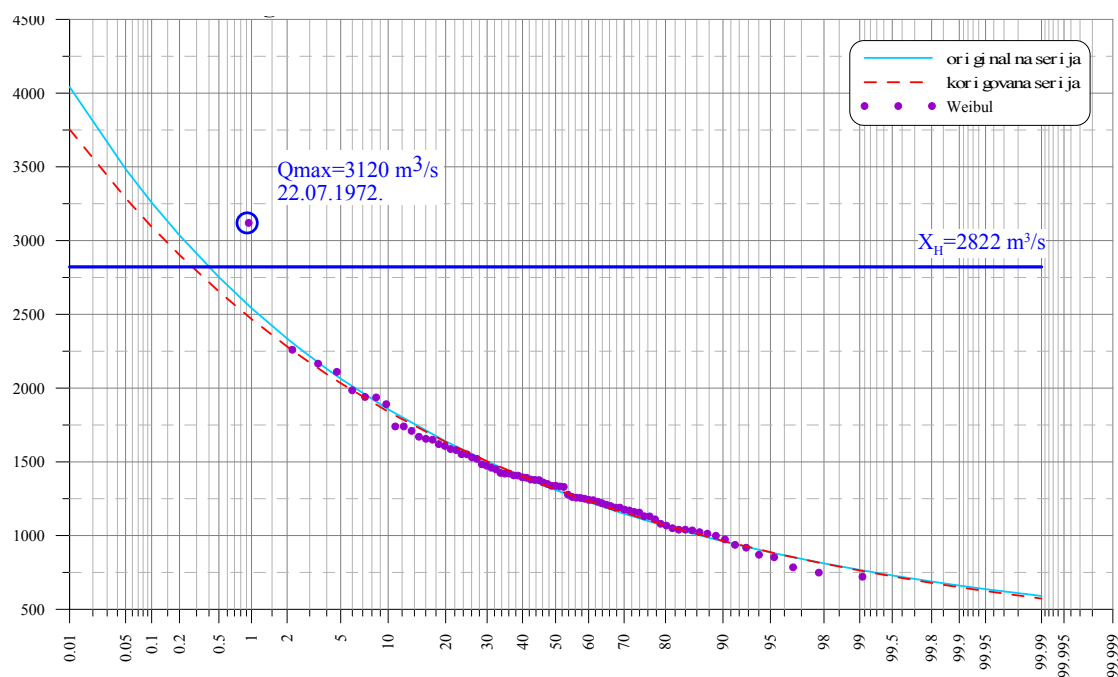
На сликама 5.12 и 5.13 приказане су емпиријска и теоријска Лог-Пирсон III расподела вероватноћа која се најбоље прилагођава емпиријским подацима (Прилози 4 и 5) у случају х.с. Доњи Михољац за серије  $Q_{max}$  и  $Q_{odg1}$ . На сликама се такође види и коригована расподела добијена описаном процедуром.

Табела 5.21 Оригинални и кориговани статистички параметри серија протока са идентификованим горњим изузецима

ЧВОР	Хидролошка станица	Параметар	$\bar{Y}$	$C_{sy}$	$\sigma_y$	$W$	$\bar{Y}_L^*$	$G_L^*$	$\sigma_L^*$
1	Доњи Михољац	$Q_{odg1}$	2,847	0,2434	0,1641	1,25316	2,84717	0,1712	0,1610
1	Доњи Михољац	$Q_{max}$	3,122	0,2797	0,1119	1,25316	3,1223	0,1879	0,1096



Слика 5.12 Оригинална и коригована Лог-Пирсон III расподела вероватноће и идентификација горњег изузетка у серији одговарајућих протока х.с. Доњи Михољац за ЧВОР 1 у комбинацији 1



Слика 5.13 Оригинална и коригована Лог-Пирсон III расподела вероватноће и идентификација горњег изузетка у серији максималних годишњих протока х.с. Доњи Михољац за ЧВОР 1 у комбинацији 3

Може се констатовати да су идентификовани изузеци јако близу дефинисаним границама за горњи изузетак (разлика је 10% у случају максималних годишњих протока и мања од 5% у случају одговарајућих протока) као и да кориговане расподеле не одступају значајно од основних. Како се ради о анализи великих вода расподеле ће неће кориговати.

Уколико је тестом Грубса и Бека идентификован доњи изузетак, онда се по препорукама из Bulletin 17B (1982) прво анализира низ који се од основног формира изостављањем идентификованог изузетка. У табели 5.22 упоредно су приказани статистички параметри са и без искључивањем доњег изузетка.

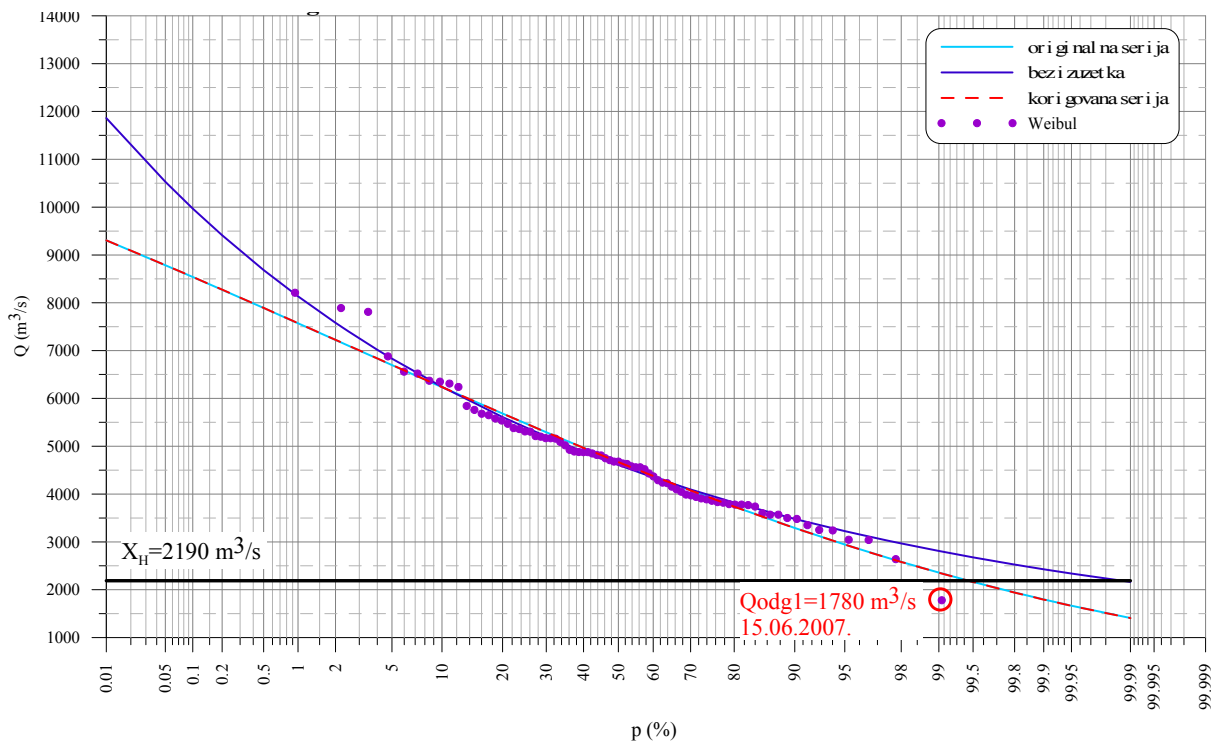
Табела 5.22 Оригинални и кориговани статистички параметри серија протока са идентификованим доњим изузецима

ЧВОР	Хидролошка станица	Параметар	$\bar{Y}$	$C_{sy}$	$\sigma_y$	$\bar{Y}_k$	$C_{syk}$	$\sigma_{yk}$
1	Бездан	$Q_{odg1}$	3,6612	-0,4441	0,1093	3,6665	0,1804	0,0994
2	Сланкамен	$Q_{odg1}$	3,8015	-0,5445	0,0984	3,8061	0,0114	0,0898
2	Сента	$Q_{odg1}$	3,0612	-0,6028	0,2464	3,0704	-0,4309	0,2336
3	Сремска Митровица	$Q_{odg2}$	3,5043	-1,5278	0,1272	3,5118	-0,3060	0,1074

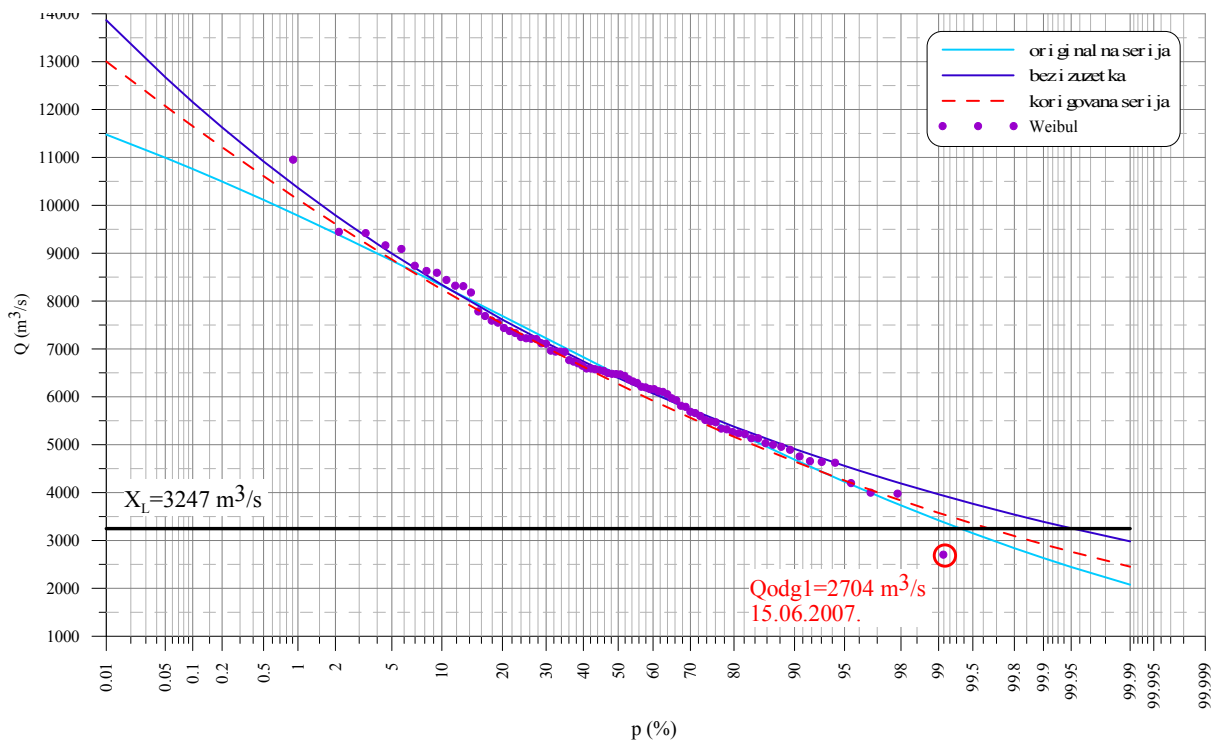
\*параметри са индексом „к“ се односе на серије без доњег изузетка

На сликама 5.13 - 5.16 приказане су емпиријска и теоријска Лог-Пирсон III расподела вероватноћа (у случају х.с. Сремска Митровица, Пирсон III ) која се најбоље прилагођава емпиријским подацима (Прилози 4 и 5) за серије података о протоцима где су идентификовани доњи изузеци. На сликама се такође види и коригована расподела добијена претходно описаном процедуром.

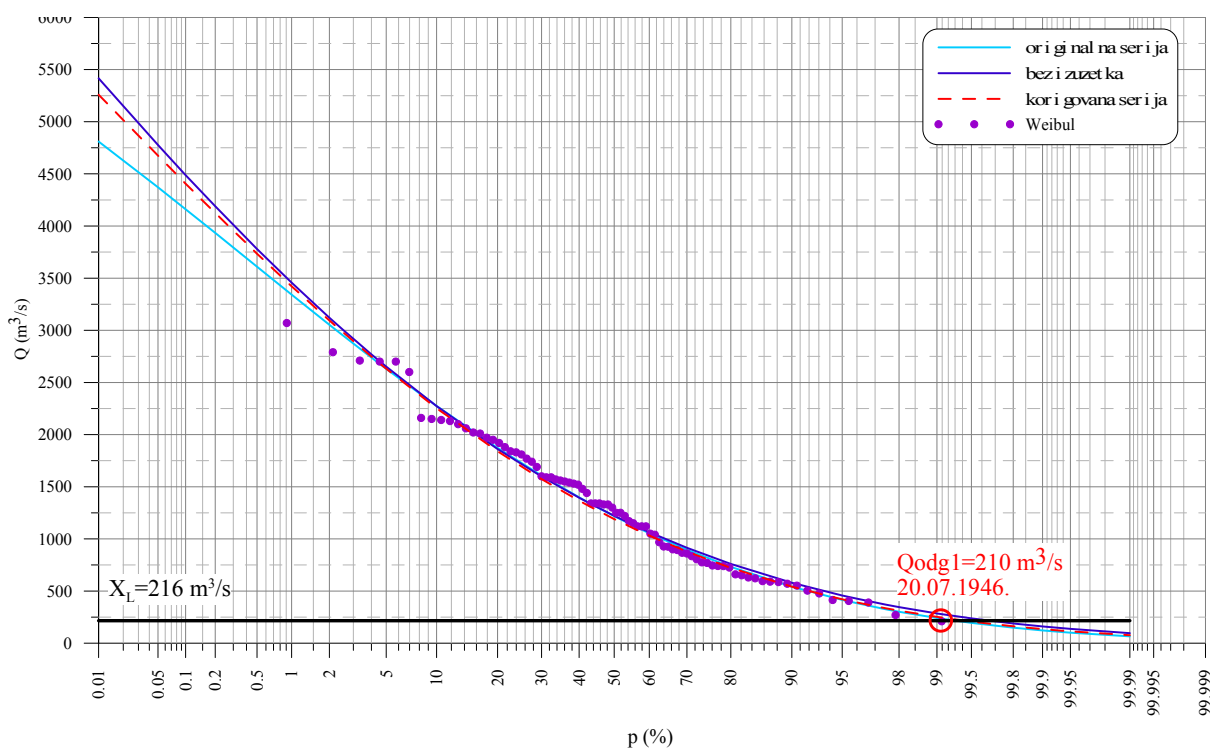




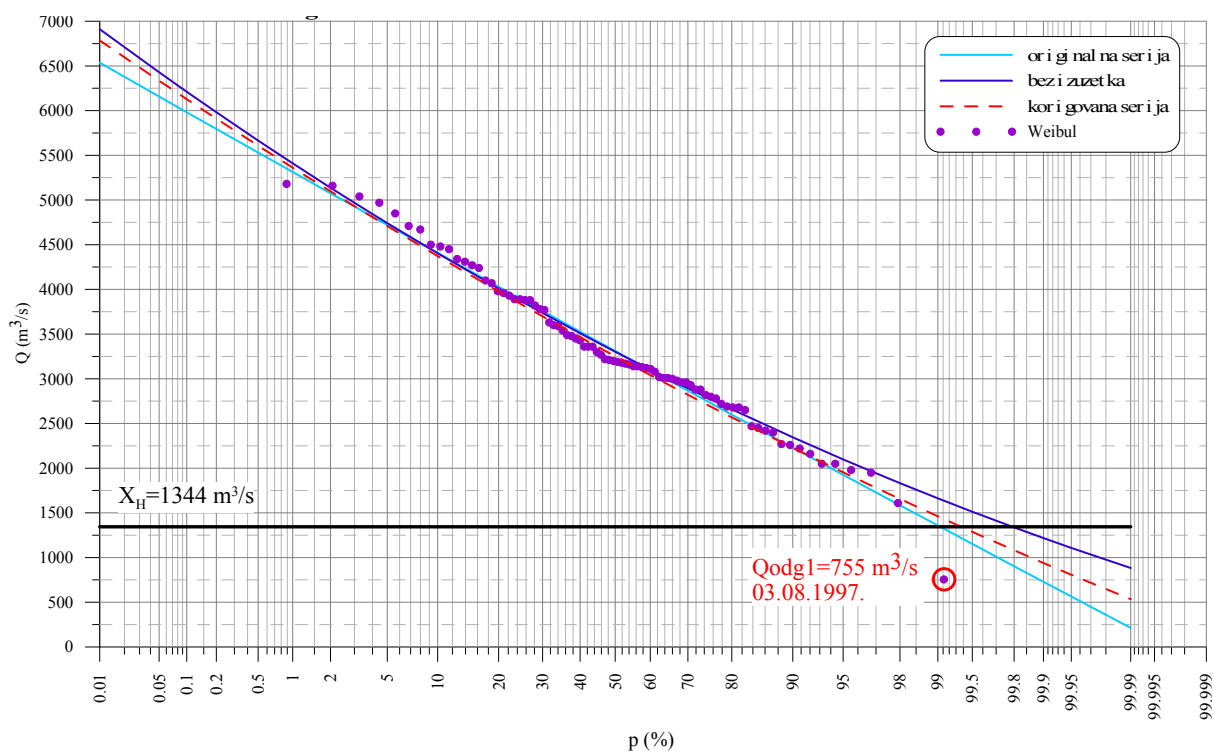
Слика 5.14 Лог-Пирсон III расподела вероватноће за основни и кориговани низ као и низ без изузетка и идентификација доњег изузетка у серији одговарајућих протока х.с. Бездан за ЧВОР 1 у комбинацији 2



Слика 5.15 Лог-Пирсон III расподела вероватноће за основни и кориговани низ као и низ без изузетка и идентификација доњег изузетка у серији одговарајућих протока х.с. Сланкамен за ЧВОР 2 у комбинацији 1



Слика 5.16 Лог-Пирсон III расподела вероватноће за основни и кориговани низ као и низ без изузетка и идентификација доњег изузетка у серији одговарајућих протока х.с. Сента за ЧВОР 2 у комбинацији 1



Слика 5.17 Пирсон III расподела вероватноће за основни и кориговани низ као и низ без изузетка и идентификација доњег изузетка у серији одговарајућих протока х.с. Сремска Митровица за ЧВОР 3 у комбинацији 2

---

Елиминација утицаја изузетних доњих екстрема изостављањем идентификованих изузетака је неприхватљива у смислу сагласности емпиријске и теоријске расподеле (Слике 5.14 – 5.17).

Други корак представља анализа спроведене корекције (једначине 5.24-5.27) параметара расподела и поновно прорачунавање вероватноћа појаве одабраних протока коришћењем коригованих статистичких параметара и криве расподеле која се најбоље прилагођава осмотреним подацима. Са слика 5.14 – 5.17 се види да осим у случају параметра  $Q_{odg1}$  на профилу хидролошке станице Сремска Митровица (03.08.1997.) на Сави кориговане расподеле не прате емпиријске расподеле вероватноћа.

Преостали доњи изузеци у серијама  $Q_{odg1}$  на х.с. Бездан и Сланкамен на Дунаву и х.с. Сента на Тиси су јако близу утврђене границе за доње изузетке (Слике 5.14 – 5.17). Анализом података је утврђено да то нису минимални протоци у години и да није било никаквих интервенција на Дунаву у јуну 2007. године. Корекцијом теоријских функција расподеле имали би лошије резултате (ниже вредности) у домену малих вероватноћа.

## 6 РЕЗУЛТАТИ ПРОРАЧУНА ВИШЕДИМЕНЗИОНАЛНИХ ФУНКЦИЈА РАСПОДЕЛЕ ВЕРОВАТНОЋА НА ДЕОНИЦИ ДУНАВА ОД УЛАЗА У СРБИЈУ ДО СМЕДЕРЕВА

### 6.1 МАРГИНАЛНЕ РАСПОДЕЛЕ

После формирања и тестирања временских серија корак у алгоритаму за одређивање највероватније комбинације променљивих у вишедимензионалном простору (Слика 3.1) је одређивање маргиналних („простих“) расподела вероватноће. Параметри расподела су дефинисани тачкастим оценама методом момената (МОМ) у моделу ПРОИЛ и методама Л-момената (L-MOM) и максималне веродостојности (MLE) у моделу КОПУЛА.

#### 6.1.1 Маргиналне вероватноће у моделу ПРОИЛ

Теоријске расподеле вероватноћа које су коришћене при усвајању маргиналних расподела у моделу ПРОИЛ описане су у поглављу 3.1. Параметри расподела оцењени су методом момената (Поглавље 3.1.1.1).

Приликом усвајања расподела који се најбоље прилагођавају емпиријским подацима (Поглавље 3.1.2) примењени су тестови описани у поглављу 3.1.5.

Резултати прорачуна приказани су у прилогу 4. Усвојене маргиналне вредности приказане су у табелама 6.1 – 6.3.

Табела 6.1 Усвојене маргиналне вероватноће за ЧВОР1 у моделу ПРОИЛ

Пар. протока	Река	Хид. станица	маргиналне вероватноће $Q_{p\%}$ ( $m^3/s$ )				Сагласност			Изуз. да/не	Теори. расп.
			0.10%	1%	2%	5%	$N\omega^2$	$\chi^2$	K-S		
<i>max</i>	Дунав	Бездан	10058	8302	7763	7029	да	да	да	да	ЛПЗ
<i>odg1</i>	Дунав	Богојево	11128	9184	8587	7774	да	да	да	-	ЛПЗ
<i>odg1</i>	Драва	Доњи Михољац	2579	1810	1603	1342	да	да	да	да	ЛПЗ
<i>max</i>	Дунав	Богојево	10842	9183	8653	7912	да	да	да	-	ЛПЗ
<i>odg1</i>	Дунав	Бездан	8540	7574	7225	6701	да	да	да	-	ЛПЗ
<i>odg2</i>	Драва	Доњи Михољац	3241	2061	1772	1429	да	да	да	-	ЛПЗ

Пар. протока	Река	Хид. станица	маргиналне вероватноће $Q_{p\%}$ ( $m^3/s$ )				Сагласност			Изуз. да/не	Теори. расп.
			0.10%	1%	2%	5%	$N\omega^2$	$\chi^2$	К-С		
<i>max</i>	Драва	Доњи Михољац	3258	2542	2336	2064	да	да	да	да	ЛПЗ
<i>odg2</i>	Дунав	Бездан	7824	6384	5914	5251	да	да	да	-	ЛПЗ
<i>odg2</i>	Дунав	Богојево	8014	6919	6535	5968	да	да	да	-	ЛПЗ

Табела 6.2 Усвојене маргиналне вероватноће за ЧВОР2 у моделу ПРОИЛ

Пар. протока	Река	Хид. станица	маргиналне вероватноће $Q_{p\%}$ ( $m^3/s$ )				Сагласност			Изуз. да/не	Теори. расп.
			0.10%	1%	2%	5%	$N\omega^2$	$\chi^2$	К-С		
<i>max</i>	Дунав	Богојево	10799	9172	8650	7918	да	да	да	-	ЛПЗ
<i>odg1</i>	Дунав	Сланкамен	10758	9784	9415	8845	да	да	да	да	ЛПЗ
<i>odg1</i>	Тиса	Сента	4160	3342	3053	2631	да	да	да	да	ЛПЗ
<i>max</i>	Дунав	Сланкамен	12940	10869	10236	9374	да	да	да	-	ЛПЗ
<i>odg1</i>	Дунав	Богојево	11064	9105	8499	7670	да	да	да	-	ЛПЗ
<i>odg2</i>	Тиса	Сента	4256	3669	3439	3082	да	да	да	-	ЛПЗ
<i>max</i>	Тиса	Сента	4611	3847	3598	3248	да	да	да	-	ЛПЗ
<i>odg2</i>	Дунав	Богојево	10566	8198	7492	6550	да	да	да	-	ЛПЗ
<i>odg2</i>	Дунав	Сланкамен	12464	10357	9691	8770	да	да	да	-	ЛПЗ

Табела 6.3 Усвојене маргиналне вероватноће за ЧВОР3 у моделу ПРОИЛ

Пар. протока	Река	Хид. станица	маргиналне вероватноће $Q_{p\%}$ ( $m^3/s$ )				Сагласност			Изуз. да/не	Теори. расп.
			0.10%	1%	2%	5%	$N\omega^2$	$\chi^2$	К-С		
<i>max</i>	Дунав	Сланкамен	13204	11043	10385	9492	да	да	да	-	ЛПЗ
<i>odg1</i>	Дунав	Смедерево	17618	14893	14027	12820	да	не	да	-	ЛПЗ
<i>odg1</i>	Сава	Сремска Митровица	6604	5562	5162	4550	да	не	да	-	ЛПЗ
<i>max</i>	Дунав	Смедерево	17381	15128	14395	13360	да	да	да	-	ЛПЗ
<i>odg1</i>	Дунав	Сланкамен	12394	10599	9997	9133	да	да	да	-	ЛПЗ
<i>odg2</i>	Сава	Сремска Митровица	5981	5313	5076	4721	да	да	да	да	ПЗ
<i>max</i>	Сава	Сремска Митровица	7781	6581	6209	5699	да	да	да	-	ЛПЗ
<i>odg2</i>	Дунав	Сланкамен	8571	7849	7541	7035	да	да	да	-	ЛПЗ
<i>odg2</i>	Сава	Сремска Митровица	7813	6589	6211	5695	да	да	да	-	ЛПЗ

### 6.1.2 Маргиналне вероватноће у моделу КОПУЛА

Маргиналне расподеле за конструкцију копула усвојене су на основу теоријских функција расподеле описаних у поглављу 3.1.3.

Резултати прорачуна приказани су у прилогу 5. У табели 6.4 приказане су тестиране расподеле (Поглавље 3.1.5) по методама оцене параметара расподеле (MLE и L-MOM) за сваку комбинацију параметара протока. На основу резултата тестова у табелама 6.5 – 6.7 приказане су усвојене вредности маргиналних расподела по методи максималне веродостојности (MLE), док су у табелама 6.8 – 6.10. приказане усвојене вредности маргиналних расподела чији су параметри оцењени методом Л – момената (L-MOM).

Табела 6.4 Преглед тестираних теоријских расподела у КОПУЛА моделу

Пар. $Q$	Река	Хид. станица	EV1		GEV		LOG NORMAL		LOG PEARSON3	
			MLE	L- MOM	MLE	L- MOM	MLE	L- MOM	MLE	L- MOM
max	Дунав	Бездан			++	++	+	+		
odg1	Дунав	Богојево	+	+	++	++				
odg1	Драва	Доњи Михољац			++	++				
max	Дунав	Богојево			+	++	++	+		
odg1	Дунав	Бездан				++	++	+	+	
odg2	Драва	Доњи Михољац			++	++				
max	Драва	Доњи Михољац	+	+	++	++				
odg2	Дунав	Бездан			+	+			++	++
odg2	Дунав	Богојево			++	++			+	+
max	Дунав	Богојево			+	++	++	+		
odg1	Дунав	Сланкамен			+	+			++	++
odg1	Тиса	Сента	+			++			++	+
max	Дунав	Сланкамен			+	++	++	+		
odg1	Дунав	Богојево	++			++	+	+		
odg2	Тиса	Сента			++	++				
max	Тиса	Сента	+	+		++	++			
odg2	Дунав	Богојево	++	++	+	+				
odg2	Дунав	Сланкамен			+	+	++	++		
max	Дунав	Сланкамен			+	++	++	+		
odg1	Дунав	Смедерево	++	++						
odg1	Сава	Сремска Митровица			+	++				+
max	Дунав	Смедерево	++	+		++	+			
odg1	Дунав	Сланкамен	+			+	++	++		
odg2	Сава	Сремска Митровица			+	++			++	+
max	Сава	Сремска Митровица	++	+	+	++				
odg2	Дунав	Сланкамен			++	++			+	+
max	Сава	Сремска Митровица	++	+	+	++				
odg2	Дунав	Смедерево			+			+		

++ - најбоља; + - добра

Табела 6.5 Усвојене маргиналне вероватноће за КОПУЛЕ у ЧВОРy1 чији су параметри расподела оцењени методом максималне веродостојности (MLE)

Пар. протока	Река	Хид. станица	маргиналне вероватноће $Q_{p\%}$ (m <sup>3</sup> /s)				Сагласност			Теори. расп.
			0,10%	1%	2%	5%	К-С	А-Д	RMSE	
<i>max</i>	Дунав	Бездан	9774	8248	7740	7025	да	да	0,0221	GEV
<i>odg1</i>	Дунав	Богојево	10746	9089	8534	7752	да	да	0,0182	GEV
<i>odg1</i>	Драва	Доњи Михољац	2550	1791	1586	1328	да	да	0,0282	GEV
<i>max</i>	Дунав	Богојево	10924	9219	8678	7924	да	да	0,0136	ЛОГН
<i>odg1</i>	Дунав	Бездан	9973	8230	7684	6933	да	да	0,0244	ЛОГН
<i>odg2</i>	Драва	Доњи Михољац	3445	2093	1781	1420	да	да	0,0207	GEV
<i>max</i>	Драва	Доњи Михољац	3172	2526	2329	2063	да	да	0,0233	GEV
<i>odg2</i>	Дунав	Бездан	7632	6270	5824	5194	да	да	0,0251	ЛПЗ
<i>odg2</i>	Дунав	Богојево	7322	6614	6321	5853	да	да	0,0220	GEV

Табела 6.6 Усвојене маргиналне вероватноће за КОПУЛЕ у ЧВОРy2 чији су параметри расподела оцењени методом максималне веродостојности (MLE)

Пар. протока	Река	Хид. станица	маргиналне вероватноће $Q_{p\%}$ (m <sup>3</sup> /s)				Сагласност			Теори. расп.
			0,10%	1%	2%	5%	К-С	А-Д	RMSE	
<i>max</i>	Дунав	Богојево	10935	9232	8691	7938	да	да	0,0137	ЛОГН
<i>odg1</i>	Дунав	Сланкамен	11812	10267	9749	9004	да	да	0,0231	ЛПЗ
<i>odg1</i>	Тиса	Сента	4497	3432	3095	2628	да	не	0,0276	ЛПЗ
<i>max</i>	Дунав	Сланкамен	12157	10530	10004	9264	да	да	0,0273	ЛОГН
<i>odg1</i>	Дунав	Богојево	12059	9592	8846	7849	да	да	0,0173	EV1
<i>odg2</i>	Тиса	Сента	4182	3587	3357	3006	да	да	0,0205	GEV
<i>max</i>	Тиса	Сента	4959	3997	3701	3297	да	да	0,0174	ЛОГН
<i>odg2</i>	Дунав	Богојево	10711	8283	7548	6567	да	да	0,0235	EV1
<i>odg2</i>	Дунав	Сланкамен	12592	10412	9729	8788	да	да	0,0173	ЛОГН



Табела 6.7 Усвојене маргиналне вероватноће за КОПУЛЕ у ЧВОРУ3 чији су параметри расподела оцењени методом максималне веродостојности (MLE)

Пар. протока	Река	Хид. станица	маргиналне вероватноће $Q_p\%$ ( $m^3/s$ )				Сагласност			Теори. расп.
			0,10%	1%	2%	5%	К-С	А-Д	RMSE	
<i>max</i>	Дунав	Сланкамен	12362	10680	10137	9374	да	да	0,0272	ЛОГН
<i>odg1</i>	Дунав	Смедерево	19982	16042	14850	13259	да	да	0,0247	EV1
<i>odg1</i>	Сава	Сремска Митровица	5947	5128	4803	4298	не	не	0,0362	GEV
<i>max</i>	Дунав	Смедерево	20335	16602	15472	13965	да	да	0,0198	EV1
<i>odg1</i>	Дунав	Сланкамен	13518	11094	10339	9302	да	да	0,0216	ЛОГН
<i>odg2</i>	Сава	Сремска Митровица	6816	5769	5422	4927	да	да	0,0282	ЛПЗ
<i>max</i>	Сава	Сремска Митровица	8480	6927	6457	5830	да	да	0,0190	EV1
<i>odg2</i>	Дунав	Сланкамен	8718	7938	7600	7049	да	да	0,0156	GEV
<i>max1</i>	Сава	Сремска Митровица	8456	6907	6438	5813	да	да	0,0190	EV1
<i>odg2</i>	Дунав	Смедерево	13197	12338	11953	11310	не	не	0,0376	GEV

Табела 6.8 Усвојене маргиналне вероватноће за КОПУЛЕ у ЧВОРУ1 чији су параметри расподела оцењени методом Л-момената (L-MOM)

Пар. протока	Река	Хид. станица	маргиналне вероватноће $Q_p\%$ ( $m^3/s$ )				Сагласност			Теори. расп.
			0,10%	1%	2%	5%	К-С	А-Д	RMSE	
<i>max</i>	Дунав	Бездан	13078	9708	8793	7641	да	да	0,0221	GEV
<i>odg1</i>	Дунав	Богојево	13381	10256	9370	8229	да	да	0,0168	GEV
<i>odg1</i>	Драва	Доњи Михољац	1505	1295	1216	1099	да	да	0,0240	GEV
<i>max</i>	Дунав	Богојево	16048	11538	10363	8915	да	да	0,0136	GEV
<i>odg1</i>	Дунав	Бездан	13974	10000	8957	7667	да	да	0,0220	GEV
<i>odg2</i>	Драва	Доњи Михољац	1387	1228	1164	1064	да	да	0,0195	GEV
<i>max</i>	Драва	Доњи Михољац	3164	2968	2315	2051	да	да	0,0219	GEV
<i>odg2</i>	Дунав	Бездан	7723	6329	5873	5230	да	да	0,0232	ЛПЗ
<i>odg2</i>	Дунав	Богојево	20557	11987	10120	8022	да	да	0,0197	GEV

Табела 6.9 Усвојене маргиналне вероватноће за КОПУЛЕ у ЧВОРy2 чији су параметри расподела оцењени методом Л-момената (L-MOM)

Пар. протока	Река	Хид. станица	маргиналне вероватноће $Q_p\%$ ( $m^3/s$ )				Сагласност			Теори. расп.
			0,10%	1%	2%	5%	К-С	А-Д	RMSE	
<i>max</i>	Дунав	Богојево	16400	11693	10497	8991	да	да	0,0136	GEV
<i>odg1</i>	Дунав	Сланкамен	11793	10213	9703	8970	да	да	0,0222	ЛПЗ
<i>odg1</i>	Тиса	Сента	6714	4405	3798	3046	да	не	0,0279	GEV
<i>max</i>	Дунав	Сланкамен	17145	12834	11683	10247	да	да	0,0246	GEV
<i>odg1</i>	Дунав	Богојево	14610	10766	9718	8396	да	да	0,0154	GEV
<i>odg2</i>	Тиса	Сента	10693	6304	5291	4119	да	да	0,0202	GEV
<i>max</i>	Тиса	Сента	6317	4623	4156	3563	да	да	0,0170	GEV
<i>odg2</i>	Дунав	Богојево	10736	8299	7561	6576	да	да	0,0235	EV1
<i>odg2</i>	Дунав	Сланкамен	12724	10494	9797	8837	да	да	0,0168	ЛОГН

Табела 6.10 Усвојене маргиналне вероватноће за КОПУЛЕ у ЧВОРy3 чији су параметри расподела оцењени методом Л-момената (L-MOM)

Пар. протока	Река	Хид. станица	маргиналне вероватноће $Q_p\%$ ( $m^3/s$ )				Сагласност			Теори. расп.
			0,10%	1%	2%	5%	К-С	А-Д	RMSE	
<i>max</i>	Дунав	Сланкамен	17042	12853	11721	10298	да	да	0,0248	GEV
<i>odg1</i>	Дунав	Смедерево	19620	15801	14646	13104	да	да	0,0258	EV1
<i>odg1</i>	Сава	Сремска Митровица	7342	5718	5198	4476	не	не	0,0489	ЛПЗ
<i>max</i>	Дунав	Смедерево	25481	18800	17058	14911	да	да	0,0226	GEV
<i>odg1</i>	Дунав	Сланкамен	13522	11097	10342	9303	да	да	0,0216	ЛОГН
<i>odg2</i>	Сава	Сремска Митровица	6559	5598	5279	4822	да	не	0,0232	ЛПЗ
<i>max</i>	Сава	Сремска Митровица	9835	7550	6919	6118	да	да	0,0213	GEV
<i>odg2</i>	Дунав	Сланкамен	27929	15546	12938	10059	да	да	0,0153	GEV
<i>max1</i>	Сава	Сремска Митровица	9748	7506	6884	6093	да	да	0,0209	GEV
<i>odg2</i>	Дунав	Смедерево	15998	13551	12771	11685	не	не	0,0496	ЛОГН

## 6.2 ДВОДИМЕНЗИОНАЛНЕ РАСПОДЕЛЕ ВЕРОВАТНОЋА

Основна претпоставка је да је за изградњу система за одбрану од поплава у широј зони ушћа река неопходно економски оптимално димензионисати све објекте за заштиту од поплава. Најчешће су то речни насипи који се простиру ван зоне интеракције река у периодима великих вода, на пример од улазних водомерних станица на главној реци и притоци до излазног профила на главној реци.

Применом класичне процедуре, не водећи рачуна о коинциденцији великих вода (Поглавље 3.1), основа за димензионисање насипа биле би теоријске вредности максималних годишњих протока различитих повратних периода које су добијене помоћу одговарајуће теоријске функције расподеле (Поглавље 3.1.3).

Међутим, узводно од ушћа, у зони међусобног утицаја обе реке, протоци за димензионисање одбрамбених објеката се не усвајају на основу рачунских вредности у табелама 6.1 – 6.3 и 6.5 – 6.10 за параметар  $Q_{\max}$ , већ су то величине које зависе од коинциденције великих вода Дунава и притока. У принципу, потребно је усвојити највероватнију комбинацију променљивих коинциденција протока Дунава и притоке, са кривих превазилажења а за усвојени степен заштите, тј. повратни период.

### 6.2.1 Модел ПРОИЛ

Излаз из модела ПРОИЛ (Поглавље 3.2) је оцена коинциденције великих вода Дунава и притока за усвојене комбинације променљивих (Поглавље 5.1).

За оцену статистичке значајности срачунатих коинциденција протока великих вода реке Дунав и притока у табелама 6.11 – 6.13 приказани су основни показатељи чврстине успостављених коинциденционих веза по чворовима и то: коефицијент линеарне корелације и стандардна грешка оцене коефицијента корелације по релацији (3.142).

Табела 6.11 Резултати оцене статистичке значајности разматраних комбинација променљивих за ЧВОР1

Х.с.	Комбинације променљивих	$R$	$N$	$\sigma$	$3\sigma$	Статистичка значајност
Бездан – Богојево	$max - max$	0.9371	79	0.013708	0.041125	ДА
	$max - odg1$	0.91809	79	0.017676	0.053029	ДА
	$odg1 - max$	0.8561	79	0.03005	0.090151	ДА
Бездан – Доњи Михољац	$max - max$	0.18000	79	0.10886	0.32659	НЕ
	$max - odg1$	0.15869	79	0.10968	0.32903	НЕ
	$odg2 - max$	0.45369	79	0.08935	0.26805	ДА
Доњи Михољац – Богојево	$max - max$	0.33104	79	0.10018	0.30054	ДА
	$odg2 - max$	0.24087	79	0.10598	0.31794	НЕ
	$max - odg2$	0.45362	79	0.089358	0.268073	ДА

Табела 6.12 Резултати оцене статистичке значајности разматраних комбинација променљивих за ЧВОР2

Х.с.	Комбинације променљивих	$R$	$N$	$\sigma$	$3\sigma$	Статистичка значајност
Богојево – Сланкамен	$max - max$	0.86771	82	0.02729	0.08186	ДА
	$max - odg1$	0.79096	82	0.04134	0.12403	ДА
	$odg1 - max$	0.80042	82	0.03968	0.11904	ДА
Богојево – Сента	$max - max$	0.59386	82	0.07149	0.21446	ДА
	$max - odg1$	0.43787	82	0.08926	0.26778	ДА
	$odg2 - max$	0.68209	82	0.05905	0.17716	ДА
Сента – Сланкамен	$max - max$	0.33375	82	0.09813	0.29439	ДА
	$odg2 - max$	0.23267	82	0.10445	0.31336	НЕ
	$max - odg2$	0.37304	82	0.09506	0.28519	ДА

Табела 6.13 Резултати оцене статистичке значајности разматраних комбинација променљивих за ЧВОРЗ

Х.с.	Комбинације променљивих	$R$	$N$	$\sigma$	$3\sigma$	Статистичка значајност
Сланкамен – Смедерево	$max - max$	0.74211	84	0.04902	0.14706	ДА
	$max - odg1$	0.73926	84	0.04948	0.14844	ДА
	$odg1 - max$	0.81051	84	0.03743	0.11230	ДА
Сланкамен – Сремска Митровица	$max - max$	0.40038	84	0.09162	0.27485	ДА
	$max - odg1$	0.16693	84	0.10607	0.31821	НЕ
	$odg2 - max$	0.16444	83	0.10680	0.32039	НЕ
Сремска Митровица - Смедерево	$max - max$	0.73926	84	0.04948	0.14844	ДА
	$odg2 - max$	0.43624	84	0.08834	0.26503	ДА
	$max - odg2$	0.44814	84	0.08720	0.26159	ДА

Резултати прорачуна приказани су по чворовима на графичким прилозима 6.1.1.1 до 6.3.3.3. На графицима су приказане линије истих вероватноћа појаве (функције густине), линије вероватноћа превазилажења (функција расподеле) и емпиријске тачке.

Квантитативни показатељи срачунатих вредности протока за различите вероватноће коинциденција великих вода реке Дунав и притока, неопходних за дефинисање пројектних нивоа у широј зони разматраних ушћа (Прилози 6), приказане су у Табелама 6.14 – 6.16. У табелама су приказане вредности за карактеристичне тачке 1, 2 и \* са одговарајуће линије превазилажења у посматраној комбинацији променљивих (Поглавље 4.1).

Табела 6.14 Рачунски протоци за различите вероватноће коинциденције великих вода Дунава и реке Драве - ЧВОР 1 (ПРОИЛ)

$\Phi$ %	Тачка	х.с. Бездан			х.с. Богојево			х.с. Доњи Михаљац		
		$Q_{\max,p}^{\text{Без}}$	$Q_{\text{odg1},p}^{\text{Бог}}$	$Q_{\text{odg1},p}^{\text{ДМ}}$	$Q_{\max,p}^{\text{Бог}}$	$Q_{\text{odg1},p}^{\text{Без}}$	$Q_{\text{odg2},p}^{\text{ДМ}}$	$Q_{\max,p}^{\text{ДМ}}$	$Q_{\text{odg2},p}^{\text{Бог}}$	$Q_{\text{odg2},p}^{\text{Без}}$
0.1	1	<b>10058</b>	<b>9900</b>	<b>1500</b>	<b>10842</b>	<b>7700</b>	<b>2300</b>	<b>3258</b>	<b>5700</b>	<b>6200</b>
	*	9900 (9050)	11000	2100	10100 (8600)	8200	3100	2800 (3100)	7800	7500
	2	8000 (8100)	11128	2579	9700 (8000)	8540	3241	2900 (2900)	8014	7824
1.0	1	<b>8302</b>	<b>7900</b>	<b>1250</b>	<b>9183</b>	<b>6300</b>	<b>1550</b>	<b>2542</b>	<b>4300</b>	<b>5300</b>
	*	7800 (7950)	8600	1500	8800 (7800)	7400	2000	2100 (2400)	6500	6050
	2	6900 (7500)	9184	1810	7900 (6050)	7574	2061	1900 (2200)	6919	6384
2.0	1	<b>7800</b>	<b>6750</b>	<b>1200</b>	<b>8653</b>	<b>6000</b>	<b>1250</b>	<b>2336</b>	<b>4000</b>	<b>5050</b>
	*	7150 (7500)	8050	1400	8200 (7000)	6900	1400	1900 (2250)	5900	5600
	2	6400 (7200)	8587	1700	7500 (5750)	7225	1773	1700 (2050)	6535	5850
5.0	1	<b>7029</b>	<b>6000</b>	<b>400</b>	<b>7912</b>	<b>5500</b>	<b>1100</b>	<b>2064</b>	<b>3600</b>	<b>4600</b>
	*	6500 (7000)	7000	1200	7600 (6600)	6300	1170	1800 (2000)	5500	5000
	2	5500 (6900)	7774	1342	6900 (5000)	6701	1429	1600 (1800)	5968	5251

Табела 6.15 Рачунски протоци за различите вероватноће коинциденције великих вода Дунава и реке Тисе - ЧВОР 2 (ПРОИЛ)

$\Phi$ %	Тачка	х.с. Богојево			х.с. Сланкамен			х.с. Сента		
		$Q_{\max,p}^{\text{Бог}}$	$Q_{\text{odg1},p}^{\text{Сла}}$	$Q_{\text{odg1},p}^{\text{Ст}}$	$Q_{\max,p}^{\text{Сла}}$	$Q_{\text{odg1},p}^{\text{Бог}}$	$Q_{\text{odg2},p}^{\text{Ст}}$	$Q_{\max,p}^{\text{Ст}}$	$Q_{\text{odg2},p}^{\text{Бог}}$	$Q_{\text{odg2},p}^{\text{Сла}}$
0.1	1	<b>10799</b>	<b>10000</b>	<b>1450</b>	<b>12940</b>	<b>6000</b>	<b>1340</b>	<b>4611</b>	<b>6600</b>	<b>10200</b>
	*	8400 (10600)	10500	3880	11800 (11000)	9300	4400	4000 (4300)	9500	11000
	2	8000 (9500)	10758	4160	10500	11064	4656	3300 (3500)	10566	12464
1.0	1	<b>9172</b>	<b>8600</b>	<b>1000</b>	<b>10869</b>	<b>5000</b>	<b>1200</b>	<b>3847</b>	<b>4600</b>	<b>8500</b>
	*	8000 (8200)	9600	2300	10000 (9600)	7900	3200	3000 (3500)	7200	9400
	2	6800 (7100)	9784	3342	8000 (9100)	9105	3669	1900 (2600)	8198	10357

$\Phi$ %	Тачка	х.с. Богојево			х.с. Сланкамен			х.с. Сента		
		$Q_{\max,p}^{Бог}$	$Q_{odg1,p}^{Сла}$	$Q_{odg1,p}^{СМ}$	$Q_{\max,p}^{Сла}$	$Q_{odg1,p}^{Бог}$	$Q_{odg2,p}^{СМ}$	$Q_{\max,p}^{СМ}$	$Q_{odg2,p}^{Бог}$	$Q_{odg2,p}^{Сла}$
2.0	1	<b>8650</b>	<b>8100</b>	<b>910</b>	<b>10236</b>	<b>4650</b>	<b>1160</b>	<b>3598</b>	<b>4000</b>	<b>7900</b>
	*	7600 (7500)	9000	2000	9500 (9000)	7500	2850	2800 (3000)	6500	8800
	2	6300 (6450)	9415	3053	7300 (8400)	8499	3439	1600 (2350)	7492	9691
5.0	1	<b>7918</b>	<b>7500</b>	<b>830</b>	<b>9374</b>	<b>4500</b>	<b>1110</b>	<b>3248</b>	<b>3400</b>	<b>7100</b>
	*	7000 (6500)	8400	1550	8900 (8500)	7000	2400	2650 (2700)	5600	8000
	2	5800 (5700)	8845	2631	6600 (7400)	7670	3082	1500 (2000)	6550	8770

Табела 6.16 Рачунски протоци за различите вероватноће коинциденције великих вода  
Дунава и реке Саве - ЧВОР 3 (ПРОИЛ)

$\Phi$ %	Тачка	х.с. Сланкамен			х.с. Смедерево			х.с. Сремска Митровица		
		$Q_{\max,p}^{Сла}$	$Q_{odg1,p}^{Смед}$	$Q_{odg1,p}^{СМ}$	$Q_{\max,p}^{Смед}$	$Q_{odg1,p}^{Сла}$	$Q_{odg2,p}^{СМ}$	$Q_{\max,p}^{СМ}$	$Q_{odg2,p}^{Сла}$	$Q_{odg2,p}^{Смед}$
0.1	1	<b>13203</b>	<b>12000</b>	<b>1850</b>	<b>17381</b>	<b>12200</b>	<b>3800</b>	<b>7781</b> <b>(7813)</b>	<b>5800</b>	<b>8300</b>
	*	12000	16800	4200	17200 (16500)	12250	4400	7400 (7200)	7000	12200
	2	10200 (10700)	17618	6604	17000 (16000)	12394	4662	6500 (6700)	8571	13275
1.0	1	<b>11043</b>	<b>9700</b>	<b>1310</b>	<b>15128</b>	<b>9000</b>	<b>3200</b>	<b>6581</b> <b>(6589)</b>	<b>4000</b>	<b>7700</b>
	*	10100 (10200)	12700	3200	14100 (14200)	10050	3950	6500 (6100)	6000	10600
	2	8700 (8500)	14893	5562	13550 (13000)	10599	4591	5100 (5600)	7849	12279
2.0	1	<b>10385</b>	<b>9250</b>	<b>1150</b>	<b>14395</b>	<b>8200</b>	<b>3000</b>	<b>6209</b> <b>(6211)</b>	<b>3500</b>	<b>7100</b>
	*	9500	11800	2900	13200 (13600)	9300	3800	6200 (5700)	5800	10050
	2	8300 (7600)	14026	5162	12350 (12000)	9997	4542	4600 (5200)	7541	11881
5.0	1	<b>9492</b>	<b>9000</b>	<b>1000</b>	<b>13360</b>	<b>7100</b>	<b>2800</b>	<b>5669</b> <b>(5695)</b>	<b>3000</b>	<b>6800</b>
	*	8800	10950	2570	11800 (12800)	8500	3600	5650 (5200)	5400	9200
	2	7800 (6000)	12820	4550	10950 (11000)	9133	4434	4100 (4500)	7035	11246

## 6.2.2 КОПУЛА модел

Као што се у поглављу 3.3.4 описује конструкција копула је повезана са мерама зависности Кендалов  $\tau_k$  и Спирманов ранг коефицијент  $\rho_s$  који су за сваку разматрану комбинацију приказани у табели 6.17. У табели се такође приказује и параметар копуле  $\theta$  за сваку Архимедову копулу која је рачуната.

Табела 6.17 Коефицијенти корелације и параметри копула

ЧВОР	Профили	Комбинације променљивих	$\tau$	$\rho_s$	Клејтон	Франк	Гумбел
					$\theta$		
1	Бездан – Доњи Михољац	<i>max – odg1</i>	0,0836	0,1290	0,1824	0,7565	1,0912
		<i>odg2 – max</i>	0,3111	0,4464	0,9033	0,3044	1,4516
		<i>max – max</i>	0,1033	0,1596	0,2305	0,9381	1,1152
	Доњи Михољац - Богојево	<i>max – odg2</i>	0,3449	0,5020	1,0531	3,4464	1,5266
		<i>odg2 – max</i>	0,1504	0,2254	0,3541	1,3792	1,1771
		<i>max – max</i>	0,1787	0,2754	0,4352	1,6515	1,2176
	Бездан – Богојево	<i>max – odg1</i>	0,8029	0,9240	8,1451	18,4846	5,0726
		<i>odg1 – max</i>	0,8221	0,9417	9,2420	20,6971	5,6210
		<i>max – max</i>	0,8272	0,9494	9,5752	21,3683	5,7876
2	Богојево – Сента	<i>max – odg1</i>	0,1689	0,2444	0,4065	1,5563	1,2032
		<i>odg2 – max</i>	0,2724	0,3939	0,7490	2,612	1,3745
		<i>max – max</i>	0,2139	0,3166	0,5441	1,9997	1,2720
	Сента – Сланкамен	<i>max – odg2</i>	0,4817	0,6591	1,859	5,4137	1,9295
		<i>odg2 – max</i>	0,3184	0,4665	0,4345	3,1295	1,4672
		<i>max – max</i>	0,3935	0,5529	1,2978	4,0727	1,6489
	Богојево – Сланкамен	<i>max – odg1</i>	0,6871	0,8620	4,3908	10,8427	301954
		<i>odg1 – max</i>	0,6298	0,8024	3,4025	8,7833	2,7013
		<i>max – max</i>	0,6927	0,8767	4,5076	11,0838	3,2538
3	Сланкамен – Сремска	<i>max – odg1</i>	0,1111	0,1685	0,2500	1,0100	1,1250
		<i>odg2 – max</i>	0,1126	0,1739	0,2538	1,0241	1,1269



ЧВОР	Профили	Комбинације променљивих	$\tau$	$\rho_s$	Клејтон	Франк	Гумбел
					$\theta$		
	Митровица	<i>max – max</i>	0,2928	0,4115	0,8279	2,8360	1,4140
	Сремска Митровица – Смедерево	<i>max – odg2</i>	0,3314	0,4692	0,9912	3,2823	1,4956
		<i>odg2 – max</i>	0,3495	0,4909	1,0747	3,503	1,5373
		<i>max – max</i>	0,4666	0,6318	1,7497	5,1603	1,8748
	Сланкамен–Смедерево	<i>max – odg1</i>	0,5386	0,7176	2,3343	6,4850	2,1671
		<i>odg1 – max</i>	0,6110	0,7994	3,1413	8,2306	2,5706
		<i>max – max</i>	0,5559	0,7512	2,5034	6,8570	2,2517

Након конструисања копула, прибегава се процедури доброте прилагођавања копула узорку по процедури из поглавља 3.3.7. У табелама 6.18-6.20 приказани су резултати тестирања (вредност  $p$ ) и избор копуле.

Табела 6.18 Резултати оцене квалитета прилагођавања копула за ЧВОР 1

Профили	Комбинације променљивих	Клејтон	Франк	Гумбел	$\alpha$	Копула-избор
		$p$				
Бездан – Доњи Михољац	<i>max – odg1</i>	0.80627	0.82488	0.93541	0,05	Гумбел
	<i>odg2 – max</i>	0.36642	0.71598	0.36719		Франк
	<i>max – max</i>	0.63018	0.33963	0.31456		Клаутон
Доњи Михољац - Богојево	<i>max – odg2</i>	0.29629	0.48131	0.26946		Франк
	<i>odg2 – max</i>	0.089131	0.35072	0.80609		Гумбел
	<i>max – max</i>	0.72355	0.1922	0.11402		Клаутон
Бездан – Богојево	<i>max – odg1</i>	0.00268	0.23813	0.59152		Гумбел
	<i>odg1 – max</i>	0.00024	0.09935	0.17745		Гумбел
	<i>max – max</i>	0.00280	0.40715	0.77566		Гумбел

Табела 6.19 Резултати оцене квалитета прилагођавања копула за ЧВОР 2

Профили	Комбинације променљивих	Клејтон	Франк	Гумбел	$\alpha$	Копула-избор
		$\rho$				
Богојево – Сента	$max - odg1$	0.012588	0.0439	0.19801	0.05	Гумбел
	$odg2 - max$	0.24170	0.47977	0.18247		Франк
	$max - max$	0.025751	0.26711	0.70071		Гумбел
Сента – Сланкамен	$max - odg2$	0.07529	0.23609	0.23551		Франк
	$odg2 - max$	0.00015	0.02324	0.36973		Гумбел
	$max - max$	0.00163	0.11394	0.90485		Гумбел
Богојево – Сланкамен	$max - odg1$	0.00044	0.31876	0.86928		Гумбел
	$odg1 - max$	0.00035	0.36073	0.90586		Гумбел
	$max - max$	0.00249	0.35352	0.83346		Гумбел

Табела 6.20 Резултати оцене квалитета прилагођавања копула за ЧВОР 3

Профили	Комбинације променљивих	Клејтон	Франк	Гумбел	$\alpha$	Копула-избор
		$\rho$				
Сланкамен – Сремска Митровица	$max - odg1$	0.25350	0.61287	0.86082	0.05	Гумбел
	$odg2 - max$	0.58319	0.48418	0.62959		Гумбел
	$max - max$	0.033572	0.62444	0.93363		Гумбел
Сремска Митровица – Смедерево	$max - odg2$	0.19425	0.50825	0.53828		Гумбел
	$odg2 - max$	0.02025	0.21764	0.70707		Гумбел
	$max - max$	0.032602	0.62246	0.93163		Гумбел
Сланкамен–Смедерево	$max - odg1$	0.00000	0.01240	0.24579		Гумбел
	$odg1 - max$	0.00041	0.31667	0.89340		Гумбел
	$max - max$	0.00000	0.31811	0.52584		Гумбел

Резултати срачунатих копула су приказани преко копула преживљавања (Поглавље 3.3.6) у прилозима 7.1.1.1 – 7.3.3.3 и 8.1.1.1 – 8.3.3.3. У прилозима 7 су параметри маргиналних расподела оцењени методом MLE док су у прилозима 8 параметри маргиналних расподела оцењени методом L-MOM.

Квантитативни показатељи срачунатих вредности за различите вероватноће превазилажења великих вода реке Дунав и притока за одређивање пројектних нивоа у широј зони разматраних ушћа (Поглавље 4.1), приказане су у Табелама 6.21 – 6.23.

У табелама су приказане карактеристичне вредности за димензионисање система за заштиту од поплава на основу копула из прилога 7 зато што се процедура описана у поглављу 4.1 није могла применити у случају када су параметри маргиналних расподела оцењени методом Л-момената, када је избор маргиналних расподела за конструкцију копуле био из исте групе или када је једна од изабраних расподела била Лог-нормална (Табеле 6.8 – 6.10).

Табела 6.21 Рачунски протоци за различите вероватноће превазилажења великих вода на ушћу Дунава и реке Драве - ЧВОР 1 (КОПУЛА)

$\Phi$ %	Тачка	х.с. Бездан			х.с. Богојево			х.с. Доњи Михаљац		
		$Q_{\max,p}^{\text{Без}}$	$Q_{\text{odg1},p}^{\text{Бог}}$	$Q_{\text{odg1},p}^{\text{ДМ}}$	$Q_{\max,p}^{\text{Бог}}$	$Q_{\text{odg1},p}^{\text{Без}}$	$Q_{\text{odg2},p}^{\text{ДМ}}$	$Q_{\max,p}^{\text{ДМ}}$	$Q_{\text{odg2},p}^{\text{Бог}}$	$Q_{\text{odg2},p}^{\text{Без}}$
0.1	1	<b>9774</b>	<b>9818</b>	<b>248</b>	<b>10924</b>	<b>9278</b>	<b>328</b>	<b>3172</b>	<b>1715</b>	<b>1382</b>
	*	9679 (8050)	10636	1961	10833 (9082)	9853	2777	2621 (2425)	5941	5710
	2	9000 (2523)	10746	2550	10127 (-)	9853	-	874 (718)	7322	7632
1.0	1	<b>8248</b>	<b>7818</b>	<b>226</b>	<b>9219</b>	<b>7390</b>	<b>306</b>	<b>2526</b>	<b>1509</b>	<b>1322</b>
	*	8159 (6645)	8932	1340	9105 (7558)	8127	1640	2153 (2030)	5466	4940
	2	7065 (2607)	9089	1791	8269 (2880)	8230	2093	780 (687)	6614	6270
2.0	1	<b>7740</b>	<b>7091</b>	<b>203</b>	<b>8678</b>	<b>6733</b>	<b>284</b>	<b>2329</b>	<b>1440</b>	<b>1202</b>
	*	7652 (6308)	8364	1174	8582 (7154)	7554	1383	1997 (1910)	5311	4665
	2	6645 (2692)	8534	1586	7804 (2787)	7684	1781	687 (655)	6321	5824
5.0	1	<b>7025</b>	<b>6636</b>	<b>180</b>	<b>7924</b>	<b>5994</b>	<b>262</b>	<b>2063</b>	<b>1372</b>	<b>1142</b>
	*	6897 (5821)	7618	992	7810 (6644)	6815	1093	1802 (1710)	5008	4280
	2	5888 (2775)	7752	1328	6968 (3066)	6933	1420	655 (624)	5853	5194

Табела 6.22 Рачунски протоци за различите вероватноће превазилажења великих вода на ушћу Дунава и реке Тисе - ЧВОР 2 (КОПУЛА)

Φ %	Тачка	х.с. Богојево			х.с. Сланкамен			х.с. Сента		
		$Q_{\max,p}^{Бог}$	$Q_{одг1,p}^{Сла}$	$Q_{одг1,p}^{См}$	$Q_{\max,p}^{Сла}$	$Q_{одг1,p}^{Бог}$	$Q_{одг2,p}^{См}$	$Q_{\max,p}^{См}$	$Q_{одг2,p}^{Бог}$	$Q_{одг2,p}^{Сла}$
0.1	1	<b>10935</b>	<b>10078</b>	<b>276</b>	<b>12157</b>	<b>8871</b>	<b>925</b>	<b>4959</b>	<b>3779</b>	<b>1334</b>
	*	10777 (9745)	11591	3869	11944 (11635)	11649	3923	3691 (3880)	7646	10014
	2	9291 (3066)	11812	4497	9741 (5324)	12059	4182	1007 (1231)	10711	12592
1.0	1	<b>9232</b>	<b>8325</b>	<b>246</b>	<b>10530</b>	<b>6004</b>	<b>629</b>	<b>3997</b>	<b>3674</b>	<b>1245</b>
	*	9012 (7990)	10072	2816	10194 (9854)	9316	3280	3171 (3359)	6322	8728
	2	7433 (2973)	10267	3432	7249 (4984)	9592	3587	970 (1194)	8283	10412
2.0	1	<b>8691</b>	<b>7777</b>	<b>215</b>	<b>10004</b>	<b>5555</b>	<b>518</b>	<b>3701</b>	<b>3569</b>	<b>1156</b>
	*	8478 (7433)	9530	2515	9741 (9357)	8474	2998	2980 (3171)	5868	8323
	2	6504 (2787)	9749	3095	6683 (4757)	8846	3357	933 (1156)	7548	9729
5.0	1	<b>7938</b>	<b>6901</b>	<b>184</b>	<b>9246</b>	<b>4839</b>	<b>370</b>	<b>3297</b>	<b>3464</b>	<b>1067</b>
	*	7712 (6782)	8770	2086	9018 (8585)	7438	2628	2730 (2885)	5281	7768
	2	5760 (2601)	9004	2628	6456 (3964)	7849	3006	895 (1119)	6567	8788

Табела 6.23 Рачунски протоци за различите вероватноће превазилажења великих вода на ушћу Дунава и реке Саве - ЧВОР 3 (КОПУЛА)

Φ %	Тачка	х.с. Сланкамен			х.с. Смедерево			х.с. Сремска Митровица		
		$Q_{\max,p}^{Сла}$	$Q_{одг1,p}^{Смед}$	$Q_{одг1,p}^{СМ}$	$Q_{\max,p}^{Смед}$	$Q_{одг1,p}^{Сла}$	$Q_{одг2,p}^{СМ}$	$Q_{\max,p}^{СМ}$	$Q_{одг2,p}^{Сла}$	$Q_{одг2,p}^{Смед}$
0.1	1	<b>12362</b>	<b>11995</b>	<b>55</b>	<b>20335</b>	<b>8893</b>	<b>1969</b>	<b>8480</b> <b>(8456)</b>	<b>1247</b>	<b>5146</b>
	*	12007 (11213)	19223	5170	19860 (19210)	13038	6373	7657 (8053)	7687	12768
	2	7279 (4531)	19982	5947	14228 (8003)	13518	6816	2904 (3895)	8718	13197
1.0	1	<b>10680</b>	<b>9314</b>	<b>35</b>	<b>16602</b>	<b>6114</b>	<b>1710</b>	<b>6927</b> <b>(6907)</b>	<b>1164</b>	<b>5020</b>
	*	10308 (9350)	15262	4251	16155 (15414)	10575	5304	6086 (6465)	6650	11672
	2	6456	16042		10968	11094		2772	7938	

$\Phi$ %	Тачка	х.с. Сланкамен			х.с. Смедерево			х.с. Сремска Митровица		
		$Q_{\max, p}^{Сла}$	$Q_{odg1, p}^{Смед}$	$Q_{odg1, p}^{СМ}$	$Q_{\max, p}^{Смед}$	$Q_{odg1, p}^{Сла}$	$Q_{odg2, p}^{СМ}$	$Q_{\max, p}^{СМ}$	$Q_{odg2, p}^{Сла}$	$Q_{odg2, p}^{Смед}$
		(3851)		5128	(7411)		5769	(3300)		12338
2.0	1	<b>10137</b>	<b>8620</b>	<b>29</b>	<b>15472</b>	<b>6003</b>	<b>1658</b>	<b>6457</b> <b>(6438)</b>	<b>1128</b>	<b>4895</b>
	*	9693 (8823)	14179	3920	14937 (14350)	9893	4922	5683 (6006)	6234	11170
	2	5664 (3738)	14850	4803	8744 (7262)	10339	5422	2706 (3036)	7600	11953
5.0	1	<b>9374</b>	<b>7368</b>	-	<b>13965</b>	<b>5113</b>	<b>1554</b>	<b>5830</b> <b>(5813)</b>	<b>1166</b>	<b>4267</b>
	*	8948 (8180)	12540	3423	13487 (12914)	8801	4404	5083 (5413)	5818	10354
	2	5324 (3625)	13259	4298	8596 (6818)	9302	4927	2574 (2904)	7049	11310

## 7 ПРЕПОРУКЕ ЗА ПРИМЕНУ ДЕФИНИСАНИХ ВИШЕДИМЕНЗИОНАЛНИХ ФУНКЦИЈА РАСПОДЕЛЕ НА ДЕОНИЦИ ДУНАВА ОД УЛАЗА У СРБИЈУ ДО СМЕДЕРЕВА

### 7.1 ИЗБОР РАЧУНСКИХ ВЕЛИКИХ ВОДА ЗА ПОТРЕБЕ ДИМЕНЗИОНИСАЊА ЛИНИЈСКИХ СИСТЕМА ЗА ЗАШТИТУ ОД ПОПЛАВА НА СЕКТОРИМА РЕКА СА ПРИТОКАМА

Практична примена резултата вероватноћа појаве у дводимензионалном простору помоћу модела ПРОИЛ и КОПУЛА (Табеле 6.14 – 6.16, односно 6.21-6.23) у случају димензионисања насипа на разматраном ширем сектору ушћа притока у реку Дунав за усвојени ниво заштите који одговара 100–годишњем повратном периоду узевши у обзир критеријуме за избор меродавних нивоа са захтеваним степеном заштите. Критеријуми су:

1. Степен заштите који се остварује изградњом система за заштиту од поплава треба бити већи од вероватноће појаве протока који изазива штете, и
2. Време остварења система треба бити што краће.

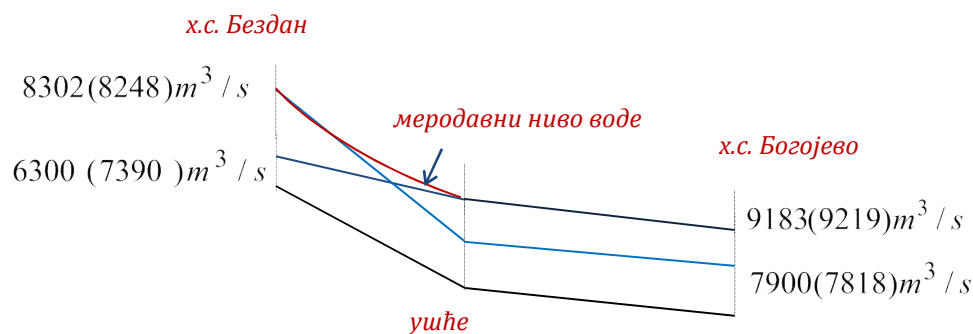
Проток у зони међусобног утицаја великих вода реке Дунав и реке Драве зависи од степена њихове коинциденције (нумеричке вредности су излази из модела ПРОИЛ док се вредности у заградама односе на модел КОПУЛА):

За деоницу *реке Дунав (ЧВОР 1) узводно од ушћа реке Драве*, а у зони међусобног утицаја река, меродавни ниво је анvelopа максималних нивоа која се добија прорачунима линије нивоа водног огледала, а на основу протока следећих комбинација променљивих (Тачка 1, Табеле 6.14 и 6.21):

- стогодишњи максимални проток реке Дунав низводно од ушћа Драве, што у конкретном случају износи  $Q_{\max,p}^{\text{Богојево}} = 9183 (9219) \text{ m}^3/\text{s}$ , и одговарајући проток реке Дунав узводно од ушћа реке, за исту стогодишњу вероватноћу превазилажења (коинциденције), са графика  $(Q_{\text{odg1}}^{\text{Бездан}}, Q_{\max}^{\text{Богојево}})$ , који износи  $Q_{\text{odg1},p=1\%}^{\text{Бездан}} = 6300 (7390) \text{ m}^3/\text{s}$ , и
- одговарајући проток реке Дунав низводно од ушћа реке Драве и максималан годишњи проток реке Дунав узводно од ушћа Драве, за стогодишњу

вероватноћу коинциденције са графика ( $Q_{odg1}^{Богојево}; Q_{max}^{Бездан}$ ), што у конкретном случају износе ( $Q_{odg1}^{Богојево} = 7900 (7818) m^3/s$  и  $Q_{max,p=1\%}^{Бездан} = 8302 (8248) m^3/s$ ).

Шематски приказ усвојених рачунских протока за прорачун стогодишњег нивоа водног огледала на целом сектору реке Дунав од х.с. Богојево до ушћа реке Драве и узводно од ушћа до х.с. Бездан, приказан је на слици 7.1.



Слика 7.1 Рачунски максимални протоци за прорачун стогодишњег нивоа водног огледала дуж реке Дунав у зони ушће реке Драве (ЧВОР 1)

За деоницу реке Драве узводно од ушћа у Дунав, у зони њиховог међусобног утицаја, меродавни ниво је анVELOпа максималних нивоа која се добија прорачунима линије нивоа водног огледала, а на основу протока следећих комбинација променљивих (Тачка 1, Табеле 6.14 и 6.21):

- стогодишњи максимални проток реке Дунав низводно од ушћа реке Драве, што у конкретном случају износи  $Q_{max,p}^{Богојево} = 9183 (9219) m^3/s$ , и одговарајући проток реке Драве узводно од ушћа, за исту стогодишњу вероватноћу превазилажења (коинциденције), са графика ( $Q_{odg2}^{DM}; Q_{max}^{Богојево}$ ) и који износи  $Q_{odg2}^{DM} = 1550 (306) m^3/s$ , и
- одговарајући проток реке Дунав низводно од ушћа реке Драве и максималан годишњи проток реке Драве узводно од ушћа, за стогодишњу вероватноћу коинциденције са графика ( $Q_{max}^{DM}; Q_{odg2}^{Богојево}$ ), што у је конкретном случају ( $Q_{max,p=1\%}^{DM} = 2542 (2526) m^3/s$ ) и ( $Q_{odg2}^{Богојево} = 4300 (1509) m^3/s$ ).

Шематски приказ усвојених рачунских протока за прорачун стогодишњег нивоа водног огледала Драве узводно ушћа до х.с Доњи Михаљцац, приказан је на слици 7.2.



Слика 7.2 Рачунски максимални протоци за прорачун стогодишњег нивоа водног огледала дуж реке Дунав до ушћа реке Драве и уз Драву до профила х.с. Доњи Михаљац

За деоницу реке Дунав (ЧВОР 2) узводно од ушћа реке Тисе, а у зони међусобног утицаја река, меродавни ниво је анвелопа максималних нивоа која се добија на основу протока следећих комбинација променљивих (Тачка 1, Табеле 6.15 и 6.22):

- стогодишњи максимални проток реке Дунав низводно од ушћа Тисе, што у конкретном случају износи  $Q_{\max,p}^{\text{Сланкамен}} = 10869 (10530) \text{ m}^3/\text{s}$ , и одговарајући проток реке Дунав узводно од ушћа реке, за исту стогодишњу вероватноћу превазилажења (коинциденције), са графика ( $Q_{\text{odg1}}^{\text{Богојево}}; Q_{\max}^{\text{Сланкамен}}$ ), који износи  $Q_{\text{odg1},p=1\%}^{\text{Богојево}} = 5000 (6004) \text{ m}^3/\text{s}$ , и
- одговарајући проток реке Дунав низводно од ушћа реке Тисе и максималан годишњи проток реке Дунав узводно од ушћа, за стогодишњу вероватноћу коинциденције са графика ( $Q_{\text{odg1}}^{\text{Сланкамен}}; Q_{\max}^{\text{Богојево}}$ ), што у конкретном случају износе ( $Q_{\text{odg1}}^{\text{Сланкамен}} = 8600 (8325) \text{ m}^3/\text{s}$  и  $Q_{\max,p=1\%}^{\text{Богојево}} = 9172 (9232) \text{ m}^3/\text{s}$ ).

Шематски приказ усвојених рачунских протока за прорачун стогодишњег нивоа водног огледала на целом сектору реке Дунав од х.с. Сланкамен до ушћа реке Тисе и узводно од ушћа до х.с. Богојево, приказан је на слици 7.3.



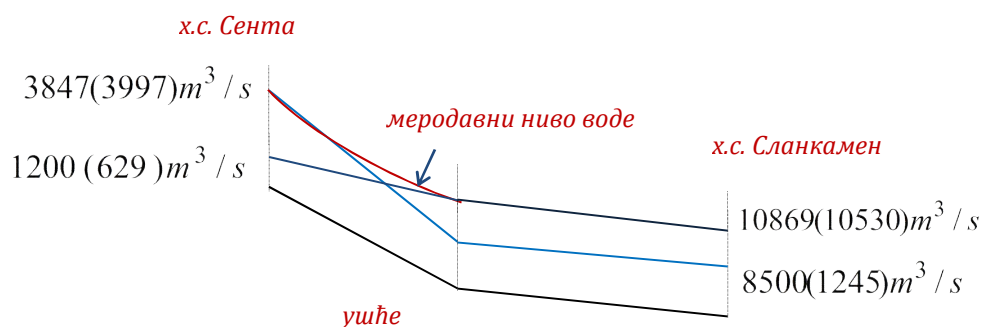


Слика 7.3 Рачунски максимални протоци за прорачун стогодишњег нивоа водног огледала дуж реке Дунав у зони ушће реке Тисе (ЧВОР 2)

За сектор реке Тисе узводно од ушћа у Дунав, у зони њиховог међусобног утицаја, меродавни ниво је анвелопа максималних нивоа која се добија прорачунима линије нивоа водног огледала на основу протока следећих комбинација променљивих (Тачка 1, Табеле 6.15 и 6.22):

- стогодишњи максимални проток реке Дунав низводно од ушћа реке Тисе,  $Q_{\max,p}^{\text{Сланкамен}} = 10869 (10530) m^3/s$ , и одговарајући проток реке Тисе узводно од ушћа, за исту стогодишњу вероватноћу превазилажења (коинциденције), са графика ( $Q_{\text{odg2}}^{\text{Сента}}; Q_{\max}^{\text{Сланкамен}}$ ) и који износи ( $Q_{\text{odg2}}^{\text{Сента}} = 1200 (629) m^3/s$ ), и
- одговарајући проток реке Дунав низводно од ушћа и максималан годишњи проток реке Тисе узводно од ушћа, за стогодишњу вероватноћу коинциденције са графика ( $Q_{\max}^{\text{Сента}}; Q_{\text{odg2}}^{\text{Сланкамен}}$ ), што у је конкретном случају ( $Q_{\max,1\%}^{\text{Сента}} = 3847 (3997) m^3/s$ ) и ( $Q_{\text{odg2}}^{\text{Сланкамен}} = 8500 (1245) m^3/s$ ).

Шематски приказ предложених рачунских протока за прорачун стогодишњег нивоа водног огледала Тисе узводно ушћа до х.с Сента, приказан је на слици 7.4.

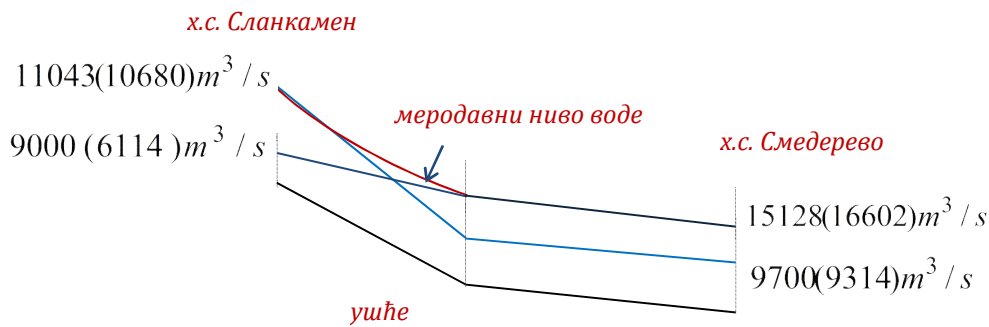


Слика 7.4 Рачунски максимални протоци за прорачун стогодишњег нивоа водног огледала дуж реке Дунав до ушћа реке Тисе и уз Тису до профила х.с. Сента

За последњу деоницу реке Дунав (ЧВОР 3) узводно од ушћа реке Саве, у зони међусобног утицаја река, меродавни ниво се добија на основу протока следећих комбинација променљивих (Тачка 1, Табеле 6.16 и 6.23):

- стогодишњи максимални проток реке Дунав низводно од ушћа Саве, што у конкретном случају износи  $Q_{\max,p}^{\text{Смедерево}} = 15128 (16602) \text{ m}^3/\text{s}$ , и одговарајући проток реке Дунав узводно од ушћа, за исту стогодишњу вероватноћу превазилажења (коинциденције), са графика ( $Q_{\text{одг1}}^{\text{Сланкамен}}; Q_{\max}^{\text{Смедерево}}$ ), који износи  $Q_{\text{одг1},p=1\%}^{\text{Сланкамен}} = 9000 (6114) \text{ m}^3/\text{s}$ , и
- одговарајући проток реке Дунав низводно од ушћа реке Саве и максималан годишњи проток реке Дунав узводно од ушћа, за стогодишњу вероватноћу коинциденције са графика ( $Q_{\text{одг1}}^{\text{Смедерево}}; Q_{\max}^{\text{Сланкамен}}$ ), што у конкретном случају износе ( $Q_{\text{одг1}}^{\text{Смедерево}} = 9700 (9314) \text{ m}^3/\text{s}$  и  $Q_{\max,p=1\%}^{\text{Сланкамен}} = 11043 (10680) \text{ m}^3/\text{s}$ ).

Шематски приказ предложених рачунских протока за прорачун стогодишњег нивоа водног огледала на целом сектору реке Дунав од х.с. Смедерево до ушћа реке Саве и узводно од ушћа до х.с. Сланкамен, приказан је на слици 7.5.

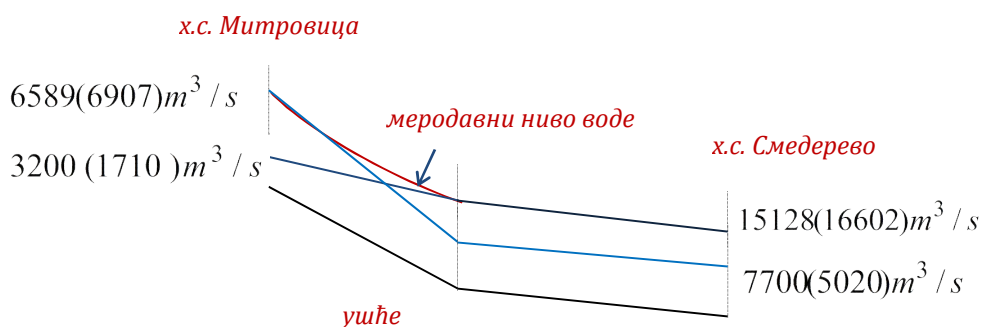


Слика 7.5 Рачунски максимални протоци за прорачун стогодишњег нивоа водног огледала дуж реке Дунав у зони ушће реке Саве (ЧВОР 3)

За сектор реке Саве узводно од ушћа у Дунав, у зони њиховог међусобног утицаја, меродавни ниво је анVELOпа максималних нивоа која се добија прорачунима линије нивоа водног огледала на основу протока следећих комбинација променљивих (Тачка 1, Табеле 6.16 и 6.23):

- стогодишњи максимални проток реке Дунав низводно од ушћа реке Саве,  $Q_{\max,p}^{\text{Смедерево}} = 15128 (16602) \text{ m}^3/\text{s}$ , и одговарајући проток реке Саве узводно од ушћа до х.с. Сремска Митровица, за исту стогодишњу вероватноћу превазилажења (коинциденције), са графика ( $Q_{\text{odg2}}^{\text{CM}}; Q_{\max}^{\text{Смедерево}}$ ) и који износи ( $Q_{\text{odg2}}^{\text{CM}} = 3200 (1710) \text{ m}^3/\text{s}$ ), и
- одговарајући проток реке Дунав низводно од ушћа и максималан годишњи проток реке Саве узводно од ушћа, за стогодишњу вероватноћу коинциденције са графика ( $Q_{\max}^{\text{CM}}; Q_{\text{odg2}}^{\text{Смедерево}}$ ), што у је конкретном случају ( $Q_{\max,1\%}^{\text{CM}} = 6589 (6907) \text{ m}^3/\text{s}$ ) и ( $Q_{\text{odg2}}^{\text{Смедерево}} = 7700 (5020) \text{ m}^3/\text{s}$ ).

Шематски приказ предложених рачунских протока за прорачун стогодишњег нивоа водног огледала реке Саве узводно ушћа до х.с Сремска Митровица, приказан је на слици 7.6.



Слика 7.6 Рачунски максимални протоци за прорачун стогодишњег нивоа водног огледала дуж реке Дунав до ушћа реке Саве и уз Саву до профила х.с. Сремска Митровица

Приказане комбинације протока за прорачун анvelope меродавних нивоа за димензионисање система за заштиту од поплава у зони ушћа се односе на Тачку 1. Разлог за усвајање ове комбинације протока је што се по критеријумима 1. и 2. усваја комбинација која на деоници главне реке или притоке има најнеповољнију вредност док се друга вредност усваја на основу успостављених зависности. Свакако хидродинамичким моделом треба проверити и друге две комбинације (Тачке 2 и \*).

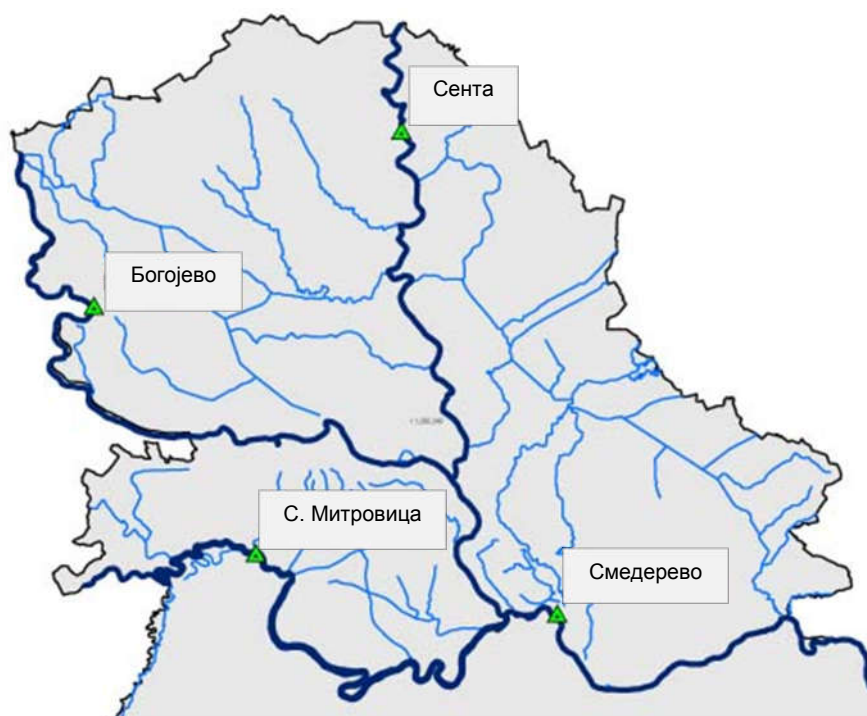
## 7.2 ВИШЕДИМЕНЗИОНАЛНЕ КОИНЦИДЕНЦИЈЕ

При успостављању вишедимензионалне зависности коинциденција поплавних таласа на профилима хидролошких станица на Дунаву и његовим значајним притокама у Србији: Тиси и Сави (Слика 7.7) претпостављено је да теоријски хидрограм одређене вероватноће појаве  $\Phi$  на излазном профилу Дунава, за који је изабран профил код Панчева сачињавају поплавни таласи на Дунаву код Богојева, познате вероватноће појаве  $p$ , односно повратног периода  $T$ , и произвољно одабраних комбинација димензионалне коинциденције на Тиси код Сенте и на Сави код Сремске Митровице (Prohaska et al. 2012). Коришћењем процедуре из поглавља 4.3 формирана је зависност вероватноћа вишедимензионалних коинциденција на наведеним профилима водомерних станица, у виду:

$$p(Q_{OUT,p=\Phi})^{Смед} = P\{p(Q_{i,p})^{Бог} \cap P[p(Q_{j,r})^{Сен} \cap p(Q_{k,z})^{СМ}]\} \quad (7.1)$$

где су:

$p(Q_{OUT,p=\Phi})^{Смед}$	Вероватноћа превазилажења максималног ходишњег протока на излазном профилу код Смедерева на Дунаву,
$p(Q_{i,p=t})^{Бог}$	Вероватноћа превазилажења максималног годишњег протока на улазном профилу на Дунаву код Богојева,
$p(Q_{j,p=r})^{Сен}$	Вероватноћа превазилажења максималног годишњег протока на улазном профилу на Тиси код Сенте,
$p(Q_{k,p=z})^{СМ}$	Вероватноћа превазилажења максималног годишњег протока на улазном профилу на Сави код Сремске Митровице,
$P[p(Q_{j,r}) \cap p(Q_{k,z})]$	Вероватноћа превазилажења коинциденције максималних годишњих протока на Тиси и Сави



Слика 7.7 Деоница реке Дунав у Србији са означеним профилима хидролошких станица за анализу вишедимензионалне коинциденције поплавних таласа (Prohaska et al, 2008)

Комбинација вредности пикова на наведеним профилима хидролошких станица на разматраној деоници дунава приказана је на слици 7.8 за период 1931-2009.

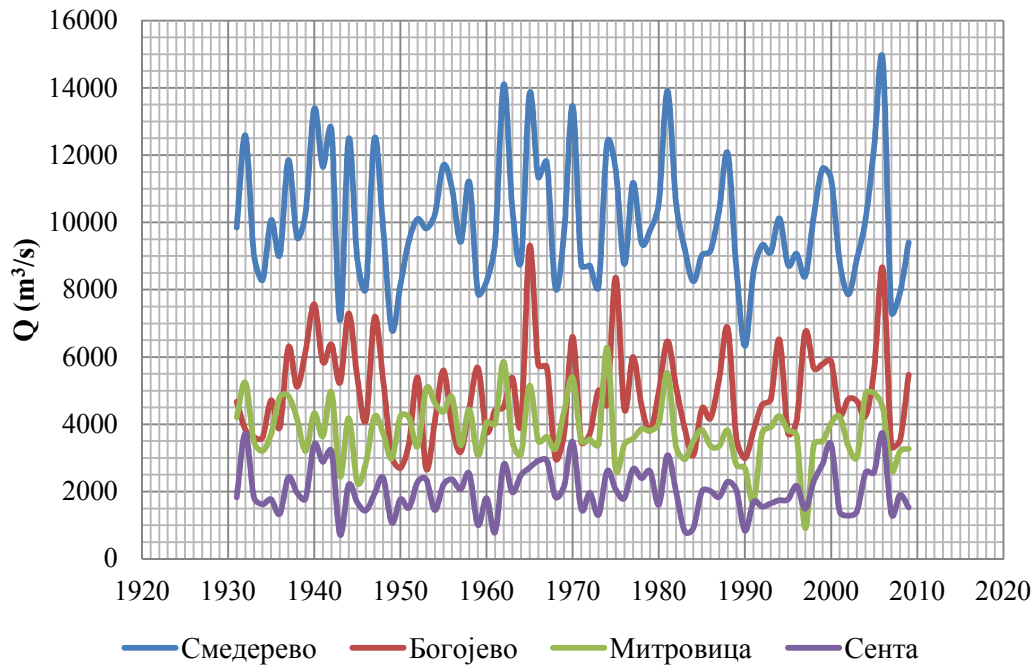
Маргиналне вероватноће за прорачун коинциденције максималних годишњих пикова поплавних таласа на разматраном сложеном сектору Дунава приказане су у табели 7.1.

Табела 7.1 Маргиналне вероватноће за прорачун вишедимензионалне коинциденције пикова поплавних таласа на деоници Дунава од Богојева до Панчева

Река	Хид. станица	маргиналне вероватноће $Q_{p\%}$ (m <sup>3</sup> /s)								Теори. расп.
		0,10%	1%	5%	10%	50%	90%	95%	99%	
Дунав	Богојево	10460	8988	7824	7257	5522	4152	3822	3262	ЛПЗ
Тиса	Сента	4971	3981	3281	2964	2092	1499	1367	1154	ЛПЗ
Сава	Сремска Митровица	7515	6388	5560	5176	4073	3269	3082	2771	ЛПЗ
Дунав	Смедерево	17668	15206	13341	12457	9844	7855	7381	6582	ЛПЗ
Збир	Б U C U CM	20563	17725	15614	14625	11749	9609	9106	8262	ЛПЗ

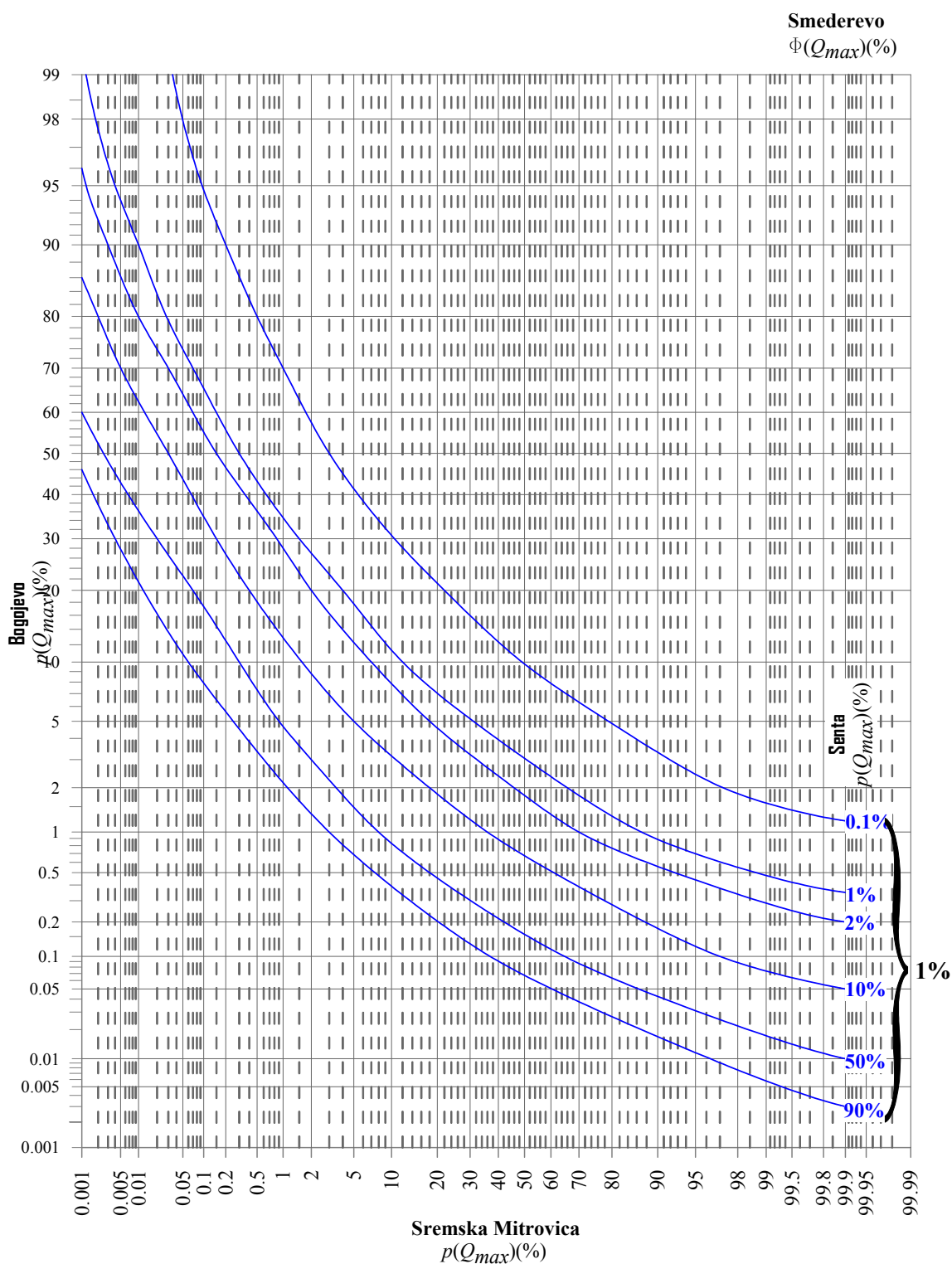
Практични приказ прорачуна, за стогодишњу вероватноћу превазилажења поплаве на излазном профилу х.с Смедерево приказан је у табели 7.2. Аналогним поступком срачунате су коинциденције максималних годишњих протока Дунава, Тисе

и Саве и за остале комбинације на Дунаву код Смедерева и то за вероватноће превазилажења у процентима: 0.1, 2, 5, 10 и 50 односно хиљадугодишњу, педесетогодишњу, двадесетогодишњу, десетогодишњу и двогодишњу поплаву.



Слика 7.8 Комбинације пикова поплавних таласа на означеним профилима хидролошких станица за анализу вишедимензионалне коинциденције

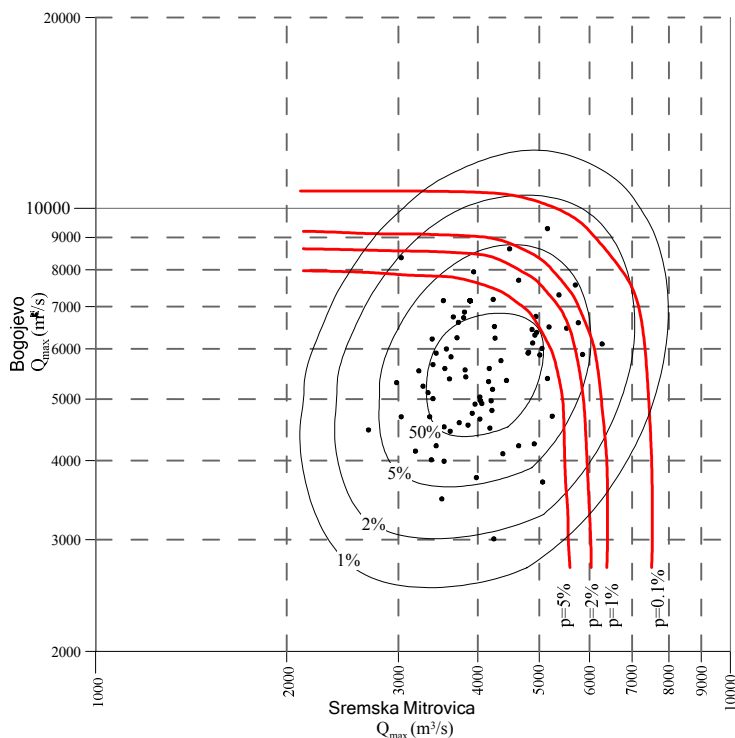
На основу података из табеле 7.2 сачињен је, графички приказ резултата прорачуна вишедимензионалне коинциденције пикова поплавних таласа Дунава, Саве и Тисе, за случај формирања стогодишњих поплавних таласа Дунава у профилима х.с Смедерево, који је први пут приказан у Prohaska et al. (2012).



Слика 7.9 Вишедимензионална коинциденција стогодишњег поплавног таласа Дунава у функцији вероватноћа појаве поплавних таласа на х.с Богојево, х.с Сента и х.с Сремска Митровица



Одговарајућа дводимензионална коинциденција пикова поплавних таласа на Дунаву (х.с. Богојево) и на Сави (х.с. Сремска Митровица), приказана је графички на слици 7.10.



Слика 8.10 Дводимензионална коинциденција полавних таласа на улазним профилима Дунава и Саве

За остале вероватноће коинциденције поплавног таласа код х. с. Смедерево прорачуни су приказани у табелама 7.3 – 7.6.

Финални график који показује вероватноћу превазилажења вишедимензионалне коинциденције пикова поплавних таласа на улазним профилима Дунава, Тисе и Саве са појавом пика поплавног таласа одабраних вероватноћа појаве на доњем Дунаву код Смедерева приказан је на слици 7.11.

Табела 7.2 Прорачун коинциденције на деоници Дунава од х. с. Богојево до х. с. Смедерево за вероватноћу превазилажења  $\Phi=1\%$ 

$\Phi$ (%)	$(Q_{OUT,p=\Phi})^{Смед}$ ( $m^3/s$ )	$\sum(Q_B \cup Q_C \cup Q_{CM})$	$Q_C$		$(\sum(Q_B \cup Q_{CM}))$	$(Q_B \cap Q_{CM})$			
			(m <sup>3</sup> /s)	p(%)		$Q_B$		$Q_{CM}$	
						(m <sup>3</sup> /s)	p(%)	(m <sup>3</sup> /s)	p(%)
1.0	15206	17725	4971	0.1	12751	10460	0.1	-	-
						8988	1	-	-
						7824	5	405	-
						7257	10	972	-
						5522	50	2707	99
						4153	90	4076	50
						3822	95	4407	33
						3262	99	4967	16
			3981	1.0	13744	10460	0.1	-	-
						8988	1	231	-
						7824	5	1395	-
						7257	10	1962	-
						5522	50	3697	70
						4153	90	5066	11
						3822	95	5397	6.5
						3262	99	5957	2.5
			3683	2.0	14042	10460	0.1	-	-
						8988	1	529	-
						7824	5	1693	-
						7257	10	2260	-
						5522	50	3995	55
						4153	90	5364	7.0
						3822	95	5695	4.0
						3262	99	6255	1.4
			2965	10.0	14760	10460	0.1	-	-
						8988	1	1247	-
						7824	5	2411	99.9
						7257	10	2978	97
5522	50	4713				24			
4153	90	6082				1.8			
3822	95	6413				0.9			
3262	99	6973				0.35			
2093	50.0	15632	10460	0.1	647	-			
			8988	1	2119	-			
			7824	5	3283	90			
			7257	10	3850	57			
			5522	50	5585	4.5			
			4153	90	6954	1.0			
			3822	95	7285	0.15			
			3262	99	7845	0.05			
			1499	90.0	16226	10460	0.1	1241	-
						8988	1	2713	99.4
						7824	5	3877	57
						7257	10	4444	32
						5522	50	6179	1.5
						4153	90	7548	0.09
						3822	95	7879	0.05
						3262	99	8439	0.015

Табела 7.3 Прорачун коинциденције на деоници Дунава од х. с. Богојево до х. с. Смедерево за вероватноћу превазилажења  $\Phi=0,1\%$ 

$\Phi$ (%)	$(Q_{OUT,p=\Phi})^{Смед}$ ( $m^3/s$ )	$\sum(Q_B \cup Q_C \cup Q_{CM})$	$Q_C$		$(\sum(Q_B \cup Q_{CM}))$	$(Q_B \cap Q_{CM})$			
			(m <sup>3</sup> /s)	p(%)		$Q_B$		$Q_{CM}$	
						(m <sup>3</sup> /s)	p(%)	(m <sup>3</sup> /s)	p(%)
0.1	17667	20563	4971	0.1	15592	10460	0.1	5132	
						8988	1	6604	
						7824	5	7768	
						7257	10	8335	
						5522	50	10070	
						4153	90	11439	
						3822	95	11770	
						3262	99	12330	
			3981	1.0	16582	10460	0.1	6122	
						8988	1	7594	
						7824	5	8758	
						7257	10	9325	
						5522	50	11060	
						4153	90	12429	
						3822	95	12760	
						3262	99	13320	
			3683	2.0	16880	10460	0.1	6420	
						8988	1	7892	
						7824	5	9056	
						7257	10	9623	
						5522	50	11358	
						4153	90	12727	
						3822	95	13058	
						3262	99	13618	
			2965	10.0	17598	10460	0.1	7138	
						8988	1	8610	
						7824	5	9774	
						7257	10	10341	
5522	50	12076							
4153	90	13445							
3822	95	13776							
3262	99	14336							
2093	50.0	18470	10460	0.1	8010				
			8988	1	9482				
			7824	5	10646				
			7257	10	11213				
			5522	50	12948				
			4153	90	14317				
			3822	95	14648				
			3262	99	15208				
			1499	90.0	19064	10460	0.1	8604	
						8988	1	10076	
						7824	5	11240	
						7257	10	11807	
						5522	50	13542	
						4153	90	14911	
						3822	95	15242	
						3262	99	15802	

Табела 7.4 Прорачун коинциденције на деоници Дунава од х. с. Богојево до х. с. Смедерево за вероватноћу превазилажења  $\Phi=2\%$ 

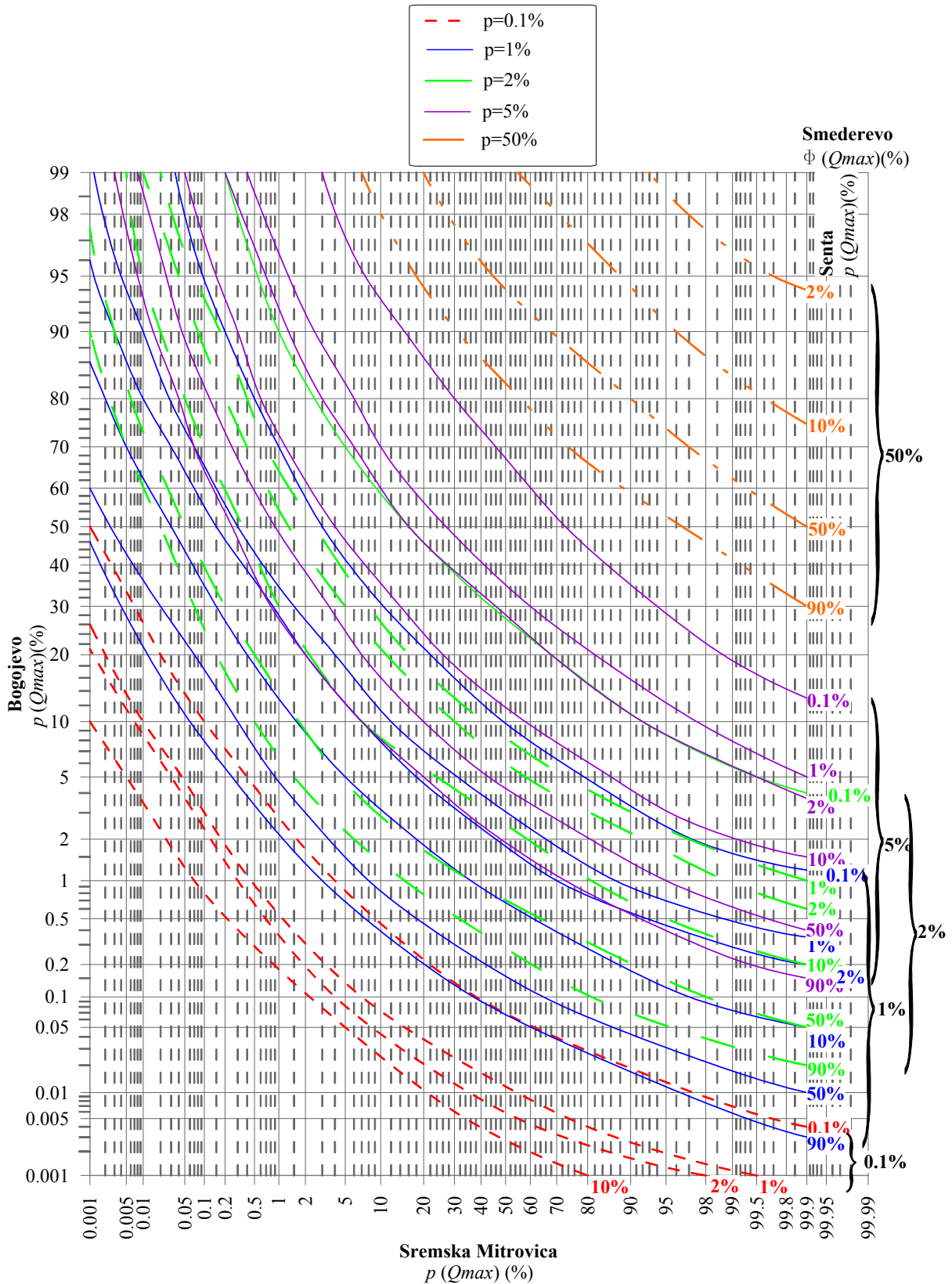
$\Phi$ (%)	$(Q_{OUT,p=\Phi})^{Смед}$ (m <sup>3</sup> /s)	$\sum(Q_B \cup Q_C \cup Q_{CM})$	$Q_C$		$\sum(Q_B \cup Q_{CM})$	$(Q_B \cap Q_{CM})$			
			(m <sup>3</sup> /s)	p(%)		$Q_B$		$Q_{CM}$	
						(m <sup>3</sup> /s)	p(%)	(m <sup>3</sup> /s)	p(%)
2.0	14426	16837	4971	0.1	11866	10460	0.1	1406	
						8988	1	2878	
						7824	5	4042	
						7257	10	4609	
						5522	50	6344	
						4153	90	7713	
						3822	95	8044	
						3262	99	8604	
			3981	1.0	12856	10460	0.1	2396	
						8988	1	3868	
						7824	5	5032	
						7257	10	5599	
						5522	50	7334	
						4153	90	8703	
						3822	95	9034	
						3262	99	9594	
			3683	2.0	13154	10460	0.1	2694	
						8988	1	4166	
						7824	5	5330	
						7257	10	5897	
						5522	50	7632	
						4153	90	9001	
						3822	95	9332	
						3262	99	9892	
			2965	10.0	13872	10460	0.1	3412	
						8988	1	4884	
						7824	5	6048	
						7257	10	6615	
5522	50	8350							
4153	90	9719							
3822	95	10050							
3262	99	10610							
2093	50.0	14744	10460	0.1	4284				
			8988	1	5756				
			7824	5	6920				
			7257	10	7487				
			5522	50	9222				
			4153	90	10591				
			3822	95	10922				
			3262	99	11482				
			1499	90.0	15338	10460	0.1	4878	
						8988	1	6350	
						7824	5	7514	
						7257	10	8081	
						5522	50	9816	
						4153	90	11185	
						3822	95	11516	
						3262	99	12076	

Табела 7.5 Прорачун коинциденције на деоници Дунава од х. с. Богојево до х. с. Смедерево за вероватноћу превазилажења  $\Phi=5\%$ 

$\Phi$ (%)	$(Q_{OUT,p=\Phi})^{Смед}$ ( $m^3/s$ )	$\sum(Q_B \cup Q_C \cup Q_{CM})$	$Q_C$		$\sum(Q_B \cup Q_{CM})$	$(Q_B \cap Q_{CM})$			
			(m <sup>3</sup> /s)	p(%)		$Q_B$		$Q_{CM}$	
						(m <sup>3</sup> /s)	p(%)	(m <sup>3</sup> /s)	p(%)
5.0	13341	15614	4971	0.1	10643	10460	0.1	183	
						8988	1	1655	
						7824	5	2819	
						7257	10	3386	
						5522	50	5121	
						4153	90	6490	
						3822	95	6821	
						3262	99	7381	
			3981	1.0	11633	10460	0.1	1173	
						8988	1	2645	
						7824	5	3809	
						7257	10	4376	
						5522	50	6111	
						4153	90	7480	
						3822	95	7811	
						3262	99	8371	
			3683	2.0	11931	10460	0.1	1471	
						8988	1	2943	
						7824	5	4107	
						7257	10	4674	
						5522	50	6409	
						4153	90	7778	
						3822	95	8109	
						3262	99	8669	
			2965	10.0	12649	10460	0.1	2189	
						8988	1	3661	
						7824	5	4825	
						7257	10	5392	
5522	50	7127							
4153	90	8496							
3822	95	8827							
3262	99	9387							
2093	50.0	13521	10460	0.1	3061				
			8988	1	4533				
			7824	5	5697				
			7257	10	6264				
			5522	50	7999				
			4153	90	9368				
			3822	95	9699				
			3262	99	10259				
			1499	90.0	14115	10460	0.1	3655	
						8988	1	5127	
						7824	5	6291	
						7257	10	6858	
						5522	50	8593	
						4153	90	9962	
						3822	95	10293	
						3262	99	10853	

Табела 7.6 Прорачун коинциденције на деоници Дунава од х. с. Богојево до х. с. Смедерево за вероватноћу превазилажења  $\Phi=50\%$ 

$\Phi$ (%)	$(Q_{OUT, p=\Phi})^{Смед}$ ( $m^3/s$ )	$\sum(Q_B \cup Q_C \cup Q_{CM})$	$Q_C$		$\sum(Q_B \cup Q_{CM})$	$(Q_B \cap Q_{CM})$			
			$(m^3/s)$	$p(\%)$		$Q_B$		$Q_{CM}$	
						$(m^3/s)$	$p(\%)$	$(m^3/s)$	$p(\%)$
50	9844	11749	4971	0.1	6778	10460	0.1	-	
						8988	1	-	
						7824	5	-	
						7257	10	-	
						5522	50	1256	
						4153	90	2625	
						3822	95	2956	
						3262	99	3516	
			3981	1.0	7768	10460	0.1	-	
						8988	1	-	
						7824	5	-	
						7257	10	511	
						5522	50	2246	
						4153	90	3615	
						3822	95	3946	
						3262	99	4506	
			3683	2.0	8066	10460	0.1		
						8988	1		
						7824	5	242	
						7257	10	809	
						5522	50	2544	
						4153	90	3913	
						3822	95	4244	
						3262	99	4804	
			2965	10.0	8784	10460	0.1	-	
						8988	1	-	
						7824	5	960	
						7257	10	1527	
5522	50	3262							
4153	90	4631							
3822	95	4962							
3262	99	5522							
2093	50.0	9656	10460	0.1	-				
			8988	1	668				
			7824	5	1832				
			7257	10	2399				
			5522	50	4134				
			4153	90	5503				
			3822	95	5834				
			3262	99	6394				
			1499	90.0	10250	10460	0.1	-	
						8988	1	1262	
						7824	5	2426	
						7257	10	2993	
						5522	50	4728	
						4153	90	6097	
						3822	95	6428	
						3262	99	6988	



Слика 7.11 Вишедимензионална коинциденција поплавних таласа различитог повратног периода на реци Дунав код Смедерева у функцији поплавних таласа на Дунаву код Богојева, Тиси код Сенте и Сави код Сремске Митровице

Приказани резултати прорачуна вишедимензионалне коинциденције великих вода Дунава и његових главних притока имају посебан значај са гледишта *генезе поплавних таласа* (Prohaska et al. 2012). Дефинисани графици успостављених вишедимензионалних коинциденција одређују реалан простор где се различите комбинације вероватноћа појаве поплавних таласа на Дунаву и главним притокама могу наћи (Слика 7.11). На слици 7.11 је приказан широк распон вероватноћа појаве пика поплавних таласа на улазним профилима Дунава, као и притокама Сави и Тиси (од 0.1% до 90%). Формиране линије вероватноћа, од 0.1% до 90%, које су параметарски дате за х.с Сента на Тиси (а могу се дати за било који улазни профил), указују на распон могућих комбинација пикова поплавних таласа на разматраним улазним профилима који карактеришу поплаву на Дунаву код Смедерева.

### 7.3 ОЦЕНА СТАТИСТИЧКЕ ЗНАЧАЈНОСТИ ИСТОРИЈСКИХ ПОПЛАВА И ИДЕНТИФИКАЦИЈА ИЗУЗЕТНИХ ДОГАЂАЈА („СТАТИСТИЧКИХ ИЗУЗЕТАКА“)

Одређивање повратног периода историјског догађаја се своди на одређивање вероватноће тог догађаја (учесталости поплаве). Процедура представља оцену поплаве у вишедимензионалном простору и ослања се на вишедимензионалну теорију вероватноће (Поглавље 3.3.8). У свом раду Yue и Rasmussen (2002) приказују значење повратног периода у дводимензионалном пробабилистичком простору.

У овом истраживању је повратни период одређен релацијом:

$$T = \frac{\mu}{p} \quad (7.2)$$

где је:

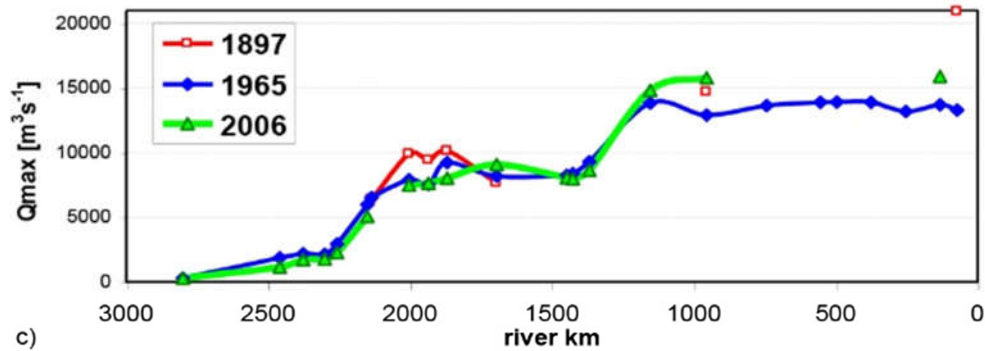
$$P[(X > x) \cap (Y > y)] = p,$$

$\mu$  – период између два суседна члана временске серије.

За процену повратног периода догађаја који представља комбинацију две варијабле се користе дијаграми превазилажења њихове коинциденције (Прилог 6), то је вероватноћа да ће се догађај наћи у критичном пољу превазилажења (Слика 4.1).

Године 1965. и 2006. су најзначајније поплаве у двадесетом и двадесетпрвом веку скоро на целом сливу Дунава, што се може видети на графицима подужних приказа неколико екстремних поплава дуж Дунава (Слика 7.12).





Слика 7.12 Подужни прикази неколико екстремних поплава дуж Дунава (Pekarova et al., 2019)

Илустрације ради, у табели 7.7 приказани су основни показатељи поред највећих поплава (1965. и 2006. године) и два значајна регистрована поплавна таласа на Дунаву, преко вредности пикова поплавних таласа и одговарајућих једнодимензионалних вероватноћа појаве. Одабране су поплаве из оних година када се на некој од разматраних хидролошких станица појављује највећи регистровани пик.

Табела 7.7 Највећи регистровани пикови поплавних таласа на Дунаву, Тиси и Сави и њихове вероватноће појаве

Година	х.с Богојево		х.с Сента		х.с Сремска Митровица		х.с Смедерево	
	$Q_{max}(m^3/s)$	$p(\%)$	$Q_{max}(m^3/s)$	$p(\%)$	$Q_{max}(m^3/s)$	$p(\%)$	$Q_{max}(m^3/s)$	$p(\%)$
1932	4701	77.0	3730	1.8	5240	9.0	12588	9.0
1962	5880	38.0	2800	15.0	5830	3.0	14100	2.5
1965	9250	0.7	2710	17.0	5520	5.0	13909	3.0
2006	8620	2.8	3720	2.0	4460	32.0	15095	1.0

Дефинисани график вишеструке коинциденције (Слика 7.11) је погодни за оцену пробабилистичке значајности историјских поплава.

На основу приказаних података (Табела 7.7) може се закључити да је највећу регистровану поплаву на доњем Дунаву из 2006. године, која има стододидишњи повратни период пика, проузроковала је коинциденција појаве тридесетогодишњег пика поплавног таласа на горњем Дунаву, педесетогодишњег на Тиси и трогодишњег на Сави.

Највећа регистрована поплава на горњем Дунаву из 1965. године, која је имала 143-годишњи пик, у комбинацији са поплавама на Сави, са 20-годишњим и Тиси са

шестогодишњим, изазвала је поплаву на доњем Дунаву, чији је пик имао 33-годишњи повратни период.

Процедура оцене пробабилистичке значајности конкретне поплаве је следећа (Prohaska et al., 2012):

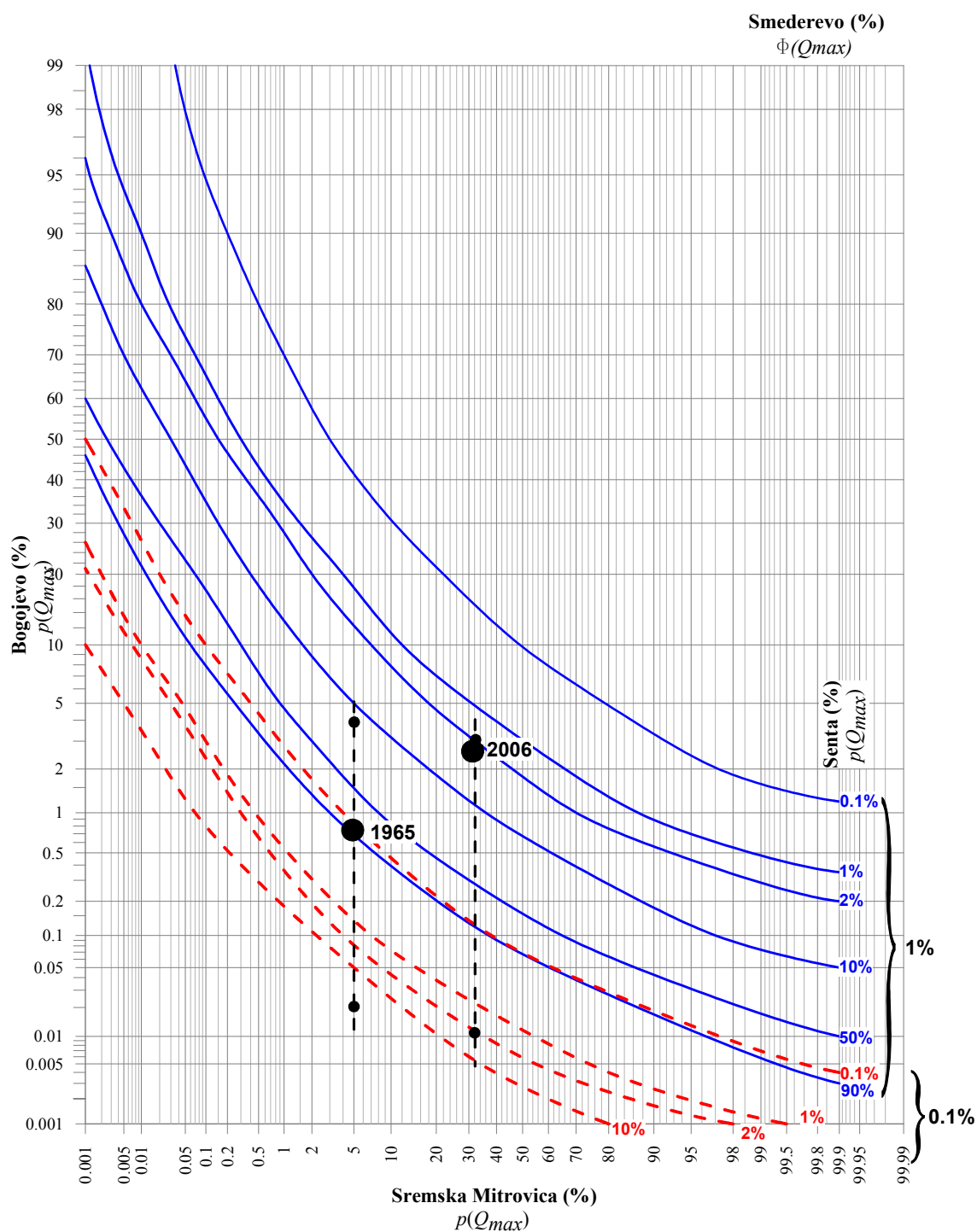
- На основу познатих пикова поплавних таласа на улазним профилима, односно њихових вероватноћа појаве, на график вишедимензионалне коинциденције наносе се конкретне тачке, које одговарају комбинацији реалних вероватноћа пикова на улазним профилима;
- За сва четири анализирана случаја (године) тачке су посебно означене на дијаграмима вишедимензионалне коинциденције вероватноћа на сликама 7.13 (године 1965. и 2006.) и 7.14 (1932. и 1962.);
- На цртежима су, поред означене емпиријске тачке, приказане и по две помоћне тачке које одговарају вероватноћама пикова поплавних таласа Тисе код Сенте за два суседна случаја разматраних вероватноћа пробабилистичке значајности поплаве -  $\Phi$ .

Као што се на слици 7.13, за случај поплаве из 2006. године, помоћне тачке које одговарају вероватноћи пика поплавног таласа Тисе код Сенте, која је у 2006. износила  $p=2\%$ , имају координате, дуж ординате дијаграма вероватноће  $p_{2\%,\Phi=1\%}=3\%$  и  $p_{2\%,\Phi=0.1\%}=0.01\%$ . Означена емпиријска тачка, дуж исте ординате одговара вероватноћи  $p=2.8\%$ , односно вероватноћи пика поплавног таласа Дунава код Богојева у 2006. години. Реална оцена пробабилистичке значајности поплаве из 2006. године добија се графичком интерполацијом вероватноћа на ординати на слици 7.13 у функцији значајности поплаве  $\Phi$ , како је то приказано у табели 7.8 односно слици 7.15.

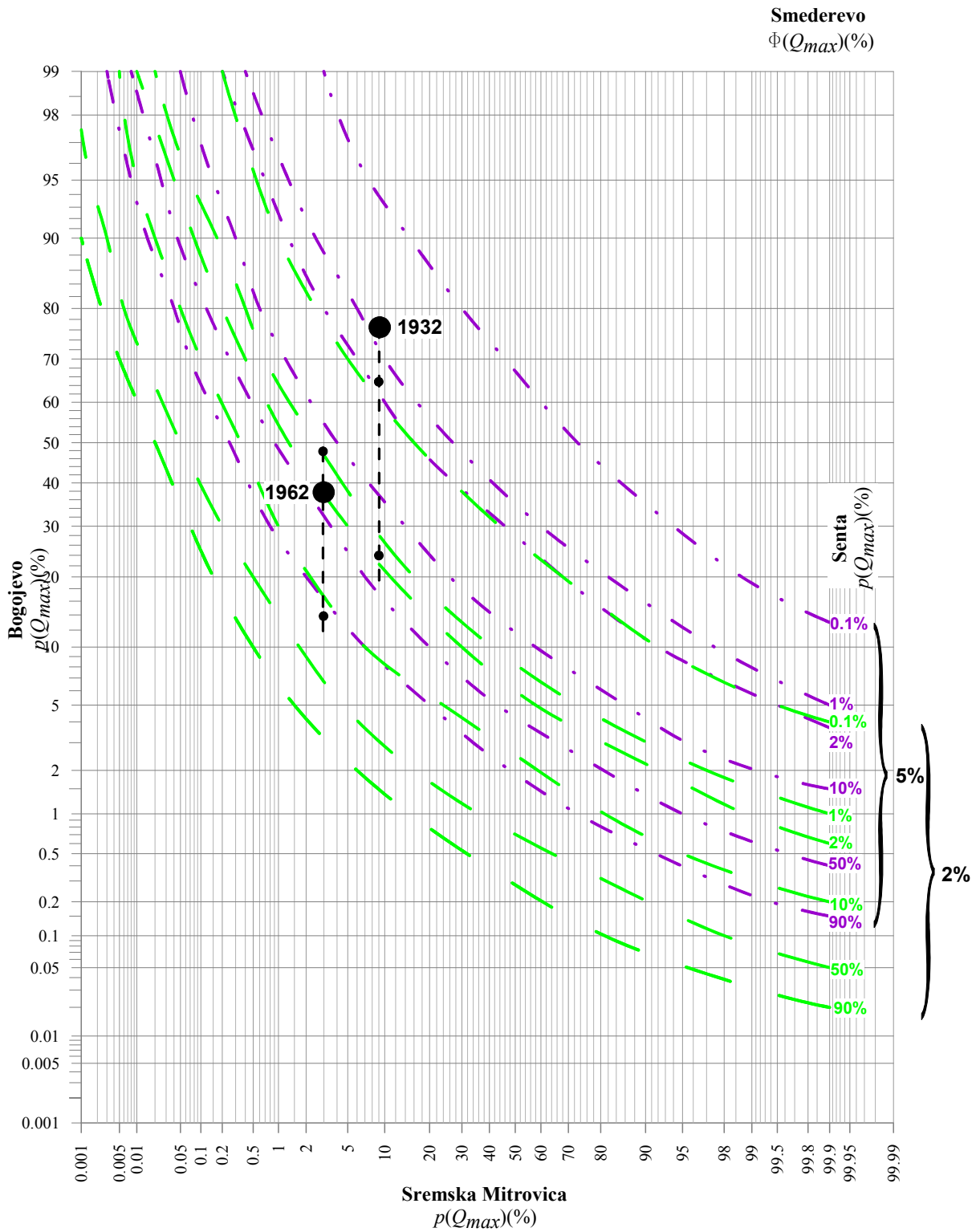
За потребе дефинисања пробабилистичке значајности осталих регистрованих поплава користи се иста процедура на основу интерполације/екстраполације формираних правих линија на дијаграму дводимензионалних вероватноћа, како је то приказано у табели 7.8 и на дијаграму на слици 7.15.

Табела 7.8 Приказ резултата графичке интерполације пробабилистичке значајности одабраних поплава у сливу Дунава у Србији

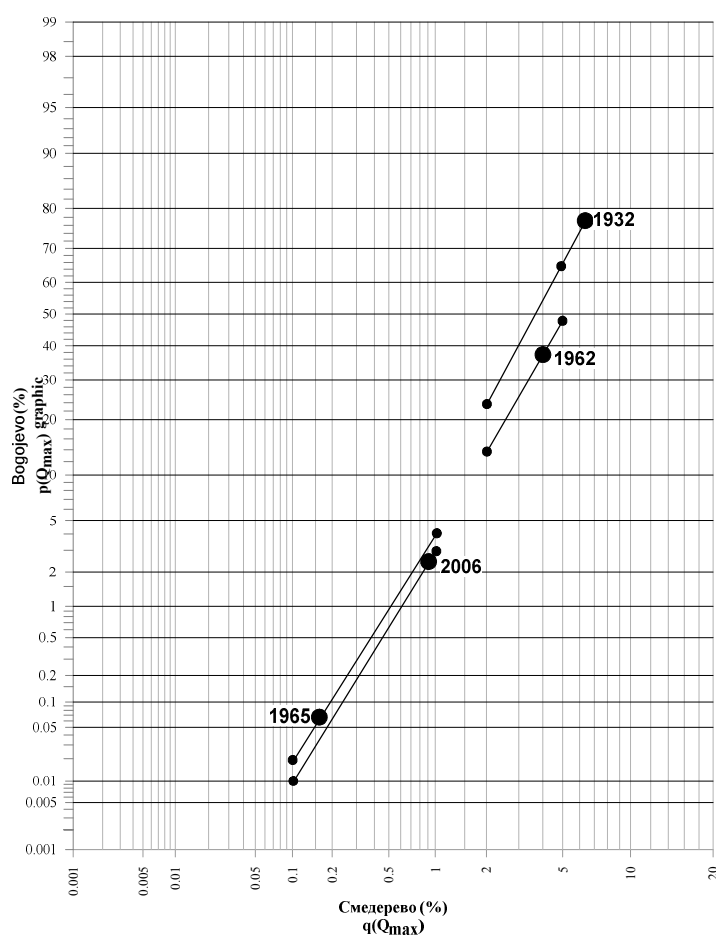
1932.				1962.				Интерполација
Сента		Смедерево	Богојево	Сента		Смедерево	Богојево	
$T$ (год)	$p$ (%)	$\Phi$ (%)	$p$ (%)	$T$ (год)	$p$ (%)	$\Phi$ (%)	$p$ (%)	
56	1,8	5	65	6,7	15,0	5	48	График 8.14
		2	24			2	14	
		<b>6</b>	<b>77</b>			<b>4</b>	<b>38</b>	
1965.				2006.				Интерполација
Сента		Смедерево	Богојево	Сента		Смедерево	Богојево	
$T$ (год)	$p$ (%)	$\Phi$ (%)	$p$ (%)	$T$ (год)	$p$ (%)	$\Phi$ (%)	$p$ (%)	
5,9	17,0	1	4	50	2,0	1	3	График 8.13
		0,1	0,02			0,1	0,01	
		<b>0,17</b>	<b>0,07</b>			<b>0,9</b>	<b>2,8</b>	



Слика 7.13 Положај емпиријских тачака из 1965. и 2006. године на графику вишедимензионалне коинциденције пикова поплавних таласа на Дунаву код Смедерева у функцији пикова поплавних таласа Дунава код Богојева, Тисе код Сенте и Саве код Сремске Митровице



Слика 7.14 Положај емпиријских тачака из 1932. и 1962. године на графику вишедимензионалне коинциденције пикова поплавних таласа на Дунаву код Смедерева у функцији пикова поплавних таласа Дунава код Богојева, Тисе код Сенте и Саве код Сремске Митровице



Слика 7.15 Интерполација пробабилистичке значајности одабраних поплава у сливу Дунава у Србији

Кумулативни преглед оцене пробабилистичке значајности наведених регистрованих поплава приказан је у табели 7.9, где су приказане вероватноће појаве пикова поплавних таласа и њихови одговарајући повратни периоди на улазним и излазном профилу хидролошких станица, и оцењена вероватноћа појаве статистичке значајности поплава у целини и њихови повратни периоди.

Табела 7.9 Резултати оцене статистичке значајности разматраних регистрованих поплава на делу слива Дунава на територији Србије

Поплава (год)	х.с. Богојево		х.с. Сента		х.с. Сремска Митровица		х.с. Смедерево		Статистичка значајност поплаве	
	$p(\%)$	$T(\text{год})$	$p(\%)$	$T(\text{год})$	$p(\%)$	$T(\text{год})$	$p(\%)$	$T(\text{год})$	$\Phi(\%)$	$T(\text{год})$
1932	77.0	1.3	1.8	55.6	9.0	11.1	9.0	11.1	6.0	16.7
1962	38.0	2.6	15.0	6.7	3.0	33.3	2.5	40	4.0	25
1965	0.7	143	17.0	5.9	5.0	20	3.0	33.3	0.17	588
2006	2.8	35.7	2.0	50	32.0	3.1	1.0	100	0.9	111.1

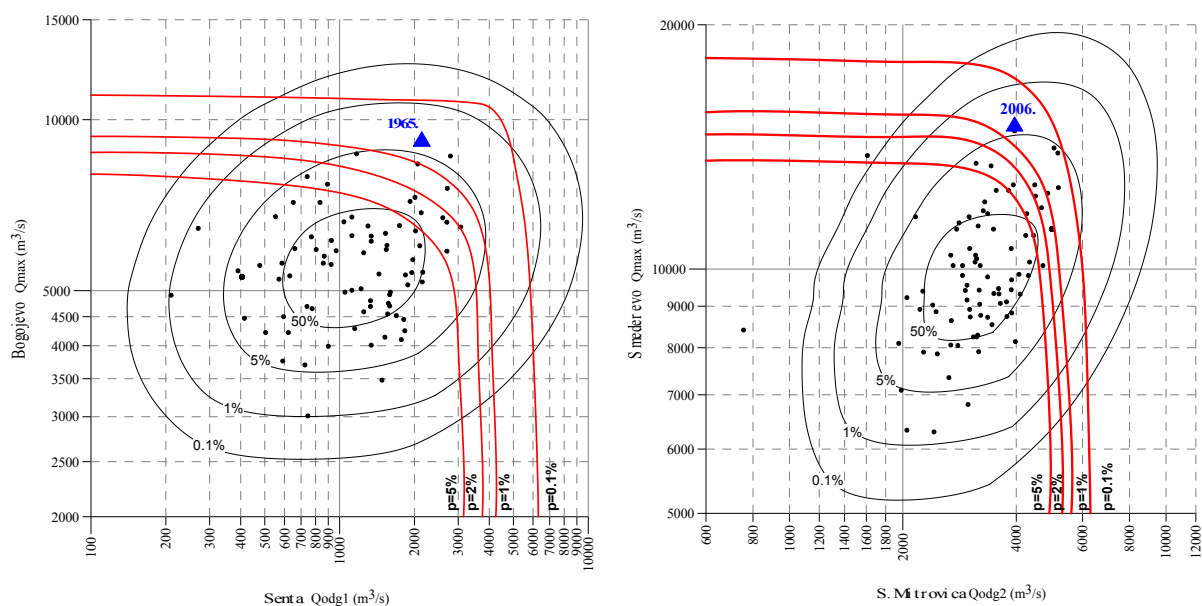
У дводимензионалном простору оцена статистичке значајности поплаве се може одредити на основу графика из прилога 6, 7 и 8. За оцену статистичке значајности поплавног таласа код Богојева 1965. године коришћени су графици модела ПРОИЛ (Слика 7.16) и КОПУЛА, где су параметри маргиналних расподела оцењивани методом максималне веродостојности (Слика 7.17) и методом Л-момената (Слика 7.18). Аналогно је урађено за поплаву код Смедерева 2006. године. Коинциденције поплавних таласа Дунава и Тисе приказани су у прилозима 6.2.1.1, 7.2.1.1 и 8.2.1.1, док је за оцену поплаве код Смедерева коришћен график коинциденције поплавних таласа Дунава и Саве на прилозима 6.3.2.2, 7.3.2.2 и 8.3.2.2.

Табела 7.10 Највећи регистровани пик поплавног таласа на Дунаву и одговарајући на Тиси и његове вероватноће појаве, 1965. године

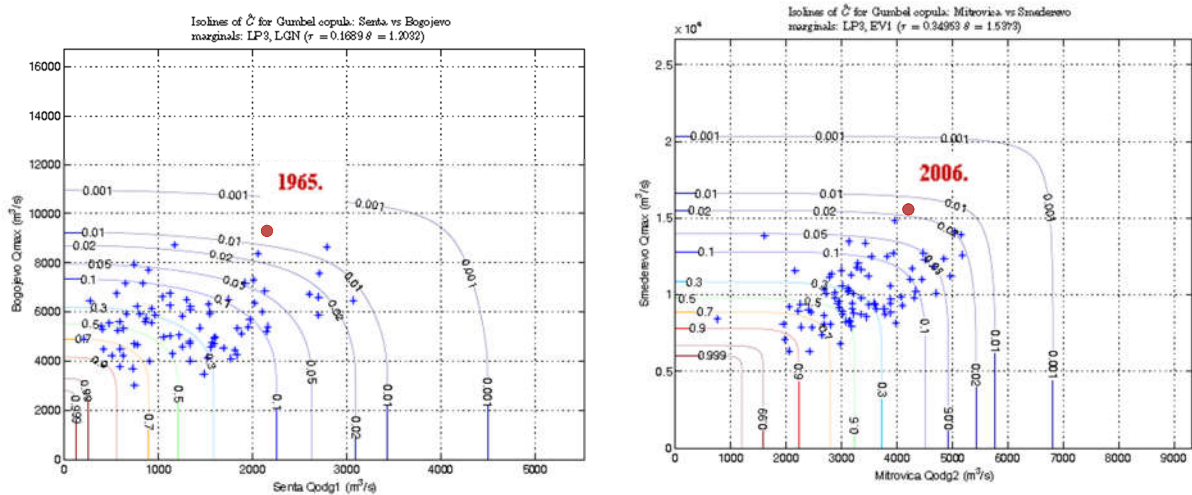
Година	х.с Богојево		х.с Сента		$\Phi(\%) \rightarrow T$ (год)	МОДЕЛ	Интерполација
	$Q_{max}$ ( $m^3/s$ )	$p$ (%)	$Q_{одг1}$ ( $m^3/s$ )	$p$ (%)			
1965	9250	0,7	2140	16,6	$\Phi=0,8 \rightarrow T=125$	ПРОИЛ	Слика 8.16
					$\Phi=0,8 \rightarrow T=125$	КОПУЛА (MLE)	Слика 8.17
					$\Phi=0,8 \rightarrow T=125$	КОПУЛА (L-МОМ)	Слика 8.18

Табела 7.11 Највећи регистровани пик поплавног таласа на Дунаву и одговарајући на Сави и његове вероватноће појаве, 2006. године

Година	х.с Смедерево		х.с Сремска Митровица		$\Phi(\%) \rightarrow T$ (год)	МОДЕЛ	Интерполација
	$Q_{max}$ ( $m^3/s$ )	$p$ (%)	$Q_{одг1}$ ( $m^3/s$ )	$p$ (%)			
2006	15095	1,0	3960	57,4	$\Phi=0,9 \rightarrow T=111$	ПРОИЛ	Слика 8.16
					$\Phi=1,8 \rightarrow T=55,56$	КОПУЛА (MLE)	Слика 8.17
					$\Phi=1,0 \rightarrow T=100$	КОПУЛА (L-МОМ)	Слика 8.18

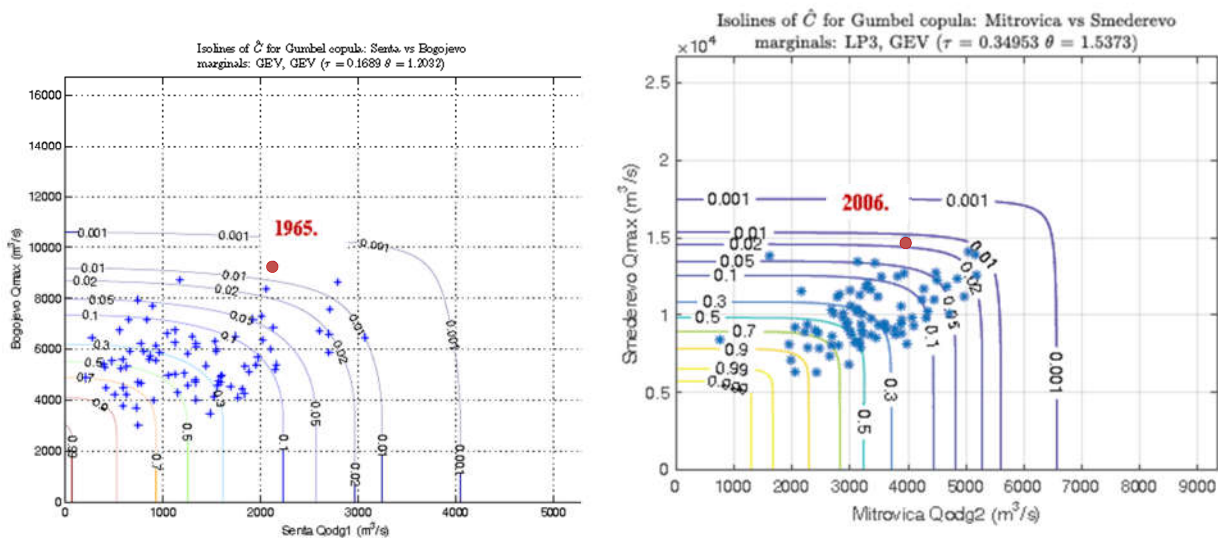


Слика 7.16 Оцена статистичке значајности највећих регистрованих поплава на Дунаву 1965. и 2006. године моделом ПРОИЛ



Слика 7.17 Оцена статистичке значајности највећих регистрованих поплава на Дунаву 1965. и 2006. године КОПУЛА методом (MLE)





Слика 7.18 Оцена статистичке значајности највећих регистрованих поплава на Дунаву 1965. и 2006. године помоћу КОПУЛА (L-МОМ)

Резултати оцене вероватноће превазилажења поплава 1965. и 2006. године на Дунаву приказани су у табелама 7.10. и 7.11, респективно. Може се видети да применом сва три начина оцене поплавног таласа у дводимензионалном простору вероватноћа на основу пика за поплаву 1965. године се добија добро слагање. За поплаву 2006. године на средњем току Дунава добија се одступање коришћењем КОПУЛА чији су параметри маргиналних расподела оцењени методом максималне веродостојности.

Када се оцене највећих регистрованих поплава на Дунаву у последњих сто година упореде са резултатима из рада (Prohaska et al., 2019) види се потпуно слагање резултата. Тамо су поплаве оцењиване у дводимензионалном простору моделом ПРОИЛ, али су поред пикова поплавних таласа посматране и запремине. Вредности повратних периода су 125 година за поплаву 1965. код Богојева и 100 година за поплаву 2006. године код Смедерева.

### 8.1 СУМИРАЊЕ РЕЗУЛТАТА ИСТРАЖИВАЊА

За конструкцију вишедимензионалних зависности варијабли на ушћу река коришћен је модел ПРОИЛ и КОПУЛА. Математички модели су развијени за деоницу реке Дунав од уласка у Србију до х. с. Смедерево и обухватају три чвора која су дефинисана на ушћима највећих притока: Драве, Тисе и Саве. Формирано је девет комбинација временских серија за сваки чвор тако да се за случај максималног годишњег протока на једној хидролошкој станици у чвору, одређују одговарајући средње дневни протоци на преостала два профила.

Први корак у моделирању представља одређивање маргиналних расподела вероватноће. У истраживању су параметри теоријских функција расподеле, којима се описују маргиналне у вишедимензионалном простору вероватноћа, оцењени методама момената, максималне веродостојности и  $L$  – момената.

У моделу ПРОИЛ маргиналне расподеле припадају Лог – Пирсон III закону расподеле вероватноће осим у случају одговарајућих протока на профилу х. с. Сремска Митровица на Сави при максималним годишњим протоцима на х. с. Смедерево на Дунаву. Овим подацима се најбоље прилагођава Пирсон III дистрибуција. Параметри расподела су оцењени методом момената, нумерички резултати су приказани у Прилогу 4 и Табелама 6.1 – 6.3.

При конструкцији КОПУЛА, случај одређивања маргиналних расподела постаје сложенији. Параметри су оцењени методом максималне веродостојности и  $L$ -момената. Емпиријским подацима се у првом случају најбоље прилагођава општа расподела екстремних вредности (GEV) у 35,7% случаја, затим Лог –нормална III, 28,6%, Лог-Пирсон III 14,3% и расподела екстремних вредности тип I (Гумбелова, EV1) у 21,4% случаја. Када се параметри расподеле оцењују методом  $L$ -момената онда се у 67,9% случаја емпиријским подацима најбоље прилагођава GEV расподела. Резултати прорачуна су приказани у Прилогу 5 и Табелама 6.4 – 6.10.

Анализом је установљено да су вредности маргиналних расподела за одређену вероватноћу појаве добијених оценом параметара методама момената и максималне

веродостојности приближно једнаке, док су вредности расподела чији су параметри оцењени методом Л – момената више за око 15%.

На основу усвојених променљивих и њихових маргиналних расподела испитује се најпре коинциденција великих вода на главној реци (реципијенту) и притоци моделом ПРОИЛ. У Табелама 6.11 – 6.13 приказана је оцена коинциденције за све усвојене комбинације променљивих, за сва три чвора на разматраном сектору Дунава.

Генерално се може закључити да у 78% случајева разматраних комбинација променљивих постоје статистички значајне коинциденције великих вода између Дунава и притока. У свим случајевима комбинација између улазног (IN) и излазног (OUT) профила коинциденције су статистички значајне, као и у случајевима комбинација максималних протока на излазним (OUT) профилима и на притокама (TR). У комбинацији максималних протока на улазним профилима (IN) и на притокама (TR), као и максималних протока на притокама (TR) и одговарајућих протока на излазним (OUT) профилима на Дунаву коинциденције су статистички значајне у 67% случајева. Код комбинација максималних протока на Дунаву на улазним (IN) и излазним (OUT) профилима са одговарајућим протоцима на притокама (TR) коинциденције су статистички значајне у 50% случајева.

Нумерички резултати модела ПРОИЛ приказани су у табелама 6.14 – 6.16 и графички у Прилогу 6.

Копула процедура изискује најпре дефинисање мера зависности променљивих, у овом случају преко Кендаловог  $\tau_k$  и Спирмановог ранг коефицијент  $\rho_s$  а затим дефинисање параметра копуле. Коришћене копуле припадају фамилији Архимедових копула и једнопараметарске су, са параметром  $\theta$ . Вредности коефицијената зависности и параметара копула приказане су у табели 6.17.

Након конструкције копула тестира се доброта прилагођавања копуле подацима (Поглавље 6.3.7) и резултати изабраних копула су приказани преко копула преживљавања у прилозима 7 и 8. У прилогу 7 су параметри маргиналних расподела оцењени методом максималне веродостојности а у прилогу 8 методом Л-момената. Нумеричке вредности великих вода за димензионисање система за заштиту од поплава приказане су у табелама 6.21 - 6.23.

У табелама су приказане карактеристичне вредности за димензионисање система за заштиту од поплава на основу копула из прилога 7 зато што се процедура описана у поглављу 4.1 није могла применити у случају када су параметри маргиналних расподела оцењени методом Л-момената, када је избор маргиналних

расподела за конструкцију копуле био из исте групе или када је једна од изабраних расподела била Лог-нормална.

Поглавље 7 показује могућности практичне примене резултата успостављених зависности.

На основу приказаних резултата може се закључити да је методологија прорачуна коинциденције великих вода на реципијенту и притоци веома погодна за дефинисање теоријских вредности протока одређених вероватноћа појаве на сектору реципијента низводно од ушћа притоке, ако су познате серије средње дневних и максималних годишњих протока на оба улазна профила на разматраном узводном сектору. На тај начин се формира адекватна подлога за хидрауличке прорачуне којима се дефинишу меродавни нивои за димензионисање система за заштиту од поплава (Слике 7.1 - 7.6). На основу приказаних резултата се може закључити да модел ПРОИЛ и изабрана копула за случај када се појављује максимални проток на улазном профилу (IN) и одговарајући проток на излазном профилу (OUT) реципијента за усвојени степен заштите 1% дају добро слагање (Слике 7.1, 7.3, 7.5) за сва три чвора на посматраном сектору и обрнуто, у случају максималног протока на излазном профилу а одговарајућег протока на улазном. У случају комбинације максимални проток на профилу притоке (TR) и одговарајући проток на излазном профилу (OUT) реципијента за усвојени степен заштите 1% и обрнуто, модели ПРОИЛ и КОПУЛА показују добро слагање у случају максималних протока (последица добро слагање теориских вредности) док се одговарајући протоци разликују за 50% и више.

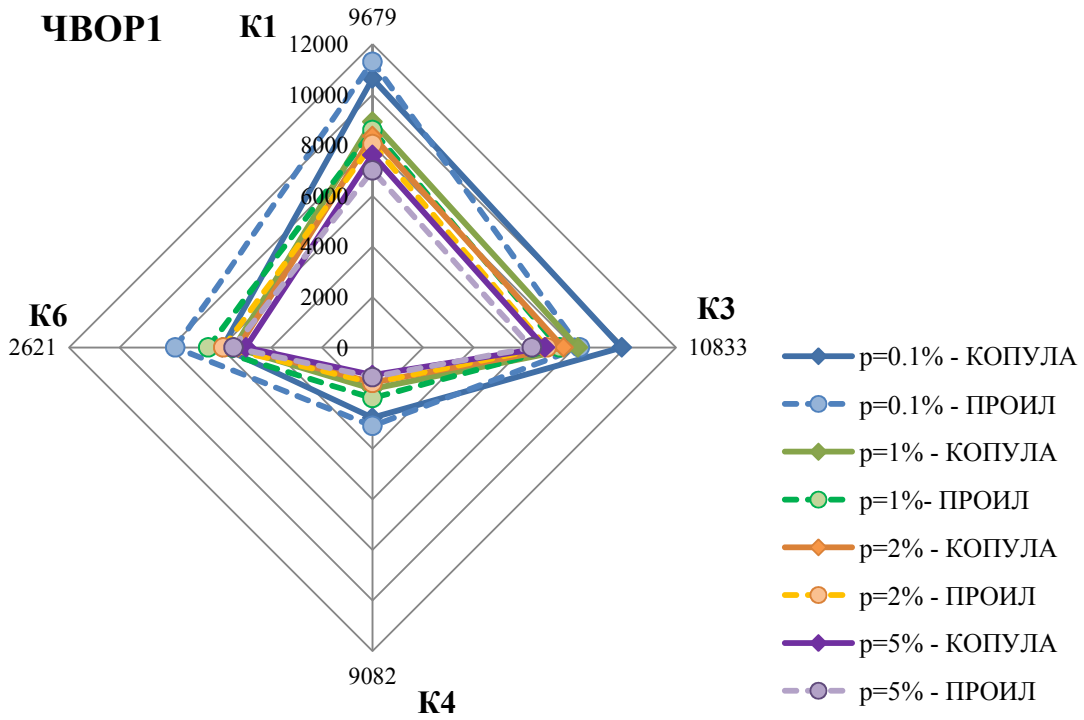
Приликом димензионисања система за заштиту од поплава на основу усвојене комбинације протока срачунавају се нивои воде помоћу хидродинамичког модела. Поред предложених комбинација теоријских вредности приказаних у поглављу 7.1, треба узети у обзир и „највероватнији догађај“ чије су координате према једначини (4.4) приказане у табели 8.1 и на сликама 8.1 – 8.3. Јасно се види да су одступања знатно мања и да се највећа одступања јављају у чвору 1 при комбинацијама протока:

$Q_{max,0,1\%}^{Михољца} : Q_{odg2,0,1\%}^{Богојево}$ ,  $Q_{max,1\%}^{Богојево} : Q_{odg2,1\%}^{Михољца}$ , у чвору 2  
 $Q_{max,0,1\%}^{Богојево} : Q_{odg1,0,1\%}^{Сланкамен}$ ,  $Q_{max,1\%}^{Сланкамен} : Q_{odg1,1\%}^{Богојево}$  и у чвору 3 при  
 комбинацијама:  $Q_{max,0,1\%}^{Смедерево} : Q_{odg2,0,1\%}^{Митровица}$ ,  $Q_{max,1\%}^{Смедерево} : Q_{odg2,1\%}^{Митровица}$  и  
 $Q_{max,2\%}^{Смедерево} : Q_{odg2,2\%}^{Митровица}$ .

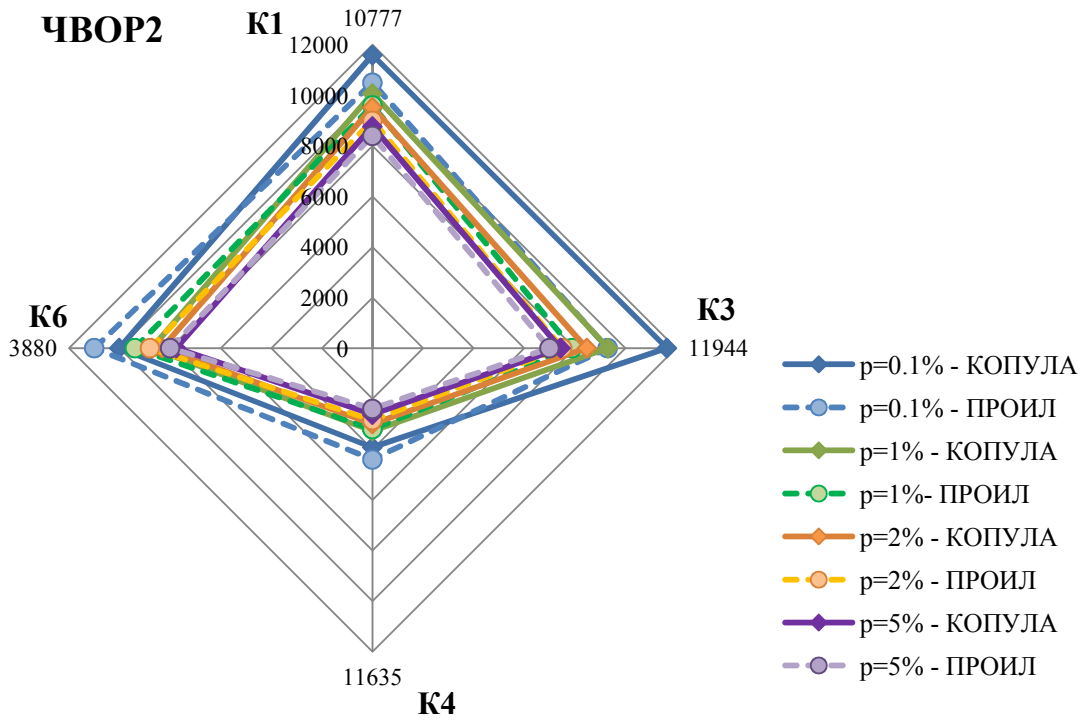
Табела 8.1 Упоредни приказ координата највероватнијих догађаја у моделима ПРОИЛ и КОПУЛА са процентуалним разликама

ЧВОР1	ПРОМЕНЉИВЕ	КОПУЛА		ПРОИЛ		$\Delta_{\max}(\%)$	$\Delta_{\text{odg}}(\%)$
p=0.001							
K1	$Q_{\text{тах}}^{\text{Бездан}} - Q_{\text{odg1}}^{\text{Богојево}}$	9679	10636	9900	11300	-2	-6
K3	$Q_{\text{тах}}^{\text{Богојево}} - Q_{\text{odg1}}^{\text{Бездан}}$	10833	9853	10100	8200	7	<b>20</b>
K4	$Q_{\text{тах}}^{\text{Богојево}} - Q_{\text{odg2}}^{\text{Михољац}}$	9082	2777	8600	3100	5	-10
K6	$Q_{\text{тах}}^{\text{Михољац}} - Q_{\text{odg2}}^{\text{Богојево}}$	2621	5941	2800	7800	-6	<b>-24</b>
p=0.01							
K1	$Q_{\text{тах}}^{\text{Бездан}} - Q_{\text{odg1}}^{\text{Богојево}}$	8159	8932	7800	8600	4	3
K3	$Q_{\text{тах}}^{\text{Богојево}} - Q_{\text{odg1}}^{\text{Бездан}}$	9105	8127	8800	7400	3	10
K4	$Q_{\text{тах}}^{\text{Богојево}} - Q_{\text{odg2}}^{\text{Михољац}}$	7558	1640	7800	2000	3	<b>-22</b>
K6	$Q_{\text{тах}}^{\text{Михољац}} - Q_{\text{odg2}}^{\text{Богојево}}$	2153	5466	2100	6500	3	<b>-19</b>
p=0.02							
K1	$Q_{\text{тах}}^{\text{Бездан}} - Q_{\text{odg1}}^{\text{Богојево}}$	7652	8364	7150	8050	7	4
K3	$Q_{\text{тах}}^{\text{Богојево}} - Q_{\text{odg1}}^{\text{Бездан}}$	8582	7554	8200	6900	5	9
K4	$Q_{\text{тах}}^{\text{Богојево}} - Q_{\text{odg2}}^{\text{Михољац}}$	7154	1383	7000	1400	2	-1
K6	$Q_{\text{тах}}^{\text{Михољац}} - Q_{\text{odg2}}^{\text{Богојево}}$	1997	5311	1900	5900	5	-11
p=0.05							
K1	$Q_{\text{тах}}^{\text{Бездан}} - Q_{\text{odg1}}^{\text{Богојево}}$	6897	7618	6500	7000	6	8
K3	$Q_{\text{тах}}^{\text{Богојево}} - Q_{\text{odg1}}^{\text{Бездан}}$	7810	6815	7600	6300	3	8
K4	$Q_{\text{тах}}^{\text{Богојево}} - Q_{\text{odg2}}^{\text{Михољац}}$	6644	1093	6600	1170	1	-7
K6	$Q_{\text{тах}}^{\text{Михољац}} - Q_{\text{odg2}}^{\text{Богојево}}$	1802	5008	1800	5500	0	-10
<b>ЧВОР2</b>							
p=0.001							
K1	$Q_{\text{тах}}^{\text{Богојево}} - Q_{\text{odg1}}^{\text{Сланкамен}}$	10777	11591	8400	10500	<b>28</b>	10
K3	$Q_{\text{тах}}^{\text{Сланкамен}} - Q_{\text{odg1}}^{\text{Богојево}}$	11944	11649	11800	9300	1	<b>25</b>
K4	$Q_{\text{тах}}^{\text{Сланкамен}} - Q_{\text{odg2}}^{\text{Сента}}$	11635	3923	11100	4400	5	-11
K6	$Q_{\text{тах}}^{\text{Сента}} - Q_{\text{odg2}}^{\text{Сланкамен}}$	3880	10014	4300	11000	-10	-9
p=0.01							
K1	$Q_{\text{тах}}^{\text{Богојево}} - Q_{\text{odg1}}^{\text{Сланкамен}}$	9012	10072	8000	9600	13	5
K3	$Q_{\text{тах}}^{\text{Сланкамен}} - Q_{\text{odg1}}^{\text{Богојево}}$	10194	9316	10000	7900	2	<b>18</b>
K4	$Q_{\text{тах}}^{\text{Сланкамен}} - Q_{\text{odg2}}^{\text{Сента}}$	9854	3280	9600	3200	3	3

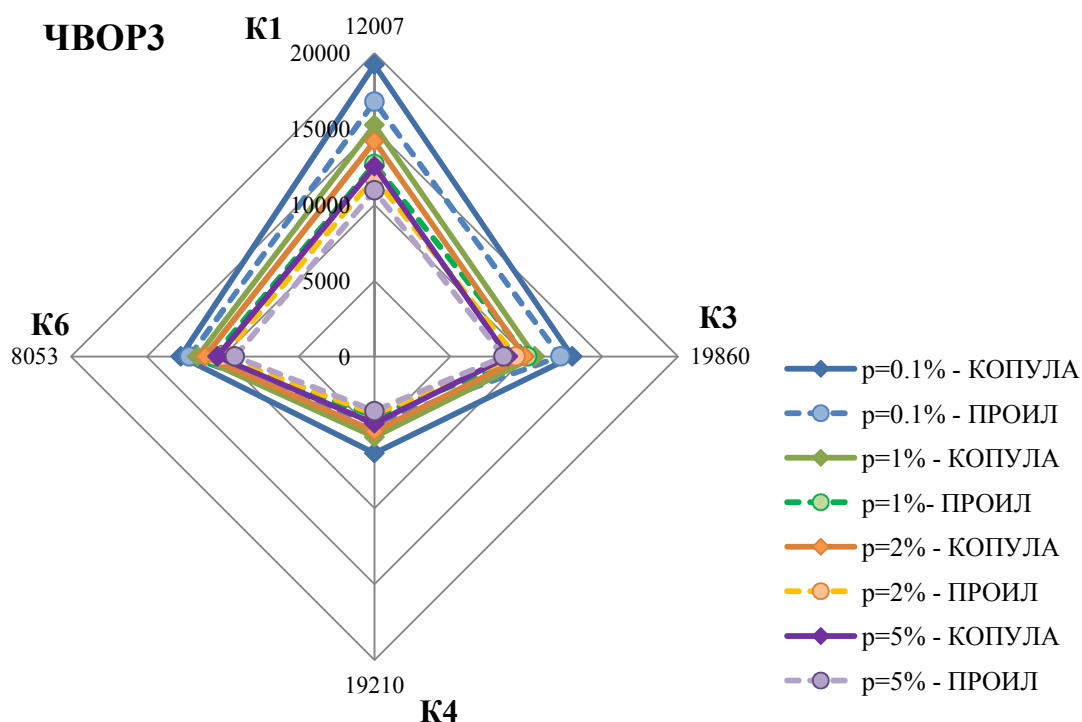
K6	$Q_{\max}^{\text{Сента}} - Q_{\text{odg}2}^{\text{Сланкамен}}$	3359	8728	3500	9400	-4	-7
p=0.02							
K1	$Q_{\max}^{\text{Богојево}} - Q_{\text{odg}1}^{\text{Сланкамен}}$	8478	9530	7600	9000	12	6
K3	$Q_{\max}^{\text{Сланкамен}} - Q_{\text{odg}1}^{\text{Богојево}}$	9741	8474	9500	7500	3	13
K4	$Q_{\max}^{\text{Сланкамен}} - Q_{\text{odg}2}^{\text{Сента}}$	9357	2998	9000	2850	4	5
K6	$Q_{\max}^{\text{Сента}} - Q_{\text{odg}2}^{\text{Сланкамен}}$	3171	8323	3000	8800	6	-5
p=0.05							
K1	$Q_{\max}^{\text{Богојево}} - Q_{\text{odg}1}^{\text{Сланкамен}}$	7712	8770	6500	8400	<b>-16</b>	4
K3	$Q_{\max}^{\text{Сланкамен}} - Q_{\text{odg}1}^{\text{Богојево}}$	9018	7438	8900	7000	1	6
K4	$Q_{\max}^{\text{Сланкамен}} - Q_{\text{odg}2}^{\text{Сента}}$	8585	2628	8500	2400	1	10
K6	$Q_{\max}^{\text{Сента}} - Q_{\text{odg}2}^{\text{Сланкамен}}$	2885	7768	2700	8000	7	-3
<b>ЧВОРЗ</b>							
p=0.001							
K1	$Q_{\max}^{\text{Сланкамен}} - Q_{\text{odg}1}^{\text{Смедерево}}$	12007	19223	12000	16800	0	14
K3	$Q_{\max}^{\text{Смедерево}} - Q_{\text{odg}1}^{\text{Сланкамен}}$	19860	13038	17200	12250	<b>15</b>	6
K4	$Q_{\max}^{\text{Смедерево}} - Q_{\text{odg}2}^{\text{Митровица}}$	19210	6373	16500	4400	<b>16</b>	<b>45</b>
K6	$Q_{\max}^{\text{Митровица}} - Q_{\text{odg}2}^{\text{Смедерево}}$	8053	12768	7200	12200	12	5
p=0.01							
K1	$Q_{\max}^{\text{Сланкамен}} - Q_{\text{odg}1}^{\text{Смедерево}}$	10308	15262	10100	12700	2	<b>20</b>
K3	$Q_{\max}^{\text{Смедерево}} - Q_{\text{odg}1}^{\text{Сланкамен}}$	16155	10575	14100	10050	<b>15</b>	5
K4	$Q_{\max}^{\text{Смедерево}} - Q_{\text{odg}2}^{\text{Митровица}}$	15414	5304	14200	3950	9	<b>34</b>
K6	$Q_{\max}^{\text{Митровица}} - Q_{\text{odg}2}^{\text{Смедерево}}$	6465	11672	5600	10600	13	9
p=0.02							
K1	$Q_{\max}^{\text{Сланкамен}} - Q_{\text{odg}1}^{\text{Смедерево}}$	9693	14179	9500	11800	2	<b>20</b>
K3	$Q_{\max}^{\text{Смедерево}} - Q_{\text{odg}1}^{\text{Сланкамен}}$	14937	9893	13200	9300	13	6
K4	$Q_{\max}^{\text{Смедерево}} - Q_{\text{odg}2}^{\text{Митровица}}$	14350	4922	13600	3800	6	<b>30</b>
K6	$Q_{\max}^{\text{Митровица}} - Q_{\text{odg}2}^{\text{Смедерево}}$	6006	11170	5700	10050	5	11
p=0.05							
K1	$Q_{\max}^{\text{Сланкамен}} - Q_{\text{odg}1}^{\text{Смедерево}}$	8948	12540	8800	10950	2	15
K3	$Q_{\max}^{\text{Смедерево}} - Q_{\text{odg}1}^{\text{Сланкамен}}$	13487	8801	11800	8500	14	4
K4	$Q_{\max}^{\text{Смедерево}} - Q_{\text{odg}2}^{\text{Митровица}}$	12914	4404	12800	3600	1	<b>22</b>
K6	$Q_{\max}^{\text{Митровица}} - Q_{\text{odg}2}^{\text{Смедерево}}$	5413	10354	5200	9200	4	13



Слика 8.1 Највероватнији догађаји за ЧВОР 1 при дефинисаним комбинацијама меродавним за димензионисање система за заштиту од поплава



Слика 8.2 Највероватнији догађаји за ЧВОР 2 при дефинисаним комбинацијама меродавним за димензионисање система за заштиту од поплава



Слика 8.3 Највероватнији догађаји за ЧВОР 3 при дефинисаним комбинацијама меродавним за димензионисање система за заштиту од поплава

Са гледишта повратних периода пикова поплавних таласа, а на основу приказаних резултата у поглављу 7.3 може се закључити да разматране четири историјске поплаве на Дунаву у Србији (1932, 1962, 1965 и 2006) имају веома различите статистичке значајности уколико се посматрају у вишедимензионалном простору и њихова генеза посматра на сектору од Богојева до Смедерева са притокама Тисом и Савом. Најређу вероватноћу појаве, односно највећу статистичку значајност која одговара повратном периоду од 588 година, има поплава из 1965. године, која је формирана од пикова одређених повратних периода: код Богојева од 143 године, код Сенте од 50 година, код Сремске Митровице од 3,1 године и код Смедерева од 33,3 године. Друга по значајности је поплава из 2006 године, са повратним периодом од 111 година, што најприближније одговара и повратном периоду пика поплавног таласа Дунава код Смедерева. Остале две историјске поплаве, по статистичкој значајности, имају знатно мање повратне периоде: поплава из 1962. године одговара повратном периоду од 25 година, а поплава из 1932. године повратном периоду од 17 година.

Упоредивањем резултата са биваријантном анализом у моделима ПРОИЛ и КОПУЛА може се закључити да поплава 1965 има код Богојева повратни период 125



година (Табела 7.10.), док је поплава 2006 показала веће расипање тачака (Табела 7.11.).

## 8.2 ОСВРТ НА ПРЕДНОСТИ И НЕДОСТАТКЕ КОРИШЋЕНИХ МОДЕЛА ЗА ВИШЕДИМЕНЗИОНАЛНУ АНАЛИЗУ РАЧУНСКИХ ПРОТОКА

Методолошки гледано, коришћени модели у истраживању се разликују.

Модел ПРОИЛ изискује низ трансформација и претпоставки и као такав има ограничење. При избору маргиналних вероватноћа, променљиве се покоравају истом Лог-нормалном закону расподеле, што није реалан случај и потребно их је трансформисати. КОПУЛА модел је флексибилнији када се ради о избору маргиналних вероватноћа и омогућава њихов избор из ширококог спектра расподела.

За конструкцију линија превазилажења у моделу ПРОИЛ користи се графо - аналитички поступак који је предложен у Abramowitz and Stegun (1972) зато што су конструкције ових линија аналитички захтевне. Конструкција тзв. „копуле преживљавања“ која одговара линији превазилажења у моделу ПРОИЛ има могућност директног и врло лаког прорачуна (Поглавље 3.3.6.).

Када је избор комбинације рачунских протока за израчунавање меродавних нивоа у зонама ушћа две реке у питању, примена процедуре из поглавља 4.1. има ограничење код модела КОПУЛА (Илић et al., 2021). Наиме, када су параметри маргиналних расподела оцењени методом Л-момената, када је иста маргинална расподела вероватноће за обе променљиве или када је једна од изабраних расподела била Лог-нормална тада није било могуће применити предложен поступак прорачуна.

На основу резултата прорачуна за сектор Дунава од уласка у нашу земљу до Смедерева, у складу са критеријумима из поглавља 7.1, може се констатовати да уколико је у питању деоница узводно од ушћа притоке модели ПРОИЛ и КОПУЛЕ дају одлично слагање резултата и ствар је пројектанта за коју ће се методу употребити.

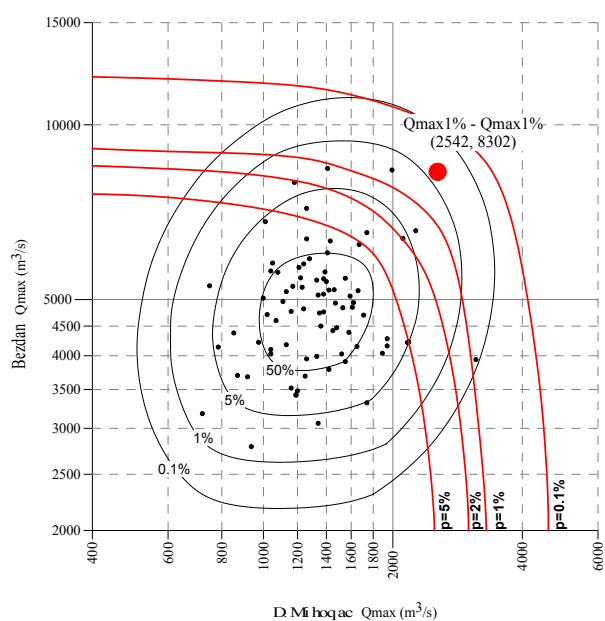
Међутим када је у питању деоница притоке резултати добијени применом копула су у просеку за 50% ниже у односу на резултате ПРОИЛ модела (у случају реке Тисе чак 80%), тако да је у сваком случају на ови деоницама користити ПРОИЛ модел за утврђивање рачунске комбинације протока на основу којих би се рачунали меродавни нивои за пројектовање система за заштиту од поплава.

### 8.3 ПРАКТИЧНЕ КОРИСТИ ОД ВИШЕДИМЕНЗИОНАЛНОГ ПРИСТУПА ПРОРАЧУНУ ВЕЛИКИХ ВОДА У ЗОНИ УШЋА РЕЦИПИЈЕНТА И ПРИТОКА

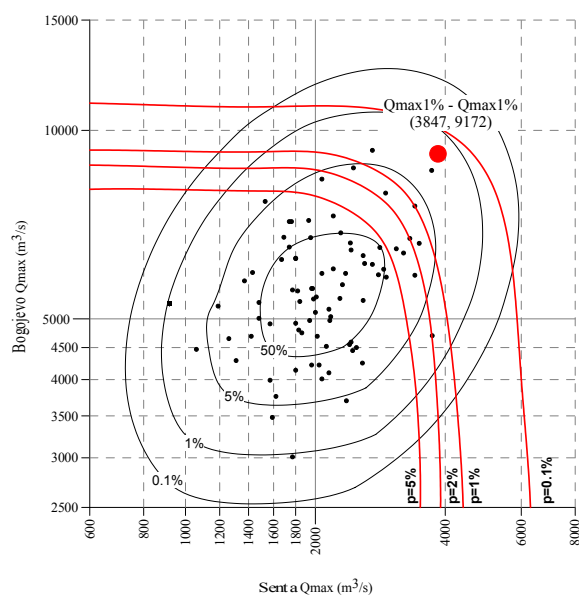
Беневити који се могу постигнути коришћењем вишедимензионалног приступа (модела ПРОИЛ и КОПУЛА) су вишеструки:

#### 1. Економски ефекат при регулисању речних деоница са притокама

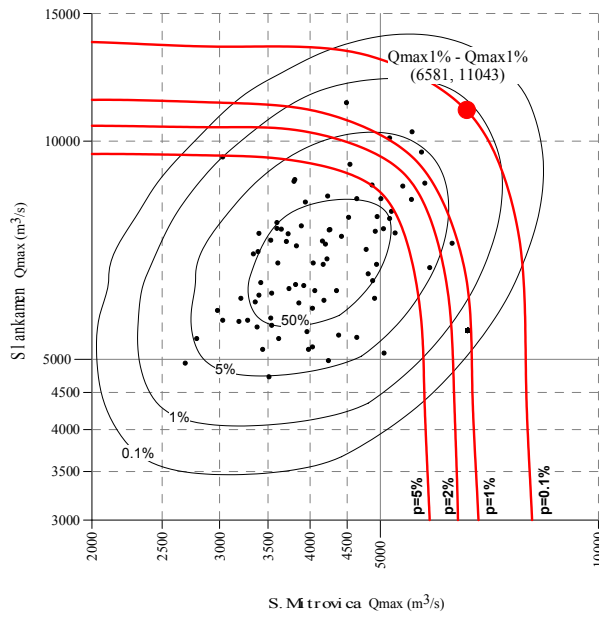
Досадашња пракса препоручује да се за усвојени ризик од поплаве рачунска велика вода низводно од ушћа две реке добија простим сумирањем појединачних теоријских вредности малих вероватноће појаве једнаке усвојеном ризику (Bender et al., 2016). На сликама 8.4 – 8.9 приказане су вредности комбинација максималних протока вероватноће појаве 1% на узводном профилу и профилу притоке. Види се да је вероватноћа превазилажења ове комбинације варијабли много мања од 1%.



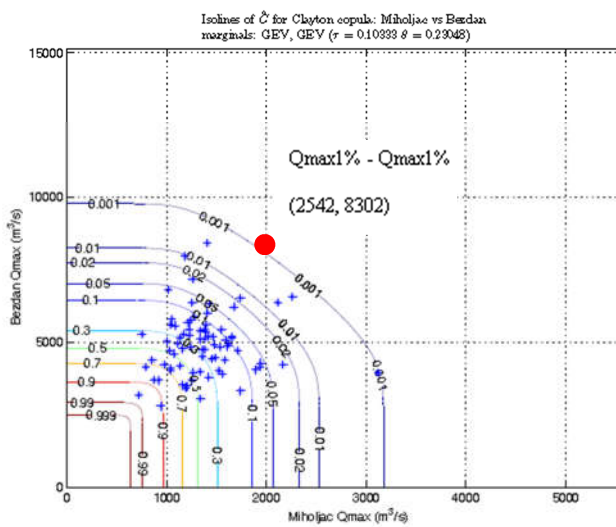
Слика 8.4 Вероватноћа превазилажења догађаја  $Q_{INmax1\%} - Q_{TRmax1\%}$  преко модела ПРОИЛ за ЧВОР1



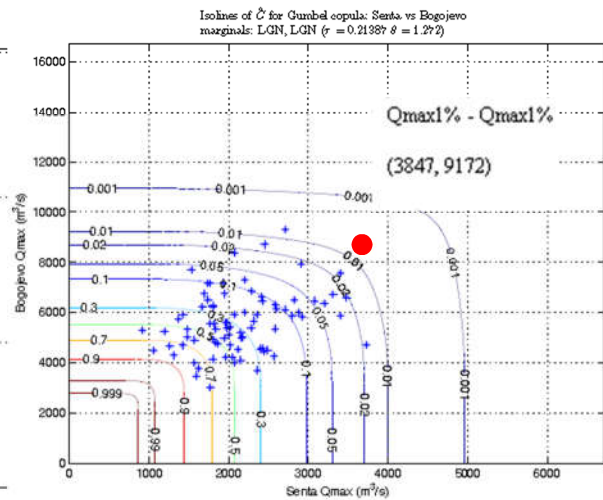
Слика 8.5 Вероватноћа превазилажења догађаја  $Q_{INmax1\%} - Q_{TRmax1\%}$  преко модела ПРОИЛ за ЧВОР2



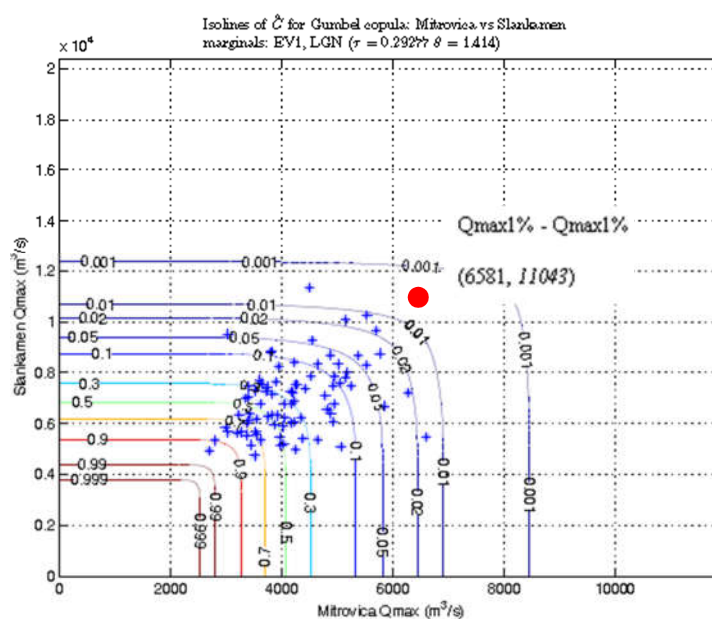
Слика 8.6 Вероватноћа превазилажења догађаја  $Q_{INmax}1\% - Q_{TRmax}1\%$  преко модела ПРОИЛ за ЧВОР3



Слика 8.7 Вероватноћа превазилажења догађаја  $Q_{INmax}1\% - Q_{TRmax}1\%$  преко КОПУЛЕ за ЧВОР1



Слика 8.8 Вероватноћа превазилажења догађаја  $Q_{INmax}1\% - Q_{TRmax}1\%$  преко КОПУЛЕ за ЧВОР2



Слика 8.9 Вероватноћа превазилажења догађаја  $Q_{INmax1\%} - Q_{TRmax1\%}$  преко КОПУЛЕ за ЧВОРЗ

Коришћењем модела ПРОИЛ и КОПУЛА јасно се види да оваква комбинација вредности даје покривеност много већег ризика, што је са аспекта економичности конструкције неоправдано.

2. Могућност оцене статистичке значајности сваке историјске поплаве на сложеним речним системима

Успостављене димензионалне и вишедимензионалне зависности омогућавају оцену статистичке значајности сваке историјске поплаве и на тај начин омогућавају планирање нових система за заштиту од поплава или реконструкцију постојећих.

3. Помоћ оперативној прогностичкој служби у прогнози

Модел ПРОИЛ и копуле као допринос овог истраживања омогућавају помоћ при прогнози максималног протока Дунава после ушћа сваке притоке. Уколико су познате прогнозе улазних хидрограма (РХМЗ-а Србије) на основу успостављених вишедимензионалних зависности (коинциденција) могу да срачунају теориску вредност на низводном профилу и на тај начин одреди хидролошки сценарио који омогућава да се успостави одговарајућа стратегија одбране од поплава.

#### 8.4 СУМИРАЊЕ ПОСТИГНУТИХ ЦИЉЕВА И НАУЧНИ ДОПРИНОС ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ

Основни циљ истраживања је сагледавање и описивање поплаве у вишедимензионалном простору вероватноћа и на основу тога дефинисање рачунских великих вода за одређивање меродавних нивоа за димензионисање система за заштиту од поплава. Предложене методе и поступци омогућују просторно сагледавање поплавног таласа. На овај начин се може створити прегледна слика о његовом настајању што у многоструко олакшава решавање комплексних инжењерских задатака.

Модел ПРОИЛ подразумева да су варијабле независне односно да се покорављају нормалном закону расподеле вероватноћа. Како то није случај, врши се логаритамска трансформација тако да претпоставка буде оправдана. Појединачне варијабле у свакој комбинацији се покорављају истом закону расподеле вероватноће, што је главно ограничење модела. Како се ради о протоцима (истородне варијабле) ово ограничење не умањује значај успостављених коинциденција.

Копуле представљају помак у пробабилистичким анализама у вишедимензионалном простору. Оне не захтевају да се појединачне варијабле покорављају истом закону расподеле вероватноће што знатно проширује могућност њихове примене. Дефинисањем зависне структуре одређује се заједничка вероватноћа појаве варијабли које утичу на формирање поплавног таласа на изабраном профилу хидролошке станице.

Применом предложених метода прорачуна у оквиру формираних модела омогућује се остварење следећих циљева и научни допринос докторске дисертације:

- Дефинисање могућности истовремене појаве максималних годишњих протока на главној реци и притоци, затим статистичка оцена коинциденције максималних годишњих протока и њима одговарајућих протока на профилима главне реке (IN и OUT) и профилу притоке (TR).
- Дефинисање комбинације максималних и одговарајућих протока у зонама непосредног ушћа за различите вероватноће појаве, односно степена заштите система за одбрану од поплава, на основу које ће се генерисати анвелопа меродавних нивоа за његово димензионисање.

- Дефинисање статистичке значајности коинциденција одговарајућих комбинација протока на главној реци (реципијенту) и притоци.  
Уколико на одабраној деоници главног тока постоји више значајнијих притока, онда се предлаже сумирање њиховог утицаја на поплавни талас на излазном профилу разматране деонице. То је постигнуто формирањем вишдимензионалне зависности коинциденције вероватноћа, коришћењем успостављених зависности у дводимензионалном простору између улазног профила на главној реци и успостављене коинциденције на притокама.
- Оцена (статистичке значајности) поплава у вишедимензионалном простору, што се предлаже на основу успостављених дводимензионалних и вишедимензионалних зависности.

## 8.5 ПРАВЦИ ДАЉЕГ ИСТРАЖИВАЊА

Сагледавање екстремних ситуација у вишедимензионалном простору је свакако актуелна тема која оставља доста простора за унапређење и то:

- Моделе ПРОИЛ и КОПУЛЕ применити за сливове мање површине, какви су сливови река у Србији низводно од Саве и Дунава;
- Укључити у анализу формирања поплава на речним ушћима све елементе хидрограма отицаја (проток, запремину и базу хидрограма (трајање)), дефинисати зависне структуре: проток – запремина, проток – трајање, запремина – трајање;
- Анализирати зависне структуре хидрограма отицаја (његових елемената) и метеоролошких параметара који утичу на формирање поплава;
- Проширити анализе и на друге екстремне ситуације (суше);
- Методолошко проширење се односи на проширење фамилија копула које се укључују у анализу: Архимедове (Joe, Ali – Mikhail – Naq), екстремне вредности (Galambos, Husler – Reiss, Tawn) и елиптичне (Normal, Gaussian, Student – t) и димензионалност модела (тродимензионални, четвородимензионални):
  - вишедимензионална копула за регионалне пробабилистичке анализе и анализе ризика;
  - просторна копула за димензионисање вероватноће појаве поплава на неизученим профилима;

- конструкција вишедимензионалних копула помоћу 2-D копула познатија као „вајн копула“ за анализу односа параметара хидрограма отицаја и дефинисање меродавне комбинације за димензионисање.

## ЛИТЕРАТУРА

- Abramowitz, M., Stegun, A., I. 1972. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables*, Dover Publications, INC., New York.
- Anderson, R. L. 1941. *Serial correlation in the analysis of time series*. Retrospective Theses and Dissertations. 12880. <https://lib.dr.iastate.edu/rtd/12880>
- Ariff, N. M., Jemain, A. A., Ibrahim K., Zin, W. Z. W. 2012. IDF relationships using bivariate copula for stormevents in Peninsular Malaysia. *Journal of Hydrology*, 470: 158-171. doi:10.1016/j.jhydrol.2012.08.045.
- Ashkar, F., Aucoin, F. 2011. A broader look at bivariate distributions applicable in Hydrology, *Journal of Hydrology*, 405(3-4): 451-461.
- Balistrocchi, M., Bacchi, B. 2011. Modelling the statistical dependence of rainfall event variablesthrough copula functions. *Hydrology and Earth System Sciences*, 15: 1959-1977. doi:10.5194/hess-15-1959-2011.
- Bardossy A. 2006. Copula-based geostatistical models for groundwater quality parameters. *WaterResources Research*, 42. doi: 10.1029/2005wr004754.
- Bender, J., Wahl, T., Muller, A., Jensen, J. 2016. A multivariate design framework for river confluences, *Hydrological Sciences Journal*, 61:3, 471-482.
- Bezák, N., Mikoš, M., Šraj, M. 2014. Trivariate Frequency Analyses of Peak Discharge, Hydrograph Volume and Suspended Sediment Concentration Data Using Copulas. *Water Resour Manage* 28:2195–2212. doi 10.1007/s11269-014-0606-2.
- BULLETIN 17B, 1982. *Guidelines for Determining Flood Flow Frequency*. Interagency Advisory Committee on Water Data. U. S. Department of the Interior Geological Survey, Office of Water Data Coordination, Reston, Virginia
- Chebana, F., Ouarda, T. B. M. J. 2011. Multivariate quantiles in hydrological frequency analzsis. *Envirometrics*, Vol. 22, No. 1, pp 63-78
- Chen, L., Singh, V. P., Guo, S. L., Hao, Z. C., Li, T. Y. 2012. Flood Coincidence Risk Analysis Using Multivariate Copula Functions. *Journal of Hydrologic Engineering*, 17: 742-755. doi:10.1061/(asce)he.1943-5584.0000504.
- Chow, V. T., Maidment, D. R., Mays, L. W. 1988. *Applied Hydrology*. McGraw – Hill Series in Water Resources and Enviromental Engineering, Singapore



- De Michele, C., Salvadori, G. 2003. A Generalized intensity-duration model of storm rainfall exploiting 2-Copulas. *J. Geophys. Res.*, 108 (D2), 4067, doi:10.1029/2002JD002534.
- De Michele, C., Salvadori, G., Canossi, M., Petaccia, A., Rosso, R. 2005. Bivariate statistical approach to check adequacy of dam spillway. *Journal of Hydrologic Engineering*, 10: 50-57. doi:10.1061/(asce)1084-0699(2005)10:1(50).
- De Michele, C., Salvadori, G., Passoni, G., Vezzoli, R. 2007. A multivariate model of sea storms using copulas. *Coast. Eng.* 54 (10), 734-751. doi:10.1016/j.coastaleng.2007.05.007.
- Denuit, M., Dhaene, J., Goovaerts, M., Kaas, R. 2005. *Actuarial Theory for Dependent Risks - Measures, Orders and Models*, Chichester: John Wiley & Sons, Ltd.
- Dupuis, D. J. 2007. Using Copulas in Hydrology: Benefits, Cautions and Issues. *Journal of Hydrologic Engineering*, Vol. 12, No. 4, pp. 381 – 393. doi:10.1061/(ASCE)10840699(2007)12:4(381)
- Favre, AC., El Adlouni, S., Perreault, L., Thiémonge, N., Bobee, B. 2004. Multivariate hydrological frequency analysis using copulas, *Water Resources Research*, Vol. 40, W01101. doi: 10.1029/2003WR002456.
- Frees, E. W. and Valdez, E. A. 1997. *Understanding Relationships Using Copulas*. 32<sup>nd</sup> Actuarial Research Conference, 6-8 August, University of Calgary, Calgary, Alberta.
- Gräler, B., van den Berg, M. J., Vandenberghe, S., Petroselli, A., Grimaldi, S., De Baets, B., Verhoest, N. E. C. 2013. Multivariate return periods in hydrology: a critical and practical review focusing on synthetic design hydrograph estimation, *Hydrol. Earth Syst. Sci.*, 17, 1281-1296, <https://doi.org/10.5194/hess-17-1281-2013>.
- Gargouri-Ellouze, E., Chebchoub, A. 2008. Modelling the dependence structure of rainfall depth and duration by Gumbel's copula. *Hydrological Sciences Journal-Journal Des Sciences Hydrologiques*, 53: 802-817. doi: 10.1623/hysj.53.4.802.
- Genest, C., Favre, AC. 2007. Everything You Always Wanted to Know about Copula Modeling but Were Afraid to Ask. *Journal of Hydrologic Engineering*, Vol. 12, No. 4, 347-368. doi: 10.1061/(ASCE) 1084-0699(2007)12:4(347)
- Genest, C., McKay, R. J. 1986. The Joy of Copulas: Bivariate Distributions With Uniform Marginals. *The American Statistician*, 40, 280-283.
- Ghosh, S. 2010. Modelling bivariate rainfall distribution and generating bivariate correlated rainfall data in neighbouring meteorological subdivisions using copula. *Hydrological Processes*, 24: 35583567. doi: 10.1002/hyp.7785.

- Greenwood, J. A., Landwehr, J. M., Matalas, N. C., Wallis, J. R. 1979. Probability weighted moments: Definition and to parameters of several distributions expressible in inverse form. *Water Resour. Res.*, 15 (5) (1979), pp. 1049-1054
- Grimaldi, S., Serinaldi, F. 2006a. Asymmetric copula in multivariate flood frequency analysis. *Advances in Water Resources*, 29: 1155-1167. doi:10.1016/j.advwatres.2005.09.005.
- Grimaldi, S., Serinaldi, F. 2006b. Design hyetograph analysis with 3-copula function. *Hydrol. Sci. J.* 51(2), 223–238. doi:10.1623/hysj.51.2.223.
- Grubbs, F. E. 1969. Procedures for detecting outlying observations in samples. *Technometrics*, 11(1), 1-21.
- Grubbs, F. E., Beck, G. 1972. Extension of sample sizes and percentage points for significance tests of outlying observations. *Technometrics*, 14(4), 847-854.
- Haims, Y. Y., Lambert, J. H., Li, D. 1992. Risk of Extreme Events in a Multiobjective Framework. *Water Resources Bulletin*, Vol. 28, No. 1, pp. 201-209.
- Hosking, J. R. M. 1990. L-moments: Analysis and estimation of distributions using linear combinations of order statistics. *Royal Statistical Society (Series B)*, 52, 105–124.
- Hosking, J. R. M., Wallis, J. R., Wood, E. F. 1985. Estimation of the generalized extreme-value distribution by the method of probability-weighted moments. *Technometrics*, 27 (1985), pp. 251-261
- Hosking, J. R. M., Wallis, J. R. 1993. Some statistics useful in regional frequency analysis. *Water Resources Research*, 29, pp. 271–281. <http://dx.doi.org/10.1029/92WR01980>
- Huang, K., Chen, L., Zhou, J., Zhang, J., Singh, V. P. 2018. Flood hydrograph coincidence analysis for mainstream and its tributaries, *Journal of Hydrology*, 565, 341-353. <https://doi.org/10.1016/j.hydrolo.2018.08.007>
- ICPDR, 2015. *Maps of the Danube River Basin District Management Plan*. [www.icpdr.org](http://www.icpdr.org).
- Ilić, A., Prohaska, S., Pokorni, B. 2017. Different approaches to design flood assessment at the Danube and the Drava confluence. *Electronic book with full papers from XXVII Conference of Danubian Countries on Hydrological Forecasting and Hydrological Bases of Water Management*, p. 201-214. Golden Sands, Bulgaria. ISBN978-954-0537-2-2.
- Ilić, A., Prohaska, S., Radivojević, D., Trajković, S. 2021. Multidimensional Approaches to Calculation of Design Floods at Confluences—PROIL Model and Copulas. *Environ Model Assess*. <https://doi.org/10.1007/s10666-021-09748-8>

- Joe, H. 1997. *Multivariate Models and Dependence Concepts*. Chapman and Hall, New York, New York.
- Kao, S. C., Govindaraju, R. S. 2007. Probabilistic structure of storm surface runoff considering the dependence between average intensity and storm duration of rainfall events. *Water Resour. Res.* 43, W06410. <http://dx.doi.org/10.1029/2006WR005564>.
- Kao, S. C., Govindaraju, R. S. 2010. A copula-based joint deficit index for droughts. *Journal of Hydrology*, 380: 121-134. doi: 10.1016/j.jhydrol.2009.10.029.
- Karmakar S, Simonovic SP. 2009. Bivariate flood frequency analysis. Part 2: a copula-based approach with mixed marginal distributions. *Journal of Flood Risk Management*, 2: 32-44. doi:10.1111/j.1753-318X.2009.01020.x.
- Katz, R. W., Parlange, M. B., Naveau, P. 2002. Statistics of extremes in hydrology, *Adv. Water Resour.*, 25, pp. 1287-1304
- Kite, G. W. 1974. *Flood Frequency and Risk*. Inland Waters Directorate. Water Resources Branch. Applied Hydrology Division. Network Planning and Forecasting Section. Ottawa, Canada
- Kotz, S., Balakrishnan, N., Johnson, N.L. 2000. *Continuous multivariate distributions*. New York: John Wiley.
- Krstanovic, P. F., Singh, V. P. 1987. A multivariate stochastic flood analysis using entropy. In: V.P. Singh, ed. *Hydrologic frequency modeling*. Dordrecht, the Netherlands: Reidel, 515-539.
- Landwehr, J. M., Matalas, N. C., Wallis, J. R. 1979. Probability weighted moments compared with some traditional techniques in estimating Gumbel parameters and quantiles. *Water Resour. Res.* 15 (5), 1055-1064.
- Lee, T., Modarres, R., Ouarda, T. 2013. Data-based analysis of bivariate copula tail dependence for drought duration and severity. *Hydrological Processes*, 27: 1454-1463. doi: 10.1002/hyp.9233.
- Linsley, K., R., Kohler, A., M., Paulhus, L., H., J. 1975. *Hydrology for Engineers*, McGraw - Hill Book Company, Inc., USA.
- Liu, C. L., Zhang, Q., Singh, V. P., Cui, Y. 2011. Copula-based evaluations of drought variations in Guangdong, South China. *Natural Hazards*, 59: 1533-1546. doi:10.1007/s11069-011-9850-4.
- Ma, M. W., Song S. B., Ren L. L, Jiang S. H., Song J. L. 2013. Multivariate drought characteristics using trivariate Gaussian and Student t copulas. *Hydrological Processes*, 27: 1175-1190. doi: 10.1002/hyp.8432.

- Mann, H. B., Whitney, D. R. 1947. On a Test of Whether one of Two Random Variables is Stochastically Larger than the Other. *Annals of Mathematical Statistics*. Vol. 18, No. 1, pp. 50–60. doi:10.1214/aoms/1177730491.
- Markiewicz, I., Strupczewski, W. G., Kochanek, K. 2010. On accuracy of upper quantiles estimation. *Hydrol. Earth Syst. Sci.*, 14, pp. 2167–2175.  
www.hydrol-earth-syst-sci.net/14/2167/2010/ doi:10.5194/hess-14-2167-2010
- Marshall, A. W., Olkin, I. 1988. Families of Multivariate Distributions, *Journal of American Statistical Association*, Vol. 83, No. 403, pp. 834-841.
- Millington, N., Das, S., Simonovic, S. P. 2011. The Comparison of GEV, Log-Pearson Type 3 and Gumbel Distributions in the Upper Thames River Watershed under Global Climate Models. *Water Resources Research Report 40*. <https://ir.lib.uwo.ca/wrrr/40>
- Morris, C. D., Calise, S. J. 1987. *Bivariate analysis of concurrent flooding*. In: V.P. Singh, ed. Hydrologic frequency modeling: proceedings of the international symposium on flood frequency and risk analysis, 14–17 May 1986 Baton Rouge, Louisiana. Dordrecht: Reidel, 615–632.
- Naghattini, M. 2017. Parameter and Quantile Estimation. In: *Fundamentals of Statistical Hydrology*, Springer International Publishing, p. 203-251.
- Nelsen, R. B. 2006. An introduction to copulas. New York: Springer.
- Pekárová, P., Miklánek, P., Pekár, J. 2019. History and downstream propagation of the Danube floods, In: (eds.). Pekárová, P., Miklánek, P., *Flood regime of rivers in the Danube River basin*, Follow-up volume IX of the Regional Co-operation of the Danube Countries in IHP UNESCO, IH SAS, Bratislava. Book Chapter 2, p. 43–64. <https://doi.org/10.31577/2019.9788089139460>
- Pilon P. J., Condie R., Harvey K. D. 1985. *Consolidated frequency analysis package (CFA), User Manual for Version 1*. DEC PRO Series, Water Resources Branch, Inland Waters Directorate, Environment Canada, Ottawa.
- Plavšić, J., Ivetić, M. 2017. Statistička analiza velikih voda Dunava i Save na području Beograda. *Vodoprivreda*, 49: 285- 287.
- Popović, B., Blagojević, B. 1999. *Matematička statistika sa primenama u hidrotehnici*, Izdavačka jedinica Univerziteta u Nišu
- Prohaska, S. 2003. *Hidrologija I*, Institut "Jaroslav Černi", Rudarsko-geološki fakultet i RHMZ Srbije, Beograd.
- Prohaska, S. 2006. *Hidrologija II*, Institut "Jaroslav Černi", Rudarsko-geološki fakultet i RHMZ Srbije, Beograd.

- Prohaska, S., Ilic, A. 2010a. Coincidence of Flood Flow of the Danube River and Its Tributaries, In: Mitja Brilly (Ed.): *Hydrological Processes of the Danube River Basin - Perspectives from the Danubian Countries*, Publisher: Springer, ISBN 978-90-481-3422-9, Book Chapter 6, p. 175-226. doi: 10.1007/978-90-481-3423-6\_6.
- Prohaska S., Ilić A. 2010b. Nova metoda za defrnisanjevišestruke koincidencije poplavnih talasana složenim rednim sistemima. *Vodoprivreda*, 42: 125- 135.
- Prohaska S., Ilić A. 2019. Coincidence of the flood flow of the Danube River and its main tributaries. In: Pekárová, P., Miklánek, P. (Eds.) *Flood regime of rivers in the Danube River basin. Follow-up volume IX of the Regional Co-operation of the Danube Countries in IHP UNESCO*. IH SAS, Bratislava, p. 151–174. <https://doi.org/10.31577/2019.9788089139460>
- Prohaska, S., Ilic, A., Majkic, B. 2008. Multiple-coincidence offlood waves on the mainriver and its tributaries. *IOP conf. Series: Earth and Environmental Science*. IOP Publishing, Bristol, UK.
- Prohaska, S., Ilić, A., Majkić, B., Orlić, A., Stanić, Ž. 2009. Postupak za definisanje višedimenzionalnih verovatnoća pojave poplava na složenim rečnim sistemima, U Monografiji “*Upravljanje vodnim resursima Srbije ‘09*”, Institute “Jaroslav Černi”, Belgrade, ISBN 978-86-82565-24-6, pp. 215-232.
- Prohaska, S., Ilić, A., Pokorni, B. 2017. Estimation of Coinciding Flood Discharges in the Extended Area of the Sava/Danube Confluence Applying Different Approaches – Proil Model and Copula Method, *Water Research and Management*, Vol. 7, No. 4, 17-27, ISSN 2217 – 5547.
- Prohaska, S., Ilic, A., Tripkovic, V. 2012. Methodology for assessing multiple-coincidence of flood wave peaks in complex river systems. *Water Research and Management* 2 (1), 45–60.
- Prohaska, S., Isailović, D., Srna, P., Marčetić, I. 1999. The Danube and its Basin – A Hydrological Monograph Follow-up volume IV, *Coincidence of Flood Flow of the Danube River and its Tributaries*. Regional Co-operation of the Danube Countries in the Frame of the International Hydrological Programme of UNESCO, pp 1-187, Water Research Institute Bratislava, Slovakia.
- Prohaska, S., Marjanović, N., Čabrić, M. 1978. *Dvoparametarsko definsanje velikih voda*. Vode Vojvodine, Novi Sad.
- Prohaska, S., Pekarova, P., Ilić, A., Jelovac, M. 2019. Povjesne poplave duž rijeke Dunav od 1012. Godine do danas, *Hrvatske vode*, Vol. 27, No. 108, pp. 119-128.
- Prohaska, S., Ristić, V. 1996. *Hidrologija kroz teoriju i praksu*. Rudarsko-geološki fakultet, Beograd.

- Радић, З., Михајловић, В. 2010. Маргиналне расподеле дневних протицаја на репрезентативним профилима у Србији. *Водопривреда*, 0350-0519, 42(2010), 243-245, стр. 17-38.
- Rao, A. R., Hamed, K. H. 2000. *Flood Frequency Analysis*. CRC Press, New York.
- Raynal, J. A., Salas, J. D. 1987. *A probabilistic model for flooding downstream of the junction of two rivers*. In: V. P. Singh, ed. *Hydrologic frequency modeling: proceedings of the international symposium on flood frequency and risk analysis*, 14–17 May 1986 Baton Rouge, Louisiana. Dordrecht: Reidel, 595–601.
- Reddy, M. J., Ganguli, P. 2012a. Application of copulas for derivation of drought severity-duration-frequency curves. *Hydrological Processes*, 26: 1672-1685. doi:10.1002/hyp.8287.
- Renard, B., Lang, M. 2007. Use of a Gaussian copula for multivariate extreme value analysis: Some case studies in hydrology. *Advances in Water Resources*, 30: 897-912. doi:10.1016/j.advwatres.2006.08.001.
- Sankarasubramanian, A., Srinivasan, K. 1999. Investigation and comparison of sampling properties of L-moments and conventional moments, *Journal of Hydrology*, 218, pp. 13-34.
- Sackl, B., Bergmann, H. 1987. A bivariate flood model and its application. In: V. P. Singh, ed. *Hydrologic frequency modeling*. Dordrecht, the Netherlands: Dordrecht, 571–582.
- Salvadori, G., De Michele, C. 2007. On the Use of Copulas in Hydrology: Theory and Practice. *Journal of Hydrologic Engineering*, Vol. 12, No. 4, 369-380. doi:10.1061/(ASCE) 1084-0699(2007)12:4(369).
- Salvadori, G., DeMichele, C., Kottegoda, N. T., Rosso, R. 2007. *Extremes in nature: an approach using copulas, water science and technology library series*. Vol.56, 1st ed, Dordrecht, The Netherlands: Springer.
- Salvadori, G., Durante, F., De Michele, C., Bernardi, M., Petella, L. 2016. A multivariate copula-based framework for dealing with hazard scenarios and failure probabilities. *Water Resour. Res.*, 52, 3701-3721, doi: 10.1002/ 2015WR017225.
- Serinaldi, F. 2015. Dismissing return periods! *Stoch. Environ. Res. Risk Assess.* 29:1179-1189, doi: 10.1007/s00477-014-0916-1.
- Shiau, J.-T. 2006. Fitting drought duration and severity with two-dimensional copulas. *Water Resour. Manage.* 20, 795–815. doi: 10.1007/s11269-005-9008-9.
- Shiau, J.-T., Wang, H.-Y., Tsai, C.-T. 2006. Bivariate Frequency analysis of Floods using Copulas, *Journal of the American Water Resources Association (JAWRA)*, 42(6), pp. 1549-1564

- Singh, V. P., Strupczewski, W. G. 2002. On the status of flood frequency analysis. *Hydrological Processes*, 16, pp. 3737 – 3740. doi:10.1002/hyp.5083.
- Singh, V. P., Zhang, L. 2007. IDF curves using the Frank Archimedean copula. *Journal of Hydrologic Engineering*, 12: 651-662. doi: 10.1061/(asce)1084-0699(2007)12:6(651).
- Schmidt, T. 2006. Coping with Copulas. Forthcoming in Risk Books “*Copulas- From Theory to Applications in Finance*“, Department of mathematics, University of Leipzig.
- Stephens, M. A. 1974. EDF Statistics for Goodness of Fit and Some Comparisons. *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 69, No. 437, pp. 730-737.
- Stedinger, J. R., Vogel, R. M., Foufoula-Georgiou 1993. Frequency Analysis of Extreme Events. *Handbook of Applied Hydrology*. Mc-Graw Hill Book Co., New York, Chapter 18.
- Vandenberghe, S., Verhoest, N. E. C., De Baets B. 2010. Fitting bivariate copulas to the dependence structure between storm characteristics: A detailed analysis based on 105 year 10 min rainfall. *Water Resources Research*, 46. doi: 10.1029/2009wr007857.
- Vogel, R. M., Wilson, I. (1996). Probability distribution of annual maximum, mean, and minimum streamflows in the United States. *Journal of Hydrologic Engineering*, 1, 69–76
- Wang, C. 2007. *A joint probability approach for the confluence flood frequency analysis*. Retrospective Theses and Dissertations. 14865. <https://lib.dr.iastate.edu/rtd/14865>.
- Wong, G., Lambert, M. F., Leonard, M., Metcalfe, A. V. 2010. Drought Analysis Using Trivariate Copulas Conditional on Climatic States. *Journal of Hydrologic Engineering*, 15: 129-141. doi: 10.1061/(asce)he.1943-5584.0000169.
- Wong, G., van Lanen, H. A. J., Torfs, P. 2013. Probabilistic analysis of hydrological drought characteristics using meteorological drought. *Hydrological Sciences Journal-Journal Des Sciences Hydrologiques*, 58: 253-270. doi: 10.1080/02626667.2012.753147.
- Yevjevich, V. 1972. *Probability and Statistics in Hydrology*. Water Resources Publications, Fort Collins, Colo. U.S.A.
- Yue, S. 2000. The bivariate lognormal distribution to model a multivariate flood episode. *Hydrol Process*, 14, (14), 2575–2588.
- Yue, S. 2001. A bivariate gamma distribution for use in multivariate flood frequency analysis. *Hydrol Process*, 15, (6), 1033–1045.
- Yue, S., Ouarda, T. B. M. J., Bobe’e, B., Legendre, P., Bruneau, P. 1999. The Gumbel mixed model for flood frequency analysis. *Journal of Hydrology*, 226, (1–2), 88–100.

- Yue, S., Rasmussen P. 2002. Bivariate frequency analysis: discussion of some useful concepts in hydrological application. *Hydrological Processes*, 16, 2881-2898, doi:10.1002/hyp.1185.
- Zhang, L., Singh, V. P. 2006. Bivariate flood frequency analysis using the copula method. *Journal of Hydrologic Engineering*, 11: 150-164. doi:10.1061/(asce)1084-0699(2006)11:2(150).
- Zhang, L., Singh, V. P. 2007a. Bivariate rainfall frequency distributions using Archimedean copulas. *Journal of Hydrology*, 332: 93-109. doi: 10.1016/j.jhydrol.2006.06.033.
- Zhang, L., Singh, V. P. 2007b. Trivariate flood frequency analysis using the Gumbel-Hougaard copula. *Journal of Hydrologic Engineering*, 12: 431-439. doi: 10.1061/(asce)1084-0699(2007)12:4(431).



## БИОГРАФИЈА

Александра Илић, дипл. инж. грађ. рођена је 1979. године у Нишу где је завршила основну школу, гимназију и Грађевинско – архитектонски факултет.

Дипломирала је 2005. године. Докторске студије је уписала на Грађевинском факултету Универзитета у Београду 2007. године да би их касније, од 2015. године наставила на Грађевинско-архитектонском факултету у Нишу.

Године 2006. ангажована је као сарадник за извођење одређених облика наставе на Грађевинско - архитектонском факултету у Нишу из предмета Водопривреда и регионално планирање, Уређење водотока, Хидротехника. У периоду 2007-20011. ради као истраживач у Институту за водопривреду „Јарослав Черни“ у Београду, у Заводу за уређење водних токова где се бавила водопривредним анализама, хидрологијом и заштитом од поплава. Била је одговорни обрађивач „Новелиране водопривредне основе – хидрометеоролошке подлоге“ 2009. године, док 2010. и 2011. године учествује у активностима везаним за припрему „Научно истраживачких подлога за имплементацију Водопривредног информационог система Републике Србије“.

Од 2011. ради на Грађевинско-архитектонском факултету у Нишу као асистент на катедри за Водопривреду-коришћење, уређење и заштиту вода.

Посебано интересовање у сфери вишедимензионалне анализе хидролошких параметара на ушћима река и притока почиње 2008. године кроз научни пројекат Министарства просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије „Проучавање екстремних хидролошких ситуација – поплава и суша у Србији“. Своје истраживање наставља кроз научне пројекте: „Оцена утицаја климатских промена на водне ресурсе Србије“ и „Истраживање климатских промена и њиховог утицаја на животну средину. Праћење утицаја, адаптација и ублажавање“ који су у току.

Научни допринос у области хидролошких анализа на речним деоницама са више значајних притока су коауторска поглавља у монографијама „*Hydrological Processes of the Danube River Basin - Perspectives from the Danubian Countries*“ из 2010. године и „*Flood regime of rivers in the Danube River basin. Follow-up volume IX of the Regional Co-operation of the Danube Countries, IHP UNESCO*“ из 2019. године.

Била је сарадник и коаутор при изради националних монографија „*Интезитети јаких киша у Србији*“, 2014. године и „*Велике воде Србије на профилима хидролошких станица*“, 2020. године. Аутор и коаутор је око 90 радова у страним и домаћим часописима и на домаћим и међународним конференцијама и три техничка решења.

Живи у Нишу са сином Војином и супругом Зораном.

## **ПРИЛОЗИ**

## **ПРИЛОГ 1**

Временске серије протока

## Временска серија протока– ЧВОР 1

Табела 1.1.1

Датум	Бездан $Q_{\max}$ (m <sup>3</sup> /s)	Доњи Михољац $Q_{odgl}$ (m <sup>3</sup> /s)	Богојево $Q_{odgl}$ (m <sup>3</sup> /s)
02/04/1931	4175	609	4775
13/01/1932	4137	660	4461
24/07/1933	3990	540	4400
09/09/1934	3060	771	3751
11/06/1935	4925	1371	6180
17/06/1936	5069	859	5776
20/03/1937	5179	630	6168
12/09/1938	4854	554	5570
11/12/1939	5428	462	6028
03/04/1940	6311	538	7566
18/03/1941	5598	543	6671
30/03/1942	5269	633	6227
24/06/1943	4602	636	5105
18/07/1946	4420	747	4754
28/03/1947	5884	1106	7030
27/07/1948	5440	945	6405
25/08/1949	5025	454	5105
17/02/1950	2790	795	2940
19/05/1951	4160	1273	4420
09/04/1952	4820	600	5330
18/07/1953	3430	557	3650
24/07/1954	6520	823	7630
20/07/1955	5400	603	5740
13/03/1956	6220	353	4500
04/08/1957	5250	798	5830
08/07/1958	4960	670	5050
23/08/1959	5150	830	5400
02/08/1960	4500	636	4770
22/05/1961	4100	519	4310
01/06/1962	4940	1064	5830
26/03/1963	4700	764	5320
26/11/1964	4280	574	4440
24/06/1965	8360	1449	9090
29/08/1966	6370	1710	7920
17/06/1967	5200	771	5730
22/01/1968	4220	333	4100
22/03/1969	3520	888	4030
20/08/1970	5580	888	5980
17/06/1971	3180	435	3300
21/07/1972	3940	2254	5160
13/05/1973	4390	781	4910
17/12/1974	5450	394	5870
12/07/1975	6570	1378	8290
09/06/1976	4030	602	4400
19/02/1977	5160	602	6000
15/07/1978	3420	760	4490
27/06/1979	4760	881	5810

Датум	Бездан Q <sub>max</sub> (m <sup>3</sup> /s)	Доњи Михољац Q <sub>odg1</sub> (m <sup>3</sup> /s)	Богојево Q <sub>odg1</sub> (m <sup>3</sup> /s)
29/07/1980	4030	585	4770
21/03/1981	5680	585	6310
13/01/1982	4770	382	4970
05/02/1983	3700	492	4110
30/09/1984	3480	740	3960
15/08/1985	5190	585	4960
10/06/1986	3790	1140	4640
17/04/1987	4740	684	5260
04/04/1988	5778	493	6760
01/01/1989	3316	237	3710
16/07/1990	3951	1015	4390
11/08/1991	6020	776	6430
28/12/1993	4042	1051	4630
24/04/1994	5570	659	6410
14/06/1995	5090	841	5330
20/05/1996	4470	1022	4945
27/07/1997	6812	709	6409
17/11/1998	4843	828	5550
31/05/1999	5760	845	6290
07/04/2000	5370	600	5640
31/03/2001	4710	693	4890
22/08/2002	7180	610	6900
09/01/2003	4380	415	4550
10/06/2004	3686	600	4050
31/08/2005	5112	1079	5910
10/04/2006	7960	589	8620
16/09/2007	5280	488	5320
28/07/2008	3680	576	3930
05/07/2009	6360	1095	6970
18/06/2012	3910	518	4250
14/06/2013	8410	872	8620
22/05/2014	4220	918	4820

**Табела 1.1.2**

Датум	Богојево Q <sub>max</sub> (m <sup>3</sup> /s)	Бездан Q <sub>odg1</sub> (m <sup>3</sup> /s)	Доњи Михољац Q <sub>odg2</sub> (m <sup>3</sup> /s)
03/04/1931	4797	4099	580
16/01/1932	4701	3972	432
26/07/1933	4523	3832	549
10/09/1934	3760	3045	724
12/06/1935	6250	4925	1277
20/06/1936	5925	4877	929
03/10/1937	6441	4877	1291
13/09/1938	5594	4808	538
13/12/1939	6238	5305	408
03/04/1940	7566	6311	538
19/03/1941	6720	5538	503
01/04/1942	6369	5212	682
26/06/1943	5241	4430	618
20/07/1946	4905	4156	737
31/03/1947	7180	5843	1003
02/08/1948	6610	5168	1157
27/08/1949	5310	4520	423
18/02/1950	3010	2640	795
18/06/1951	4970	3910	1656

Датум	Богојево Qmax (m <sup>3</sup> /s)	Бездан Qodg1 (m <sup>3</sup> /s)	Доњи Михаљац Qodg2 (m <sup>3</sup> /s)
10/04/1952	5390	4750	549
19/07/1953	3700	3350	563
25/07/1954	7700	6520	741
23/07/1955	6010	5090	714
20/03/1956	5910	5170	296
05/08/1957	5910	5200	711
11/07/1958	5350	4680	583
25/08/1959	5750	4880	708
04/08/1960	4920	4230	594
17/06/1961	4650	3940	788
10/06/1962	5880	4850	999
27/03/1963	5380	4680	642
28/11/1964	4500	4050	551
15/06/1965	9290	7810	1597
29/08/1966	7940	6370	1710
24/05/1967	5830	5020	955
23/01/1968	4220	3990	363
23/03/1969	4100	3500	801
05/05/1970	6600	5380	956
29/03/1971	3480	3040	489
23/07/1972	5590	3890	2186
15/05/1973	5010	4240	663
18/12/1974	6110	5360	336
13/07/1975	8360	6350	1374
10/06/1976	4450	3740	539
19/02/1977	6000	5160	602
16/07/1978	4550	3240	806
29/06/1979	6133	4630	966
15/05/1980	4971	3820	751
22/03/1981	6465	5580	570
15/01/1982	5117	4580	367
07/02/1983	4143	3570	457
30/09/1984	3990	3480	740
18/08/1985	5416	4560	510
11/06/1986	4691	3780	970
18/04/1987	5334	4640	610
05/04/1988	6856	5760	432
18/07/1989	4224	3250	1060
17/07/1990	4472	3770	904
13/08/1991	6745	5650	609
30/12/1993	4750	3860	775
25/04/1994	6513	5470	670
18/06/1995	5560	4890	802
21/05/1996	5042	4370	951
29/07/1997	6740	6560	632
18/11/1998	5668	4710	826
02/06/1999	6502	5680	801
10/04/2000	5870	5310	525
02/04/2001	5184	4560	592
23/08/2002	7150	6880	575
11/01/2003	4690	4290	391
30/03/2004	4246	3570	672
02/09/2005	6310	4820	856
10/04/2006	8630	7890	589
15/06/2007	5540	1780	399
29/07/2008	4010	3600	569

Датум	Богојево Qmax (m <sup>3</sup> /s)	Бездан Qodg1 (m <sup>3</sup> /s)	Доњи Михаљац Qodg2 (m <sup>3</sup> /s)
06/07/2009	7150	6240	1037
19/06/2012	4290	3780	494
15/06/2013	8710	8210	812
22/09/2014	5290	3790	1712

**Табела 1.1.3**

Датум	Доњи Михаљац Qmax (m <sup>3</sup> /s)	Бездан Qodg2 (m <sup>3</sup> /s)	Богојево Qodg2 (m <sup>3</sup> /s)
04/03/1931	1131	3320	3990
26/05/1932	785	3030	3778
28/09/1933	1333	2170	3073
16/11/1934	1338	1921	2780
08/06/1935	1474	4741	5740
29/05/1936	1587	3492	4461
30/09/1937	1656	4752	6017
29/05/1938	1608	3717	4754
19/06/1939	1376	3815	4701
07/10/1940	1425	3824	4543
13/03/1941	1035	5113	5765
04/05/1942	1170	4080	5368
12/07/1943	1068	2268	3057
14/07/1946	1449	3592	4047
19/03/1947	1277	4623	4960
15/07/1948	1551	4280	5004
01/12/1949	999	1645	2374
28/05/1950	937	1990	2480
13/06/1951	1937	3550	4250
31/10/1952	1240	1840	2460
08/08/1953	1190	2650	3350
12/05/1954	1740	2950	3380
29/03/1955	1330	3420	3840
07/06/1956	1670	3730	4510
01/08/1957	1230	5000	5100
16/05/1958	1110	4010	4500
05/07/1959	1650	3960	4750
25/09/1960	1360	2300	3170
17/11/1961	1040	1730	2360
07/06/1962	1620	4730	5740
17/03/1963	1710	4400	4610
30/10/1964	1940	3240	4090
08/08/1965	1985	5420	6070
26/08/1966	2110	6010	6860
05/06/1967	1460	4290	4870
19/06/1968	974	2350	3150
12/06/1969	1156	2910	3220
15/08/1970	1392	4200	4370
23/01/1971	721	1820	2270
22/07/1972	3120	3920	5400
01/10/1973	1580	1600	2460
24/10/1974	1220	2630	3450
07/07/1975	2260	5190	6030
30/04/1976	1040	1700	2750
12/04/1977	1130	2800	3940
16/06/1978	1190	2960	4380

Датум	Доњи Михољац Qmax (m <sup>3</sup> /s)	Бездан Qodg2 (m <sup>3</sup> /s)	Богојево Qodg2 (m <sup>3</sup> /s)
07/07/1979	1380	3350	5020
22/10/1980	1520	2840	4070
24/07/1981	1210	3330	3670
11/10/1982	1160	1750	2440
29/03/1983	870	2770	3470
25/05/1984	1200	2420	3110
12/05/1985	1420	2670	3570
20/06/1986	1420	3280	4220
10/05/1987	1350	3860	4600
18/09/1988	1050	2120	2750
10/07/1989	1740	3020	4050
05/11/1990	1262	1690	2210
25/11/1991	1408	2060	2820
29/10/1993	1891	2650	3540
15/04/1994	1080	2610	3620
19/09/1995	1338	2650	3320
23/11/1996	1483	2660	3667
27/06/1997	1013	2590	3194
12/10/1998	1530	2500	3300
25/05/1999	1242	4730	5510
21/11/2000	1395	1940	2500
11/01/2001	1023	1920	2150
10/12/2002	1257	3170	4010
05/11/2003	853	1300	1670
29/06/2004	1250	3110	3910
28/08/2005	1377	4350	4860
03/06/2006	1176	4630	5120
14/07/2007	749	2810	3350
10/06/2008	918	3160	3760
30/06/2009	1255	4970	4970
10/11/2012	1552	2620	3400
12/05/2013	1407	3850	4910
19/09/2014	2166	3920	4910



## Временска серија протока– ЧВОР 2

Табела 1.2.1

Датум	Богојево $Q_{\max}$ (m <sup>3</sup> /s)	Сента $Q_{odg1}$ (m <sup>3</sup> /s)	Сланкамен $Q_{odg1}$ (m <sup>3</sup> /s)
03/04/1931	4797	1330	6055
16/01/1932	4701	1590	6116
26/07/1933	4523	1690	6164
10/09/1934	3760	590	4198
12/06/1935	6250	1120	7223
20/06/1936	5925	660	6557
03/10/1937	6441	270	6542
13/09/1938	5594	860	6436
13/12/1939	6238	1340	7117
03/04/1940	7566	2710	9164
19/03/1941	6720	2600	8738
01/04/1942	6369	2020	7784
26/06/1943	5241	570	5602
28/04/1944	7295	2010	8629
22/02/1945	6215	770	6939
20/07/1946	4905	210	4956
31/03/1947	7180	1920	8321
02/08/1948	6610	1040	7437
27/08/1949	5310	630	5814
18/02/1950	3010	745	3999
18/06/1951	4970	1050	6701
10/04/1952	5390	2160	7591
19/07/1953	3700	725	5032
25/07/1954	7700	893	8180
23/07/1955	6010	1550	7375
20/03/1956	5910	1540	6766
05/08/1957	5910	805	6289
11/07/1958	5350	1440	6366
25/08/1959	5750	867	6103
04/08/1960	4920	1590	6161
17/06/1961	4650	775	5135
10/06/1962	5880	968	6481
27/03/1963	5380	1950	6736
28/11/1964	4500	595	4755
15/06/1965	9290	2140	9446
29/08/1966	7940	740	7550
24/05/1967	5830	1250	6475
23/01/1968	4220	622	3978
23/03/1969	4100	1770	5263
05/05/1970	6600	2700	8441
29/03/1971	3480	1480	4624
23/07/1972	5590	586	5135
15/05/1973	5010	1120	5688
18/12/1974	6110	1340	6469
13/07/1975	8360	2060	9420
10/06/1976	4450	1810	5237
19/02/1977	6000	2100	6650

Датум	Богојево Qmax (m <sup>3</sup> /s)	Сента Qodg1 (m <sup>3</sup> /s)	Сланкамен Qodg1 (m <sup>3</sup> /s)
16/07/1978	4550	1560	5483
29/06/1979	6133	927	6211
15/05/1980	4971	1600	6497
22/03/1981	6465	3070	8311
15/01/1982	5117	1880	6965
07/02/1983	4143	1520	5470
30/09/1984	3990	900	4657
18/08/1985	5416	390	5518
11/06/1986	4691	739	4999
18/04/1987	5334	1840	6945
05/04/1988	6856	2130	8592
18/07/1989	4224	504	4641
17/07/1990	4472	414	4894
13/08/1991	6745	552	6591
02/04/1992	4585	1250	5928
30/12/1993	4750	1570	6322
25/04/1994	6513	1740	6577
18/06/1995	5560	925	6197
21/05/1996	5042	1220	5791
29/07/1997	6740	1120	7213
18/11/1998	5668	1970	7206
02/06/1999	6502	1300	7251
10/04/2000	5870	2700	7688
02/04/2001	5184	2150	6592
23/08/2002	7150	834	6944
11/01/2003	4690	1330	5661
30/03/2004	4246	1830	5970
02/09/2005	6310	1530	7109
10/04/2006	8630	2790	10953
15/06/2007	5540	477	2704
29/07/2008	4010	1340	5222
06/07/2009	7150	651	7333
19/06/2012	4290	1150	5337
15/06/2013	8710	1170	9088
22/09/2014	5290	405	5322

**Табела 1.2.2**

Датум	Сланкамен Qmax (m <sup>3</sup> /s)	Богојево Qodg1 (m <sup>3</sup> /s)	Сента Qodg1 (m <sup>3</sup> /s)
04/04/1931	6069	4797	1270
15/04/1932	7471	3751	3700
08/07/1933	6170	4350	1810
24/03/1934	5163	3555	1620
13/06/1935	7274	6250	1060
20/06/1936	6557	5925	660
04/04/1937	8697	6262	2390
03/06/1938	6760	5015	1650
05/06/1939	7552	6191	1680
07/04/1940	9662	7244	3200
20/03/1941	8797	6683	2610
31/05/1942	7868	5959	2300
27/06/1943	5663	5218	540
30/04/1944	8665	7155	2120
10/04/1945	7041	5357	1670
19/02/1946	5461	4104	1330

Датум	Сланкамен Q <sub>max</sub> (m <sup>3</sup> /s)	Богојево Q <sub>odg1</sub> (m <sup>3</sup> /s)	Сента Q <sub>odg1</sub> (m <sup>3</sup> /s)
02/04/1947	8403	7092	1930
29/07/1948	7449	6477	1210
28/08/1949	5841	5184	590
22/02/1950	4978	2780	1370
24/05/1951	7210	4210	1940
10/05/1952	7820	3430	1420
20/07/1953	5098	3700	710
27/07/1954	8332	7630	923
08/04/1955	7573	5420	2160
22/03/1956	7091	5700	1500
06/08/1957	6382	5910	782
07/03/1958	7389	5160	2580
26/08/1959	6224	5690	842
05/08/1960	6219	4850	1550
19/06/1961	5195	4600	763
03/05/1962	6690	4790	2500
29/03/1963	6788	5280	1980
13/04/1964	6029	3840	2390
28/06/1965	10076	8960	2620
03/09/1966	8239	7380	1400
25/04/1967	7724	5610	2910
14/04/1968	5359	3600	1960
25/03/1969	5403	4020	1720
27/05/1970	8750	5790	3270
30/03/1971	4733	3440	1480
29/11/1972	5698	3640	1900
17/05/1973	6127	4720	1330
21/12/1974	7225	5690	1600
16/07/1975	9512	7810	1640
11/06/1976	5336	4370	1570
07/03/1977	7847	5420	2620
02/06/1978	5975	4230	2260
20/04/1979	6416	4080	2160
02/08/1980	6791	4760	2000
22/03/1981	8311	6450	3070
14/01/1982	6994	5080	1850
22/04/1983	5639	4000	1770
01/06/1984	5574	3790	1570
30/05/1985	7166	4410	2000
17/04/1986	6003	4040	1930
22/04/1987	7275	4840	1760
07/04/1988	8848	6770	2230
22/05/1989	5162	3590	2010
18/07/1990	4936	4370	373
14/08/1991	6763	6560	513
05/04/1992	6259	4410	1120
30/12/1993	6322	4750	1570
29/04/1994	7540	5960	1720
21/06/1995	6342	5370	905
23/05/1996	5875	4945	1050
01/08/1997	7563	6305	1370
21/11/1998	7458	5330	2180
15/03/1999	8004	5600	2640
14/04/2000	8331	5460	3270
05/04/2001	6881	4820	2120
25/08/2002	7299	6870	755

Датум	Сланкамен Qmax (m <sup>3</sup> /s)	Богојево Qodgl (m <sup>3</sup> /s)	Сента Qodgl (m <sup>3</sup> /s)
11/01/2003	5661	4680	1330
31/03/2004	6070	4130	1870
06/04/2005	7510	5540	2140
13/04/2006	11326	8260	3150
19/09/2007	6352	5450	1060
01/05/2008	5542	3530	1950
08/07/2009	7641	7020	577
19/06/2012	5337	4280	1150
17/06/2013	9289	8430	1070
25/05/2014	5480	4750	898

**Табела 1.2.3**

Датум	Сента Qmax (m <sup>3</sup> /s)	Богојево Qodgl (m <sup>3</sup> /s)	Сланкамен Qodgl (m <sup>3</sup> /s)
20/03/1931	1830	3625	5677
16/04/1932	3730	3697	7471
17/07/1933	2120	3860	5932
24/03/1934	1620	3555	5163
06/05/1935	1800	4627	6440
15/04/1936	1430	3486	4879
03/04/1937	2420	6309	8693
17/05/1938	1970	3512	5244
02/06/1939	1800	6052	7309
11/04/1940	3400	6441	9338
12/05/1941	3310	5150	8143
09/03/1942	3200	3260	6192
09/04/1943	1190	3209	3943
03/05/1944	2200	6634	8572
05/04/1945	1670	5287	6849
12/03/1946	1570	3468	4989
01/04/1947	1930	7143	8378
29/01/1948	2410	4390	6699
30/07/1949	1480	3153	4608
25/12/1950	1770	2190	4336
23/05/1951	1940	4390	7154
24/04/1952	2280	5090	7648
17/01/1953	2360	2160	4825
13/03/1954	1530	2540	4676
10/04/1955	2200	4920	7310
07/05/1956	2350	4060	6071
05/06/1957	2070	2760	4834
07/03/1958	2580	5160	7389
30/01/1959	1370	2520	3533
28/02/1960	1800	2150	3776
01/01/1961	1260	2430	3691
22/04/1962	2800	3920	6282
29/03/1963	1980	5280	6788
17/04/1964	2490	3290	5700
22/06/1965	2710	8890	9748
07/03/1966	2910	4210	6593
27/04/1967	2920	5410	7641
14/04/1968	1960	3600	5359
05/03/1969	2150	3590	5295
02/06/1970	3480	4870	8458
09/01/1971	1590	2000	3460

Датум	Сента Qmax (m <sup>3</sup> /s)	Богојево Qodg1 (m <sup>3</sup> /s)	Сланкамен Qodg1 (m <sup>3</sup> /s)
01/12/1972	1960	3350	5578
15/06/1973	1480	3290	5039
25/06/1974	2710	4110	6521
24/04/1975	2070	4060	5756
24/04/1976	2440	1950	3984
27/04/1977	2880	4070	6014
17/05/1978	2400	4390	5583
18/02/1979	2600	3070	5584
07/08/1980	2160	4040	6339
25/03/1981	3080	6110	8083
07/01/1982	2000	3970	6076
19/04/1983	1800	3910	5576
01/06/1984	1570	3790	5574
28/05/1985	2010	4470	7024
29/04/1986	2020	3380	5312
17/04/1987	1840	5260	6831
03/04/1988	2290	6590	7861
19/05/1989	2040	3330	5090
05/03/1990	1060	2740	3806
27/05/1991	1690	3460	5207
01/12/1992	2420	4270	5296
25/04/1993	1860	2880	4500
25/04/1994	1740	6500	6577
31/12/1995	1770	3740	5069
08/01/1996	2170	2654	4790
01/05/1997	1950	2154	4340
26/11/1998	2310	4040	7007
27/03/1999	2820	3550	6776
22/04/2000	3400	4230	7458
02/04/2001	2150	5170	6592
16/03/2002	1760	2380	4169
19/03/2003	1420	2920	4420
21/04/2004	2570	2840	5500
14/05/2005	2580	4320	6970
22/04/2006	3720	6330	10496
13/03/2007	1820	3460	5047
28/04/2008	2070	3550	5247
16/03/2009	1740	4280	6096
30/04/2012	1310	2420	3664
18/04/2013	2450	4020	6353
28/10/2014	918	4580	5063

## Временска серија протока– ЧВОР 3

Табела 1.3.1

Датум	Сланкамен Q <sub>max</sub> (m <sup>3</sup> /s)	Сремска Митровица Q <sub>odgl</sub> (m <sup>3</sup> /s)	Смедерево Q <sub>odgl</sub> (m <sup>3</sup> /s)
04/04/1931	6069	3370	9200
15/04/1932	7471	4610	11630
08/07/1933	6170	1250	7348
24/03/1934	5163	3180	8212
13/06/1935	7274	1150	7687
20/06/1936	6557	1310	7061
04/04/1937	8697	3340	11156
03/06/1938	6760	2450	9419
05/06/1939	7552	3180	10234
07/04/1940	9662	3370	13378
20/03/1941	8797	2330	11246
31/05/1942	7868	2370	10186
27/06/1943	5663	1610	6898
30/04/1944	8665	3690	12380
10/04/1945	7041	2320	8830
19/02/1946	5461	1960	6970
02/04/1947	8403	3820	12500
29/07/1948	7449	1460	8400
28/08/1949	5841	514	5770
22/02/1950	4978	2870	7350
24/05/1951	7210	2730	9320
10/05/1952	7820	1080	7100
20/07/1953	5098	840	5590
27/07/1954	8332	855	8020
08/04/1955	7573	4280	11100
22/03/1956	7091	2270	9080
06/08/1957	6382	737	6430
07/03/1958	7389	3350	10500
26/08/1959	6224	1870	7640
05/08/1960	6219	751	6830
19/06/1961	5195	1590	6970
03/05/1962	6690	3750	11600
29/03/1963	6788	3200	10100
13/04/1964	6029	2570	8760
28/06/1965	10076	1330	13700
03/09/1966	8239	1280	9360
25/04/1967	7724	3350	11700
14/04/1968	5359	1560	7220
25/03/1969	5403	3300	8780
27/05/1970	8750	3320	13100
30/03/1971	4733	2660	7690
29/11/1972	5698	3480	8540
17/05/1973	6127	1830	8100
21/12/1974	7225	2160	9250
16/07/1975	9512	2100	11500
11/06/1976	5336	3360	8670
07/03/1977	7847	3160	10700

Датум	Сланкамен Qmax (m <sup>3</sup> /s)	Сремска Митровица Qodg1 (m <sup>3</sup> /s)	Смедерево Qodg1 (m <sup>3</sup> /s)
02/06/1978	5975	2810	8890
20/04/1979	6416	1720	7700
02/08/1980	6791	760	7480
22/03/1981	8311	5520	12300
14/01/1982	6994	3100	10500
22/04/1983	5639	2020	7770
01/06/1984	5574	2190	7630
30/05/1985	7166	1370	7930
17/04/1986	6003	2640	9030
22/04/1987	7275	2540	10200
07/04/1988	8848	3210	11800
22/05/1989	5162	2770	6920
18/07/1990	4936	532	5170
14/08/1991	6763	1380	7660
05/04/1992	6259	3270	8290
30/12/1993	6322	3770	9110
29/04/1994	7540	2720	10000
21/06/1995	6342	1500	7770
23/05/1996	5875	2240	7920
01/08/1997	7563	787	8290
21/11/1998	7458	3110	10200
15/03/1999	8004	3050	11300
14/04/2000	8331	2940	11200
05/04/2001	6881	2070	8600
25/08/2002	7299	732	7670
11/01/2003	5661	2880	8790
31/03/2004	6070	3230	8700
06/04/2005	7510	4180	12000
13/04/2006	11326	3830	13900
19/09/2007	6352	745	6730
01/05/2008	5542	1750	7330
08/07/2009	7641	1240	8010
15/06/2010	10268	2320	12000
25/01/2011	7579	1750	8240
19/06/2012	5337	1200	6180
17/06/2013	9289	1580	10500
25/05/2014	5480	4830	11100

**Табела 1.3.2**

Датум	Смедерево Qmax (m <sup>3</sup> /s)	Сланкамен Qodg1 (m <sup>3</sup> /s)	Сремска Митровица Qodg2 (m <sup>3</sup> /s)
23/03/1931	9845	5272	4070
22/04/1932	12588	7099	5180
25/05/1933	9050	5372	3200
26/03/1934	8290	5114	3160
08/03/1935	10066	6366	3210
08/03/1936	9305	5197	4100
02/05/1937	11850	7031	4670
01/06/1938	9553	6591	2960
06/06/1939	10298	7484	3140
06/04/1940	13378	9620	3430
03/03/1941	11651	7909	3360
05/04/1942	12738	7714	4480
25/06/1943	7091	5456	1980
01/05/1944	12482	8662	3540

Датум	Смедерево Qmax (m <sup>3</sup> /s)	Сланкамен Qodg1 (m <sup>3</sup> /s)	Сремска Митровица Qodg2 (m <sup>3</sup> /s)
12/04/1945	8922	6973	2220
11/02/1946	8060	3176	2680
02/04/1947	12500	8403	3820
17/01/1948	9820	6692	2880
19/12/1949	6814	3820	2980
24/12/1950	8140	4370	3980
11/04/1951	9460	5419	3590
12/04/1952	10100	7691	2720
11/01/1953	9820	5024	4310
18/05/1954	10240	5846	4340
21/04/1955	11700	7262	4270
20/05/1956	11000	5477	4240
05/06/1957	9420	4834	3190
05/05/1958	11200	5863	3480
24/06/1959	7900	5977	2270
08/03/1960	8250	4559	3140
26/05/1961	9430	4802	3880
18/04/1962	14100	6492	5040
01/04/1963	10406	6516	3120
15/04/1964	8860	5906	2450
25/06/1965	13830	9912	1610
22/02/1966	11350	7511	2820
27/04/1967	11780	7641	3270
03/03/1968	8050	4657	2800
05/03/1969	9700	5295	3890
29/05/1970	13460	8680	3130
03/04/1971	8730	4420	3020
01/12/1972	8720	5578	3360
16/05/1973	8100	5938	1950
05/11/1974	12350	6967	4850
15/07/1975	11550	9466	2160
12/06/1976	8766	5280	3220
05/03/1977	11174	7768	2780
05/06/1978	9385	5868	2260
26/02/1979	9776	6233	3360
23/05/1980	10570	5316	3880
26/03/1981	13909	8002	5160
16/01/1982	10596	6937	3010
16/01/1983	9220	3944	2050
10/04/1984	8249	4238	3080
22/05/1985	9027	6305	2400
06/04/1986	9160	5675	2960
21/04/1987	10355	7198	2680
06/04/1988	12056	8784	3300
26/05/1989	8637	4990	2690
22/12/1990	6328	2990	2050
26/05/1991	8540	5265	3450
12/04/1992	9324	5224	3600
30/12/1993	9112	6322	3770
27/04/1994	10117	7242	2880
31/12/1995	8737	5069	3780
03/01/1996	9065	5435	3630
03/08/1997	8409	7442	755
21/11/1998	10208	7458	3110
16/03/1999	11600	8004	3000
13/04/2000	11300	8299	3170



Датум	Смедерево Qmax (m <sup>3</sup> /s)	Сланкамен Qodg1 (m <sup>3</sup> /s)	Сремска Митровица Qodg2 (m <sup>3</sup> /s)
25/06/2001	8825	4737	3890
11/11/2002	7862	5043	2470
12/01/2003	8919	5611	3010
20/04/2004	10093	5610	4710
04/04/2005	12261	7379	4500
16/04/2006	14820	11115	3960
30/03/2007	7350	4597	2650
29/03/2008	7910	4817	3180
13/04/2009	9410	6473	2930
29/06/2010	12700	9158	3930
01/01/2011	9330	6224	3490
22/05/2012	6300	3365	2420
11/04/2013	11000	6515	4450
24/05/2014	11200	5430	4970

**Табела 1.3.3**

Датум	Сремска Митровица Qmax (m <sup>3</sup> /s)	Сланкамен Qodg2 (m <sup>3</sup> /s)	Смедерево Qodg2 (m <sup>3</sup> /s)
18/03/1931	4210	5885	9462
21/04/1932	5240	7189	12550
18/11/1933	3540	4160	7196
20/11/1934	3980	3471	6795
04/03/1935	3710	5868	9683
04/03/1936	4810	4776	8495
19/12/1937	4870	5061	9065
28/05/1938	4170	5727	8860
31/03/1939	4260	2942	6079
22/11/1940	5700	5037	9034
09/11/1941	3800	6040	9462
23/03/1942	4950	7699	12414
28/11/1943	3280	1850	4987
12/12/1944	5370	6631	11040
01/01/1945	3390	3740	8150
21/11/1946	3958	1738	5390
24/03/1947	4226	7401	11100
12/01/1948	3734	5936	8900
19/12/1949	2984	3820	6810
20/12/1950	4240	4390	7790
17/04/1951	4200	5017	9060
21/12/1952	5150	4351	9420
04/01/1953	5060	4556	8860
10/05/1954	4640	4064	7840
06/11/1955	5053	3407	8260
16/05/1956	4780	5484	10200
20/02/1957	3420	4441	7550
03/04/1958	4416	4177	8620
17/12/1959	4350	1785	5270
23/02/1960	4056	3130	7410
24/05/1961	4030	4656	8710
04/04/1962	5850	4153	10300
11/01/1963	3610	2461	5690
16/11/1964	4180	3043	6990
16/05/1965	5150	6678	11500
17/12/1966	3940	4822	8730
03/04/1967	3600	6236	10200

Датум	Сремска Митровица Qmax (m <sup>3</sup> /s)	Сланкамен Qodg2 (m <sup>3</sup> /s)	Смедерево Qodg2 (m <sup>3</sup> /s)
22/12/1968	4640	1662	4670
27/02/1969	4380	4196	8170
19/01/1970	5760	2903	7440
08/04/1971	3510	3858	7990
28/11/1972	3530	5576	8320
13/04/1973	3400	3548	6950
26/10/1974	6275	5384	8930
05/04/1975	3029	4056	5780
10/12/1976	3620	4765	8000
23/04/1977	4520	6095	9930
05/05/1978	3860	4006	7300
21/11/1979	4880	3904	7620
20/05/1980	4035	6036	10300
22/03/1981	5520	8311	12300
05/01/1982	3340	5556	9030
14/02/1983	3190	4397	7880
15/05/1984	3540	4294	8140
21/04/1985	3830	5001	7380
30/03/1986	3360	4902	8090
11/05/1987	4160	5180	9400
30/03/1988	3810	6375	10300
13/10/1989	3440	2928	4250
15/12/1990	2690	3063	5420
27/11/1991	4936	4130	8140
11/04/1992	3740	5217	8340
29/12/1993	3918	6142	9090
15/04/1994	4248	4566	8220
31/12/1995	3816	5069	8740
28/11/1996	4025	4464	8060
07/01/1997	3654	2912	6190
14/11/1998	3403	6844	9660
31/12/1999	5180	3554	8680
01/01/2000	5010	3690	8480
23/06/2001	4220	4052	8180
21/04/2002	3527	3287	6940
12/01/2003	3028	5611	8920
17/04/2004	4912	5730	9510
31/03/2005	4924	7020	11400
26/03/2006	4490	5109	8800
03/11/2007	3230	-	6160
21/12/2008	3380	2990	6060
31/12/2009	3890	4722	8140
05/12/2010	5530	4717	8540
01/01/2011	3600	6224	9330
27/05/2012	2790	3296	5490
10/04/2013	4540	6491	10900
17/05/2014	6600	3975	9260

## **ПРИЛОГ 2**

Статистички показатељи временских серија

## Статистички показатељи временских серија – ЧВОР 1

Табела 2.1.1

Комбинација 1			Статистике
Бездан Qmax	Средња вредност		4937,04
	95% Интервали поверења за средњу вредност	доња граница	4681,05
		горња граница	5193,03
	Медијана		4854,00
	Стандардна девијација		1142,878
	Минимум		2790
	Максимум		8410
	Коефицијент варијације		0,231
	Коефицијент асиметрије		0,840
	Коефицијент скошености		1,124
Доњи Михољац Qodg1	Средња вредност		756,52
	95% Интервали поверења за средњу вредност	доња граница	685,08
		горња граница	827,96
	Медијана		670,00
	Стандардна девијација		318,948
	Минимум		237
	Максимум		2254
	Коефицијент варијације		0,422
	Коефицијент асиметрије		1,922
Коефицијент скошености		5,964	
Богојево Qodg1	Средња вредност		5449,57
	95% интервали поверења за средњу вредност	доња граница	5165,80
		горња граница	5733,34
	Медијана		5320,00
	Стандардна девијација		1266,895
	Минимум		2940
	Максимум		9090
	Коефицијент варијације		0,232
	Коефицијент асиметрије		0,754
Коефицијент скошености		0,529	

**Табела 2.1.2**

Комбинација 2			Статистике
Богојево Qmax	Средња вредност		5634,07
	95% Интервали поверења за средњу вредност	доња граница	5351,48
		горња граница	5916,66
	Медијана		5540,00
	Стандардна девијација		1261,629
	Минимум		3010
	Максимум		9290
	Коефицијент варијације		0,224
	Коефицијент асиметрије		0,610
	Коефицијент скошености		0,385
Бездан Qodg1	Средња вредност		4725,04
	95% Интервали поверења за средњу вредност	доња граница	4463,71
		горња граница	4986,37
	Медијана		4680,00
	Стандардна девијација		1166,711
	Минимум		1780
	Максимум		8210
	Коефицијент варијације		0,247
	Коефицијент асиметрије		0,640
	Коефицијент скошености		1,033
Доњи Михољац Qodg1	Средња вредност		763,06
	95% Интервали поверења за средњу вредност	доња граница	684,61
		горња граница	841,52
	Медијана		672,00
	Стандардна девијација		350,250
	Минимум		296
	Максимум		2186
	Коефицијент варијације		0,459
	Коефицијент асиметрије		1,760
	Коефицијент скошености		3,738

**Табела 2.1.3**

Комбинација 3			Статистике
Доњи Михољац Qmax	Средња вредност		1370,24
	95% Интервали поверења за средњу вредност	доња граница	1285,50
		горња граница	1454,98
	Медијана		1338,00
	Стандардна девијација		378,336
	Минимум		721
	Максимум		3120
	Коефицијент варијације		0,276
	Коефицијент асиметрије		1,538
	Коефицијент скошености		5,010
Бездан Qodg2	Средња вредност		3227,63
	95% Интервали поверења за средњу вредност	доња граница	2986,56
		горња граница	3468,70
	Медијана		3110,00
	Стандардна девијација		1076,267
	Минимум		1300
	Максимум		6010
	Коефицијент варијације		0,333
	Коефицијент асиметрије		0,352
	Коефицијент скошености		-0,616
Богојево Qodg2	Средња вредност		3973,33
	95% Интервали поверења за средњу вредност	доња граница	3724,12
		горња граница	4222,54
	Медијана		3940,00
	Стандардна девијација		1112,600
	Минимум		1670
	Максимум		6860
	Коефицијент варијације		0,280
	Коефицијент асиметрије		0,212
	Коефицијент скошености		-0,510

## Статистички показатељи временских серија – ЧВОР 2

Табела 2.2.1

Комбинација 1			Статистике
Богојево Qmax	Средња вредност		5648,62
	95% Интервали поверења за средњу вредност	доња граница	5372,05
		горња граница	5925,18
	Медијана		5550,00
	Стандардна девијација		1258,711
	Минимум		3010
	Максимум		9290
	Коефицијент варијације		0,223
	Коефицијент асиметрије		0,579
	Коефицијент скошености		0,300
	Сента Qodg1	Средња вредност	
95% Интервали поверења за средњу вредност		доња граница	1180,83
		горња граница	1472,32
Медијана		1275,00	
Варијанса		439966,248	
Стандардна девијација		663,300	
Минимум		210	
Максимум		3070	
Коефицијент варијације		0,500	
Коефицијент асиметрије		0,525	
Коефицијент скошености		-0,337	
Сланкамен Qodg1	Средња вредност		6488,05
	95% интервали поверења за средњу вредност	доња граница	6175,75
		горња граница	6800,35
	Медијана		6472,00
	Стандардна девијација		1421,315
	Минимум		2704
	Максимум		10953
	Коефицијент варијације		0,219
	Коефицијент асиметрије		0,386
	Коефицијент скошености		0,685

**Табела 2.2.2**

Комбинација 2			Статистике
Сланкамен Qmax	Средња вредност		6921,28
	95% Интервали поверења за средњу вредност	доња граница	6628,19
		горња граница	7214,38
	Медијана		6789,50
	Стандардна девијација		1333,903
	Минимум		4733
	Максимум		11326
	Коефицијент варијације		0,193
	Коефицијент асиметрије		0,684
	Коефицијент скошености		0,408
Богојево Qodg1	Средња вредност		5278,89
	95% Интервали поверења за средњу вредност	доња граница	4993,89
		горња граница	5563,89
	Медијана		5172,00
	Стандардна девијација		1297,077
	Минимум		2780
	Максимум		8960
	Коефицијент варијације		0,246
	Коефицијент асиметрије		0,618
Коефицијент скошености		0,039	
Сента Qodg2	Средња вредност		1733,67
	95% Интервали поверења за средњу вредност	доња граница	1573,21
		горња граница	1894,14
	Медијана		1700,00
	Стандардна девијација		730,304
	Минимум		373
	Максимум		3700
	Коефицијент варијације		0,421
	Коефицијент асиметрије		0,373
Коефицијент скошености		-0,141	



**Табела 2.2.3**

Комбинација 3			Статистике
Сента Qmax	Средња вредност		2154,00
	95% Интервали поверења за средњу вредност	доња граница	2021,11
		горња граница	2286,89
	Медијана		2055,00
	Стандардна девијација		604,787
	Минимум		918
	Максимум		3730
	Коефицијент варијације		0,281
	Коефицијент асиметрије		0,627
	Коефицијент скошености		0,220
Богојево Qodg2	Средња вредност		4047,76
	95% Интервали поверења за средњу вредност	доња граница	3754,42
		горња граница	4341,10
	Медијана		3885,00
	Стандардна девијација		1335,042
	Минимум		1950
	Максимум		8890
	Коефицијент варијације		0,330
	Коефицијент асиметрије		0,946
Коефицијент скошености		1,243	
Сланкамен Qodg2	Средња вредност		6016,50
	95% Интервали поверења за средњу вредност	доња граница	5686,19
		горња граница	6346,82
	Медијана		5728,00
	Стандардна девијација		1503,314
	Минимум		3460
	Максимум		10496
	Коефицијент варијације		0,250
	Коефицијент асиметрије		0,574
Коефицијент скошености		0,154	

## Статистички показатељи временских серија – ЧВОР 3

Табела 2.3.1

Комбинација 1			Статистике
Сланкамен Qтах	Средња вредност		6968,96
	95% Интервали поверења за средњу вредност	доња граница	6688,32
		горња граница	7285,48
	Медијана		6881,00
	Стандардна девијација		1369,044
	Минимум		4733
	Максимум		11326
	Коефицијент варијације		0,196
	Коефицијент асиметрије		0,692
	Коефицијент скошености		0,339
Сремска Митровица Qодg1	Средња вредност		2395,27
	95% Интервали поверења за средњу вредност	доња граница	2131,43
		горња граница	2600,45
	Медијана		2330,00
	Стандардна девијација		1100,838
	Минимум		514
	Максимум		5520
	Коефицијент варијације		0,460
	Коефицијент асиметрије		0,255
Коефицијент скошености		-0,398	
Смедерево Qодg1	Средња вредност		9143,036
	95% интервали поверења за средњу вредност	доња граница	8678,77
		горња граница	9560,14
	Медијана		8760,00
	Стандардна девијација		2017,612
	Минимум		5170
	Максимум		13900
	Коефицијент варијације		0,221
	Коефицијент асиметрије		0,436
Коефицијент скошености		-0,514	

**Табела 2.3.2**

Комбинација 2			Статистике
Смедерево Qmax	Средња вредност		10042,23
	95% Интервали поверења за средњу вредност	доња граница	9621,32
		горња граница	10435,24
	Медијана		9700,00
	Стандардна девијација		1856,893
	Минимум		6300
	Максимум		14820
	Коефицијент варијације		0,185
	Коефицијент асиметрије		0,436
	Коефицијент скошености		-0,227
Сланкамен Qodg1	Средња вредност		6278,77
	95% Интервали поверења за средњу вредност	доња граница	5937,97
		горња граница	6640,03
	Медијана		5977,00
	Стандардна девијација		1600,634
	Минимум		2990
	Максимум		11115
	Коефицијент варијације		0,255
	Коефицијент асиметрије		0,499
	Коефицијент скошености		0,156
Сремска Митровица Qodg1	Средња вредност		3315,77
	95% Интервали поверења за средњу вредност	доња граница	3113,52
		горња граница	3478,17
	Медијана		3190,00
	Стандардна девијација		849,800
	Минимум		755
	Максимум		5180
	Коефицијент варијације		0,256
	Коефицијент асиметрије		0,033
	Коефицијент скошености		0,357

**Табела 2.3.3**

Комбинација 3			Статистике
Сремска Митровица (N=83) Qmax	Средња вредност		4211,89
	95% Интервали поверења за средњу вредност	доња граница	4034,28
		горња граница	4389,50
	Медијана		4056,00
	Стандардна девијација		813,394
	Минимум		2690
	Максимум		6600
	Коефицијент варијације		0,193
	Коефицијент асиметрије		0,620
Коефицијент скошености		0,069	
Сланкамен (N=83) Qodg2	Средња вредност		4670,25
	95% Интервали поверења за средњу вредност	доња граница	4361,65
		горња граница	4978,84
	Медијана		4566,00
	Стандардна девијација		1413,270
	Минимум		1662
	Максимум		8311
	Коефицијент варијације		0,303
	Коефицијент асиметрије		0,122
Коефицијент скошености		-0,169	
Смедерево (N=84) Qodg2	Средња вредност		8365,38
	95% Интервали поверења за средњу вредност	доња граница	8010,06
		горња граница	8773,85
	Медијана		8480,00
	Стандардна девијација		1755,358
	Минимум		4250
	Максимум		12550
	Коефицијент варијације		0,210
	Коефицијент асиметрије		-0,001
Коефицијент скошености		0,187	

## **ПРИЛОГ 3**

Екстремне вредности – Vox - plot дијаграм

## Екстремне вредности – ЧВОР 1

Табела 3.1.1

Комбинација 1			Редни број у низу	Вредност Q (m <sup>3</sup> /s)	Вох- plot дијаграм
Бездан Qmax	Почетни чланови опadaјућег низа	1	78	8410	
		2	33	8360	
		3	73	7960	
		4	69	7180	
		5	64	6812	
	Крајњи чланови опadaјућег низа	1	18	2790	
		2	4	3060	
		3	39	3180	
		4	57	3316	
		5	46	3420	
Доњи Михољац Qlodg1	Почетни чланови опadaјућег низа	1	40	2254	
		2	34	1710	
		3	33	1449	
		4	43	1378	
		5	5	1371	
	Крајњи чланови опadaјућег низа	1	57	237	
		2	36	333	
		3	24	353	
		4	50	382	
		5	42	394	
Богојево Qodg1	Почетни чланови опadaјућег низа	1	33	9090	
		2	73	8620	
		3	78	8620	
		4	43	8290	
		5	34	7920	
	Крајњи чланови опadaјућег низа	1	18	2940	
		2	39	3300	
		3	21	3650	
		4	57	3710	
		5	4	3751	

**Табела 3.1.2**

Комбинација 2			Редни број у низу	Вредност Q (m <sup>3</sup> /s)	Box- plot дијаграм
Богојево Qmax	Почетни чланови опadaјућег низа	1	33	9290	
		2	78	8710	
		3	73	8630	
		4	43	8360	
		5	34	7940	
	Крајњи чланови опadaјућег низа	1	18	3010	
		2	39	3480	
		3	21	3700	
		4	4	3760	
		5	52	3990	
Бездан Qodg1	Почетни чланови опadaјућег низа	1	78	8210	
		2	73	7890	
		3	33	7810	
		4	69	6880	
		5	64	6560	
	Крајњи чланови опadaјућег низа	1	74	1780	
		2	18	2640	
		3	39	3040	
		4	4	3045	
		5	46	3240	
Доњи Михољац Qodg2	Почетни чланови опadaјућег низа	1	40	2186	
		2	79	1712	
		3	34	1710	
		4	19	1656	
		5	33	1597	
	Крајњи чланови опadaјућег низа	1	24	296	
		2	42	336	
		3	36	363	
		4	50	367	
		5	70	391	

**Табела 3.1.3**

Комбинација 3			Редни број у низу	Вредност Q (m <sup>3</sup> /s)	Box-plot дијаграм
Доњи Михољац Qmax	Почетни чланови опadaјућег низа	1	40	3120	
		2	43	2260	
		3	79	2166	
		4	34	2110	
		5	33	1985	
	Крајњи чланови опadaјућег низа	1	39	721	
		2	74	749	
		3	2	785	
		4	70	853	
		5	51	870	
Бездан Qodg2	Почетни чланови опadaјућег низа	1	34	6010	
		2	33	5420	
		3	43	5190	
		4	11	5113	
		5	25	5000	
	Крајњи чланови опadaјућег низа	1	70	1300	
		2	41	1600	
		3	17	1645	
		4	58	1690	
		5	44	1700	
Богојево Qodg2	Почетни чланови опadaјућег низа	1	34	6860	
		2	33	6070	
		3	43	6030	
		4	7	6017	
		5	11	5765	
	Крајњи чланови опadaјућег низа	1	70	1670	
		2	68	2150	
		3	58	2210	
		4	39	2270	
		5	29	2360	



## Екстремне вредности – ЧВОР 2

Табела 3.2.1

Комбинација 1			Редни број у низу	Вредност Q (m <sup>3</sup> /s)	Вох- plot дијаграм
Богојево Qmax	Почетни чланови опадајућег низа	1	35	9290	
		2	81	8710	
		3	76	8630	
		4	45	8360	
		5	36	7940	
	Крајњи чланови опадајућег низа	1	20	3010	
		2	41	3480	
		3	23	3700	
		4	4	3760	
		5	54	3990	
Сента Qodg1	Почетни чланови опадајућег низа	1	51	3070	
		2	76	2790	
		3	10	2710	
		4	40	2700	
		5	70	2700	
	Крајњи чланови опадајућег низа	1	16	210	
		2	7	270	
		3	55	390	
		4	82	405	
		5	60	414	
Сланкамен Qodg1	Почетни чланови опадајућег низа	1	76	10953	
		2	35	9446	
		3	45	9420	
		4	10	9164	
		5	81	9088	
	Крајњи чланови опадајућег низа	1	77	2704	
		2	38	3978	
		3	20	3999	
		4	4	4198	
		5	41	4624	

**Табела 3.2.2**

Комбинација 2			Редни број у низу	Вредност Q (m <sup>3</sup> /s)	Box-plot дијаграм
Сланкамен Qmax	Почетни чланови опadaјућег низа	1	2	3730	
		2	76	3720	
		3	40	3480	
		4	10	3400	
		5	70	3400	
	Крајњи чланови опadaјућег низа	1	82	918	
		2	60	1060	
		3	13	1190	
		4	31	1260	
		5	80	1310	
Богојево Qodg1	Почетни чланови опadaјућег низа	1	35	8890	
		2	17	7143	
		3	14	6634	
		4	58	6590	
		5	64	6500	
	Крајњи чланови опadaјућег низа	1	46	1950	
		2	41	2000	
		3	30	2150	
		4	67	2154	
		5	23	2160	
Сента Qodg2	Почетни чланови опadaјућег низа	1	76	10496	
		2	35	9748	
		3	10	9338	
		4	7	8693	
		5	14	8572	
	Крајњи чланови опadaјућег низа	1	41	3460	
		2	29	3533	
		3	80	3664	
		4	31	3691	
		5	30	3776	

**Табела 3.2.3**

Комбинација 3			Редни број у серији	Вредност Q (m <sup>3</sup> /s)	Box-plot дијаграм
Сента Qmax	Почетни чланови опадајућег низа	1	2	3730	
		2	76	3720	
		3	40	3480	
		4	10	3400	
		5	70	3400	
	Крајњи чланови опадајућег низа	1	82	918	
		2	60	1060	
		3	13	1190	
		4	31	1260	
		5	80	1310	
Богојево Qodg2	Почетни чланови опадајућег низа	1	35	8890	
		2	17	7143	
		3	14	6634	
		4	58	6590	
		5	64	6500	
	Крајњи чланови опадајућег низа	1	46	1950	
		2	41	2000	
		3	30	2150	
		4	67	2154	
		5	23	2160	
Сланкамен Qodg2	Почетни чланови опадајућег низа	1	76	10496	
		2	35	9748	
		3	10	9338	
		4	7	8693	
		5	14	8572	
	Крајњи чланови опадајућег низа	1	41	3460	
		2	29	3533	
		3	80	3664	
		4	31	3691	
		5	30	3776	

## Екстремне вредности – ЧВОР 3

Табела 3.3.1

Комбинација 1			Редни број у серији	Вредност Q (m <sup>3</sup> /s)	Вох- plot дијаграм
Сланкамен Qmax	Почетни чланови опadaјућег низа	1	76	11326	
		2	80	10268	
		3	35	10076	
		4	10	9662	
		5	45	9512	
	Крајњи чланови опadaјућег низа	1	41	4733	
		2	60	4936	
		3	20	4978	
		4	23	5098	
		5	59	5162	
Сремска Митровица Qodg1	Почетни чланови опadaјућег низа	1	51	5520	
		2	2	4610	
		3	25	4280	
		4	75	4180	
		5	76	3830	
	Крајњи чланови опadaјућег низа	1	19	514	
		2	60	532	
		3	72	732	
		4	27	737	
		5	77	745	
Смедерево Qodg1	Почетни чланови опadaјућег низа	1	76	13900	
		2	35	13700	
		3	10	13378	
		4	40	13100	
		5	17	12500	
	Крајњи чланови опadaјућег низа	1	60	5170	
		2	23	5590	
		3	19	5770	
		4	82	6180	
		5	27	6430	

**Табела 3.3.2**

Комбинација 2			Редни број у серији	Вредност Q (m <sup>3</sup> /s)	Box-plot дијаграм
Смедерево Qmax	Почетни чланови опадајућег низа	1	76	14820	
		2	32	14100	
		3	51	13909	
		4	35	13830	
		5	40	13460	
	Крајњи чланови опадајућег низа	1	82	6300	
		2	60	6328	
		3	19	6814	
		4	13	7091	
		5	77	7350	
Сланкамен Qodg1	Почетни чланови опадајућег низа	1	76	11115	
		2	35	9912	
		3	10	9620	
		4	45	9466	
		5	80	9158	
	Крајњи чланови опадајућег низа	1	60	2990	
		2	16	3176	
		3	82	3365	
		4	19	3820	
		5	53	3944	
Сремска Митровица Qodg2	Почетни чланови опадајућег низа	1	2	5180	
		2	51	5160	
		3	32	5040	
		4	44	4850	
		5	74	4710	
	Крајњи чланови опадајућег низа	1	67	755	
		2	35	1610	
		3	43	1950	
		4	13	1980	
		5	60	2050 <sup>a</sup>	

**Табела 3.3.3**

Комбинација 3			Редни број у серији	Вредност Q (m <sup>3</sup> /s)	Box-plot дијаграм
Сремска Митровица Qmax	Почетни чланови опадајућег низа	1	83	6600	
		2	44	6275	
		3	32	5850	
		4	40	5760	
		5	10	5700	
	Крајњи чланови опадајућег низа	1	60	2690	
		2	81	2790	
		3	19	2984	
		4	73	3028	
		5	45	3029	
Сланкамен Qodg2	Почетни чланови опадајућег низа	1	51	8311	
		2	12	7699	
		3	17	7401	
		4	2	7189	
		5	75	7020	
	Крајњи чланови опадајућег низа	1	38	1662	
		2	16	1738	
		3	29	1785	
		4	13	1850	
		5	33	2461	
Смедерево Qodg2	Почетни чланови опадајућег низа	1	2	12550	
		2	12	12414	
		3	51	12300	
		4	35	11500	
		5	75	11400	
	Крајњи чланови опадајућег низа	1	59	4250	
		2	38	4670	
		3	13	4987	
		4	29	5270	
		5	16	5390	

## **ПРИЛОГ 4**

Теоријске вредности максималних и одговарајућих протока  
(модел ПРОИЛ)

## РАСПОДЕЛЕ ВЕРОВАТНОЋА ПОЈАВЕ МАКСИМАЛНИХ ГОДИШЊИХ ПРОТОКА

Река Дунав, х.с. Бездан

период 1931-2014.

Статистички параметри					
	основни низ	логаритми	Гумбел	Лог-нормална III	Лог-нормална II
Хср	4937	3,682	0,557	8,308	8,479
$\sigma$	1142,878	0,098	1,193	0,267	0,225
Cv	0,231	0,027	2,143	0,032	0,061
Cs	0,840	0,125	0,000	0,000	0,125
Резултати прорачуна					
вероватноћа	Пирсон III	Лог-Пирсон III	Гумбел	Лог-нормална III	Лог-нормална II
0,01	11328	11830	13227	11690	11131
0,05	10306	10587	11685	10505	10106
0,1	9853	10058	11021	9996	9660
0,2	9391	9531	10356	9486	9209
0,5	8763	8833	9477	8807	8603
<b>1</b>	<b>8271</b>	<b>8302</b>	<b>8810</b>	<b>8287</b>	<b>8132</b>
2	7761	7763	8142	7756	7647
2,5	7592	7587	7925	7583	7488
4	7226	7211	7468	7210	7143
5	7048	7029	7249	7030	6974
10	6466	6444	6559	6448	6426
20	5823	5810	5841	5814	5819
30	5402	5399	5391	5402	5418
40	5069	5074	5047	5076	5097
42,9624	4980	4987	4957	4988	5010
50	4779	4791	4755	4792	4814
57,0376	4588	4604	4565	4604	4625
60	4510	4527	4488	4526	4546
70	4243	4263	4226	4261	4277
80	3959	3977	3948	3975	3982
90	3613	3618	3605	3616	3606
95	3366	3350	3353	3349	3322
96	3301	3276	3284	3276	3244
97,5	3179	3137	3153	3138	3095
98	3128	3077	3097	3079	3030
99	2990	2909	2941	2914	2849
99,5	2878	2766	2806	2774	2694
99,8	2759	2603	2654	2615	2516
99,9	2685	2496	2552	2512	2399
99,95	2623	2400	2461	2419	2293
99,99	2511	2209	2277	2237	2082

Тестови					
$\chi^2$ тест					
критеријум	7,779	7,779	9,236	7,779	9,236
резултат	5,569	5,178	5,850	86,397	156,895
поређење	ДА	ДА	ДА	НЕ	НЕ
Колмогоров - Смирнов					
критеријум	0,1373	0,1373	0,1373	0,1373	0,1373
резултат	0,0523	0,0476	0,0614	0,2788	0,2788
поређење	ДА	ДА	ДА	НЕ	НЕ
$\rho_2$					
критеријум	0,3473	0,3473	0,3473	0,3473	0,3473
резултат	0,0453	0,0383	0,0578	0,0372	0,0330
поређење	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА



## РАСПОДЕЛЕ ВЕРОВАТНОЋА ПОЈАВЕ ОДГОВАРАЈУЋИХ ПРОТОКА

Река Дунав, х.с. Богојево

чвор 1, комбинација 1

период 1931-2014.

Статистички параметри					
	основни низ	логаритми	Гумбел	Лог-нормална III	Лог-нормална II
Хср	5450	3,725	0,557	8,419	8,578
$\sigma$	1266,895	0,099	1,193	0,266	0,227
Cv	0,232	0,026	2,143	0,032	0,061
Cs	0,754	0,116	0,000	0,000	0,116
Резултати прорачуна					
вероватноћа	Пирсон III	Лог-Пирсон III	Гумбел	Лог-нормална III	Лог-нормална II
0,01	12288	13086	14639	12937	12360
0,05	11219	11713	12929	11626	11214
0,1	10744	11128	12193	11062	10715
0,2	10258	10545	11457	10497	10211
0,5	9594	9773	10482	9745	9534
<b>1</b>	<b>9073</b>	<b>9184</b>	<b>9743</b>	<b>9168</b>	<b>9008</b>
2	8531	8587	9002	8580	8468
2,5	8350	8392	8762	8388	8289
4	7959	7975	8255	7975	7905
5	7768	7774	8012	7774	7717
10	7141	7125	7248	7128	7106
20	6443	6421	6451	6425	6430
30	5982	5964	5953	5967	5983
40	5614	5603	5572	5604	5626
42,9624	5515	5506	5471	5507	5530
50	5292	5288	5248	5289	5311
57,0376	5078	5080	5037	5080	5102
60	4990	4994	4951	4994	5015
70	4689	4701	4661	4699	4715
80	4364	4382	4353	4380	4387
90	3962	3982	3973	3980	3970
95	3670	3684	3693	3683	3656
96	3592	3602	3617	3602	3569
97,5	3444	3447	3472	3448	3403
98	3382	3380	3410	3382	3332
99	3212	3193	3237	3198	3132
99,5	3071	3034	3088	3042	2959
99,8	2919	2853	2918	2865	2763
99,9	2823	2733	2806	2750	2633
99,95	2740	2626	2705	2646	2516
99,99	2587	2414	2501	2443	2283

Тестови					
$\chi^2$ тест					
критеријум	7,779	7,779	9,236	7,779	9,236
резултат	3,005	2,873	2,371	65,323	90,197
поређење	ДА	ДА	ДА	НЕ	НЕ
Колмогоров - Смирнов					
критеријум	0,1373	0,1373	0,1373	0,1373	0,1373
резултат	0,0303	0,0317	0,0317	0,2715	0,2715
поређење	ДА	ДА	ДА	НЕ	НЕ
$\rho_2$					
критеријум	0,3473	0,3473	0,3473	0,3473	0,3473
резултат	0,0242	0,0219	0,0241	0,0215	0,0261
поређење	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА

## РАСПОДЕЛЕ ВЕРОВАТНОЋА ПОЈАВЕ ОДГОВАРАЈУЋИХ ПРОТОКА

Река Драва, х.с. Доњи Михољац

чвор 1, комбинација 1

период 1931-2014.

Статистички параметри					
	основни низ	логаритми	Гумбел	Лог-нормална III	Лог-нормална II
Хср	756,5	2,847	0,557	6,421	6,555
σ	318,948	0,164	1,193	0,432	0,378
Cv	0,422	0,058	2,143	0,067	0,133
Cs	1,922	0,243	0,000	0,000	0,243
Резултати прорачуна					
вероватноћа	Пирсон III	Лог-Пирсон III	Гумбел	Лог-нормална III	Лог-нормална II
0,01	3320	3501	3070	3148	2866
0,05	2823	2838	2640	2630	2437
0,1	2608	2579	2454	2418	2260
0,2	2393	2333	2269	2214	2086
0,5	2109	2028	2023	1953	1861
<b>1</b>	<b>1893</b>	<b>1810</b>	<b>1837</b>	<b>1761</b>	<b>1693</b>
2	1678	1603	1651	1575	1528
2,5	1608	1538	1590	1515	1474
4	1461	1404	1463	1391	1362
5	1391	1342	1402	1333	1309
10	1174	1151	1209	1151	1141
20	955,2	961,2	1008,7	965,9	966,3
30	826,2	847,2	883,3	852,7	857,1
40	733,9	762,5	787,3	767,4	773,7
42,9624	710,9	740,6	762,0	745,3	751,8
50	661,7	692,4	705,7	696,3	703,1
57,0376	618,7	648,0	652,8	650,9	657,5
60	602,1	630,0	631,1	632,5	638,9
70	551,0	570,7	558,1	571,6	576,7
80	505,9	509,8	480,5	508,9	511,6
90	464,9	438,0	384,7	434,9	433,3
95	445,2	388,1	314,4	383,5	377,7
96	441,3	375,0	295,2	370,0	362,9
97,5	435,3	350,6	258,7	345,1	335,3
98	433,3	340,3	243,0	334,6	323,6
99	429,1	312,5	199,4	306,5	292,0
99,5	427,0	289,7	161,9	283,5	265,7
99,8	425,6	264,8	119,3	258,7	237,0
99,9	425,1	249,0	91,0	243,2	218,8
99,95	424,8	235,2	65,5	229,8	202,8
99,99	424,6	209,0	14,1	204,7	172,5

Тестови					
<b>χ<sup>2</sup> тест</b>					
критеријум	7,779	7,779	9,236	7,779	9,236
резултат	28,412	7,121	13,574	14,947	15,254
поређење	НЕ	ДА	НЕ	НЕ	НЕ
<b>Колмогоров - Смирнов</b>					
критеријум	0,1373	0,1373	0,1373	0,1373	0,1373
резултат	0,3310	0,0639	0,0800	0,1301	0,1301
поређење	НЕ	ДА	ДА	ДА	ДА
<b>пo2</b>					
критеријум	0,3473	0,3473	0,3473	0,3473	0,3473
резултат	0,3373	0,0722	0,2028	0,0753	0,0834
поређење	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА

## РАСПОДЕЛЕ ВЕРОВАТНОЋА ПОЈАВЕ МАКСИМАЛНИХ ГОДИШЊИХ ПРОТОКА

Река Дунав, х. с. Богојево

период 1931-2014.

Статистички параметри					
	основни низ	логаритми	Гумбел	Лог-нормална III	Лог-нормална II
Хср	5634	3,740	0,557	8,612	8,612
$\sigma$	1261,629	0,096	1,193	0,222	0,222
Cv	0,224	0,026	2,143	0,026	0,059
Cs	0,610	-0,024	0,000	0,000	-0,024
Резултати прорачуна					
вероватноћа	Пирсон III	Лог-Пирсон III	Гумбел	Лог-нормална III	Лог-нормална II
0,01	12031	12421	14785	12562	12562
0,05	11072	11323	13083	11421	11421
0,1	10644	10842	12350	10924	10924
0,2	10203	10355	11616	10422	10422
0,5	9598	9696	10646	9745	9745
<b>1</b>	<b>9119</b>	<b>9183</b>	<b>9910</b>	<b>9219</b>	<b>9219</b>
2	8617	8653	9172	8678	8678
2,5	8449	8477	8933	8499	8499
4	8084	8098	8428	8113	8113
5	7904	7912	8186	7924	7924
10	7311	7305	7425	7310	7310
20	6642	6631	6632	6629	6629
30	6192	6182	6136	6178	6178
40	5829	5822	5756	5817	5817
42,9624	5730	5725	5656	5720	5720
50	5506	5504	5433	5499	5499
57,0376	5291	5291	5224	5286	5286
60	5201	5202	5138	5198	5198
70	4892	4897	4849	4894	4894
80	4553	4562	4542	4561	4561
90	4122	4134	4163	4136	4136
95	3800	3810	3885	3816	3816
96	3711	3720	3809	3727	3727
97,5	3543	3549	3665	3558	3558
98	3471	3475	3603	3484	3484
99	3272	3267	3430	3280	3280
99,5	3102	3087	3282	3103	3103
99,8	2912	2883	3113	2901	2901
99,9	2790	2747	3002	2768	2768
99,95	2681	2624	2901	2647	2647
99,99	2471	2379	2697	2407	2407

Тестови					
$\chi^2$ тест					
критеријум	7,779	7,779	9,236	7,779	9,236
резултат	3,283	3,076	2,753	2,801	2,801
поређење	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА
Колмогоров - Смирнов					
критеријум	0,1373	0,1373	0,1373	0,1373	0,1373
резултат	0,0284	0,0269	0,0340	0,0243	0,0243
поређење	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА
$\rho_2$					
критеријум	0,3473	0,3473	0,3473	0,3473	0,3473
резултат	0,0140	0,0130	0,0293	0,0123	0,0123
поређење	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА

## РАСПОДЕЛЕ ВЕРОВАТНОЋА ПОЈАВЕ ОДГОВАРАЈУЋИХ ПРОТОКА

Река Дунав, х.с. Бездан

чвор 1, комбинација 2

период 1931-2014.

Статистички параметри					
	основни низ	логаритми	Гумбел	Лог-нормална III	Лог-нормална II
Хср	4725	3,661	0,557	8,430	8,430
σ	1166,711	0,109	1,193	0,252	0,252
Cv	0,247	0,030	2,143	0,030	0,069
Cs	0,640	-0,444	-0,004	-0,007	-0,444
Резултати прорачуна					
вероватноћа	Пирсон III	Лог-Пирсон III	Гумбел	Лог-нормална III	Лог-нормална II
0,01	10720	9306	13188	11683	11683
0,05	9813	8788	11613	10489	10489
0,1	9408	8540	10935	9973	9973
0,2	8992	8275	10257	9455	9455
0,5	8422	7893	9360	8763	8763
<b>1</b>	<b>7972</b>	<b>7574</b>	<b>8679</b>	<b>8230</b>	<b>8230</b>
2	7500	7225	7996	7684	7684
2,5	7343	7105	7776	7505	7505
4	7000	6836	7309	7120	7120
5	6832	6701	7085	6933	6933
10	6277	6238	6381	6328	6328
20	5653	5685	5647	5665	5665
30	5235	5295	5189	5230	5230
40	4899	4968	4838	4885	4885
42,9624	4808	4878	4745	4793	4793
50	4601	4670	4539	4584	4584
57,0376	4403	4465	4346	4384	4384
60	4320	4379	4266	4301	4301
70	4035	4077	3999	4017	4017
80	3725	3736	3715	3709	3709
90	3333	3289	3365	3321	3321
95	3041	2943	3108	3031	3031
96	2961	2847	3037	2951	2951
97,5	2810	2662	2904	2800	2800
98	2745	2581	2847	2734	2734
99	2566	2356	2687	2553	2553
99,5	2415	2161	2550	2398	2398
99,8	2247	1939	2394	2222	2222
99,9	2139	1794	2291	2107	2107
99,95	2044	1663	2197	2003	2003
99,99	1861	1407	2009	1799	1799

Тестови					
χ <sup>2</sup> тест					
критеријум	7,779	7,779	9,236	7,779	9,236
резултат	0,596	4,954	0,298	0,236	0,236
поређење	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА
Колмогоров - Смирнов					
критеријум	0,1373	0,1373	0,1373	0,1373	0,1373
резултат	0,0170	0,0371	0,0161	0,0119	0,0119
поређење	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА
п02					
критеријум	0,3473	0,3473	0,3473	0,3473	0,3473
резултат	0,0482	0,0672	0,0626	0,0517	0,0517
поређење	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА

## ВЕРОВАТНОЋА ПОЈАВЕ ОДГОВАРАЈУЋИХ ПРОТОКА

Река Драва, х.с. Доњи Михољац

чвор 1, комбинација 2

период 1931-2014.

Статистички параметри					
	основни низ	логаритми	Гумбел	Лог-нормална III	Лог-нормална II
Хср	763,063	2,846	0,557	6,553	6,553
$\sigma$	350,2504	0,1741	1,1931	0,4009	0,401
Cv	0,4590057	0,0611736	2,1431068	0,0611736	0,141
Cs	1,760	0,506	0,019	0,031	0,506
Резултати прорачуна					
вероватноћа	Пирсон III	Лог Пирсон III	Гумбел	Лог-нормална III	Лог-нормална II
0,01	3451,933	4868,565	3303,535	3113,271	3113,271
0,05	2941,121	3676,981	2830,987	2621,938	2621,938
0,1	2720,267	3240,928	2627,424	2419,657	2419,657
0,2	2498,750	2845,190	2423,787	2222,466	2222,466
0,5	2204,674	2377,416	2154,346	1968,806	1968,806
<b>1</b>	<b>1981,020</b>	<b>2060,782</b>	<b>1950,117</b>	<b>1781,441</b>	<b>1781,441</b>
2	1756,021	1772,391	1745,141	1597,039	1597,039
2,5	1683,233	1684,984	1678,883	1538,115	1538,115
4	1529,233	1508,753	1538,639	1414,348	1414,348
5	1455,738	1428,540	1471,605	1355,602	1355,602
10	1225,415	1191,713	1260,282	1171,888	1171,888
20	990,669	969,190	1039,976	982,426	982,426
30	850,015	842,152	902,287	865,119	865,119
40	747,784	751,044	796,834	776,049	776,049
42,9624	721,954	727,972	769,088	752,759	752,759
50	666,346	677,901	707,231	701,108	701,108
57,0376	616,995	632,618	649,129	653,000	653,000
60	597,679	614,540	625,297	633,403	633,403
70	537,267	555,905	545,137	568,190	568,190
80	481,969	497,356	459,925	500,345	500,345
90	428,619	430,748	354,782	419,453	419,453
95	400,784	385,971	277,526	362,608	362,608
96	394,848	374,381	256,435	347,547	347,547
97,5	385,447	353,161	216,423	319,581	319,581
98	382,106	344,331	199,181	307,789	307,789
99	374,843	320,806	151,292	275,929	275,929
99,5	370,652	301,779	110,130	249,670	249,670
99,8	367,667	281,498	63,301	221,174	221,174
99,9	366,467	268,859	32,258	203,149	203,149
99,95	365,762	257,988	4,185	187,476	187,476
99,99	365,049	237,760	0,000	157,889	157,889

Тестови					
$\chi^2$ тест					
критеријум	7,779	7,779	9,236	7,779	9,236
резултат	5,093	6,280	13,274	14,096	14,096
поређење	ДА	ДА	НЕ	НЕ	НЕ
Колмогоров - Смирнов					
критеријум	0,1373	0,1373	0,1373	0,1373	0,1373
резултат	0,0386	0,0361	0,0600	0,0646	0,0646
поређење	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА
по2					
критеријум	0,3473	0,3473	0,3473	0,3473	0,3473
резултат	0,1055	0,0439	0,2404	0,0875	0,0875
поређење	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА

## РАСПОДЕЛЕ ВЕРОВАТНОЋА ПОЈАВЕ МАКСИМАЛНИХ ГОДИШЊИХ ПРОТОКА

## Река Драва, х. с. Доњи Михољац

период 1931-2014.

Статистички параметри					
	основни низ	логаритми	Гумбел	Лог-нормална III	Лог-нормална II
Хср	1370	3,122	0,557	7,189	7,189
$\sigma$	378,336	0,112	1,193	0,258	0,258
Cv	0,276	0,036	2,143	0,036	0,083
Cs	1,538	0,280	0,003	0,005	0,280
Резултати прорачуна					
вероватноћа	Пирсон III	Лог-Пирсон III	Гумбел	Лог-нормална III	Лог-нормална II
0,01	4086	4042	4114	3454	3454
0,05	3587	3486	3604	3093	3093
0,1	3370	3258	3384	2937	2937
0,2	3152	3036	3164	2781	2781
0,5	2861	2752	2873	2573	2573
<b>1</b>	<b>2638</b>	<b>2542</b>	<b>2652</b>	<b>2413</b>	<b>2413</b>
2	2413	2336	2431	2249	2249
2,5	2340	2269	2359	2195	2195
4	2185	2130	2208	2080	2080
5	2110	2064	2136	2024	2024
10	1874	1856	1907	1843	1843
20	1629	1639	1669	1646	1646
30	1479	1503	1521	1516	1516
40	1368	1398	1407	1414	1414
42,9624	1340	1371	1377	1387	1387
50	1277	1309	1310	1325	1325
57,0376	1221	1251	1247	1266	1266
60	1199	1228	1221	1241	1241
70	1127	1148	1135	1157	1157
80	1059	1064	1043	1067	1067
90	988,5	960,6	929,2	952,2	952,2
95	947,8	886,0	845,8	867,1	867,1
96	938,4	865,8	823,0	843,8	843,8
97,5	922,9	828,0	779,8	799,5	799,5
98	917,1	811,8	761,1	780,4	780,4
99	903,5	767,4	709,4	727,5	727,5
99,5	894,7	730,0	664,9	682,2	682,2
99,8	887,5	688,2	614,4	631,1	631,1
99,9	884,2	661,2	580,8	597,5	597,5
99,95	882,0	637,2	550,5	567,5	567,5
99,99	879,4	590,3	489,6	508,1	508,1

Тестови					
$\chi^2$ тест					
критеријум	7,779	7,779	9,236	7,779	9,236
резултат	8,505	9,386	9,148	30,282	30,282
поређење	НЕ	НЕ	ДА	НЕ	НЕ
Колмогоров - Смирнов					
критеријум	0,1373	0,1373	0,1373	0,1373	0,1373
резултат	0,0624	0,0408	0,0563	0,0305	0,0305
поређење	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА
$\rho_0^2$					
критеријум	0,3473	0,3473	0,3473	0,3473	0,3473
резултат	0,1417	0,0529	0,0976	0,0458	0,0458
поређење	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА

## РАСПОДЕЛЕ ВЕРОВАТНОЋА ПОЈАВЕ ОДГОВАРАЈУЋИХ ПРОТОКА

Река Дунав, х.с. Бездан

чвор 1, комбинација 3

период 1931-2014.

Статистички параметри					
	основни низ	логаритми	Гумбел	Лог-нормална III	Лог-нормална II
Хср	3228	3,484	0,557	8,022	8,022
σ	1076,267	0,151	1,193	0,348	0,348
Cv	0,333	0,043	2,143	0,043	0,100
Cs	0,352	-0,270	-0,007	-0,011	-0,270
Резултати прорачуна					
вероватноћа	Пирсон III	Лог-Пирсон III	Гумбел	Лог-нормална III	Лог-нормална II
0,01	8059	9138	11034	11111	11111
0,05	7398	8230	9582	9572	9572
0,1	7098	7824	8957	8928	8928
0,2	6787	7406	8331	8293	8293
0,5	6353	6835	7503	7465	7465
<b>1</b>	<b>6005</b>	<b>6384</b>	<b>6875</b>	<b>6845</b>	<b>6845</b>
2	5635	5914	6245	6225	6225
2,5	5510	5757	6042	6026	6026
4	5235	5418	5611	5602	5602
5	5099	5251	5405	5400	5400
10	4641	4705	4756	4759	4759
20	4110	4098	4079	4084	4084
30	3743	3696	3655	3657	3657
40	3440	3376	3331	3328	3328
42,9624	3356	3290	3246	3241	3241
50	3165	3095	3056	3047	3047
57,0376	2977	2909	2878	2865	2865
60	2898	2832	2804	2790	2790
70	2621	2570	2558	2539	2539
80	2308	2286	2296	2274	2274
90	1895	1934	1973	1951	1951
95	1571	1676	1736	1719	1719
96	1480	1607	1671	1657	1657
97,5	1303	1476	1548	1541	1541
98	1225	1420	1495	1492	1492
99	1005	1267	1348	1357	1357
99,5	810	1139	1221	1244	1244
99,8	584	999	1077	1120	1120
99,9	430,9	908,7	982,0	1040,0	1040,0
99,95	290,8	830,1	895,7	970,0	970,0
99,99	4,9	680,9	722,5	835,7	835,7

Тестови					
<b>χ<sup>2</sup> тест</b>					
критеријум	7,779	7,779	9,236	7,779	9,236
резултат	6,925	6,076	8,811	7,900	7,900
поређење	ДА	ДА	ДА	НЕ	ДА
<b>Колмогоров - Смирнов</b>					
критеријум	0,1373	0,1373	0,1373	0,1373	0,1373
резултат	0,0404	0,0420	0,0543	0,0539	0,0539
поређење	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА
<b>по2</b>					
критеријум	0,3473	0,3473	0,3473	0,3473	0,3473
резултат	0,0478	0,0413	0,0681	0,0651	0,0651
поређење	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА

## РАСПОДЕЛЕ ВЕРОВАТНОЋА ПОЈАВЕ ОДГОВАРАЈУЋИХ ПРОТОКА

Река Дунав, х.с. Богојево

чвор 1, комбинација 3

период 1931-2014.

Статистички параметри					
	основни низ	логаритми	Гумбел	Лог-нормална III	Лог-нормална II
Хср	3973	3,581	0,557	8,246	8,246
$\sigma$	1112,600	0,128	1,193	0,294	0,294
Cv	0,280	0,036	2,143	0,036	0,082
Cs	0,212	-0,407	-0,006	-0,010	-0,407
Резултати прорачуна					
вероватноћа	Пирсон III	Лог-Пирсон III	Гумбел	Лог-нормална III	Лог-нормална II
0,01	8625	8917	12043	11395	11395
0,05	8025	8303	10542	10045	10045
0,1	7751	8014	9896	9470	9470
0,2	7463	7709	9249	8897	8897
0,5	7061	7275	8393	8139	8139
<b>1</b>	<b>6734</b>	<b>6919</b>	<b>7744</b>	<b>7563</b>	<b>7563</b>
2	6383	6535	7093	6980	6980
2,5	6264	6403	6883	6790	6790
4	6000	6113	6437	6384	6384
5	5868	5968	6224	6189	6189
10	5422	5477	5553	5561	5561
20	4896	4905	4853	4886	4886
30	4527	4509	4416	4450	4450
40	4218	4184	4081	4109	4109
42,9624	4132	4095	3992	4018	4018
50	3934	3890	3796	3814	3814
57,0376	3738	3692	3611	3620	3620
60	3655	3608	3536	3540	3540
70	3363	3320	3281	3268	3268
80	3027	3000	3010	2977	2977
90	2575	2588	2676	2615	2615
95	2213	2277	2431	2350	2350
96	2109	2191	2364	2278	2278
97,5	1907	2028	2237	2142	2142
98	1817	1958	2182	2084	2084
99	1560	1764	2030	1923	1923
99,5	1329	1598	1899	1787	1787
99,8	1056	1413	1750	1635	1635
99,9	869	1293	1652	1536	1536
99,95	694	1186	1563	1448	1448
99,99	331	981	1384	1276	1276

Тестови					
$\chi^2$ тест					
критеријум	7,779	7,779	9,236	7,779	9,236
резултат	6,812	5,852	11,355	7,823	7,823
поређење	ДА	ДА	НЕ	НЕ	ДА
Колмогоров - Смирнов					
критеријум	0,1373	0,1373	0,1373	0,1373	0,1373
резултат	0,0448	0,0473	0,0706	0,0566	0,0566
поређење	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА
$\rho_2$					
критеријум	0,3473	0,3473	0,3473	0,3473	0,3473
резултат	0,0344	0,0330	0,1034	0,0742	0,0742
поређење	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА



## РАСПОДЕЛЕ ВЕРОВАТНОЋА ПОЈАВЕ МАКСИМАЛНИХ ГОДИШЊИХ ПРОТОКА

Река Дунав, х. с. Богојево

период 1931-2014.

Статистички параметри					
	основни низ	логаритми	Гумбел	Лог-нормална III	Лог-нормална II
Хср	5649	3,741	0,557	8,615	8,615
$\sigma$	1258,711	0,096	1,195	0,222	0,222
Cv	0,223	0,026	2,145	0,026	0,059
Cs	0,579	-0,040	0,000	0,000	-0,040
Резултати прорачуна					
вероватноћа	Пирсон III	Лог-Пирсон III	Гумбел	Лог-нормална III	Лог-нормална II
0,01	11941	12337	14761	12569	12569
0,05	11007	11268	13066	11431	11431
0,1	10589	10799	12335	10935	10935
0,2	10158	10322	11605	10433	10433
0,5	9567	9677	10638	9757	9757
<b>1</b>	<b>9098</b>	<b>9172</b>	<b>9906</b>	<b>9232</b>	<b>9232</b>
2	8605	8650	9171	8691	8691
2,5	8441	8477	8933	8512	8512
4	8082	8102	8430	8127	8127
5	7904	7918	8190	7938	7938
10	7319	7317	7432	7324	7324
20	6657	6647	6641	6644	6644
30	6211	6200	6147	6193	6193
40	5849	5840	5769	5832	5832
42,9624	5751	5743	5670	5735	5735
50	5528	5522	5448	5514	5514
57,0376	5312	5309	5239	5301	5301
60	5222	5220	5154	5213	5213
70	4911	4914	4866	4909	4909
80	4570	4578	4561	4576	4576
90	4134	4147	4184	4151	4151
95	3805	3820	3906	3830	3830
96	3714	3730	3831	3741	3741
97,5	3542	3557	3687	3571	3571
98	3468	3482	3625	3498	3498
99	3262	3272	3454	3293	3293
99,5	3086	3090	3306	3116	3116
99,8	2888	2883	3138	2914	2914
99,9	2759	2746	3027	2780	2780
99,95	2644	2621	2926	2660	2660
99,99	2421	2373	2724	2419	2419

Тестови					
$\chi^2$ тест					
критеријум	7,779	7,779	9,236	7,779	9,236
резултат	2,622	2,394	2,087	2,053	2,053
поређење	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА
Колмогоров - Смирнов					
критеријум	0,1347	0,1347	0,1347	0,1347	0,1347
резултат	0,0210	0,0197	0,0258	0,0171	0,0171
поређење	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА
$\rho^2$					
критеријум	0,3473	0,3473	0,3473	0,3473	0,3473
резултат	0,0143	0,0140	0,0318	0,0138	0,0138
поређење	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА

## РАСПОДЕЛЕ ВЕРОВАТНОЋА ПОЈАВЕ ОДГОВАРАЈУЋИХ ПРОТОКА

Река Дунав, х.с. Сланкамен

чвор 2, комбинација 1

период 1931-2014.

Статистички параметри					
	основни низ	логаритми	Гумбел	Лог-нормална III	Лог-нормална II
Хср	6488	3,801	0,557	8,753	8,753
$\sigma$	1421,315	0,098	1,195	0,227	0,227
Cv	0,219	0,026	2,145	0,026	0,060
Cs	0,386	-0,544	-0,004	-0,006	-0,544
Резултати прорачуна					
вероватноћа	Пирсон III	Лог-Пирсон III	Гумбел	Лог-нормална III	Лог-нормална II
0,01	12976	11479	16777	14700	14700
0,05	12076	10996	14863	13341	13341
0,1	11669	10758	14039	12749	12749
0,2	11247	10497	13214	12151	12151
0,5	10660	10113	12123	11347	11347
<b>1</b>	<b>10191</b>	<b>9784</b>	<b>11295</b>	<b>10723</b>	<b>10723</b>
2	9692	9415	10465	10081	10081
2,5	9523	9286	10197	9869	9869
4	9154	8994	9629	9412	9412
5	8971	8845	9357	9189	9189
10	8358	8326	8501	8464	8464
20	7650	7687	7609	7661	7661
30	7162	7224	7051	7130	7130
40	6760	6829	6624	6705	6705
42,9624	6650	6719	6512	6591	6591
50	6397	6462	6261	6331	6331
57,0376	6150	6207	6026	6082	6082
60	6045	6099	5929	5978	5978
70	5682	5716	5605	5622	5622
80	5273	5277	5260	5232	5232
90	4735	4689	4834	4736	4736
95	4316	4226	4521	4362	4362
96	4198	4096	4435	4259	4259
97,5	3970	3843	4273	4062	4062
98	3870	3733	4203	3976	3976
99	3588	3422	4010	3738	3738
99,5	3341	3150	3843	3533	3533
99,8	3053	2839	3653	3299	3299
99,9	2860	2632	3527	3144	3144
99,95	2684	2446	3414	3005	3005
99,99	2327	2077	3185	2727	2727

Тестови					
$\chi^2$ тест					
критеријум	7,779	7,779	9,236	7,779	9,236
резултат	5,008	22,230	8,003	4,388	4,388
поређење	ДА	НЕ	ДА	ДА	ДА
Колмогоров - Смирнов					
критеријум	0,1347	0,1347	0,1347	0,1347	0,1347
резултат	0,0294	0,0465	0,0295	0,0233	0,0233
поређење	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА
п02					
критеријум	0,3473	0,3473	0,3473	0,3473	0,3473
резултат	0,0452	0,0656	0,0880	0,0602	0,0602
поређење	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА

## РАСПОДЕЛЕ ВЕРОВАТНОЋА ПОЈАВЕ ОДГОВАРАЈУЋИХ ПРОТОКА

Река Тиса, х.с. Сента  
чвор 2, комбинација 1  
период 1931-2014.

Статистички параметри					
	основни низ	логаритми	Гумбел	Лог-нормална III	Лог-нормална II
Хср	1327	3,061	0,557	7,049	7,049
$\sigma$	663,300	0,246	1,195	0,567	0,567
Cv	0,500	0,080	2,145	0,080	0,185
Cs	0,525	-0,603	-0,064	-0,106	-0,603
Резултати прорачуна					
вероватноћа	Пирсон III	Лог-Пирсон III	Гумбел	Лог-нормална III	Лог-нормална II
0,01	4561	4811	6128	9497	9497
0,05	4090	4372	5235	7447	7447
0,1	3878	4160	4850	6647	6647
0,2	3660	3934	4465	5894	5894
0,5	3359	3610	3956	4965	4965
<b>1</b>	<b>3119</b>	<b>3342</b>	<b>3570</b>	<b>4310</b>	<b>4310</b>
2	2867	3053	3183	3692	3692
2,5	2783	2955	3057	3501	3501
4	2598	2739	2792	3109	3109
5	2507	2631	2666	2928	2928
10	2205	2274	2266	2382	2382
20	1861	1873	1850	1856	1856
30	1628	1607	1589	1550	1550
40	1438	1398	1390	1329	1329
42,9624	1387	1343	1338	1273	1273
50	1269	1219	1221	1151	1151
57,0376	1155	1102	1111	1041	1041
60	1106,8	1054,2	1066	997,3	997,3
70	941,4	895,5	914,3	855,1	855,1
80	758,3	731,7	753,3	714,3	714,3
90	522,5	541,8	554,5	556,5	556,5
95	343,0	415,3	408,5	452,8	452,8
96	293,3	383,1	368,6	426,5	426,5
97,5	198,2	325,3	293,0	378,7	378,7
98	157,0	301,7	260,4	359,1	359,1
99	42,1	240,9	169,9	307,6	307,6
99,5	0,0	194,5	92,08	267,0	267,0
99,8	0,0	148,3	3,564	224,9	224,9
99,9	0,0	121,8	0,000	199,4	199,4
99,95	0,0	100,5	0,000	178,0	178,0
99,99	0,0	65,5	0,000	139,6	139,6

Тестови					
$\chi^2$ тест					
критеријум	7,779	7,779	9,236	7,779	9,236
резултат	8,148	4,195	6,306	6,940	6,940
поређење	НЕ	ДА	ДА	ДА	ДА
Колмогоров - Смирнов					
критеријум	0,1347	0,1347	0,1347	0,1347	0,1347
резултат	0,0326	0,0194	0,0322	0,0560	0,0560
поређење	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА
nø2					
критеријум	0,3473	0,3473	0,3473	0,3473	0,3473
резултат	0,0567	0,0469	0,0710	0,1258	0,1258
поређење	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА

## РАСПОДЕЛЕ ВЕРОВАТНОЋА ПОЈАВЕ МАКСИМАЛНИХ ГОДИШЊИХ ПРОТОКА

Река Дунав, х. с. Сланкамен

период 1931-2014.

Статистички параметри					
	основни низ	логаритми	Гумбел	Лог-нормална III	Лог-нормална II
Хср	6921	3,833	0,557	8,825	8,825
$\sigma$	1333,903	0,082	1,195	0,188	0,188
Cv	0,193	0,021	2,145	0,021	0,049
Cs	0,684	0,231	0,001	0,001	0,231
Резултати прорачуна					
вероватноћа	Пирсон III	Лог-Пирсон III	Гумбел	Лог-нормална III	Лог-нормална II
0,01	13908	15040	16578	13682	13682
0,05	12837	13565	14781	12623	12623
0,1	12360	12940	14008	12157	12157
0,2	11871	12317	13233	11682	11682
0,5	11201	11495	12209	11036	11036
<b>1</b>	<b>10673</b>	<b>10869</b>	<b>11433</b>	<b>10530</b>	<b>10530</b>
2	10122	10236	10654	10004	10004
2,5	9938	10029	10402	9830	9830
4	9539	9588	9869	9450	9450
5	9343	9374	9614	9264	9264
10	8698	8689	8811	8653	8653
20	7977	7946	7973	7966	7966
30	7496	7463	7450	7505	7505
40	7110	7083	7049	7132	7132
42,9624	7006	6981	6944	7031	7031
50	6770	6751	6708	6800	6800
57,0376	6544	6532	6488	6577	6577
60	6450	6441	6397	6484	6484
70	6128	6131	6092	6162	6162
80	5778	5795	5768	5805	5805
90	5339	5372	5369	5344	5344
95	5015	5056	5075	4991	4991
96	4927	4969	4995	4893	4893
97,5	4761	4804	4843	4704	4704
98	4691	4733	4777	4622	4622
99	4496	4535	4595	4391	4391
99,5	4333	4365	4439	4190	4190
99,8	4154	4171	4261	3958	3958
99,9	4039	4044	4143	3804	3804
99,95	3939	3929	4036	3663	3663
99,99	3749	3701	3822	3380	3380

Тестови					
$\chi^2$ тест					
критеријум	7,779	7,779	9,236	7,779	9,236
резултат	5,526	4,979	4,898	6,953	6,953
поређење	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА
Колмогоров - Смирнов					
критеријум	0,1347	0,1347	0,1347	0,1347	0,1347
резултат	0,0235	0,0308	0,0423	0,0270	0,0270
поређење	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА
$\rho^2$					
критеријум	0,3473	0,3473	0,3473	0,3473	0,3473
резултат	0,0429	0,0530	0,0600	0,0542	0,0542
поређење	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА

## РАСПОДЕЛЕ ВЕРОВАТНОЋА ПОЈАВЕ ОДГОВАРАЈУЋИХ ПРОТОКА

Река Дунав, х.с. Богојево

чвор 2, комбинација 2

период 1931-2014.

Статистички параметри					
	основни низ	логаритми	Гумбел	Лог-нормална III	Лог-нормална II
Хср	5279	3,710	0,557	8,448	8,542
$\sigma$	1297,077	0,105	1,195	0,266	0,243
Cv	0,246	0,028	2,145	0,032	0,065
Cs	0,618	0,057	0,000	0,000	0,057
Резултати прорачуна					
вероватноћа	Пирсон III	Лог-Пирсон III	Гумбел	Лог-нормална III	Лог-нормална II
0,01	11878	13016	14669	13010	12636
0,05	10887	11649	12922	11655	11389
0,1	10443	11064	12169	11073	10849
0,2	9988	10479	11417	10489	10305
0,5	9363	9701	10421	9712	9577
<b>1</b>	<b>8868</b>	<b>9105</b>	<b>9666</b>	<b>9117</b>	<b>9014</b>
2	8350	8499	8908	8510	8438
2,5	8177	8301	8663	8311	8248
4	7800	7876	8145	7885	7840
5	7615	7670	7897	7678	7641
10	7003	7006	7116	7011	6997
20	6314	6284	6302	6285	6288
30	5851	5813	5793	5812	5823
40	5477	5441	5403	5439	5452
42,9624	5376	5341	5301	5339	5353
50	5146	5116	5072	5113	5127
57,0376	4925	4901	4857	4898	4912
60	4832	4812	4769	4809	4822
70	4515	4508	4473	4505	4515
80	4167	4178	4158	4176	4181
90	3726	3763	3769	3764	3758
95	3396	3454	3484	3458	3441
96	3306	3370	3406	3374	3353
97,5	3134	3208	3258	3216	3188
98	3061	3139	3194	3147	3116
99	2857	2946	3017	2958	2916
99,5	2684	2781	2865	2797	2745
99,8	2492	2594	2692	2615	2551
99,9	2367	2471	2577	2496	2423
99,95	2257	2360	2473	2390	2308
99,99	2044	2142	2265	2180	2081

Тестови					
$\chi^2$ тест					
критеријум	7,779	7,779	9,236	7,779	9,236
резултат	1,337	1,232	1,588	23,153	28,565
поређење	ДА	ДА	ДА	НЕ	НЕ
Колмогоров - Смирнов					
критеријум	0,1347	0,1347	0,1347	0,1347	0,1347
резултат	0,0243	0,0224	0,0253	0,1649	0,1649
поређење	ДА	ДА	ДА	НЕ	НЕ
n02					
критеријум	0,3473	0,3473	0,3473	0,3473	0,3473
резултат	0,0187	0,0182	0,0231	0,0198	0,0205
поређење	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА

## РАСПОДЕЛЕ ВЕРОВАТНОЋА ПОЈАВЕ ОДГОВАРАЈУЋИХ ПРОТОКА

Река Тиса, х.с. Сента  
чвор 2, комбинација 2  
период 1931-2014.

Статистички параметри					
	основни низ	логаритми	Гумбел	Лог-нормална III	Лог-нормална II
Хср	1734	3,195	0,557	7,356	7,356
$\sigma$	730,304	0,209	1,195	0,482	0,482
Cv	0,421	0,066	2,145	0,066	0,151
Cs	0,373	-0,754	-0,050	-0,082	-0,754
Резултати прорачуна					
вероватноћа	Пирсон III	Лог-Пирсон III	Гумбел	Лог-нормална III	Лог-нормална II
0,01	5047	4656	7020	9409	9409
0,05	4590	4392	6037	7653	7653
0,1	4383	4256	5613	6948	6948
0,2	4168	4103	5190	6272	6272
0,5	3869	3871	4629	5422	5422
<b>1</b>	<b>3630</b>	<b>3669</b>	<b>4204</b>	<b>4807</b>	<b>4807</b>
2	3375	3439	3777	4215	4215
2,5	3289	3359	3639	4028	4028
4	3101	3175	3347	3642	3642
5	3007	3082	3208	3461	3461
10	2694	2757	2768	2904	2904
20	2331	2366	2310	2349	2349
30	2081	2091	2023	2016	2016
40	1875	1865	1804	1769	1769
42,9624	1818	1803	1746	1705	1705
50	1688	1662	1617	1565	1565
57,0376	1561	1527	1496	1437	1437
60	1508	1471	1447	1385	1385
70	1320	1278	1280	1216	1216
80	1110	1072	1102	1043	1043
90	831,8	822,4	883,6	843,8	843,8
95	614,8	647,8	722,9	708,2	708,2
96	553,6	602,2	679,0	673,0	673,0
97,5	435,4	519,0	595,7	608,4	608,4
98	383,6	484,6	559,8	581,5	581,5
99	237,0	394,1	460,1	509,8	509,8
99,5	108,1	323,2	374,5	452,0	452,0
99,8	0,0	251,1	277,0	390,7	390,7
99,9	0,0	208,7	212,4	352,7	352,7
99,95	0,0	174,2	154,0	320,3	320,3
99,99	0,0	115,9	36,6	260,5	260,5

Тестови					
$\chi^2$ тест					
критеријум	7,779	7,779	9,236	7,779	9,236
резултат	7,754	5,640	8,105	8,956	8,956
поређење	ДА	ДА	ДА	НЕ	ДА
Колмогоров - Смирнов					
критеријум	0,1347	0,1347	0,1347	0,1347	0,1347
резултат	0,0363	0,0403	0,0553	0,0889	0,0889
поређење	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА
nø2					
критеријум	0,3473	0,3473	0,3473	0,3473	0,3473
резултат	0,0272	0,0524	0,1057	0,2114	0,2114
поређење	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА

## РАСПОДЕЛЕ ВЕРОВАТНОЋА ПОЈАВЕ МАКСИМАЛНИХ ГОДИШЊИХ ПРОТОКА

Река Тиса, х. с. Сента

период 1931-2014.

Статистички параметри					
	основни низ	логаритми	Гумбел	Лог-нормална III	Лог-нормална II
Хср	2154	3,316	0,557	7,636	7,636
$\sigma$	604,787	0,123	1,195	0,282	0,282
Cv	0,281	0,037	2,145	0,037	0,085
Cs	0,627	-0,183	-0,002	-0,004	-0,183
Резултати прорачуна					
вероватноћа	Пирсон III	Лог Пирсон III	Гумбел	Лог-нормална III	Лог-нормална II
0,01	5243	5314	6532	5922	5922
0,05	4778	4827	5718	5247	5247
0,1	4570	4611	5367	4959	4959
0,2	4356	4389	5016	4671	4671
0,5	4063	4086	4552	4288	4288
<b>1</b>	<b>3831</b>	<b>3847</b>	<b>4200</b>	<b>3997</b>	<b>3997</b>
2	3589	3598	3846	3701	3701
2,5	3507	3516	3732	3604	3604
4	3331	3336	3490	3397	3397
5	3244	3248	3375	3297	3297
10	2958	2958	3011	2976	2976
20	2636	2634	2631	2628	2628
30	2420	2417	2394	2403	2403
40	2246	2243	2212	2226	2226
42,9624	2198	2197	2164	2179	2179
50	2091	2090	2057	2072	2072
57,0376	1988	1988	1957	1971	1971
60	1945	1945	1916	1929	1929
70	1797	1799	1778	1787	1787
80	1636	1639	1631	1634	1634
90	1431	1436	1450	1443	1443
95	1278	1284	1317	1302	1302
96	1236	1242	1281	1264	1264
97,5	1157	1163	1212	1191	1191
98	1123	1129	1182	1160	1160
99	1029	1035	1099	1074	1074
99,5	949	954	1028	1001	1001
99,8	860,3	863,4	947,7	919,3	919,3
99,9	803,0	804,2	894,2	865,9	865,9
99,95	752,3	751,4	845,8	818,3	818,3
99,99	655,0	648,3	748,6	725,0	725,0

Тестови					
$\chi^2$ тест					
критеријум	7,779	7,779	9,236	7,779	9,236
резултат	2,858	2,769	1,934	2,013	2,013
поређење	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА
Колмогоров - Смирнов					
критеријум	0,1347	0,1347	0,1347	0,1347	0,1347
резултат	0,0251	0,0247	0,0251	0,0191	0,0191
поређење	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА
$\omega^2$					
критеријум	0,3473	0,3473	0,3473	0,3473	0,3473
резултат	0,0384	0,0360	0,0292	0,0271	0,0271
поређење	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА

## РАСПОДЕЛЕ ВЕРОВАТНОЋА ПОЈАВЕ ОДГОВАРАЈУЋИХ ПРОТОКА

Река Дунав, х.с. Богојево

чвор 2, комбинација 3

период 1931-2014.

Статистички параметри					
	основни низ	логаритми	Гумбел	Лог-нормална III	Лог-нормална II
Хср	4048	3,585	0,557	8,212	8,255
$\sigma$	1335,042	0,140	1,195	0,336	0,322
Cv	0,330	0,039	2,145	0,041	0,090
Cs	0,946	0,036	0,000	0,000	0,036
Резултати прорачуна					
вероватноћа	Пирсон III	Лог-Пирсон III	Гумбел	Лог-нормална III	Лог-нормална II
0,01	11837	13043	13712	12991	12726
0,05	10558	11297	11914	11272	11087
0,1	9994	10566	11140	10549	10395
0,2	9420	9845	10365	9835	9709
0,5	8642	8904	9340	8900	8809
<b>1</b>	<b>8036</b>	<b>8198</b>	<b>8563</b>	<b>8198</b>	<b>8129</b>
2	7410	7492	7783	7494	7447
2,5	7203	7264	7531	7267	7225
4	6757	6781	6998	6784	6755
5	6540	6550	6743	6553	6529
10	5836	5815	5939	5818	5808
20	5067	5039	5101	5040	5042
30	4568	4546	4577	4547	4552
40	4177	4165	4176	4164	4172
42,9624	4073	4064	4070	4063	4071
50	3840	3838	3835	3837	3846
57,0376	3621	3626	3614	3624	3632
60	3530	3538	3523	3537	3545
70	3227	3244	3218	3243	3249
80	2909	2932	2894	2930	2933
90	2528	2549	2494	2549	2546
95	2264	2273	2200	2274	2265
96	2195	2198	2120	2200	2189
97,5	2068	2058	1967	2061	2047
98	2015	1998	1902	2002	1986
99	1876	1835	1720	1840	1819
99,5	1765	1697	1563	1704	1679
99,8	1651	1544	1385	1554	1523
99,9	1582	1446	1267	1458	1423
99,95	1526	1359	1160	1373	1334
99,99	1428,2	1190,6	945,5	1209	1162

Тестови					
$\chi^2$ тест					
критеријум	7,779	7,779	9,236	7,779	9,236
резултат	5,627	4,693	4,980	4,319	5,195
поређење	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА
Колмогоров - Смирнов					
критеријум	0,1347	0,1347	0,1347	0,1347	0,1347
резултат	0,0426	0,0377	0,0449	0,0638	0,0638
поређење	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА
nø2					
критеријум	0,3473	0,3473	0,3473	0,3473	0,3473
резултат	0,0602	0,0515	0,0609	0,0511	0,0502
поређење	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА



## РАСПОДЕЛЕ ВЕРОВАТНОЋА ПОЈАВЕ ОДГОВАРАЈУЋИХ ПРОТОКА

Река Дунав, х.с. Сланкамен

чвор 2, комбинација 3

период 1931-2014.

Статистички параметри					
	основни низ	логаритми	Гумбел	Лог-нормална III	Лог-нормална II
Хср	6017	3,766	0,557	8,672	8,672
$\sigma$	1503,314	0,108	1,195	0,249	0,249
Cv	0,250	0,029	2,145	0,029	0,066
Cs	0,574	-0,029	0,000	0,000	-0,029
Резултати прорачуна					
вероватноћа	Пирсон III	Лог-Пирсон III	Гумбел	Лог-нормална III	Лог-нормална II
0,01	13517	14501	16899	14725	14725
0,05	12405	13081	14875	13236	13236
0,1	11907	12464	14003	12592	12592
0,2	11395	11841	13130	11945	11945
0,5	10690	11004	11976	11079	11079
<b>1</b>	<b>10132</b>	<b>10357</b>	<b>11101</b>	<b>10412</b>	<b>10412</b>
2	9545	9691	10223	9729	9729
2,5	9348	9472	9939	9505	9505
4	8920	9000	9338	9022	9022
5	8709	8770	9051	8788	8788
10	8012	8022	8146	8028	8028
20	7222	7198	7202	7196	7196
30	6689	6655	6612	6650	6650
40	6257	6223	6160	6216	6216
42,9624	6140	6106	6042	6099	6099
50	5873	5843	5777	5836	5836
57,0376	5616	5591	5528	5584	5584
60	5508	5486	5426	5480	5480
70	5137	5127	5082	5122	5122
80	4728	4735	4717	4733	4733
90	4206	4239	4267	4242	4242
95	3812	3868	3936	3876	3876
96	3704	3766	3845	3775	3775
97,5	3498	3571	3674	3583	3583
98	3408	3487	3600	3501	3501
99	3161	3254	3395	3271	3271
99,5	2950	3053	3219	3074	3074
99,8	2712	2826	3018	2851	2851
99,9	2557	2677	2885	2705	2705
99,95	2419	2543	2765	2573	2573
99,99	2150	2277	2523	2313	2313

Тестови					
$\chi^2$ тест					
критеријум	7,779	7,779	9,236	7,779	9,236
резултат	3,466	2,502	1,729	2,342	2,342
поређење	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА
Колмогоров - Смирнов					
критеријум	0,1347	0,1347	0,1347	0,1347	0,1347
резултат	0,0308	0,0225	0,0161	0,0207	0,0207
поређење	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА
n02					
критеријум	0,3473	0,3473	0,3473	0,3473	0,3473
резултат	0,0227	0,0227	0,0342	0,0236	0,0236
поређење	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА

## РАСПОДЕЛЕ ВЕРОВАТНОЋА ПОЈАВЕ МАКСИМАЛНИХ ГОДИШЊИХ ПРОТОКА

Река Дунав, х. с. Сланкамен

период 1931-2014.

Статистички параметри					
	основни низ	логаритми	Гумбел	Лог-нормална III	Лог-нормална II
Хср	6969	3,835	0,558	8,831	8,831
$\sigma$	1369,044	0,083	1,197	0,191	0,191
Cv	0,196	0,022	2,146	0,022	0,050
Cs	0,692	0,240	0,001	0,002	0,240
Резултати прорачуна					
вероватноћа	Пирсон III	Лог-Пирсон III	Гумбел	Лог-нормална III	Лог-нормална II
0,01	14164	15407	16867	13943	13943
0,05	13058	13859	15026	12845	12845
0,1	12566	13204	14233	12362	12362
0,2	12061	12552	13439	11870	11870
0,5	11371	11694	12389	11203	11203
<b>1</b>	<b>10827</b>	<b>11043</b>	<b>11593</b>	<b>10681</b>	<b>10681</b>
2	10258	10385	10795	10138	10138
2,5	10069	10171	10537	9957	9957
4	9658	9713	9990	9566	9566
5	9456	9492	9729	9374	9374
10	8793	8783	8905	8745	8745
20	8052	8017	8047	8038	8038
30	7557	7521	7510	7565	7565
40	7161	7130	7099	7182	7182
42,9624	7054	7026	6991	7079	7079
50	6812	6790	6750	6842	6842
57,0376	6580	6566	6524	6614	6614
60	6484	6473	6431	6518	6518
70	6154	6156	6119	6189	6189
80	5796	5814	5787	5824	5824
90	5347	5383	5377	5354	5354
95	5016	5062	5076	4994	4994
96	4927	4975	4994	4894	4894
97,5	4758	4807	4838	4702	4702
98	4685	4735	4771	4618	4618
99	4488	4535	4584	4383	4383
99,5	4322	4363	4424	4179	4179
99,8	4140	4168	4241	3944	3944
99,9	4024	4040	4120	3787	3787
99,95	3923	3924	4011	3645	3645
99,99	3732	3695	3791	3358	3358

Тестови					
$\chi^2$ тест					
критеријум	7,779	7,779	9,236	7,779	9,236
резултат	4,325	3,844	3,900	5,502	5,502
поређење	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА
Колмогоров - Смирнов					
критеријум	0,1331	0,1331	0,1331	0,1331	0,1331
резултат	0,0233	0,0304	0,0413	0,0271	0,0271
поређење	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА
$\rho^2$					
критеријум	0,3473	0,3473	0,3473	0,3473	0,3473
резултат	0,0441	0,0541	0,0606	0,0550	0,0550
поређење	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА

## ВЕРОВАТНОЋА ПОЈАВЕ ОДГОВАРАЈУЋИХ ПРОТОКА

Река Дунав, х.с. Смедерево

чвор 3, комбинација 1

период 1931-2014.

Статистички параметри					
	основни низ	логаритми	Гумбел	Лог-нормална III	Лог-нормална II
Хср	9143	3,951	0,558	9,097	9,097
$\sigma$	2017,612	0,096	1,197	0,220	0,220
Cv	0,221	0,024	2,146	0,024	0,056
Cs	0,436	-0,001	0,000	0,000	-0,001
Резултати прорачуна					
вероватноћа	Пирсон III	Лог-Пирсон III	Гумбел	Лог-нормална III	Лог-нормална II
0,01	18583	20230	23731	20235	20235
0,05	17249	18411	21017	18415	18415
0,1	16646	17618	19848	17621	17621
0,2	16023	16815	18679	16817	16817
0,5	15161	15733	17131	15735	15735
<b>1</b>	<b>14472</b>	<b>14893</b>	<b>15958</b>	<b>14895</b>	<b>14895</b>
2	13742	14027	14781	14027	14027
2,5	13496	13740	14401	13741	13741
4	12959	13122	13595	13123	13123
5	12692	12820	13210	12821	12821
10	11804	11835	11997	11836	11836
20	10784	10744	10732	10744	10744
30	10086	10019	9941	10019	10019
40	9513	9439	9335	9439	9439
42,9624	9356	9283	9176	9283	9283
50	8997	8928	8821	8927	8927
57,0376	8647	8586	8487	8586	8586
60	8500	8444	8350	8443	8443
70	7989	7955	7890	7955	7955
80	7417	7418	7401	7418	7418
90	6670	6734	6797	6734	6734
95	6093	6216	6353	6217	6217
96	5931	6073	6232	6073	6073
97,5	5621	5800	6002	5800	5800
98	5485	5681	5903	5682	5682
99	5103	5350	5628	5351	5351
99,5	4771	5065	5392	5065	5065
99,8	4387	4738	5123	4739	4739
99,9	4132	4522	4945	4523	4523
99,95	3900	4327	4783	4328	4328
99,99	3434	3938	4460	3939	3939

Тестови					
<b><math>\chi^2</math> тест</b>					
критеријум	7,779	7,779	9,236	7,779	9,236
резултат	11,245	10,506	10,582	10,738	10,738
поређење	НЕ	НЕ	НЕ	НЕ	НЕ
<b>Колмогоров - Смирнов</b>					
критеријум	0,1331	0,1331	0,1331	0,1331	0,1331
резултат	0,0583	0,0615	0,0639	0,0657	0,0657
поређење	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА
<b><math>\rho_2</math></b>					
критеријум	0,3473	0,3473	0,3473	0,3473	0,3473
резултат	0,1119	0,0868	0,0629	0,0919	0,0919
поређење	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА

## РАСПОДЕЛЕ ВЕРОВАТНОЋА ПОЈАВЕ ОДГОВАРАЈУЋИХ ПРОТОКА

Река Сава, х.с. Сремска Митровица

чвор 3, комбинација 1

период 1931-2014.

Статистички параметри					
	основни низ	логаритми	Гумбел	Лог-нормална III	Лог-нормална II
Хср	2395	3,324	0,558	7,653	7,653
$\sigma$	1100,838	0,237	1,197	0,546	0,546
Cv	0,460	0,071	2,146	0,071	0,164
Cs	0,255	-0,740	-0,070	-0,116	-0,740
Резултати прорачуна					
вероватноћа	Пирсон III	Лог-Пирсон III	Гумбел	Лог-нормална III	Лог-нормална II
0,01	7101	7338	10355	16063	16063
0,05	6483	6852	8874	12711	12711
0,1	6200	6604	8236	11394	11394
0,2	5906	6329	7598	10148	10148
0,5	5494	5917	6754	8603	8603
<b>1</b>	<b>5160</b>	<b>5562</b>	<b>6114</b>	<b>7508</b>	<b>7508</b>
2	4804	5162	5472	6469	6469
2,5	4683	5023	5264	6146	6146
4	4415	4709	4825	5482	5482
5	4282	4550	4615	5174	5174
10	3833	4006	3952	4243	4243
20	3305	3364	3262	3337	3337
30	2937	2923	2831	2806	2806
40	2630	2566	2500	2420	2420
42,9624	2545	2470	2413	2322	2322
50	2349	2253	2219	2107	2107
57,0376	2155	2046	2037	1913	1913
60	2074	1960	1963	1835	1835
70	1786	1673	1712	1582	1582
80	1458	1372	1445	1331	1331
90	1018	1017	1115	1047	1047
95	667,9	777,0	873,1	858,2	858,2
96	568,1	715,8	807,0	810,0	810,0
97,5	373,7	605,4	681,6	722,5	722,5
98	287,8	560,4	627,6	686,4	686,4
99	42,4	444,3	477,6	591,5	591,5
99,5	0,0	355,5	348,6	516,1	516,1
99,8	0,0	267,8	201,9	437,6	437,6
99,9	0,0	217,6	104,6	389,7	389,7
99,95	0,0	177,6	16,6	349,3	349,3
99,99	0,0	112,6	0,0	276,5	276,5

Тестови					
$\chi^2$ тест					
критеријум	7,779	7,779	9,236	7,779	9,236
резултат	16,071	15,871	20,459	25,978	25,978
поређење	НЕ	НЕ	НЕ	НЕ	НЕ
Колмогоров - Смирнов					
критеријум	0,1331	0,1331	0,1331	0,1331	0,1331
резултат	0,0670	0,0677	0,0926	0,0971	0,0971
поређење	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА
$n\omega^2$					
критеријум	0,3473	0,3473	0,3473	0,3473	0,3473
резултат	0,0971	0,1212	0,2140	0,3024	0,3024
поређење	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА

## РАСПОДЕЛЕ ВЕРОВАТНОЋА ПОЈАВЕ МАКСИМАЛНИХ ГОДИШЊИХ ПРОТОКА

## Река Дунав, х. с. Смедерево

период 1931-2014.

Статистички параметри					
	основни низ	логаритми	Гумбел	Лог-нормална III	Лог-нормална II
Хср	10042	3,995	0,558	9,198	9,198
σ	1856,893	0,080	1,197	0,184	0,184
Cv	0,185	0,020	2,146	0,020	0,046
Cs	0,436	-0,015	0,000	0,000	-0,015
Резултати прорачуна					
вероватноћа	Пирсон III	Лог-Пирсон III	Гумбел	Лог-нормална III	Лог-нормална II
0,01	18729	19477	23468	19594	19594
0,05	17502	18024	20970	18106	18106
0,1	16947	17381	19894	17450	17450
0,2	16374	16725	18818	16782	16782
0,5	15580	15831	17394	15873	15873
<b>1</b>	<b>14946</b>	<b>15128</b>	<b>16315</b>	<b>15160</b>	<b>15160</b>
2	14275	14395	15231	14417	14417
2,5	14049	14151	14881	14170	14170
4	13554	13621	14140	13634	13634
5	13309	13360	13786	13371	13371
10	12492	12501	12669	12505	12505
20	11553	11533	11504	11532	11532
30	10910	10881	10777	10877	10877
40	10382	10352	10219	10347	10347
42,9624	10238	10208	10073	10203	10203
50	9908	9880	9746	9876	9876
57,0376	9586	9562	9439	9558	9558
60	9450	9429	9313	9425	9425
70	8980	8969	8889	8966	8966
80	8453	8458	8439	8457	8457
90	7766	7797	7883	7799	7799
95	7235	7288	7475	7294	7294
96	7086	7146	7363	7153	7153
97,5	6800	6873	7152	6882	6882
98	6675	6755	7061	6765	6765
99	6324	6420	6807	6433	6433
99,5	6018	6128	6590	6144	6144
99,8	5665	5792	6342	5811	5811
99,9	5430	5566	6178	5589	5589
99,95	5216	5361	6030	5386	5386
99,99	4787	4947	5732	4977	4977

Тестови					
$\chi^2$ тест					
критеријум	7,779	7,779	9,236	7,779	9,236
резултат	3,596	3,055	1,764	2,975	2,975
поређење	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА
Колмогоров - Смирнов					
критеријум	0,1331	0,1331	0,1331	0,1331	0,1331
резултат	0,0361	0,0332	0,0260	0,0311	0,0311
поређење	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА
$\rho^2$					
критеријум	0,3473	0,3473	0,3473	0,3473	0,3473
резултат	0,0686	0,0583	0,0340	0,0565	0,0565
поређење	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА

## РАСПОДЕЛЕ ВЕРОВАТНОЋА ПОЈАВЕ ОДГОВАРАЈУЋИХ ПРОТОКА

Река Дунав, х.с. Сланкамен

чвор 3, комбинација 2

период 1931-2014.

Статистички параметри					
	основни низ	логаритми	Гумбел	Лог-нормална III	Лог-нормална II
Хср	6279	3,784	0,558	8,713	8,713
$\sigma$	1600,634	0,112	1,197	0,259	0,259
Cv	0,255	0,030	2,146	0,030	0,068
Cs	0,499	-0,238	-0,002	-0,004	-0,238
Резултати прорачуна					
вероватноћа	Пирсон III	Лог- Пирсон III	Гумбел	Лог-нормална III	Лог-нормална II
0,01	13994	13983	17852	15905	15905
0,05	12879	12889	15699	14236	14236
0,1	12377	12394	14771	13518	13518
0,2	11860	11880	13844	12796	12796
0,5	11146	11168	12616	11834	11834
<b>1</b>	<b>10577</b>	<b>10599</b>	<b>11686</b>	<b>11094</b>	<b>11094</b>
2	9977	9997	10752	10339	10339
2,5	9776	9795	10450	10091	10091
4	9336	9352	9811	9560	9560
5	9119	9133	9506	9302	9302
10	8396	8406	8543	8467	8467
20	7573	7575	7539	7557	7557
30	7012	7011	6912	6962	6962
40	6555	6552	6431	6490	6490
42,9624	6431	6427	6305	6364	6364
50	6146	6141	6023	6079	6079
57,0376	5870	5865	5758	5806	5806
60	5754	5749	5650	5693	5693
70	5353	5349	5285	5308	5308
80	4908	4907	4896	4890	4890
90	4332	4338	4417	4364	4364
95	3892	3906	4065	3972	3972
96	3770	3787	3969	3865	3865
97,5	3535	3559	3787	3662	3662
98	3434	3460	3709	3574	3574
99	3149	3184	3490	3330	3330
99,5	2903	2947	3303	3122	3122
99,8	2623	2679	3090	2888	2888
99,9	2438	2502	2948	2733	2733
99,95	2272	2343	2820	2595	2595
99,99	1942	2031	2563	2323	2323

Тестови					
$\chi^2$ тест					
критеријум	7,779	7,779	9,236	7,779	9,236
резултат	5,716	5,443	3,850	4,176	4,176
поређење	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА
Колмогоров - Смирнов					
критеријум	0,1331	0,1331	0,1331	0,1331	0,1331
резултат	0,0543	0,0528	0,0349	0,0391	0,0391
поређење	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА
nø2					
критеријум	0,3473	0,3473	0,3473	0,3473	0,3473
резултат	0,0519	0,0505	0,0443	0,0413	0,0413
поређење	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА

## РАСПОДЕЛЕ ВЕРОВАТНОЋА ПОЈАВЕ ОДГОВАРАЈУЋИХ ПРОТОКА

Река Сава, х.с. Сремска Митровица

чвор 3, комбинација 2

период 1931-2014.

Статистички параметри					
	основни низ	логаритми	Гумбел	Лог-нормална III	Лог-нормална II
Хср	3316	3,504	0,558	8,069	8,069
$\sigma$	849,800	0,127	1,197	0,293	0,293
Cv	0,256	0,036	2,146	0,036	0,084
Cs	0,033	-1,528	-0,022	-0,037	-1,528
Резултати прорачуна					
вероватноћа	Пирсон III	Лог-Пирсон III	Гумбел	Лог-нормална III	Лог-нормална II
0,01	6536	4680	9460	9489	9489
0,05	6158	4670	8317	8370	8370
0,1	5981	4662	7825	7893	7893
0,2	5795	4650	7332	7418	7418
0,5	5531	4623	6680	6790	6790
<b>1</b>	<b>5313</b>	<b>4591</b>	<b>6186</b>	<b>6311</b>	<b>6311</b>
2	5076	4542	5691	5827	5827
2,5	4994	4521	5530	5669	5669
4	4813	4466	5191	5332	5332
5	4721	4434	5029	5170	5170
10	4408	4294	4518	4648	4648
20	4030	4064	3985	4086	4086
30	3758	3853	3652	3724	3724
40	3527	3646	3397	3440	3440
42,9624	3462	3583	3330	3364	3364
50	3311	3430	3180	3194	3194
57,0376	3161	3269	3040	3032	3032
60	3096	3197	2982	2965	2965
70	2867	2933	2788	2739	2739
80	2599	2612	2582	2496	2496
90	2230	2162	2328	2194	2194
95	1926	1802	2141	1973	1973
96	1838	1701	2090	1913	1913
97,5	1663	1509	1993	1799	1799
98	1585	1426	1951	1750	1750
99	1359	1199	1835	1616	1616
99,5	1153	1010	1736	1502	1502
99,8	903	807	1623	1375	1375
99,9	729	682	1547	1292	1292
99,95	564	577	1480	1218	1218
99,99	214	393	1343	1075	1075

Тестови					
$\chi^2$ тест					
критеријум	7,779	7,779	9,236	7,779	9,236
резултат	2,032	8,497	25,398	7,406	7,406
поређење	ДА	НЕ	НЕ	ДА	ДА
Колмогоров - Смирнов					
критеријум	0,1331	0,1331	0,1331	0,1331	0,1331
резултат	0,0246	0,0718	0,0711	0,0796	0,0796
поређење	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА
$n\omega^2$					
критеријум	0,3473	0,3473	0,3473	0,3473	0,3473
резултат	0,0760	0,2898	0,1114	0,1554	0,1554
поређење	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА

## РАСПОДЕЛЕ ВЕРОВАТНОЋА ПОЈАВЕ МАКСИМАЛНИХ ГОДИШЊИХ ПРОТОКА

Река Сава, х. с. Сремска Митровица

чвор 3 комбинација 3

период 1931-2014.

Статистички параметри					
	основни низ	логаритми	Гумбел	Лог-нормална III	Лог-нормална II
Хср	4212	3,617	0,557	8,328	8,328
σ	813,394	0,082	1,196	0,189	0,189
Cv	0,193	0,023	2,146	0,023	0,052
Cs	0,620	0,172	0,001	0,001	0,172
Резултати прорачуна					
вероватноћа	Пирсон III	Лог-Пирсон III	Гумбел	Лог-нормална III	Лог-нормална II
0,01	8353	8977	10096	8365	8365
0,05	7731	8140	9002	7713	7713
0,1	7452	7781	8530	7426	7426
0,2	7166	7423	8059	7134	7134
0,5	6774	6946	7434	6737	6737
<b>1</b>	<b>6464</b>	<b>6581</b>	<b>6961</b>	<b>6426</b>	<b>6426</b>
2	6138	6209	6486	6103	6103
2,5	6030	6087	6333	5996	5996
4	5793	5826	6008	5763	5763
5	5677	5699	5853	5649	5649
10	5293	5290	5363	5273	5273
20	4861	4843	4853	4852	4852
30	4570	4550	4534	4569	4569
40	4336	4318	4290	4341	4341
42,9624	4273	4256	4225	4279	4279
50	4128	4115	4082	4137	4137
57,0376	3990	3980	3947	4001	4001
60	3932	3924	3892	3944	3944
70	3733	3732	3707	3746	3746
80	3515	3523	3509	3528	3528
90	3238	3258	3266	3246	3246
95	3032	3059	3087	3030	3030
96	2975	3005	3038	2970	2970
97,5	2868	2900	2945	2855	2855
98	2822	2855	2905	2805	2805
99	2694	2729	2794	2664	2664
99,5	2586	2620	2699	2541	2541
99,8	2466	2496	2590	2399	2399
99,9	2387	2414	2518	2305	2305
99,95	2319	2339	2453	2219	2219
99,99	2186	2191	2323	2046	2046

Тестови					
$\chi^2$ тест					
критеријум	7,779	7,779	9,236	7,779	9,236
резултат	3,580	2,974	2,580	3,562	3,562
поређење	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА
Колмогоров - Смирнов					
критеријум	0,1339	0,1339	0,1339	0,1339	0,1339
резултат	0,0410	0,0359	0,0312	0,0332	0,0332
поређење	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА
$po^2$					
критеријум	0,3473	0,3473	0,3473	0,3473	0,3473
резултат	0,0476	0,0419	0,0296	0,0587	0,0587
поређење	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА



## РАСПОДЕЛЕ ВЕРОВАТНОЋА ПОЈАВЕ МАКСИМАЛНИХ ГОДИШЊИХ ПРОТОКА

Река Сава, х. с. Сремска Митровица

чвор 3 комбинација За

период 1931-2014.

Статистички параметри					
	основни низ	логаритми	Гумбел	Лог-нормална III	Лог-нормална II
Хср	4200	3,615	0,558	8,325	8,325
σ	815,547	0,083	1,197	0,190	0,190
Cv	0,194	0,023	2,146	0,023	0,053
Cs	0,630	0,188	0,001	0,001	0,188
Резултати прорачуна					
вероватноћа	Пирсон III	Лог-Пирсон III	Гумбел	Лог-нормална III	Лог-нормална II
0,01	8371	9040	10097	8365	8365
0,05	7742	8180	9000	7710	7710
0,1	7461	7813	8527	7422	7422
0,2	7172	7447	8055	7129	7129
0,5	6777	6960	7429	6731	6731
<b>1</b>	<b>6464</b>	<b>6589</b>	<b>6955</b>	<b>6419</b>	<b>6419</b>
2	6136	6211	6479	6095	6095
2,5	6026	6088	6325	5987	5987
4	5788	5823	6000	5754	5754
5	5671	5695	5844	5639	5639
10	5285	5281	5354	5263	5263
20	4850	4831	4842	4841	4841
30	4558	4537	4523	4558	4558
40	4323	4304	4278	4329	4329
42,9624	4260	4242	4214	4267	4267
50	4115	4101	4070	4125	4125
57,0376	3976	3966	3935	3988	3988
60	3918	3910	3880	3931	3931
70	3719	3718	3694	3734	3734
80	3501	3510	3496	3515	3515
90	3225	3247	3252	3233	3233
95	3020	3049	3073	3018	3018
96	2963	2995	3024	2957	2957
97,5	2857	2892	2931	2842	2842
98	2811	2847	2891	2792	2792
99	2685	2722	2779	2651	2651
99,5	2578	2615	2684	2528	2528
99,8	2458	2492	2575	2387	2387
99,9	2381	2412	2503	2293	2293
99,95	2313	2339	2438	2207	2207
99,99	2183	2193	2307	2034	2034

Тестови					
$\chi^2$ тест					
критеријум	7,779	7,779	9,236	7,779	9,236
резултат	3,172	2,607	2,365	3,268	3,268
поређење	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА
Колмогоров - Смирнов					
критеријум	0,1331	0,1331	0,1331	0,1331	0,1331
резултат	0,0350	0,0298	0,0257	0,0321	0,0321
поређење	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА
$po^2$					
критеријум	0,3473	0,3473	0,3473	0,3473	0,3473
резултат	0,0461	0,0404	0,0287	0,0596	0,0596
поређење	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА

## РАСПОДЕЛЕ ВЕРОВАТНОЋА ПОЈАВЕ ОДГОВАРАЈУЋИХ ПРОТОКА

Река Дунав, х.с. Сланкамен

чвор 3, комбинација 3

период 1931-2014.

Статистички параметри					
	основни низ	логаритми	Гумбел	Лог-нормална III	Лог-нормална II
Хср	4670	3,647	0,557	8,398	8,398
$\sigma$	1413,270	0,146	1,196	0,336	0,336
Cv	0,303	0,040	2,146	0,040	0,092
Cs	0,122	-0,850	-0,019	-0,031	-0,850
Резултати прорачуна					
вероватноћа	Пирсон III	Лог-Пирсон III	Гумбел	Лог-нормална III	Лог-нормална II
0,01	10299	9011	14895	15489	15489
0,05	9605	8726	12993	13411	13411
0,1	9285	8571	12173	12538	12538
0,2	8948	8392	11354	11676	11676
0,5	8472	8108	10269	10547	10547
<b>1</b>	<b>8084</b>	<b>7849</b>	<b>9447</b>	<b>9699</b>	<b>9699</b>
2	7664	7541	8622	8850	8850
2,5	7521	7430	8356	8575	8575
4	7203	7171	7791	7993	7993
5	7043	7035	7521	7714	7714
10	6499	6546	6671	6827	6827
20	5850	5915	5784	5889	5889
30	5390	5443	5230	5293	5293
40	5001	5034	4805	4832	4832
42,9624	4893	4919	4694	4710	4710
50	4642	4651	4445	4438	4438
57,0376	4392	4385	4211	4181	4181
60	4286	4272	4115	4075	4075
70	3909	3873	3792	3721	3721
80	3473	3421	3449	3344	3344
90	2879	2831	3026	2885	2885
95	2396	2384	2715	2553	2553
96	2257	2261	2630	2464	2464
97,5	1983	2030	2469	2297	2297
98	1861	1931	2400	2225	2225
99	1510	1661	2207	2030	2030
99,5	1192	1436	2041	1867	1867
99,8	811	1193	1853	1687	1687
99,9	547	1040	1728	1571	1571
99,95	300	910	1615	1468	1468
99,99	0	672	1388	1271	1271

Тестови					
$\chi^2$ тест					
критеријум	7,779	7,779	9,236	7,779	9,236
резултат	2,064	4,387	4,246	5,101	5,101
поређење	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА
Колмогоров - Смирнов					
критеријум	0,1339	0,1339	0,1339	0,1339	0,1339
резултат	0,0285	0,0335	0,0548	0,0671	0,0671
поређење	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА
nø2					
критеријум	0,3473	0,3473	0,3473	0,3473	0,3473
резултат	0,0187	0,0276	0,0905	0,1088	0,1088
поређење	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА

## РАСПОДЕЛЕ ВЕРОВАТНОЋА ПОЈАВЕ ОДГОВАРАЈУЋИХ ПРОТОКА

Река Дунав, х.с. Смедерево

чвор 3, комбинација 3

период 1931-2014.

Статистички параметри					
	основни низ	логаритми	Гумбел	Лог-нормална III	Лог-нормална II
Хср	8365	3,912	0,558	9,009	9,009
$\sigma$	1755,358	0,097	1,197	0,223	0,223
Cv	0,210	0,025	2,146	0,025	0,057
Cs	-0,001	-0,670	-0,004	-0,007	-0,670
Резултати прорачуна					
вероватноћа	Пирсон III	Лог-Пирсон III	Гумбел	Лог-нормална III	Лог-нормална II
0,01	14889	13954	21057	18705	18705
0,05	14138	13505	18696	17003	17003
0,1	13787	13275	17679	16262	16262
0,2	13415	13017	16661	15512	15512
0,5	12885	12624	15315	14502	14502
<b>1</b>	<b>12448</b>	<b>12279</b>	<b>14295</b>	<b>13718</b>	<b>13718</b>
2	11969	11881	13271	12910	12910
2,5	11805	11739	12940	12644	12644
4	11438	11414	12239	12068	12068
5	11252	11246	11904	11787	11787
10	10615	10648	10848	10871	10871
20	9843	9891	9748	9857	9857
30	9286	9327	9060	9184	9184
40	8810	8838	8533	8647	8647
42,9624	8677	8699	8394	8501	8501
50	8366	8377	8085	8172	8172
57,0376	8054	8053	7795	7856	7856
60	7921	7914	7676	7724	7724
70	7445	7421	7275	7272	7272
80	6888	6850	6849	6776	6776
90	6116	6075	6324	6144	6144
95	5478	5459	5938	5666	5666
96	5292	5284	5833	5534	5534
97,5	4924	4946	5633	5282	5282
98	4759	4797	5547	5173	5173
99	4280	4378	5307	4868	4868
99,5	3842	4012	5102	4605	4605
99,8	3311	3591	4868	4306	4306
99,9	2938	3312	4713	4107	4107
99,95	2586	3061	4572	3928	3928
99,99	1833	2564	4291	3570	3570

Тестови					
$\chi^2$ тест					
критеријум	7,779	7,779	9,236	7,779	9,236
резултат	4,879	5,458	19,504	8,811	8,811
поређење	ДА	ДА	НЕ	НЕ	ДА
Колмогоров - Смирнов					
критеријум	0,1331	0,1331	0,1331	0,1331	0,1331
резултат	0,0440	0,0519	0,0717	0,0491	0,0491
поређење	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА
nø2					
критеријум	0,3473	0,3473	0,3473	0,3473	0,3473
резултат	0,1021	0,1182	0,3376	0,2395	0,2395
поређење	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА

## **ПРИЛОГ 5**

Теоријске вредности максималних и одговарајућих протока  
(модел КОПУЛА)

## МАРГИНАЛНЕ РАСПОДЕЛЕ ВЕРОВАТНОЋА

Река:	Дунав
Х. С.	Бездан
Период	1931-2014.
Параметар модела	QMAX (m <sup>3</sup> /s)
N	79
MAX	8410
MIN	2790
Xsr	4937

## Статистички параметри

	EV1		GEV		Лог- нормална		Лог - Пирсон III	
	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM
$\xi$	-	-	4443,795	4443,651	-	-	4937,038	4937,038
$\beta$	4411,094	4412,891	954,136	966,143	8,479	8,479	1106,250	1136,020
$\omega$	938,749	908,062	-0,064	-0,072	0,225	0,226	0,448	0,460

## Резултати прорачуна

T(год)	EV1		GEV		Лог- нормална		Лог - Пирсон III	
	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM
2	4755	4746	4789	4802	4814	4814	4855	4850
5	5819	5775	5809	5974	5819	5820	5836	5859
10	6524	6456	6444	6803	6426	6427	6397	6437
20	7199	7110	7025	7641	6974	6976	6886	6942
50	8074	7956	7740	8793	7647	7650	7465	7540
<b>100</b>	<b>8729</b>	<b>8590</b>	<b>8248</b>	<b>9708</b>	<b>8132</b>	<b>8135</b>	<b>7868</b>	<b>7956</b>
500	10244	10055	9338	12006	9209	9213	8725	8844
1000	10895	10685	9774	13078	9660	9665	9070	9201

## Тестови

## Колмогоров - Смирнов

критеријум ( $\alpha=0,95$ )	0,0691							
резултат	0,0617	0,0647	0,0487	0,0476	0,0504	0,0505	0,0601	0,0635
поређење	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА

## Андерсон - Дарлинг

критеријум ( $\alpha=0,95$ )	0,7570							
резултат	0,4295	0,5119	0,3175	0,2942	0,2609	0,2603	0,2739	0,2643
поређење	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА

## RMSE

резултат	0,02561	0,02596	0,02213	0,02211	0,02163	0,02166	0,02435	0,02527
----------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------

## МАРГИНАЛНЕ РАСПОДЕЛЕ ВЕРОВАТНОЋА

Река:	Дунав
Х. С.	Богојево
Период	1931-2014.
Параметар модела	QODG1 (m <sup>3</sup> /s)
N	79
MAX	2940
MIN	9090
Xsr	5450

## Статистички параметри

	EV1		GEV		Лог- нормална		Лог - Пирсон III	
	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM
$\xi$	-	-	4902,721	4883,936	-	-	5449,570	5449,570
$\beta$	4864,850	4863,422	1058,717	1055,305	8,578	8,578	1229,456	1277,233
$\omega$	1041,269	1015,474	-0,068	-0,043	0,227	0,228	0,451	0,469

## Резултати прорачуна

T(год)	EV1		GEV		Лог- нормална		Лог - Пирсон III	
	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM
2	5246	5236	5286	5274	5311	5311	5357	5350
5	6427	6387	6413	6519	6430	6435	6448	6485
10	7208	7149	7113	7378	7106	7114	7073	7137
20	7958	7880	7752	8229	7717	7729	7617	7706
50	8928	8826	8534	9370	8468	8484	8261	8381
<b>100</b>	<b>9655</b>	<b>9535</b>	<b>9089</b>	<b>10256</b>	<b>9008</b>	<b>9029</b>	<b>8709</b>	<b>8852</b>
500	11335	11173	10275	12409	10211	10239	9664	9855
1000	12057	11878	10746	13381	10715	10747	10048	10259

## Тестови

## Колмогоров - Смирнов

критеријум ( $\alpha=0,95$ )	0,0714							
резултат	0,0475	0,0455	0,0449	0,0457	0,0481	0,0491	0,0583	0,0591
поређење	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА

## Андерсон - Дарлинг

критеријум ( $\alpha=0,95$ )	0,7570							
резултат	0,3168	0,3675	0,2981	0,2776	0,2855	0,2774	0,3616	0,2940
поређење	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА

## RMSE

резултат	0,01678	0,01653	0,01819	0,01684	0,02053	0,02056	0,02673	0,02652
----------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------

## МАРГИНАЛНЕ РАСПОДЕЛЕ ВЕРОВАТНОЋА

Река:	Драва
Х. С.	Д. Михољац
Период	1931-2014.
Параметар модела	QODG1 (m <sup>3</sup> /s)
N	79
MAX	2254
MIN	237
Xsr	756,5

## Статистички параметри

	EV1		GEV		Лог- нормална		Лог - Пирсон III	
	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM
$\xi$	-	-	615,658	608,418	-	-	756,519	756,519
$\beta$	624,472	621,950	214,521	201,632	6,556	6,556	286,145	309,116
$\omega$	219,903	233,134	0,074	0,138	0,378	0,370	0,756	0,817

## Резултати прорачуна

T(год)	EV1		GEV		Лог- нормална		Лог - Пирсон III	
	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM
2	705,1	707,4	695,4	680,5	703,1	703,1	720,8	714,9
5	954,3	971,6	956,0	881,5	966,3	960,2	981,0	997,0
10	1119	1147	1141	998	1141	1130	1139	1170
20	1278	1314	1328	1099	1309	1293	1280	1326
50	1483	1532	1586	1216	1528	1504	1453	1517
<b>100</b>	<b>1636</b>	<b>1694</b>	<b>1791</b>	<b>1295</b>	<b>1693</b>	<b>1664</b>	<b>1575</b>	<b>1654</b>
500	1991	2071	2308	1449	2086	2041	1843	1953
1000	2143	2232	2550	1505	2260	2208	1953	2076

## Тестови

## Колмогоров - Смирнов

критеријум ( $\alpha=0,95$ )	0,0719							
резултат	0,0812	0,0783	0,0658	0,0515	0,0730	0,0751	0,0930	0,0928
поређење	НЕ	НЕ	ДА	ДА	НЕ	НЕ	НЕ	НЕ

## Андерсон - Дарлинг

критеријум ( $\alpha=0,95$ )	0,7570							
резултат	0,3003	0,2271	0,2542	0,4479	0,2534	0,2859	0,4367	0,4491
поређење	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА

## RMSE

резултат	0,03270	0,03722	0,02821	0,02401	0,03396	0,03263	0,04673	0,04966
----------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------

## МАРГИНАЛНЕ РАСПОДЕЛЕ ВЕРОВАТНОЋА

Река:	Дунав
Х. С.	Богојево
Период	1931-2014.
Параметар модела	QMAX (m <sup>3</sup> /s)
N	79
MAX	9290
MIN	3010
Xsr	5634

## Статистички параметри

	EV1		GEV		Лог- нормална		Лог - Пирсон III	
	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM
$\xi$	-	-	5106,148	5093,571	-	-	5634,076	5634,076
$\beta$	5042,140	5045,565	1101,000	1107,861	8,612	8,612	1237,374	1269,933
$\omega$	1075,086	1019,568	-0,110	-0,098	0,222	0,223	0,439	0,451

## Резултати прорачуна

T(год)	EV1		GEV		Лог- нормална		Лог - Пирсон III	
	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM
2	5436	5419	5502	5507	5499	5499	5544	5539
5	6655	6575	6628	6884	6629	6636	6640	6666
10	7461	7340	7301	7884	7310	7322	7267	7310
20	8235	8074	7895	8915	7924	7941	7812	7873
50	9237	9024	8598	10363	8678	8700	8456	8538
<b>100</b>	<b>9988</b>	<b>9736</b>	<b>9080</b>	<b>11538</b>	<b>9219</b>	<b>9247</b>	<b>8905</b>	<b>9001</b>
500	11722	11381	10060	14583	10422	10460	9858	9987
1000	12468	12088	10431	16048	10924	10968	10241	10383

## Тестови

## Колмогоров - Смирнов

критеријум ( $\alpha=0,95$ )	0,0691							
резултат	0,0462	0,0469	0,0394	0,0416	0,0397	0,0410	0,0403	0,0456
поређење	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА

## Андерсон - Дарлинг

критеријум ( $\alpha=0,95$ )	0,7570							
резултат	0,2727	0,3563	0,2374	0,2086	0,2221	0,2158	0,3047	0,2658
поређење	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА

## RMSE

резултат	0,01782	0,01927	0,01394	0,01360	0,01356	0,01366	0,01755	0,01738
----------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------



## МАРГИНАЛНЕ РАСПОДЕЛЕ ВЕРОВАТНОЋА

Река: Дунав  
 X. C. Бездан  
 Период 1931-2014.  
 Параметар модела QODG1 (m<sup>3</sup>/s)  
 N 79  
 MAX 8210  
 MIN 1780  
 Xsr 4725

## Статистички параметри

	EV1		GEV		Лог- нормална		Лог - Пирсон III	
	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM
$\xi$	-	-	4253,994	4231,640	-	-	4725,038	4725,038
$\beta$	4177,367	4190,191	1053,566	1003,185	8,430	8,430	1158,135	1154,973
$\omega$	1051,393	926,598	-0,139	-0,094	0,252	0,245	0,490	0,489

## Резултати прорачуна

T(год)	EV1		GEV		Лог- нормална		Лог - Пирсон III	
	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM
2	4563	4530	4630	4606	4584	4584	4631	4631
5	5754	5580	5680	5847	5665	5634	5662	5660
10	6543	6275	6290	6745	6328	6276	6257	6252
20	7300	6942	6818	7667	6933	6860	6777	6771
50	8280	7806	7427	8957	7684	7583	7396	7388
<b>100</b>	<b>9014</b>	<b>8453</b>	<b>7835</b>	<b>10000</b>	<b>8230</b>	<b>8108</b>	<b>7828</b>	<b>7818</b>
500	10710	9948	8639	12688	9455	9282	8750	8737
1000	11440	10590	8933	13974	9973	9777	9122	9108

## Тестови

## Колмогоров - Смирнов

критеријум ( $\alpha=0,95$ )	0,0704							
резултат	0,0611	0,0659	0,0546	0,0433	0,0474	0,0468	0,0517	0,0513
поређење	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА

## Андерсон - Дарлинг

критеријум ( $\alpha=0,95$ )	0,7570							
резултат	0,6163	0,8203	0,3466	0,4092	0,4392	0,4513	0,3475	0,3493
поређење	ДА	НЕ	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА

## RMSE

резултат	0,03183	0,02347	0,02649	0,02196	0,02438	0,02204	0,02546	0,02531
----------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------

## МАРГИНАЛНЕ РАСПОДЕЛЕ ВЕРОВАТНОЋА

Река:	Драва
Х. С.	Д. Михољац
Период	1931-2014.
Параметар модела	QODG2 (m <sup>3</sup> /s)
N	79
MAX	2186
MIN	296
Xsr	763,1

## Статистички параметри

	EV1		GEV		Лог- нормална		Лог - Пирсон III	
	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM
$\xi$	-	-	598,074	594,847	-	-	763,063	763,063
$\beta$	619,189	614,855	210,568	207,507	6,553	6,553	309,810	348,172
$\omega$	228,686	256,764	0,177	0,193	0,401	0,397	0,812	0,913

## Резултати прорачуна

T(год)	EV1		GEV		Лог- нормална		Лог - Пирсон III	
	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM
2	703,0	709,0	677,8	668,3	701,1	701,1	721,6	710,8
5	962,2	1000,0	959,7	865,1	982,4	979,3	1004,3	1030,3
10	1134	1193	1180	974	1172	1166	1177	1229
20	1298	1377	1421	1064	1356	1347	1334	1411
50	1512	1617	1781	1164	1597	1585	1525	1635
<b>100</b>	<b>1671</b>	<b>1796</b>	<b>2093</b>	<b>1228</b>	<b>1781</b>	<b>1766</b>	<b>1661</b>	<b>1796</b>
500	2040	2210	2979	1346	2222	2198	1960	2150
1000	2199	2388	3445	1387	2420	2391	2083	2297

## Тестови

## Колмогоров - Смирнов

критеријум ( $\alpha=0,95$ )	0,0700							
резултат	0,0773	0,0928	0,0464	0,0414	0,0786	0,0773	0,1075	0,1076
поређење	НЕ	НЕ	ДА	ДА	НЕ	НЕ	НЕ	НЕ

## Андерсон - Дарлинг

критеријум ( $\alpha=0,95$ )	0,7570							
резултат	0,5681	0,6319	0,2856	0,3151	0,4411	0,4468	0,9666	1,1404
поређење	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	НЕ	НЕ

## RMSE

резултат	0,03662	0,04426	0,02070	0,01953	0,03620	0,03586	0,05312	0,05467
----------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------

## МАРГИНАЛНЕ РАСПОДЕЛЕ ВЕРОВАТНОЋА

Река:	Драва
Х. С.	Д. Михољац
Период	1931-2014.
Параметар модела	QMAX (m <sup>3</sup> /s)
N	79
MAX	3120
MIN	721
Xsr	1370

## Статистички параметри

	EV1		GEV		Лог- нормална		Лог - Пирсон III	
	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM
$\xi$	-	-	1206,124	1204,683	-	-	1370,241	1370,241
$\beta$	1204,972	1204,964	291,694	285,763	7,189	7,189	353,811	363,829
$\omega$	291,178	286,334	-0,007	0,002	0,258	0,253	0,516	0,531

## Резултати прорачуна

T(год)	EV1		GEV		Лог- нормална		Лог - Пирсон III	
	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM
2	1312	1310	1313	1309	1325	1325	1340	1338
5	1642	1634	1641	1633	1646	1640	1656	1663
10	1860	1849	1857	1846	1843	1833	1839	1852
20	2070	2055	2063	2051	2024	2010	1999	2018
50	2341	2322	2329	2315	2249	2230	2191	2217
<b>100</b>	<b>2544</b>	<b>2522</b>	<b>2526</b>	<b>2513</b>	<b>2413</b>	<b>2389</b>	<b>2325</b>	<b>2355</b>
500	3014	2984	2979	2968	2781	2748	2611	2653
1000	3216	3183	3172	3164	2937	2899	2727	2773

## Тестови

## Колмогоров - Смирнов

критеријум ( $\alpha=0,95$ )	0,0704							
резултат	0,0459	0,0430	0,0467	0,0436	0,0595	0,0577	0,0766	0,0772
поређење	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	НЕ	НЕ

## Андерсон - Дарлинг

критеријум ( $\alpha=0,95$ )	0,7570							
резултат	0,3393	0,3483	0,3312	0,3528	0,3057	0,3069	0,4314	0,4447
поређење	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА

## RMSE

резултат	0,02355	0,02193	0,02328	0,02191	0,02547	0,02379	0,03274	0,03458
----------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------

## МАРГИНАЛНЕ РАСПОДЕЛЕ ВЕРОВАТНОЋА

Река:	Дунав
Х. С.	Бездан
Период	1931-2014.
Параметар модела	QODG2 (m <sup>3</sup> /s)
N	79
MAX	6010
MIN	1300
Xsr	3228

## Статистички параметри

	EV1		GEV		Лог- нормална		Лог - Пирсон III	
	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM
$\xi$	-	-	2788,760	2776,378	-	-	3227,633	3227,633
$\beta$	2712,193	2713,402	965,089	1001,546	8,022	8,022	1084,775	1102,886
$\omega$	917,063	890,882	-0,152	-0,145	0,348	0,354	0,672	0,683

## Резултати прорачуна

T(год)	EV1		GEV		Лог- нормална		Лог - Пирсон III	
	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM
2	3048	3040	3133	3153	3047	3047	3107	3103
5	4088	4050	4083	4454	4084	4106	4088	4101
10	4776	4718	4628	5440	4759	4799	4672	4697
20	5436	5359	5095	6492	5400	5458	5194	5230
50	6291	6190	5628	8027	6225	6309	5824	5873
<b>100</b>	<b>6931</b>	<b>6812</b>	<b>5981</b>	<b>9321</b>	<b>6845</b>	<b>6949</b>	<b>6270</b>	<b>6329</b>
500	8410	8249	6666	12861	8293	8450	7237	7319
1000	9047	8867	6913	14656	8928	9110	7632	7723

## Тестови

## Колмогоров - Смирнов

критеријум ( $\alpha=0,95$ )	0,0700							
резултат	0,0576	0,0649	0,0566	0,0506	0,0579	0,0543	0,0524	0,0478
поређење	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА

## Андерсон - Дарлинг

критеријум ( $\alpha=0,95$ )	0,7570							
резултат	0,5548	0,6925	0,3534	0,4984	0,5736	0,5040	0,4739	0,3983
поређење	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА

## RMSE

резултат	0,02730	0,03068	0,02674	0,02260	0,02749	0,02599	0,02509	0,02315
----------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------

## МАРГИНАЛНЕ РАСПОДЕЛЕ ВЕРОВАТНОЋА

Река:	Дунав
Х. С.	Богојево
Период	1931-2014.
Параметар модела	QODG2 (m <sup>3</sup> /s)
N	79
MAX	6860
MIN	1670
Xsr	3973

## Статистички параметри

	EV1		GEV		Лог- нормална		Лог - Пирсон III	
	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM
$\xi$	-	-	3549,548	3540,066	-	-	3973,329	3973,329
$\beta$	3432,125	3441,728	1050,417	1082,566	8,246	8,246	1130,282	1133,711
$\omega$	996,107	920,976	-0,216	-0,213	0,294	0,297	0,569	0,571

## Резултати прорачуна

T(год)	EV1		GEV		Лог- нормална		Лог - Пирсон III	
	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM
2	3797	3779	3920	3953	3814	3814	3867	3866
5	4926	4823	4896	5453	4886	4898	4880	4883
10	5674	5514	5422	6664	5561	5582	5473	5478
20	6391	6177	5853	8022	6189	6219	5997	6003
50	7319	7035	6321	10120	6980	7023	6623	6632
<b>100</b>	<b>8014</b>	<b>7678</b>	<b>6614</b>	<b>11987</b>	<b>7563</b>	<b>7616</b>	<b>7063</b>	<b>7074</b>
500	9622	9164	7145	17526	8897	8974	8010	8024
1000	10312	9803	7322	20557	9470	9558	8394	8410

## Тестови

## Колмогоров - Смирнов

критеријум ( $\alpha=0,95$ )	0,0704							
резултат	0,0611	0,0772	0,0548	0,0483	0,0636	0,0615	0,0605	0,0598
поређење	ДА	НЕ	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА

## Андерсон - Дарлинг

критеријум ( $\alpha=0,95$ )	0,7570							
резултат	0,6489	0,9563	0,1754	0,2194	0,5668	0,5489	0,3427	0,3362
поређење	ДА	НЕ	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА

## RMSE

резултат	0,03081	0,03741	0,02197	0,01967	0,02889	0,02841	0,02373	0,02350
----------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------

## МАРГИНАЛНЕ РАСПОДЕЛЕ ВЕРОВАТНОЋА

Река: Дунав  
 X. C. Богојево  
 Период 1931-2014.  
 Параметар модела QMAX  
 N 82  
 MAX 9290  
 MIN 3010  
 Xsr 5649

## Статистички параметри

	EV1		GEV		Лог- нормална		Лог - Пирсон III	
	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM
$\xi$	-	-	5123,699	5111,343	-	-	5648,616	5648,616
$\beta$	5056,260	5060,015	1104,418	1113,526	8,615	8,615	1236,869	1268,897
$\omega$	1076,820	1019,724	-0,116	-0,105	0,222	0,223	0,438	0,449

## Резултати прорачуна

T(год)	EV1		GEV		Лог- нормална		Лог - Пирсон III	
	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM
2	5451	5434	5520	5527	5514	5514	5559	5554
5	6671	6590	6644	6920	6644	6653	6655	6680
10	7479	7355	7311	7937	7324	7339	7280	7324
20	8255	8089	7899	8991	7938	7958	7825	7885
50	9258	9039	8590	10479	8691	8719	8469	8549
<b>100</b>	<b>10010</b>	<b>9751</b>	<b>9062</b>	<b>11693</b>	<b>9232</b>	<b>9265</b>	<b>8917</b>	<b>9011</b>
500	11747	11396	10016	14864	10433	10479	9869	9995
1000	12494	12104	10374	16400	10935	10987	10251	10391

## Тестови

## Колмогоров - Смирнов

критеријум ( $\alpha=0.95$ )	0,0674							
резултат	0,0418	0,0519	0,0350	0,0376	0,0352	0,0368	0,0385	0,0410
поређење	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА

## Андерсон - Дарлинг

критеријум ( $\alpha=0.95$ )	0,7570							
резултат	0,2565	0,3797	0,1821	0,1539	0,1598	0,1700	0,2172	0,1738
поређење	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА

## RMSE

резултат	0,02008	0,01782	0,01420	0,01363	0,01367	0,01362	0,01721	0,01656
----------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------

## МАРГИНАЛНЕ РАСПОДЕЛЕ ВЕРОВАТНОЋА

Река: Дунав  
 X. C. Сланкамен  
 Период 1931-2014.  
 Параметар модела QODG1  
 N 82  
 MAX 10953  
 MIN 2704  
 Xsr 6488,05

## Статистички параметри

	EV1		GEV		Лог- нормална		Лог - Пирсон III	
	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM
$\xi$	-	-	5931,494	5920,541	-	-	6488,050	6488,050
$\beta$	5804,299	5828,894	1340,246	1300,122	8,753	8,753	1429,338	1411,022
$\omega$	1342,885	1141,958	-0,181	-0,163	0,227	0,221	0,441	0,435

## Резултати прорачуна

T(год)	EV1		GEV		Лог- нормална		Лог - Пирсон III	
	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM
2	6296	6247	6407	6412	6331	6331	6383	6386
5	7819	7542	7692	8130	7661	7628	7650	7636
10	8826	8399	8409	9455	8464	8408	8374	8349
20	9793	9221	9010	10887	9189	9113	9004	8970
50	11044	10285	9681	13010	10081	9976	9749	9703
<b>100</b>	<b>11982</b>	<b>11082</b>	<b>10115</b>	<b>14825</b>	<b>10723</b>	<b>10596</b>	<b>10267</b>	<b>10213</b>
500	14148	12925	10930	19902	12151	11973	11369	11297
1000	15080	13717	11214	22530	12749	12549	11812	11732

## Тестови

## Колмогоров - Смирнов

критеријум ( $\alpha=0.95$ )	0,0674							
резултат	0,0710	0,0773	0,0553	0,0469	0,0576	0,0561	0,0470	0,0451
поређење	НЕ	НЕ	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА

## Андерсон - Дарлинг

критеријум ( $\alpha=0.95$ )	0,7570							
резултат	0,9536	1,1574	0,3728	0,3752	0,5216	0,5106	0,3685	0,3679
поређење	НЕ	НЕ	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА

## RMSE

резултат	0,03771	0,03153	0,02574	0,02288	0,02577	0,02381	0,02308	0,02215
----------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------

## МАРГИНАЛНЕ РАСПОДЕЛЕ ВЕРОВАТНОЋА

Река:	<b>Тиса</b>
X. С.	<b>Сента</b>
Период	1931-2014.
Параметар модела	QODG1
N	82
MAX	3070
MIN	210
Xsr	1326,57

## Статистички параметри

	EV1		GEV		Лог- нормална		Лог - Пирсон III	
	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM
$\xi$	-	-	1035,675	1036,494	-	-	1326,573	1326,573
$\beta$	1014,240	1012,594	559,606	588,187	7,049	7,049	690,648	678,191
$\omega$	544,854	543,955	-0,072	-0,092	0,567	0,568	1,041	1,023

## Резултати прорачуна

T(год)	EV1		GEV		Лог- нормална		Лог - Пирсон III	
	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM
2	1214	1212	1238	1256	1151	1151	1209	1213
5	1831	1828	1831	1983	1856	1857	1846	1839
10	2240	2237	2198	2507	2382	2384	2253	2236
20	2633	2628	2532	3046	2928	2931	2628	2602
50	3140	3135	2939	3798	3692	3697	3095	3057
<b>100</b>	<b>3521</b>	<b>3515</b>	<b>3226</b>	<b>4405</b>	<b>4310</b>	<b>4316</b>	<b>3432</b>	<b>3386</b>
500	4400	4393	3838	5968	5894	5905	4184	4117
1000	4778	4770	4079	6714	6647	6661	4497	4421

## Тестови

## Колмогоров - Смирнов

критеријум ( $\alpha=0.95$ )	0,0704							
резултат	0,0638	0,0650	0,0685	0,0655	0,0780	0,0778	0,0603	0,0609
поређење	ДА	ДА	ДА	ДА	НЕ	НЕ	ДА	ДА

## Андерсон - Дарлинг

критеријум ( $\alpha=0.95$ )	0,7570							
резултат	1,0560	1,0503	1,1088	0,8900	1,0621	1,0565	0,8972	1,0394
поређење	НЕ	НЕ	НЕ	НЕ	НЕ	НЕ	НЕ	НЕ

## RMSE

резултат	0,03161	0,03167	0,03216	0,02788	0,03426	0,03420	0,02764	0,02980
----------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------



## МАРГИНАЛНЕ РАСПОДЕЛЕ ВЕРОВАТНОЋА

Река: Дунав  
 X. C. Сланкамен  
 Период 1931-2014.  
 Параметар модела QMAX  
 N 82  
 MAX 11326  
 MIN 4733  
 Xsr 6921,28

## Статистички параметри

	EV1		GEV		Лог- нормална		Лог - Пирсон III	
	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM
$\xi$	-	-	6326,952	6339,041	-	-	6921,281	6921,281
$\beta$	6300,097	6296,671	1100,350	1161,268	8,825	8,825	1297,583	1351,263
$\omega$	1082,247	1082,107	-0,045	-0,082	0,188	0,191	0,375	0,390

## Резултати прорачуна

T(год)	EV1		GEV		Лог- нормална		Лог - Пирсон III	
	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM
2	6697	6693	6727	6771	6800	6800	6840	6834
5	7923	7920	7923	8193	7966	7986	7983	8025
10	8736	8732	8681	9210	8653	8686	8628	8700
20	9515	9511	9385	10247	9264	9310	9185	9283
50	10523	10519	10262	11683	10004	10066	9839	9970
<b>100</b>	<b>11279</b>	<b>11275</b>	<b>10895</b>	<b>12834</b>	<b>10530</b>	<b>10604</b>	<b>10292</b>	<b>10446</b>
500	13025	13020	12285	15762	11681	11782	11249	11453
1000	13775	13771	12852	17145	12157	12269	11631	11856

## Тестови

## Колмогоров - Смирнов

критеријум ( $\alpha=0.95$ )	0,0670							
резултат	0,0649	0,0659	0,0594	0,0519	0,0604	0,0586	0,0707	0,0637
поређење	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	НЕ	ДА

## Андерсон - Дарлинг

критеријум ( $\alpha=0.95$ )	0,7570							
резултат	0,4828	0,4778	0,4519	0,3321	0,4106	0,3711	0,4794	0,3907
поређење	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА

## RMSE

резултат	0,02966	0,02967	0,02863	0,02462	0,02726	0,02596	0,02944	0,02627
----------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------

## МАРГИНАЛНЕ РАСПОДЕЛЕ ВЕРОВАТНОЋА

Река:	<b>Дунав</b>
X. С.	<b>Богојево</b>
Период	1931-2014.
Параметар модела	QODG1
N	82
MAX	8960
MIN	2780
Xsr	5278,89

## Статистички параметри

	EV1		GEV		Лог- нормална		Лог - Пирсон III	
	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM
$\xi$	-	-	4715,940	4704,164	-	-	5278,890	5278,890
$\beta$	4672,886	4669,862	1094,080	1120,062	8,542	8,542	1267,782	1320,644
$\omega$	1069,408	1055,114	-0,074	-0,069	0,243	0,246	0,480	0,500

## Резултати прорачуна

T(год)	EV1		GEV		Лог- нормална		Лог - Пирсон III	
	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM
2	5065	5057	5112	5120	5127	5127	5178	5169
5	6277	6252	6269	6474	6288	6308	6306	6346
10	7079	7044	6983	7430	6997	7029	6955	7026
20	7849	7804	7632	8396	7641	7687	7522	7622
50	8846	8787	8421	9718	8438	8501	8196	8331
<b>100</b>	<b>9592</b>	<b>9524</b>	<b>8978</b>	<b>10766</b>	<b>9014</b>	<b>9092</b>	<b>8666</b>	<b>8826</b>
500	11318	11226	10160	13390	10305	10414	9670	9885
1000	12060	11958	10626	14610	10849	10973	10074	10312

## Тестови

## Колмогоров - Смирнов

критеријум ( $\alpha=0.95$ )	0,0691							
резултат	0,0387	0,0388	0,0496	0,0438	0,0499	0,0469	0,0578	0,0499
поређење	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА

## Андерсон - Дарлинг

критеријум ( $\alpha=0.95$ )	0,7570							
резултат	0,3942	0,4495	0,3681	0,2655	0,3194	0,2657	0,3571	0,2225
поређење	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА

## RMSE

резултат	0,01731	0,01846	0,01750	0,01544	0,01741	0,01651	0,02258	0,02002
----------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------

## МАРГИНАЛНЕ РАСПОДЕЛЕ ВЕРОВАТНОЋА

Река:	<b>Тиса</b>
X. С.	<b>Сента</b>
Период	1931-2014.
Параметар модела	QODG2
N	82
MAX	3700
MIN	373
Xsr	1733,67

## Статистички параметри

	EV1		GEV		Лог- нормална		Лог - Пирсон III	
	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM
$\xi$	-	-	1441,442	1440,754	-	-	1733,671	1733,671
$\beta$	1382,960	1388,672	667,623	686,429	7,356	7,356	770,656	737,648
$\omega$	640,118	597,694	-0,166	-0,176	0,482	0,475	0,889	0,851

## Резултати прорачуна

T(год)	EV1		GEV		Лог- нормална		Лог - Пирсон III	
	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM
2	1618	1608	1679	1701	1565	1565	1621	1630
5	2343	2285	2328	2619	2349	2336	2327	2305
10	2823	2734	2694	3336	2904	2879	2765	2720
20	3284	3164	3006	4119	3461	3421	3164	3098
50	3881	3721	3357	5291	4215	4155	3655	3560
<b>100</b>	<b>4328</b>	<b>4138</b>	<b>3587</b>	<b>6304</b>	<b>4807</b>	<b>4730</b>	<b>4007</b>	<b>3891</b>
500	5360	5103	4026	9182	6272	6149	4783	4618
1000	5804	5517	4182	10693	6948	6801	5103	4919

## Тестови

## Колмогоров - Смирнов

критеријум ( $\alpha=0.95$ )	0,0734							
резултат	0,0726	0,0758	0,0453	0,0424	0,1015	0,1014	0,0710	0,0641
поређење	ДА	НЕ	ДА	ДА	НЕ	НЕ	ДА	ДА

## Андерсон - Дарлинг

критеријум ( $\alpha=0.95$ )	0,7570							
резултат	0,8309	1,2561	0,6566	0,5656	1,2956	1,3626	0,8294	1,1227
поређење	НЕ	НЕ	ДА	ДА	НЕ	НЕ	НЕ	НЕ

## RMSE

резултат	0,03186	0,03606	0,02052	0,02024	0,04578	0,04578	0,03035	0,03014
----------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------

## МАРГИНАЛНЕ РАСПОДЕЛЕ ВЕРОВАТНОЋА

Река: **Тиса**  
 X. C. **Сента**  
 Период 1931-2014.  
 Параметар модела QMAX  
 N 82  
 MAX 3730  
 MIN 918  
 Xsr 2154,00

## Статистички параметри

	EV1		GEV		Лог- нормална		Лог - Пирсон III	
	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM
$\xi$	-	-	1900,202	1886,982	-	-	2154,000	2154,000
$\beta$	1871,379	1872,808	523,413	514,176	7,636	7,636	595,838	610,530
$\omega$	512,082	487,152	-0,105	-0,062	0,282	0,282	0,553	0,567

## Резултати прорачуна

T(год)	EV1		GEV		Лог- нормална		Лог - Пирсон III	
	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM
2	2059	2051	2088	2078	2072	2072	2099	2097
5	2639	2604	2627	2695	2628	2627	2633	2644
10	3024	2969	2949	3128	2976	2974	2944	2964
20	3392	3320	3236	3563	3297	3295	3218	3247
50	3869	3774	3576	4156	3701	3698	3546	3585
<b>100</b>	<b>4227</b>	<b>4114</b>	<b>3810</b>	<b>4623</b>	<b>3997</b>	<b>3994</b>	<b>3776</b>	<b>3822</b>
500	5053	4900	4290	5782	4671	4666	4270	4333
1000	5408	5238	4472	6317	4959	4954	4471	4540

## Тестови

## Колмогоров - Смирнов

критеријум ( $\alpha=0.95$ )	0,0745							
резултат	0,0446	0,0396	0,0493	0,0389	0,0380	0,0380	0,0566	0,0544
поређење	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА

## Андерсон - Дарлинг

критеријум ( $\alpha=0.95$ )	0,7570							
резултат	0,3604	0,5522	0,2913	0,3126	0,3234	0,3270	0,2803	0,2114
поређење	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА

## RMSE

резултат	0,01778	0,01499	0,02037	0,01695	0,01739	0,01731	0,02387	0,02405
----------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------

## МАРГИНАЛНЕ РАСПОДЕЛЕ ВЕРОВАТНОЋА

Река: Дунав  
 X. C. Богојево  
 Период 1931-2014.  
 Параметар модела QODG2  
 N 82  
 MAX 8890  
 MIN 1950  
 Xsr 4047,76

## Статистички параметри

	EV1		GEV		Лог- нормална		Лог - Пирсон III	
	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM
$\xi$	-	-	3449,108	3445,262	-	-	4047,756	4047,756
$\beta$	3441,496	3437,837	1057,076	1071,479	8,255	8,255	1284,909	1337,093
$\omega$	1052,478	1056,658	-0,013	-0,015	0,322	0,323	0,635	0,661

## Резултати прорачуна

T(год)	EV1		GEV		Лог- нормална		Лог - Пирсон III	
	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM
2	3827	3825	3836	3839	3846	3846	3913	3902
5	5020	5023	5019	5071	5042	5048	5071	5109
10	5810	5816	5793	5898	5808	5820	5757	5828
20	6568	6576	6528	6701	6529	6545	6367	6468
50	7548	7561	7469	7753	7447	7470	7101	7241
<b>100</b>	<b>8283</b>	<b>8299</b>	<b>8166</b>	<b>8552</b>	<b>8129</b>	<b>8158</b>	<b>7619</b>	<b>7787</b>
500	9981	10003	9753	10430	9709	9751	8739	8971
1000	10711	10736	10425	11251	10395	10443	9195	9454

## Тестови

## Колмогоров - Смирнов

критеријум ( $\alpha=0.95$ )	0,0700							
резултат	0,0533	0,0533	0,0548	0,0569	0,0599	0,0606	0,0772	0,0794
поређење	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	НЕ	НЕ

## Андерсон - Дарлинг

критеријум ( $\alpha=0.95$ )	0,7570							
резултат	0,4788	0,4553	0,4812	0,4250	0,4422	0,4250	0,3832	0,5169
поређење	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА

## RMSE

резултат	0,02347	0,02349	0,02341	0,02364	0,02430	0,02445	0,02971	0,02994
----------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------

## МАРГИНАЛНЕ РАСПОДЕЛЕ ВЕРОВАТНОЋА

Река: Дунав  
 X. C. Сланкамен  
 Период 1931-2014.  
 Параметар модела QODG2  
 N 82  
 MAX 10496  
 MIN 3460  
 Xsr 6016,50

## Статистички параметри

	EV1		GEV		LOGNORMAL		LOGPEARSON3	
	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM
$\xi$	-	-	5376,796	5369,759	-	-	6016,505	6016,505
$\beta$	5309,133	5310,394	1298,291	1332,180	8,672	8,672	1477,267	1523,035
$\omega$	1261,405	1223,305	-0,098	-0,101	0,249	0,252	0,491	0,506

## Резултати прорачуна

T(год)	EV1		GEV		LOGNORMAL		LOGPEARSON3	
	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM
2	5771	5759	5844	5867	5836	5836	5896	5888
5	7201	7145	7188	7528	7196	7216	7212	7247
10	8148	8063	7998	8737	8028	8063	7970	8032
20	9056	8944	8722	9986	8788	8837	8635	8721
50	10231	10084	9585	11744	9729	9797	9424	9541
<b>100</b>	<b>11112</b>	<b>10938</b>	<b>10182</b>	<b>13174</b>	<b>10412</b>	<b>10494</b>	<b>9975</b>	<b>10114</b>
500	13147	12912	11415	16894	11945	12062	11152	11340
1000	14022	13760	11888	18689	12592	12724	11627	11835

## Тестови

## Колмогоров - Смирнов

критеријум ( $\alpha=0.95$ )	0,0670							
резултат	0,0502	0,0456	0,0488	0,0483	0,0460	0,0451	0,0618	0,0572
поређење	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА

## Андерсон - Дарлинг

критеријум ( $\alpha=0.95$ )	0,7570							
резултат	0,3320	0,4204	0,2412	0,1936	0,2342	0,2108	0,2503	0,1953
поређење	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА

## RMSE

резултат	0,01936	0,02128	0,01777	0,01686	0,01726	0,01677	0,02053	0,01885
----------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------

МАРГИНАЛНЕ РАСПОДЕЛЕ ВЕРОВАТНОЋА

Река: Дунав  
 X. C. Сланкамен  
 Период 1931-2014.  
 Параметар модела QMAX  
 N 84  
 MAX 11326  
 MIN 4733  
 Xsr 6969

Статистички параметри

	EV1		GEV		Лог- нормална		Лог - Пирсон III	
	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM
$\xi$	-	-	6356,729	6367,622	-	-	6968,952	6968,952
$\beta$	6332,444	6328,623	1123,352	1182,791	8,831	8,831	1330,793	1387,193
$\omega$	1106,898	1109,342	-0,040	-0,074	0,191	0,194	0,382	0,398

Резултати прорачуна

T(год)	EV1		GEV		Лог- нормална		Лог - Пирсон III	
	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM
2	6738	6735	6765	6807	6842	6842	6884	6877
5	7993	7993	7992	8244	8038	8058	8057	8102
10	8823	8825	8774	9265	8745	8777	8720	8795
20	9620	9624	9502	10298	9374	9419	9293	9397
50	10651	10657	10414	11721	10137	10198	9966	10105
<b>100</b>	<b>11424</b>	<b>11432</b>	<b>11075</b>	<b>12853</b>	<b>10680</b>	<b>10752</b>	<b>10432</b>	<b>10595</b>
500	13210	13222	12534	15706	11870	11969	11419	11635
1000	13978	13991	13133	17042	12362	12473	11813	12051

Тестови

**Колмогоров - Смирнов**

критеријум ( $\alpha=0.95$ )	0,0662							
резултат	0,0649	0,0654	0,0584	0,0509	0,0602	0,0583	0,0702	0,0627
поређење	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	НЕ	ДА

**Андерсон - Дарлинг**

критеријум ( $\alpha=0.95$ )	0,7570							
резултат	0,4793	0,4654	0,4533	0,3377	0,4179	0,3812	0,4990	0,4120
поређење	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА

**RMSE**

резултат	0,02958	0,02935	0,02860	0,02485	0,02720	0,02610	0,02952	0,02672
----------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------

## МАРГИНАЛНЕ РАСПОДЕЛЕ ВЕРОВАТНОЋА

Река: Дунав  
 X. C. Смедерево  
 Период 1931-2014.  
 Параметар модела QODG1  
 N 84  
 MAX 13900  
 MIN 5170  
 Xsr 9143

## Статистички параметри

	EV1		GEV		Лог- нормална		Лог - Пирсон III	
	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM
$\xi$	-	-	8302,457	8255,451	-	-	9143,036	9143,036
$\beta$	8186,626	8187,620	1770,726	1781,486	9,097	9,097	1989,440	2065,663
$\omega$	1707,664	1655,215	-0,126	-0,086	0,220	0,223	0,435	0,452

## Резултати прорачуна

T(год)	EV1		GEV		Лог- нормална		Лог - Пирсон III	
	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM
2	8813	8794	8937	8919	8927	8927	8999	8988
5	10748	10670	10722	11108	10744	10773	10762	10821
10	12029	11912	11771	12679	11836	11884	11767	11870
20	13259	13104	12688	14285	12821	12888	12642	12785
50	14850	14646	13758	16517	14027	14120	13677	13867
<b>100</b>	<b>16042</b>	<b>15802</b>	<b>14481</b>	<b>18310</b>	<b>14895</b>	<b>15006</b>	<b>14396</b>	<b>14621</b>
500	18797	18472	15927	22892	16817	16974	15924	16226
1000	19982	19621	16463	25066	17621	17796	16538	16871

## Тестови

## Колмогоров - Смирнов

критеријум ( $\alpha=0.95$ )	0,0695							
резултат	0,0550	0,0632	0,0633	0,0536	0,0604	0,0586	0,0728	0,0668
поређење	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	НЕ	ДА

## Андерсон - Дарлинг

критеријум ( $\alpha=0.95$ )	0,7570							
резултат	0,5308	0,6051	0,7810	0,6055	0,6686	0,7182	0,9199	0,7607
поређење	ДА	ДА	НЕ	ДА	ДА	ДА	НЕ	НЕ

## RMSE

резултат	0,02465	0,02581	0,03459	0,02978	0,03296	0,03202	0,03934	0,03618
----------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------



## МАРГИНАЛНЕ РАСПОДЕЛЕ ВЕРОВАТНОЋА

Река: **Сава**  
 X. C. **С. Митровица**  
 Период 1931-2014.  
 Параметар модела QODG1  
 N 84  
 MAX 5520  
 MIN 514  
 Xsr 2395

## Статистички параметри

	EV1		GEV		Лог- нормална		Лог - Пирсон III	
	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM
$\xi$	-	-	1960,273	1979,509	-	-	2395,274	2395,274
$\beta$	1860,784	1871,561	1023,138	1080,808	7,653	7,653	1188,422	1115,729
$\omega$	968,782	907,309	-0,185	-0,235	0,546	0,541	0,992	0,932

## Резултати прорачуна

T(год)	EV1		GEV		Лог- нормална		Лог - Пирсон III	
	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM
2	2216	2204	2323	2393	2107	2107	2202	2224
5	3314	3232	3300	3923	3337	3321	3297	3249
10	4041	3913	3843	5184	4243	4213	3988	3890
20	4738	4566	4298	6622	5174	5128	4624	4476
50	5641	5412	4803	8884	6469	6396	5412	5198
<b>100</b>	<b>6317</b>	<b>6045</b>	<b>5128</b>	<b>10934</b>	<b>7508</b>	<b>7412</b>	<b>5981</b>	<b>5718</b>
500	7880	7509	5737	17180	10148	9988	7243	6866
1000	8552	8139	5947	20683	11394	11202	7767	7342

## Тестови

## Колмогоров - Смирнов

критеријум ( $\alpha=0.95$ )	0,0682							
резултат	0,0798	0,0945	0,0718	0,0634	0,1006	0,1021	0,0826	0,0893
поређење	НЕ	НЕ	НЕ	ДА	НЕ	НЕ	НЕ	НЕ

## Андерсон - Дарлинг

критеријум ( $\alpha=0.95$ )	0,7570							
резултат	1,0476	1,5138	0,8097	0,6815	1,6686	1,7182	1,0882	1,5606
поређење	НЕ	НЕ	НЕ	ДА	НЕ	НЕ	НЕ	НЕ

## RMSE

резултат	0,04473	0,05174	0,03619	0,03168	0,05749	0,05791	0,04555	0,04893
----------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------

## МАРГИНАЛНЕ РАСПОДЕЛЕ ВЕРОВАТНОЋА

Река: Дунав  
 X. C. Смедерево  
 Период 1931-2014.  
 Параметар модела QMAX  
 N 84  
 MAX 14820  
 MIN 6300  
 Xsr 10042

## Статистички параметри

	EV1		GEV		Лог- нормална		Лог - Пирсон III	
	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM
$\xi$	-	-	9291,085	9238,821	-	-	10042,226	10042,226
$\beta$	9159,278	9167,839	1669,837	1645,446	9,198	9,198	1832,315	1886,948
$\omega$	1617,916	1514,836	-0,152	-0,098	0,184	0,186	0,365	0,376

## Резултати прорачуна

T(год)	EV1		GEV		Лог- нормална		Лог - Пирсон III	
	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM
2	9752	9723	9886	9853	9876	9876	9931	9924
5	11586	11440	11531	11897	11532	11545	11543	11586
10	12800	12577	12473	13381	12505	12527	12450	12524
20	13965	13667	13282	14911	13371	13401	13234	13334
50	15472	15079	14205	17058	14417	14458	14153	14286
<b>100</b>	<b>16602</b>	<b>16136</b>	<b>14816</b>	<b>18800</b>	<b>15160</b>	<b>15208</b>	<b>14789</b>	<b>14945</b>
500	19212	18580	16003	23311	16782	16849	16131	16337
1000	20335	19631	16430	25481	17450	17525	16667	16894

## Тестови

## Колмогоров - Смирнов

критеријум ( $\alpha=0.95$ )	0,0674							
резултат	0,0431	0,0522	0,0709	0,0587	0,0684	0,0678	0,0799	0,0756
поређење	ДА	ДА	НЕ	ДА	НЕ	НЕ	НЕ	НЕ

## Андерсон - Дарлинг

критеријум ( $\alpha=0.95$ )	0,7570							
резултат	0,4618	0,6063	0,5970	0,4750	0,5591	0,5392	0,7042	0,6100
поређење	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА

## RMSE

резултат	0,01979	0,01843	0,02772	0,02257	0,02661	0,02646	0,03235	0,03111
----------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------

## МАРГИНАЛНЕ РАСПОДЕЛЕ ВЕРОВАТНОЋА

Река: Дунав  
 X. C. Сланкамен  
 Период 1931-2014.  
 Параметар модела QODG1  
 N 84  
 MAX 11115  
 MIN 2990  
 Xsr 6279

## Статистички параметри

	EV1		GEV		Лог- нормална		Лог - Пирсон III	
	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM
$\xi$	-	-	5623,233	5596,195	-	-	6278,769	6278,769
$\beta$	5519,707	5529,010	1433,411	1421,375	8,713	8,713	1589,719	1615,673
$\omega$	1396,757	1298,924	-0,138	-0,108	0,259	0,259	0,506	0,515

## Резултати прорачуна

T(год)	EV1		GEV		Лог- нормална		Лог - Пирсон III	
	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM
2	6032	6005	6136	6128	6079	6079	6145	6141
5	7615	7477	7566	7910	7557	7558	7563	7583
10	8663	8452	8397	9215	8467	8469	8383	8418
20	9668	9387	9117	10570	9302	9303	9102	9151
50	10970	10597	9950	12488	10339	10342	9957	10024
<b>100</b>	<b>11945</b>	<b>11504</b>	<b>10507</b>	<b>14056</b>	<b>11094</b>	<b>11097</b>	<b>10555</b>	<b>10635</b>
500	14199	13600	11608	18164	12796	12800	11835	11942
1000	15167	14501	12011	20161	13518	13522	12352	12470

## Тестови

## Колмогоров - Смирнов

критеријум ( $\alpha=0.95$ )	0,0662							
резултат	0,0415	0,0583	0,0638	0,0569	0,0501	0,0501	0,0656	0,0625
поређење	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА

## Андерсон - Дарлинг

критеријум ( $\alpha=0.95$ )	0,7570							
резултат	0,4429	0,5768	0,3270	0,3110	0,3472	0,3468	0,3389	0,3139
поређење	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА

## RMSE

резултат	0,02230	0,02275	0,02460	0,02266	0,02155	0,02155	0,02539	0,02479
----------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------

## МАРГИНАЛНЕ РАСПОДЕЛЕ ВЕРОВАТНОЋА

Река: **Сава**  
 X. C. **С. Митровица**  
 Период 1931-2014.  
 Параметар модела QODG2  
 N 84  
 MAX 5180  
 MIN 755  
 Xsr 3316

## Статистички параметри

	EV1		GEV		Лог- нормална		Лог - Пирсон III	
	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM
$\xi$	-	-	3021,753	2992,545	-	-	3315,774	3315,774
$\beta$	2895,189	2918,377	849,406	810,134	8,069	8,069	903,089	847,420
$\omega$	867,527	688,472	-0,289	-0,214	0,293	0,273	0,545	0,511

## Резултати прорачуна

T(год)	EV1		GEV		Лог- нормална		Лог - Пирсон III	
	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM
2	3213	3171	3317	3301	3194	3194	3234	3244
5	4196	3951	4056	4426	4086	4018	4042	4000
10	4847	4468	4428	5335	4648	4530	4513	4438
20	5472	4963	4716	6357	5170	5002	4927	4822
50	6280	5605	5011	7935	5827	5592	5422	5279
<b>100</b>	<b>6886</b>	<b>6085</b>	<b>5185</b>	<b>9343</b>	<b>6311</b>	<b>6024</b>	<b>5769</b>	<b>5598</b>
500	8286	7196	5475	13528	7418	7002	6514	6283
1000	8887	7674	5564	15822	7893	7419	6816	6559

## Тестови

## Колмогоров - Смирнов

критеријум ( $\alpha=0.95$ )	0,0705							
резултат	0,0868	0,0765	0,0798	0,0627	0,0867	0,0785	0,0644	0,0514
поређење	НЕ	НЕ	НЕ	ДА	НЕ	НЕ	ДА	ДА

## Андерсон - Дарлинг

критеријум ( $\alpha=0.95$ )	0,7570							
резултат	1,9427	1,1464	0,4385	0,4597	1,1155	1,1550	0,6686	0,7800
поређење	НЕ	НЕ	ДА	ДА	НЕ	НЕ	ДА	НЕ

## RMSE

резултат	0,04593	0,03271	0,03285	0,02603	0,03861	0,03175	0,02820	0,02315
----------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------

## МАРГИНАЛНЕ РАСПОДЕЛЕ ВЕРОВАТНОЋА

Река: **Сава**  
 X. C. **С. Митровица**  
 Период 1931-2014.  
 Параметар модела QMAX  
 N 83  
 MAX 6600  
 MIN 2690  
 Xsr 4212

## Статистички параметри

	EV1		GEV		Лог- нормална		Лог - Пирсон III	
	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM
$\xi$	-	-	3860,357	3849,685	-	-	4211,904	4211,904
$\beta$	3831,966	3830,709	688,235	696,610	8,328	8,328	793,793	827,773
$\omega$	672,859	660,403	-0,078	-0,061	0,189	0,192	0,377	0,393

## Резултати прорачуна

T(год)	EV1		GEV		Лог- нормална		Лог - Пирсон III	
	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM
2	4079	4073	4109	4108	4137	4137	4162	4158
5	4841	4821	4834	4944	4852	4861	4861	4888
10	5346	5317	5280	5530	5273	5288	5256	5301
20	5830	5792	5684	6118	5649	5670	5597	5660
50	6457	6408	6175	6919	6103	6131	5998	6081
<b>100</b>	<b>6927</b>	<b>6869</b>	<b>6519</b>	<b>7550</b>	<b>6426</b>	<b>6460</b>	<b>6275</b>	<b>6373</b>
500	8013	7934	7247	9114	7134	7180	6861	6991
1000	8480	8392	7533	9836	7426	7478	7095	7238

## Тестови

## Колмогоров - Смирнов

критеријум ( $\alpha=0.95$ )	0,0682							
резултат	0,0485	0,0538	0,0511	0,0489	0,0652	0,0659	0,0775	0,0774
поређење	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	НЕ	НЕ

## Андерсон - Дарлинг

критеријум ( $\alpha=0.95$ )	0,7570							
резултат	0,2790	0,3176	0,3051	0,2462	0,3599	0,3340	0,4924	0,4018
поређење	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА

## RMSE

резултат	0,01897	0,01967	0,02355	0,02127	0,02858	0,02800	0,03439	0,03195
----------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------

## МАРГИНАЛНЕ РАСПОДЕЛЕ ВЕРОВАТНОЋА

Река: **Сава**  
 X. C. **С. Митровица**  
 Период 1931-2014.  
 Параметар модела QMAX  
 N 84  
 MAX 6600  
 MIN 2690  
 Xsr 4200

## Статистички параметри

	EV1		GEV		Лог- нормална		Лог - Пирсон III	
	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM
$\xi$	-	-	3845,391	3835,912	-	-	4200,214	4200,214
$\beta$	3819,738	3817,962	685,578	696,596	8,325	8,325	795,283	830,594
$\omega$	671,147	662,234	-0,071	-0,058	0,190	0,192	0,379	0,396

## Резултати прорачуна

T(год)	EV1		GEV		Лог- нормална		Лог - Пирсон III	
	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM
2	4066	4061	4093	4094	4125	4125	4150	4146
5	4826	4811	4821	4927	4841	4851	4851	4879
10	5330	5308	5271	5510	5263	5279	5246	5294
20	5813	5785	5682	6093	5639	5662	5588	5653
50	6439	6402	6183	6884	6095	6125	5990	6077
<b>100</b>	<b>6907</b>	<b>6864</b>	<b>6537</b>	<b>7506</b>	<b>6419</b>	<b>6455</b>	<b>6268</b>	<b>6370</b>
500	7990	7933	7291	9042	7129	7179	6856	6991
1000	8456	8392	7590	9748	7422	7478	7091	7240

## Тестови

## Колмогоров - Смирнов

критеријум ( $\alpha=0.95$ )	0,0678							
резултат	0,0494	0,0534	0,0519	0,0472	0,0638	0,0646	0,0761	0,0763
поређење	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	НЕ	НЕ

## Андерсон - Дарлинг

критеријум ( $\alpha=0.95$ )	0,7570							
резултат	0,2710	0,2971	0,3019	0,2378	0,3674	0,3383	0,5072	0,4093
поређење	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА	ДА

## RMSE

резултат	0,01888	0,01942	0,02310	0,02087	0,02861	0,02793	0,03445	0,03181
----------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------

## МАРГИНАЛНЕ РАСПОДЕЛЕ ВЕРОВАТНОЋА

Река: Дунав  
 X. C. Сланкамен  
 Период 1931-2014.  
 Параметар модела QODG2  
 N 83  
 MAX 8311  
 MIN 1662  
 Xsr 4670

## Статистички параметри

	EV1		GEV		Лог- нормална		Лог - Пирсон III	
	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM
$\xi$	-	-	4151,566	4138,287	-	-	4670,241	4670,241
$\beta$	3975,117	4000,940	1375,031	1380,494	8,398	8,398	1480,244	1425,945
$\omega$	1335,511	1159,534	-0,246	-0,234	0,336	0,328	0,634	0,611

## Резултати прорачуна

T(год)	EV1		GEV		Лог- нормална		Лог - Пирсон III	
	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM
2	4465	4426	4633	4667	4438	4438	4515	4526
5	5978	5740	5876	6619	5889	5850	5849	5809
10	6981	6610	6528	8227	6827	6759	6639	6565
20	7942	7445	7049	10059	7714	7615	7341	7236
50	9186	8525	7600	12938	8850	8710	8187	8042
<b>100</b>	<b>10119</b>	<b>9335</b>	<b>7938</b>	<b>15546</b>	<b>9699</b>	<b>9525</b>	<b>8783</b>	<b>8609</b>
500	12273	11206	8528	23482	11676	11417	10073	9834
1000	13200	12010	8718	27929	12538	12240	10598	10333

## Тестови

## Колмогоров - Смирнов

критеријум ( $\alpha=0.95$ )	0,0666							
резултат	0,0666	0,0588	0,0351	0,0338	0,0704	0,0675	0,0478	0,0423
поређење	НЕ	ДА	ДА	ДА	НЕ	НЕ	ДА	ДА

## Андерсон - Дарлинг

критеријум ( $\alpha=0.95$ )	0,7570							
резултат	0,8746	1,3206	0,2138	0,2057	0,9707	0,9801	0,4992	0,5554
поређење	НЕ	НЕ	ДА	ДА	НЕ	НЕ	ДА	ДА

## RMSE

резултат	0,03249	0,03309	0,01564	0,01527	0,03300	0,03176	0,02045	0,01836
----------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------

МАРГИНАЛНЕ РАСПОДЕЛЕ ВЕРОВАТНОЋА

Река: Дунав  
 X. C. Смедерево  
 Период 1931-2014.  
 Параметар модела QODG2  
 N 84  
 MAX 12550  
 MIN 4250  
 Xsr 8365

Статистички параметри

	EV1		GEV		Лог- нормална		Лог - Пирсон III	
	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM
$\xi$	-	-	7741,439	7778,615	-	-	8365,381	8365,381
$\beta$	7489,272	7547,041	1751,683	1761,682	9,009	9,009	1800,891	NaN
$\omega$	1720,838	1417,737	-0,272	-0,314	0,223	0,217	0,431	NaN

Резултати прорачуна

T(год)	EV1		GEV		Лог- нормална		Лог - Пирсон III	
	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM	MLE	L-MOM
2	8120	8067	8352	8463	8172	8172	8237	
5	10070	9674	9899	11153	9857	9813	9831	
10	11362	10737	10689	13540	10871	10798	10740	
20	12600	11758	11310	16423	11787	11685	11531	
50	14204	13079	11953	21266	12910	12771	12465	
<b>100</b>	<b>15405</b>	<b>14069</b>	<b>12338</b>	<b>25946</b>	<b>13718</b>	<b>13551</b>	<b>13114</b>	
500	18182	16356	12993	41623	15512	15277	14494	
1000	19376	17340	13197	51219	16262	15998	15047	

Тестови

**Колмогоров - Смирнов**

критеријум ( $\alpha=0.95$ )	0,0691							
резултат	0,1283	0,1359	0,0757	0,0752	0,1144	0,1134	0,0993	NaN
поређење	HE	HE	HE	HE	HE	HE	HE	HE

**Андерсон - Дарлинг**

критеријум ( $\alpha=0.95$ )	0,7570							
резултат	1,6801	2,7570	0,9452	1,0300	1,2325	1,2774	1,0067	NaN
поређење	HE	HE	HE	HE	HE	HE	HE	HE

**RMSE**

резултат	0,06199	0,06247	0,03763	0,03628	0,05060	0,04958	0,04302	NaN
----------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	-----

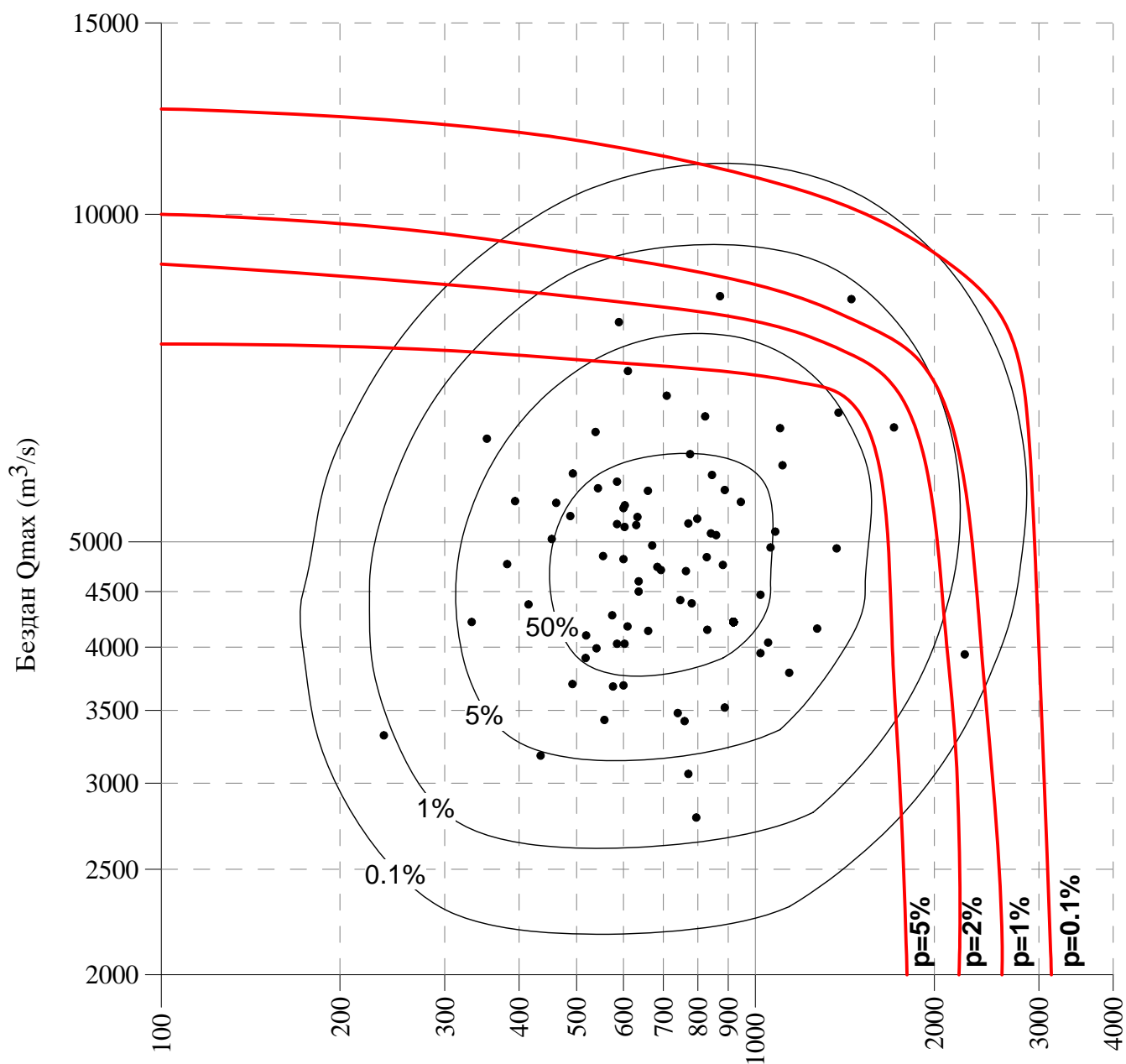


## **ПРИЛОГ 6**

Дијаграми коинциденције поплавних таласа Дунава и притока из модела  
ПРОИЛ

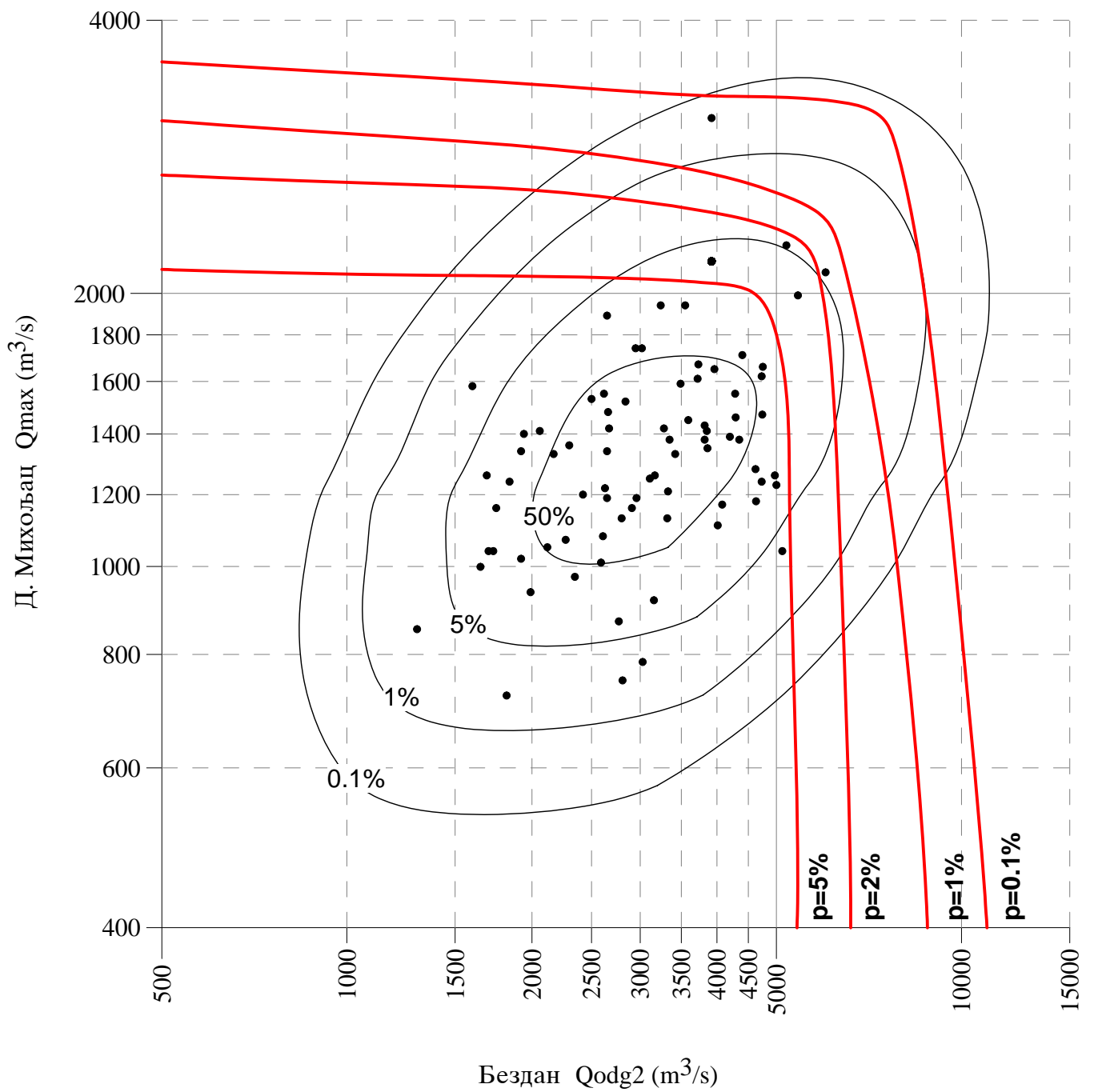
(параметри маргиналних расподела оцењени методом момената)

**КОИНЦИДЕНЦИЈА ПОПЛАВНИХ ТАЛАСА ДУНАВА И ДРАВЕ**

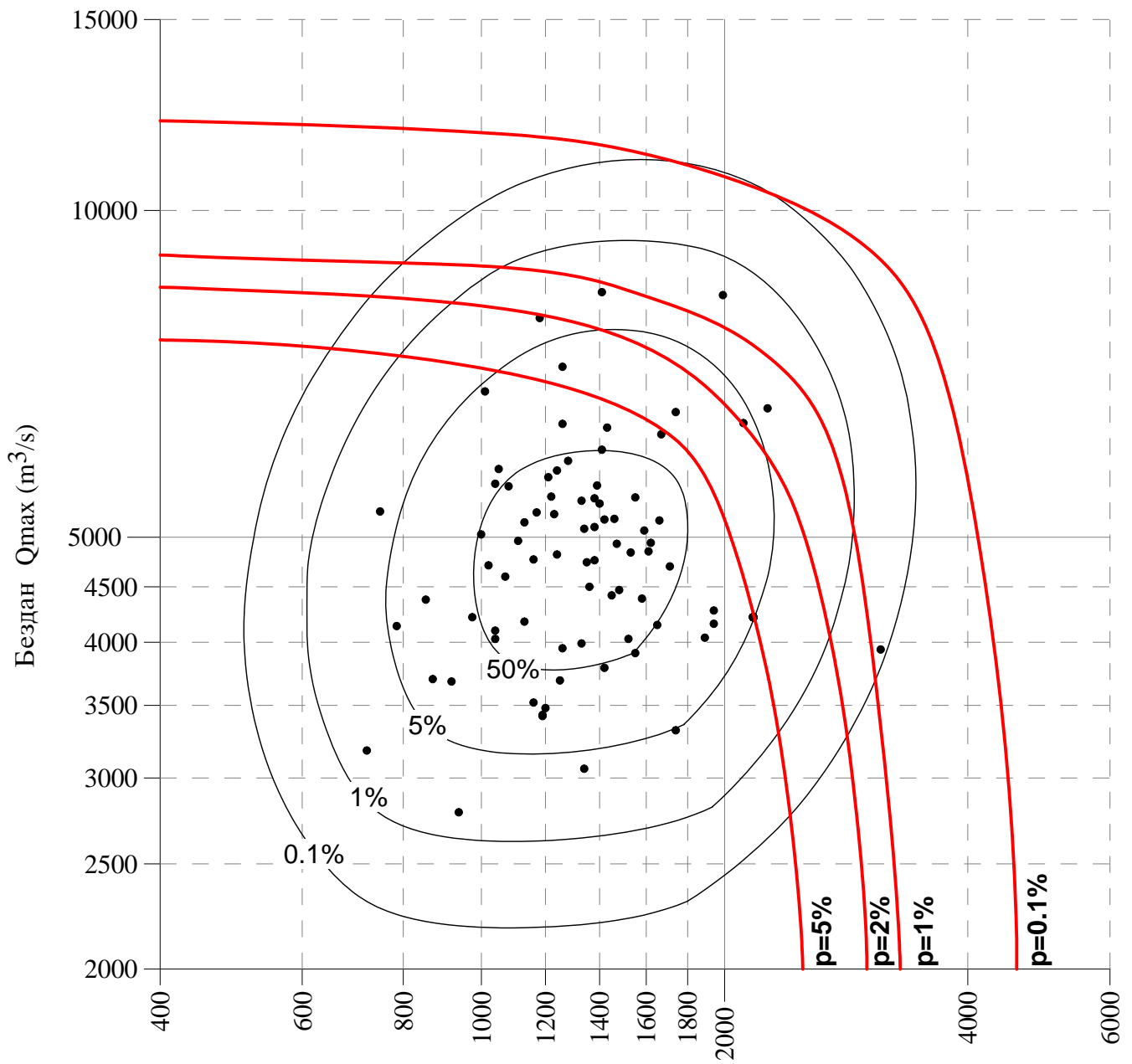


Д. Михољац  $Q_{odg1}$  (m<sup>3</sup>/s)

**КОИНЦИДЕНЦИЈА ПОПЛАВНИХ ТАЛАСА ДУНАВА И ДРАВЕ**

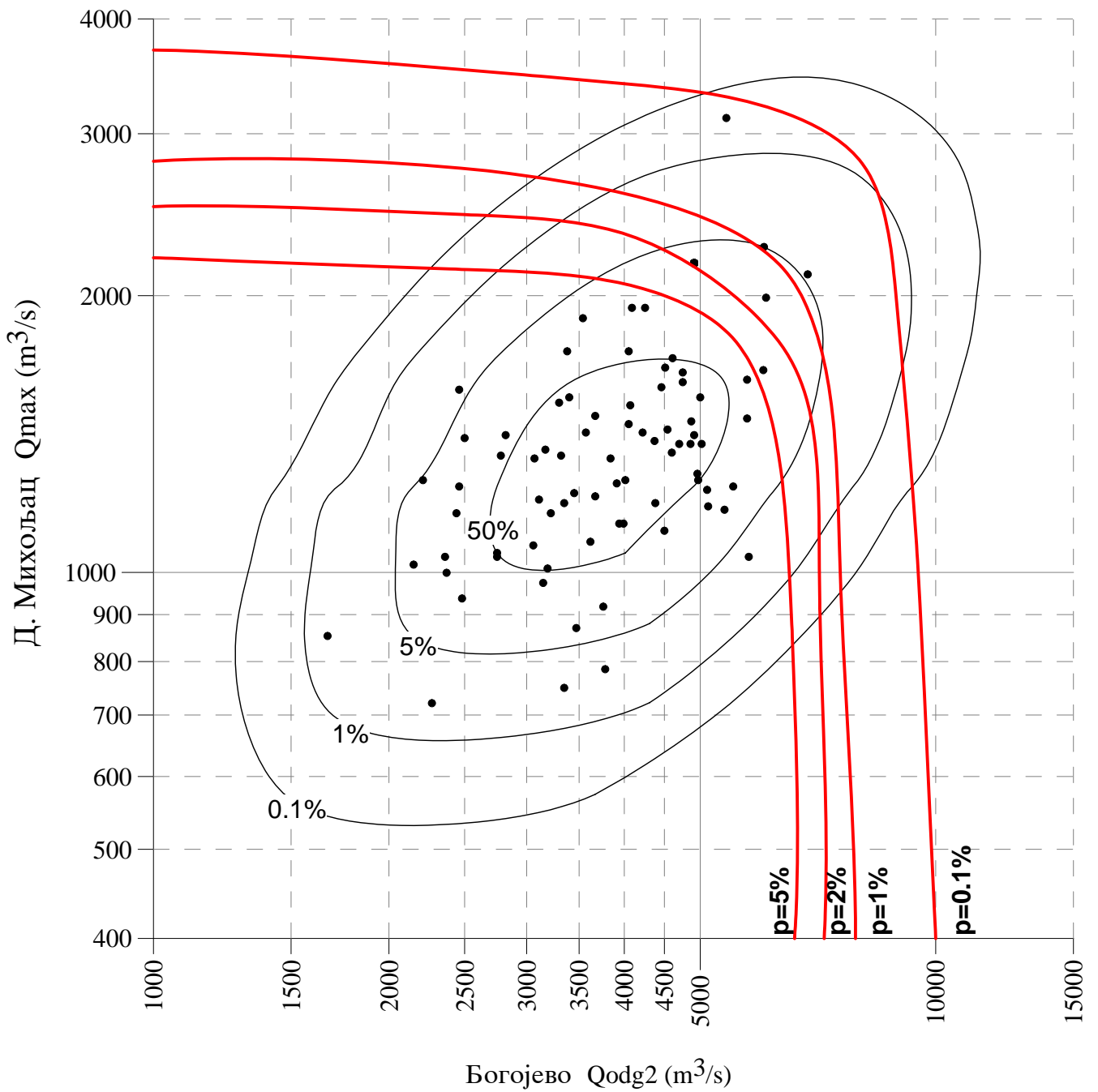


**КОИНЦИДЕНЦИЈА ПОПЛАВНИХ ТАЛАСА ДУНАВА И ДРАВЕ**

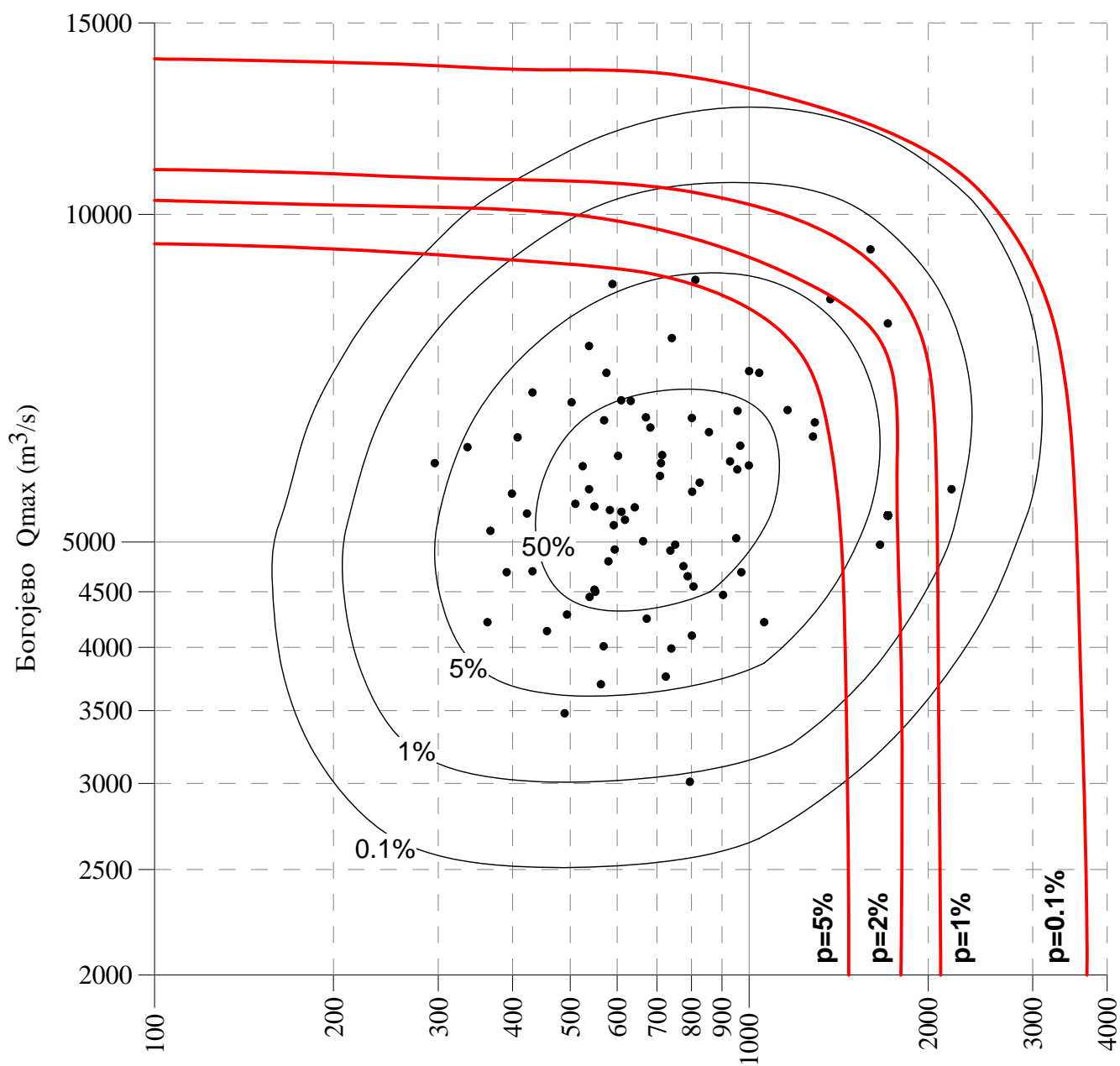


Д. Михољац  $Q_{max}$  ( $m^3/s$ )

**КОИНЦИДЕНЦИЈА ПОПЛАВНИХ ТАЛАСА ДУНАВА И ДРАВЕ**

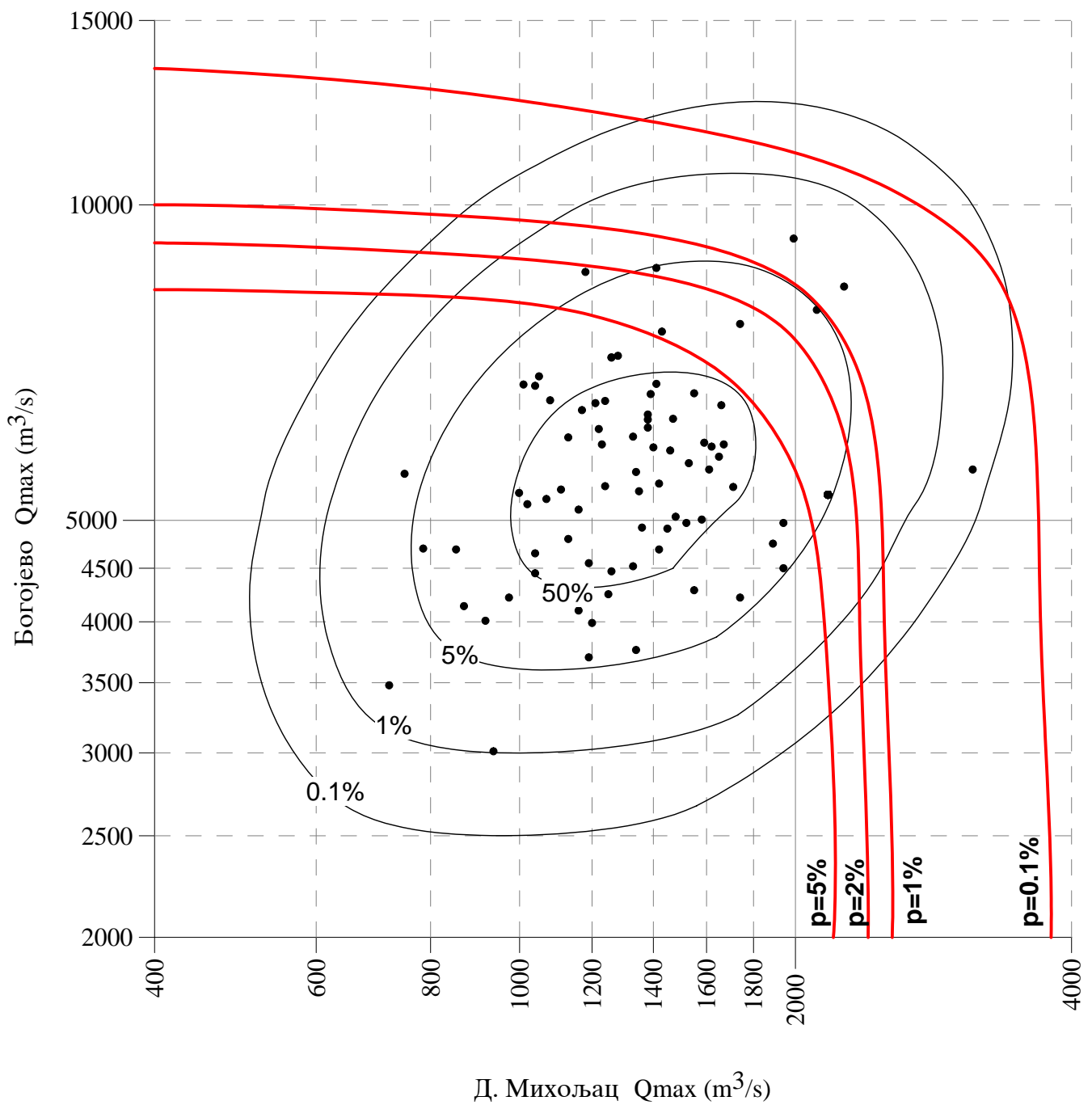


**КОИНЦИДЕНЦИЈА ПОПЛАВНИХ ТАЛАСА ДУНАВА И ДРАВЕ**

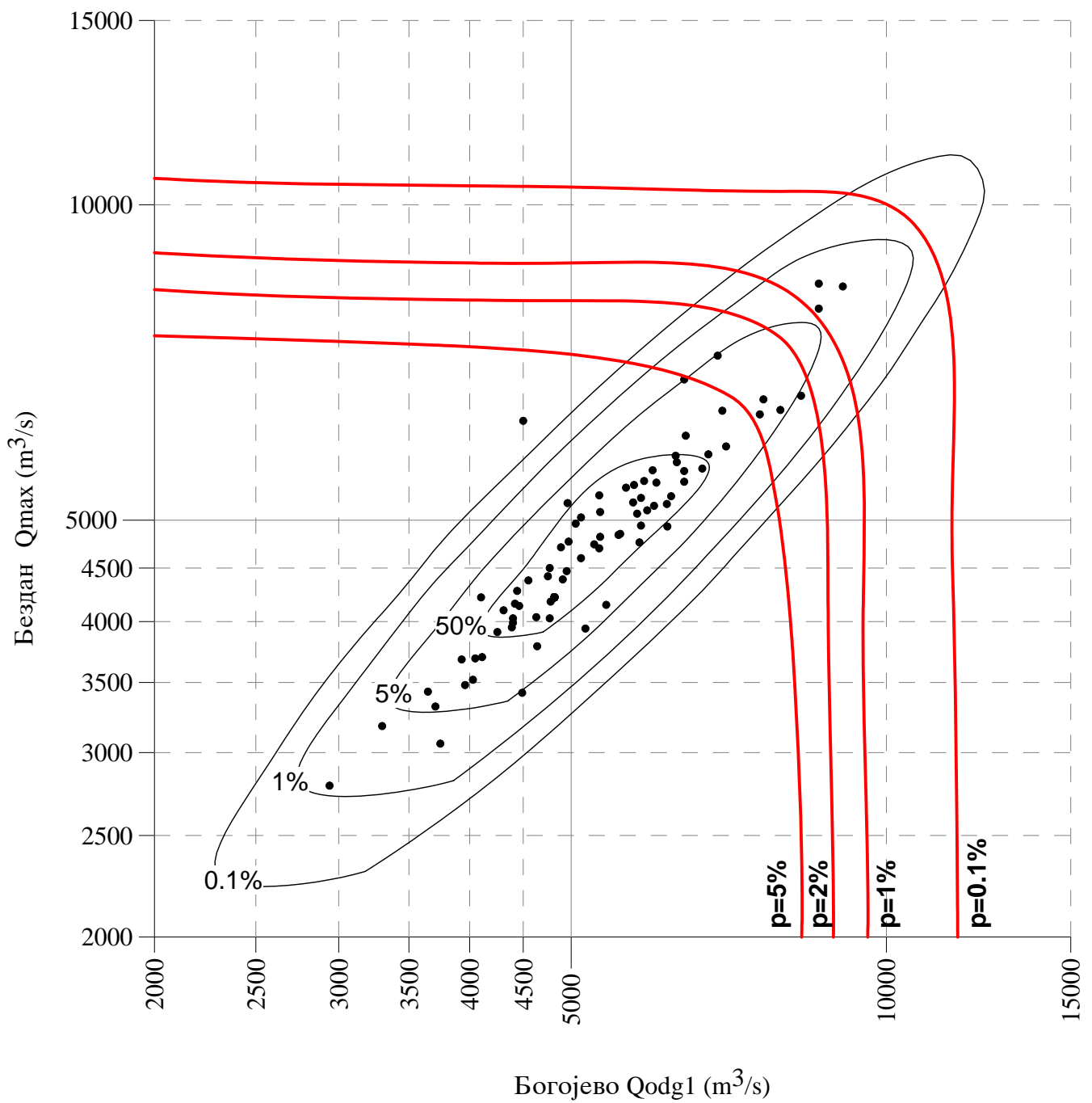


Д. Михољац  $Q_{odg2}$  ( $m^3/s$ )

**КОИНЦИДЕНЦИЈА ПОПЛАВНИХ ТАЛАСА ДУНАВА И ДРАВЕ**

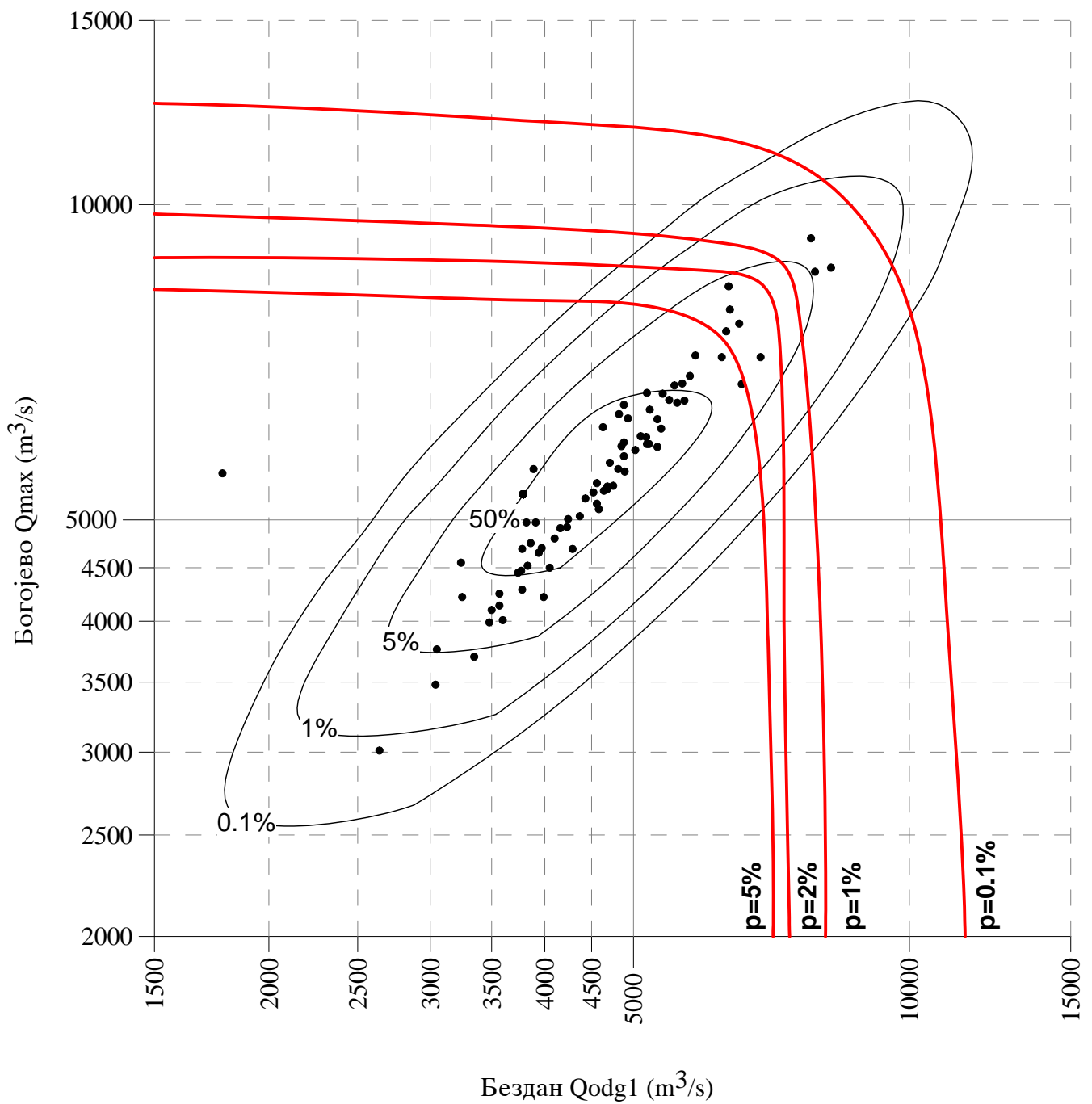


**КОИНЦИДЕНЦИЈА ПОПЛАВНИХ ТАЛАСА ДУНАВА И ДРАВЕ**

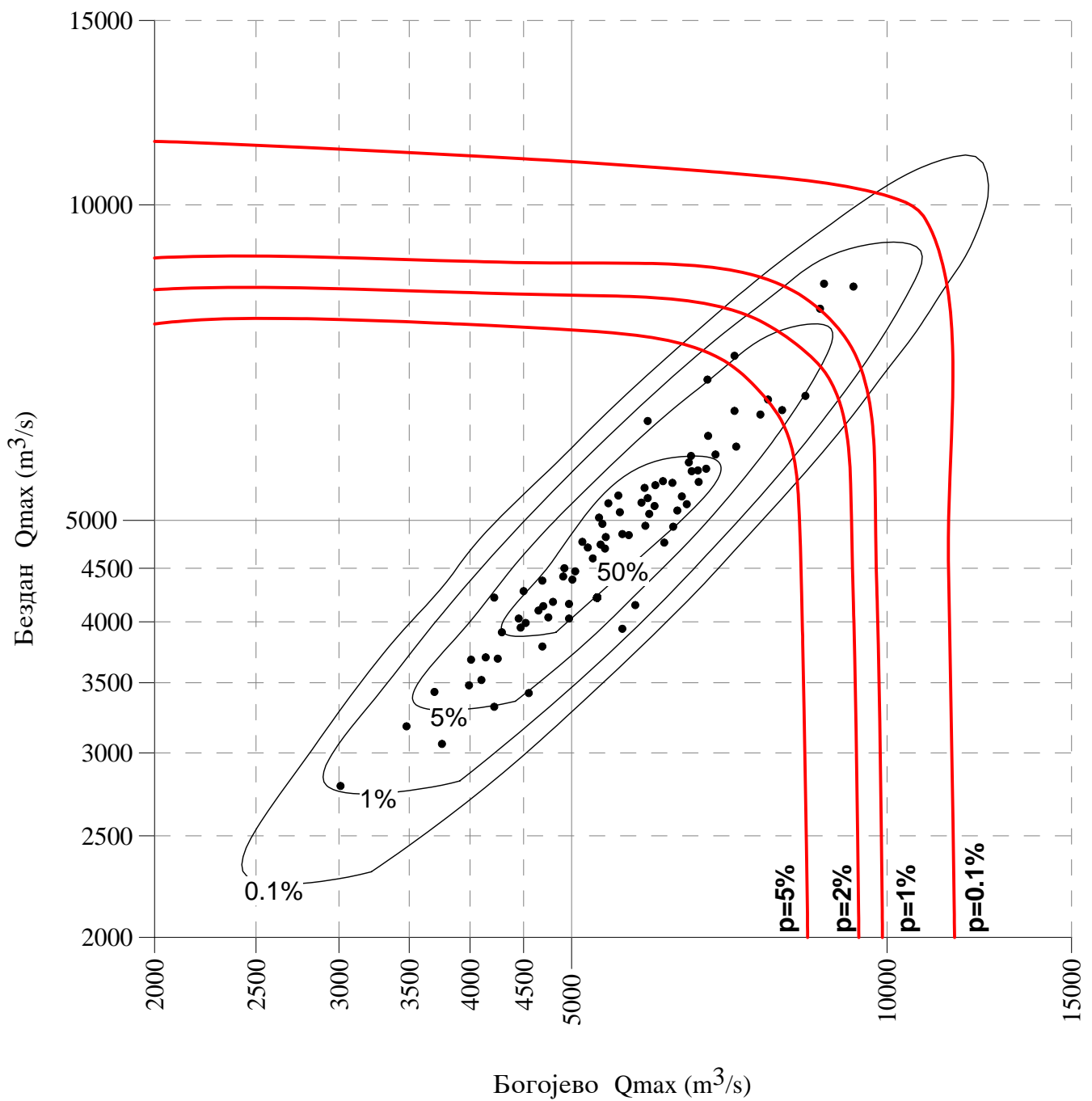




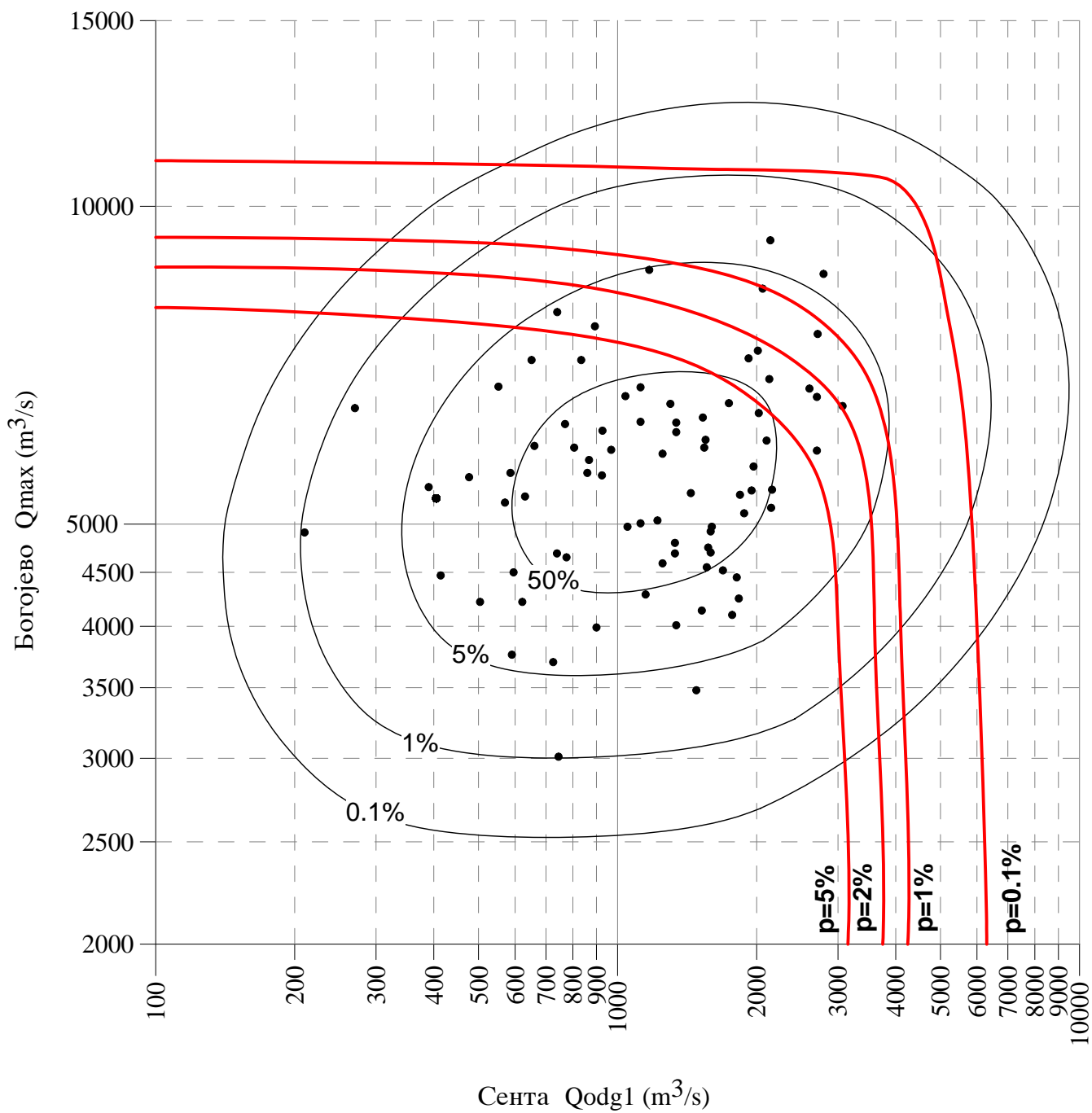
**КОИНЦИДЕНЦИЈА ПОПЛАВНИХ ТАЛАСА ДУНАВА И ДРАВЕ**



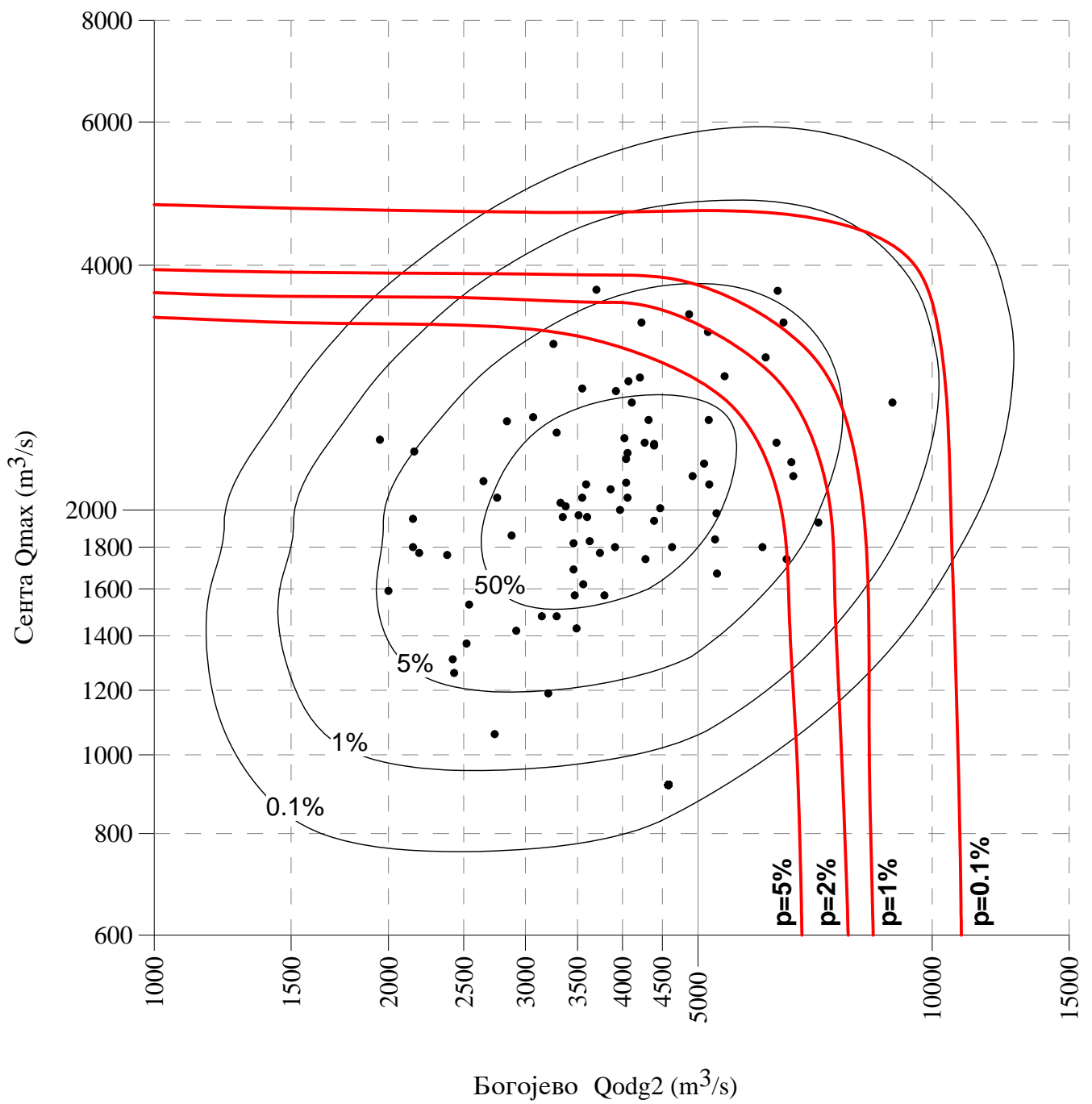
**КОИНЦИДЕНЦИЈА ПОПЛАВНИХ ТАЛАСА ДУНАВА И ДРАВЕ**



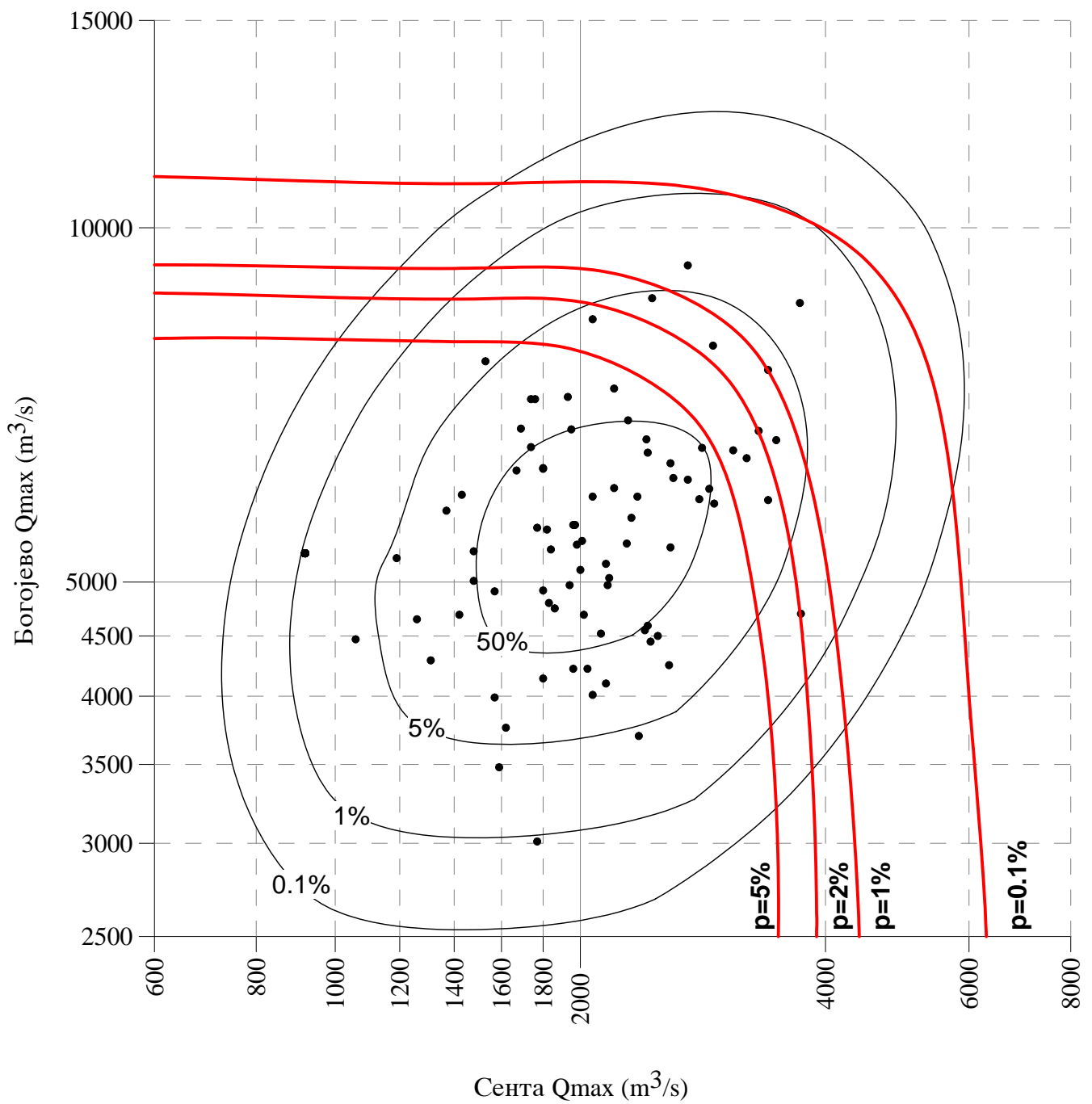
**КОИНЦИДЕНЦИЈА ПОПЛАВНИХ ТАЛАСА ДУНАВА И ТИСЕ**



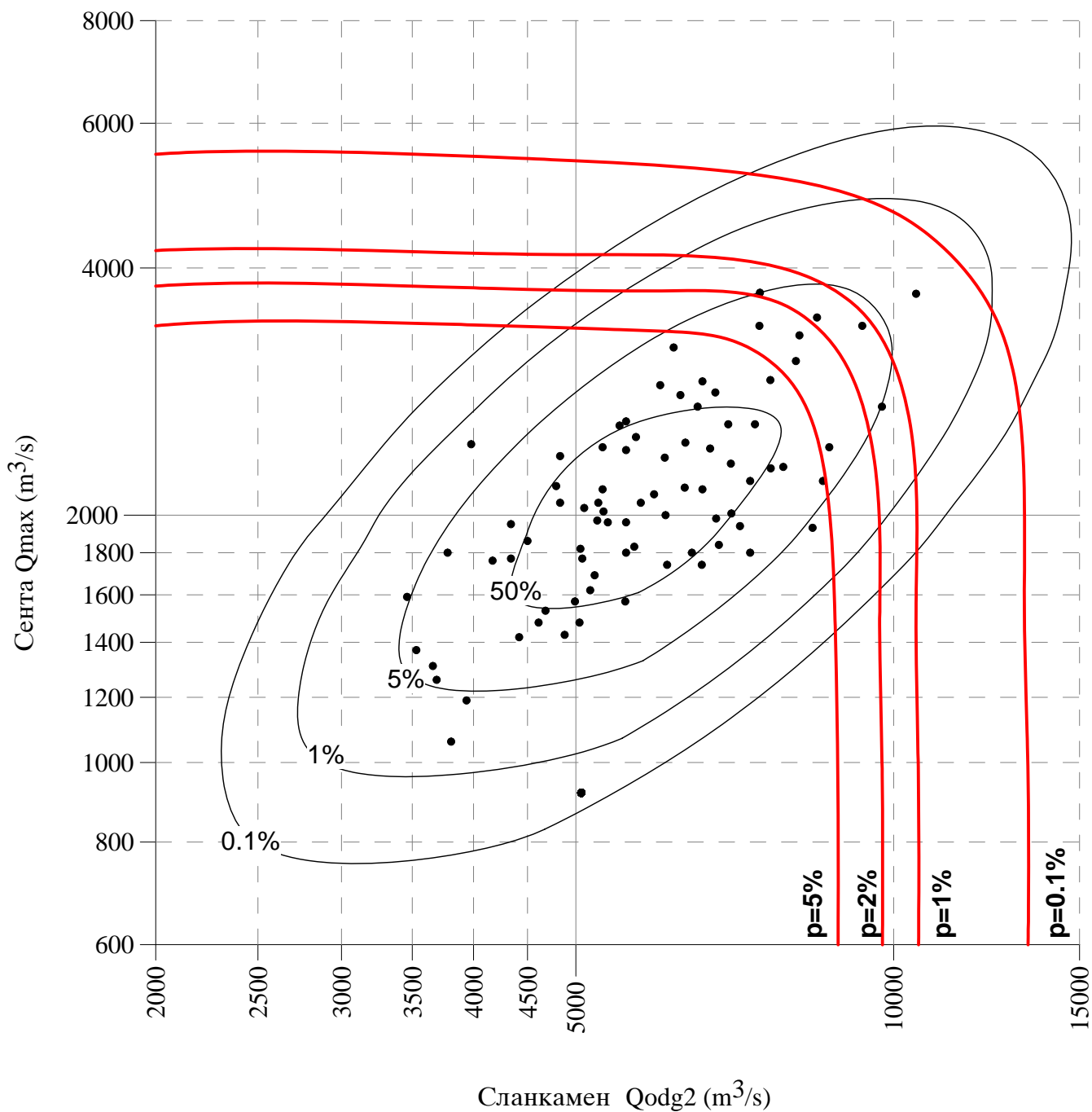
**КОИНЦИДЕНЦИЈА ПОПЛАВНИХ ТАЛАСА ДУНАВА И ТИСЕ**



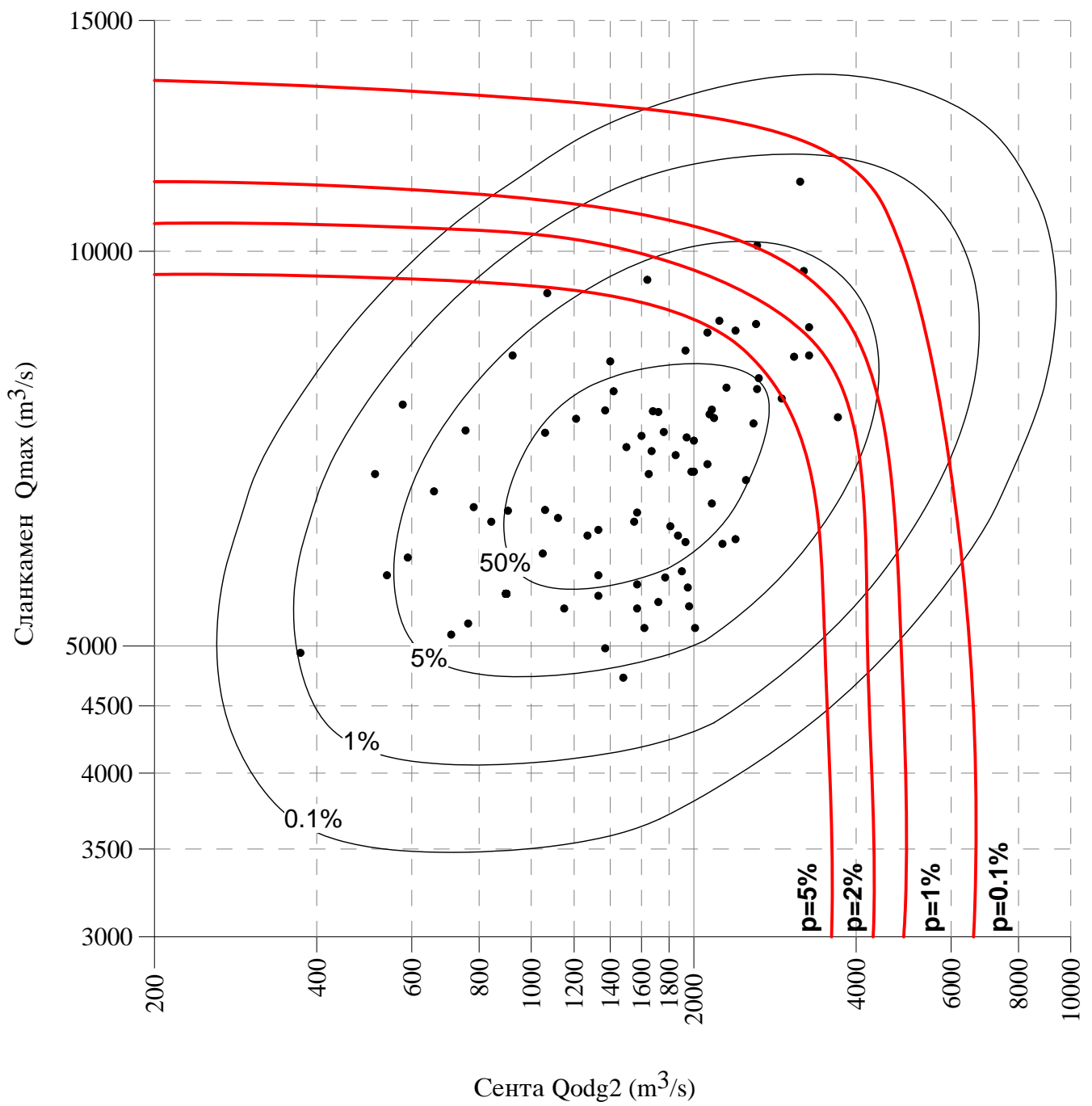
**КОИНЦИДЕНЦИЈА ПОПЛАВНИХ ТАЛАСА ДУНАВА И ТИСЕ**



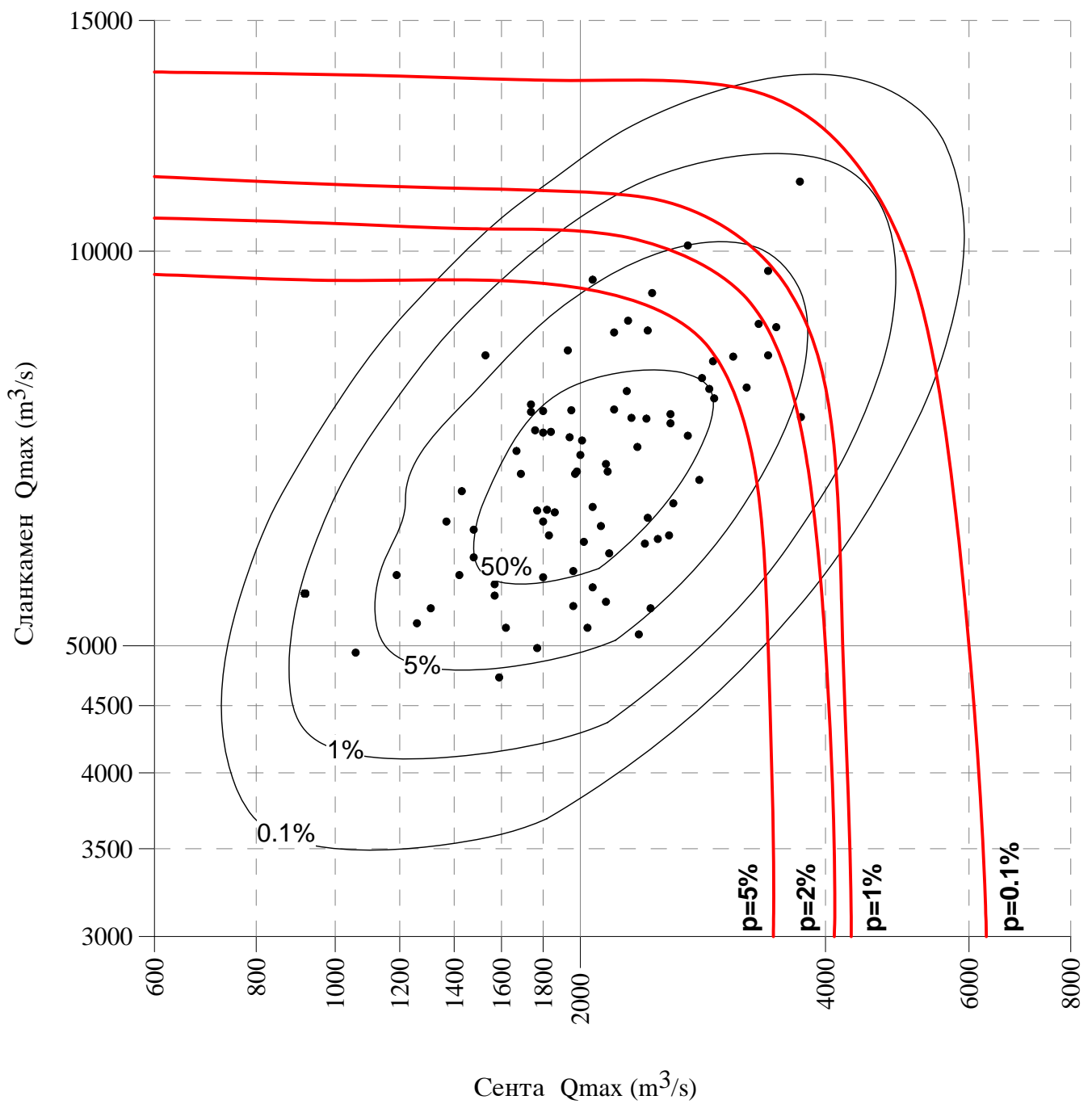
**КОИНЦИДЕНЦИЈА ПОПЛАВНИХ ТАЛАСА ДУНАВА И ТИСЕ**



**КОИНЦИДЕНЦИЈА ПОПЛАВНИХ ТАЛАСА ДУНАВА И ТИСЕ**

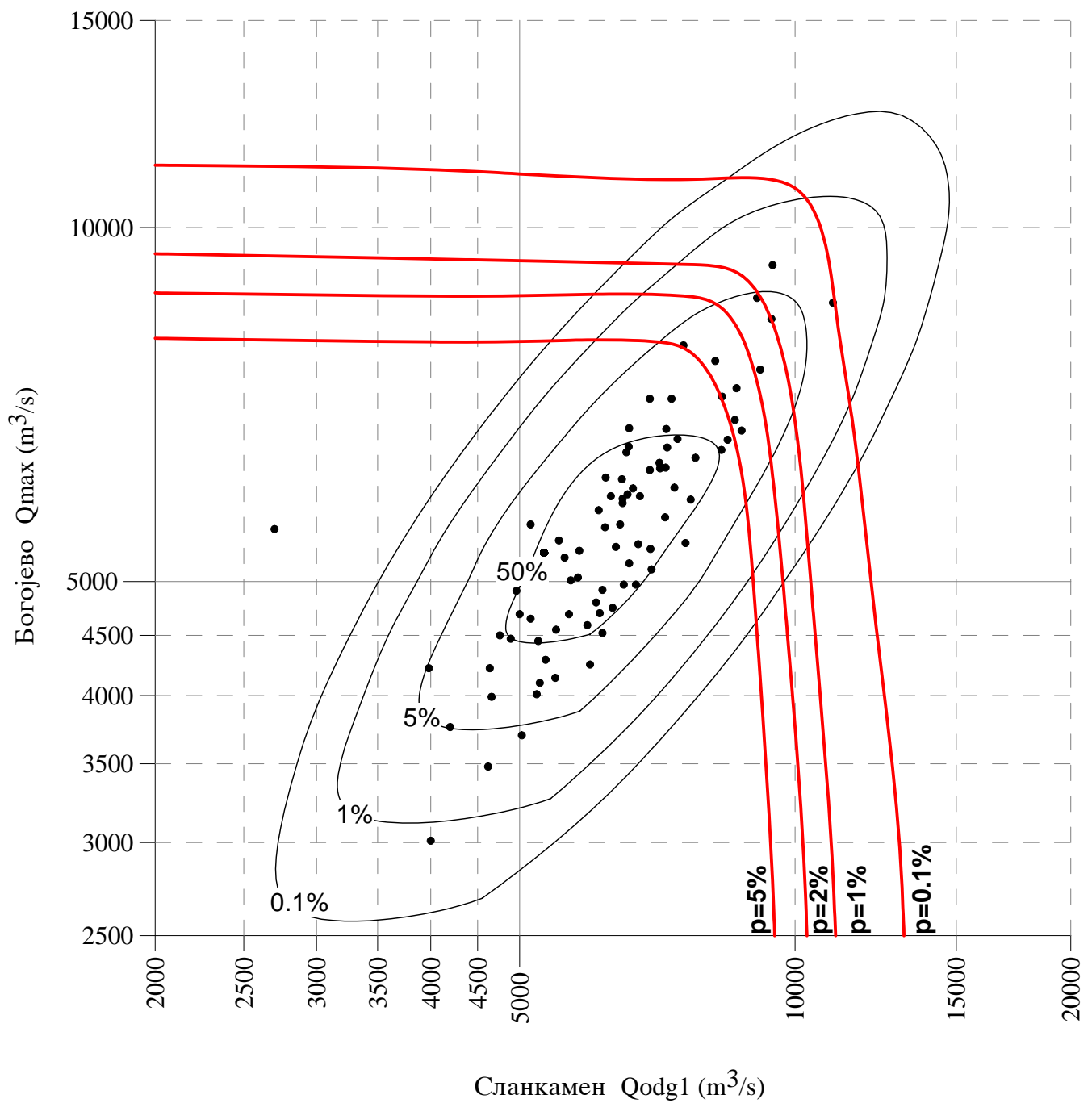


**КОИНЦИДЕНЦИЈА ПОПЛАВНИХ ТАЛАСА ДУНАВА И ТИСЕ**

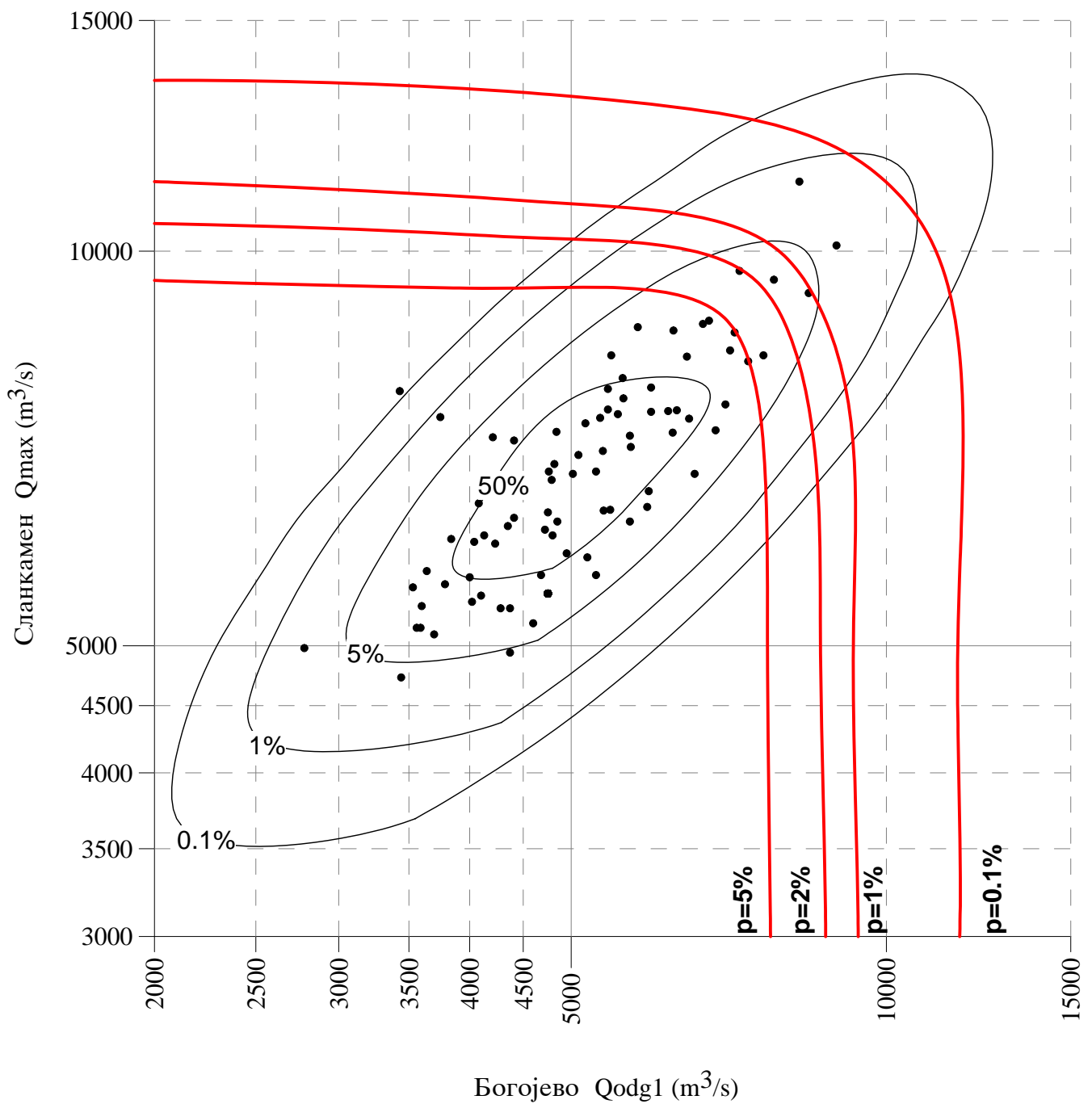




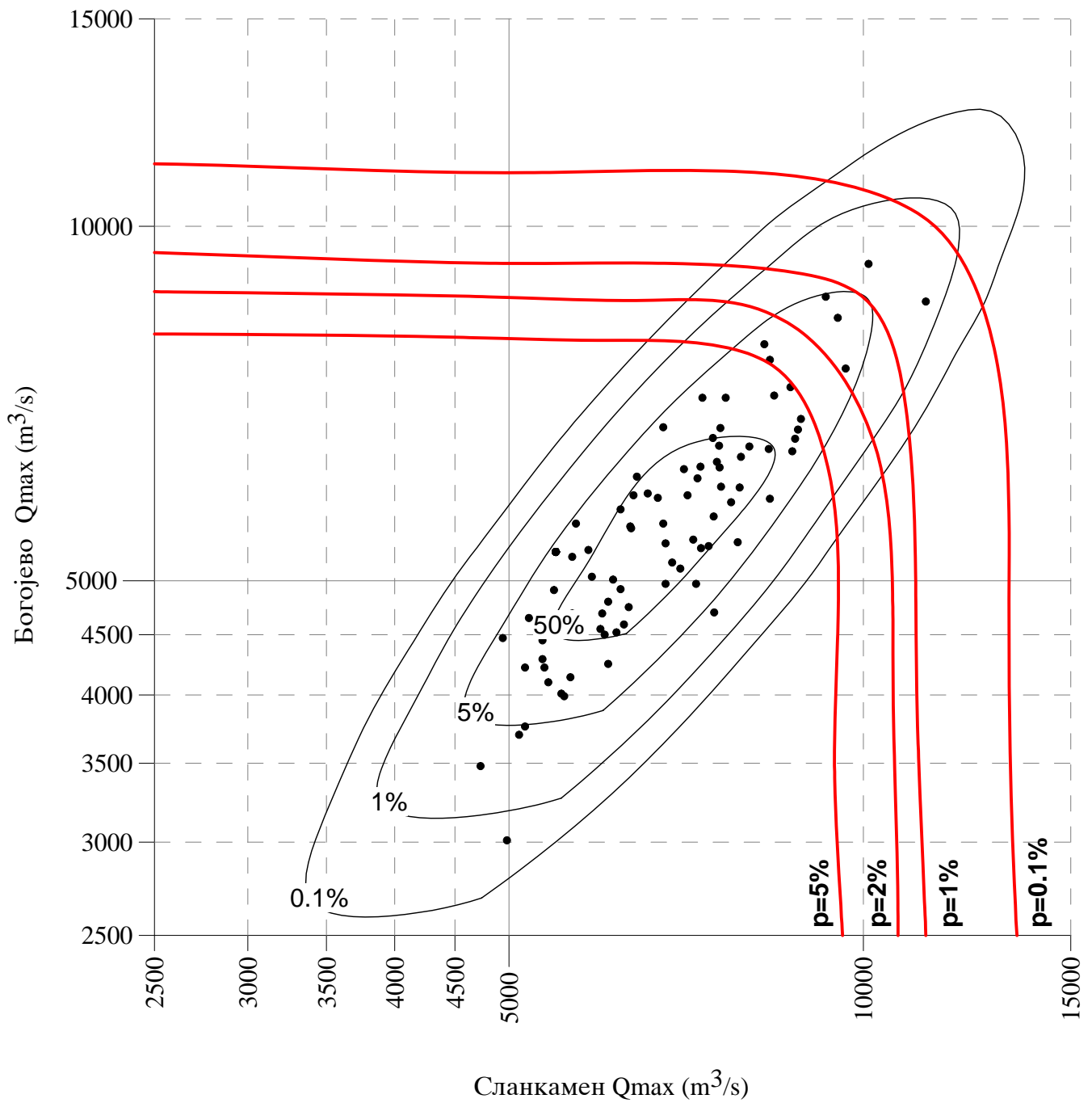
**КОИНЦИДЕНЦИЈА ПОПЛАВНИХ ТАЛАСА ДУНАВА И ТИСЕ**



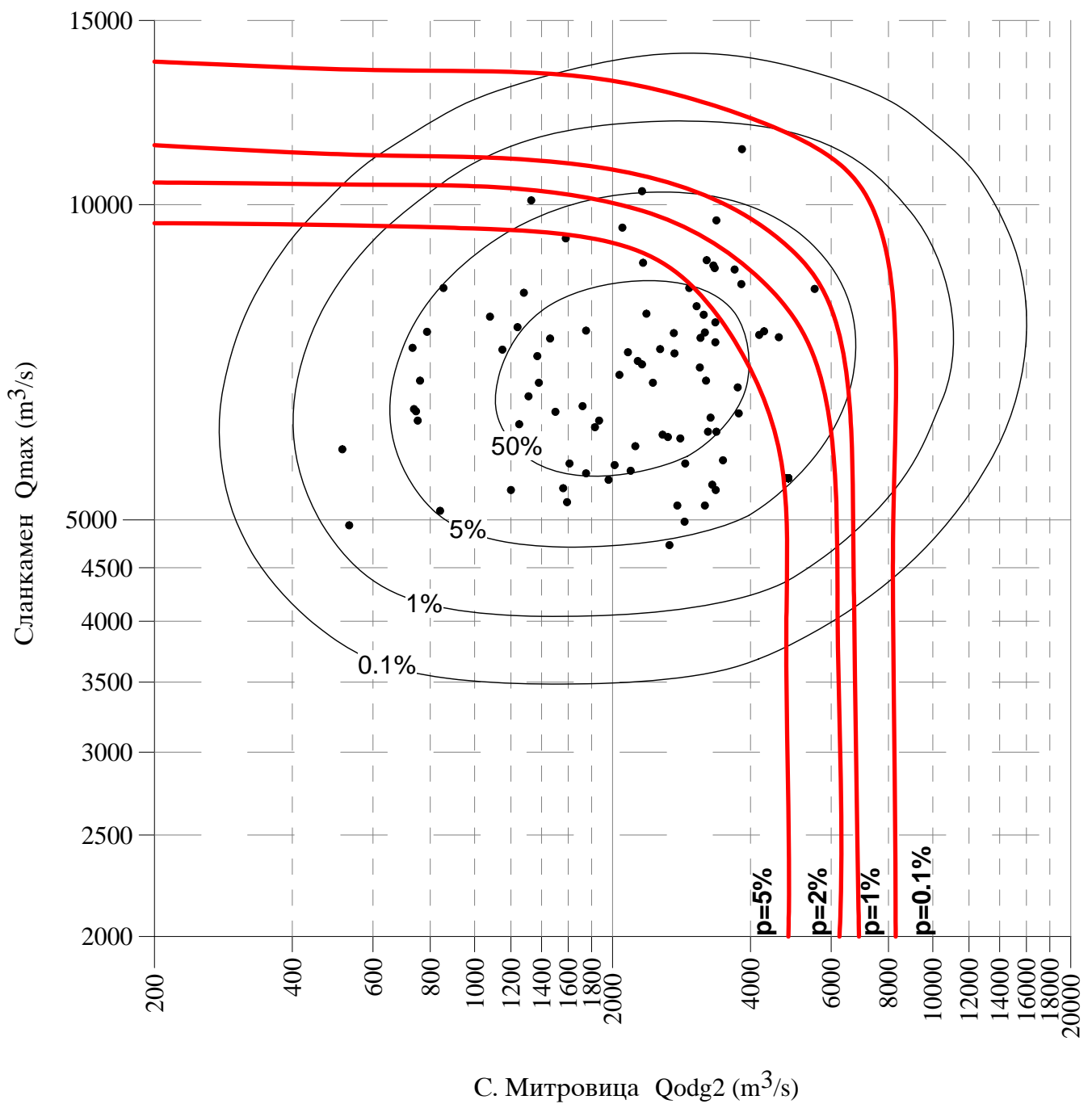
**КОИНЦИДЕНЦИЈА ПОПЛАВНИХ ТАЛАСА ДУНАВА И ТИСЕ**



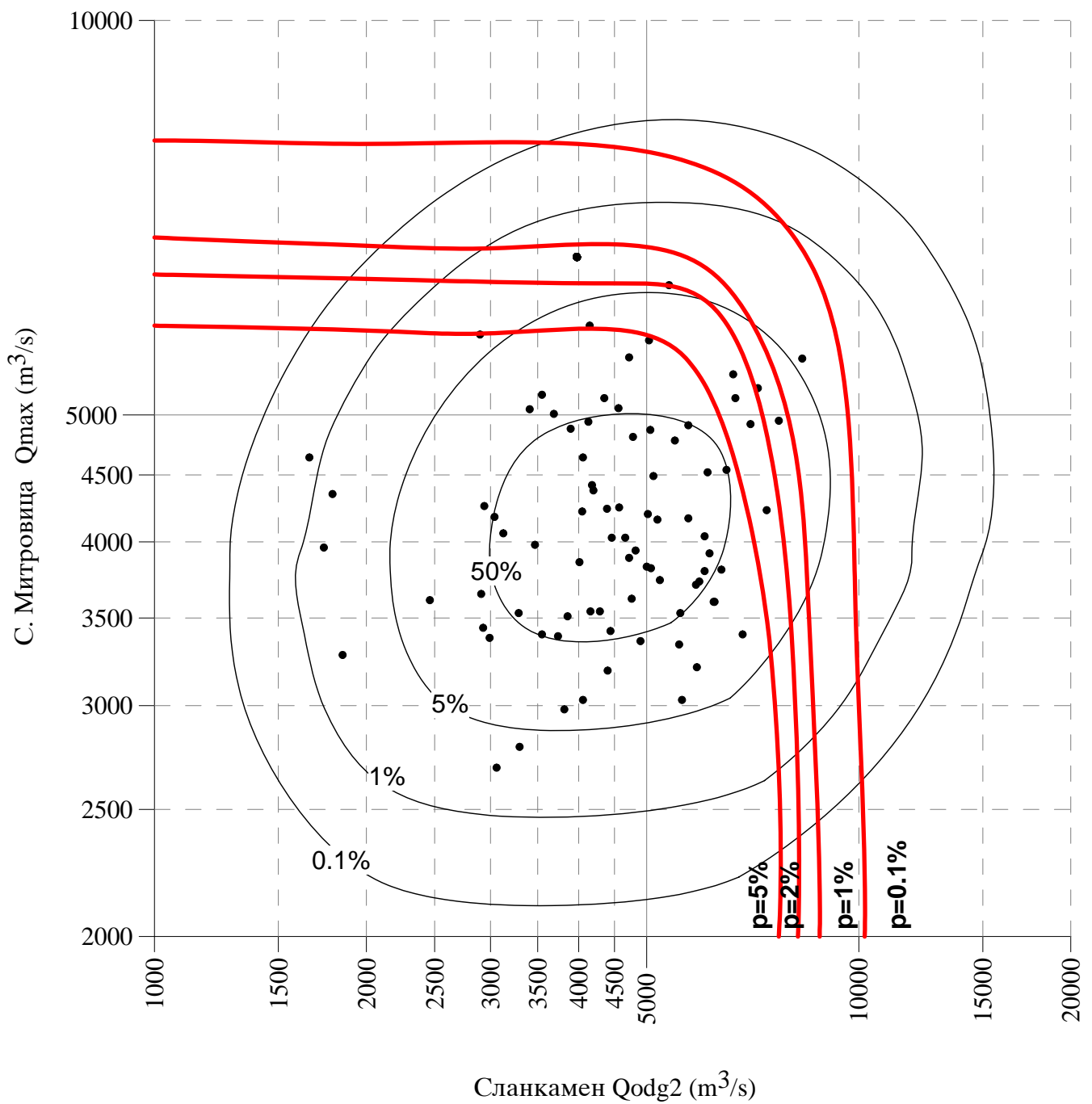
**КОИНЦИДЕНЦИЈА ПОПЛАВНИХ ТАЛАСА ДУНАВА И ТИСЕ**



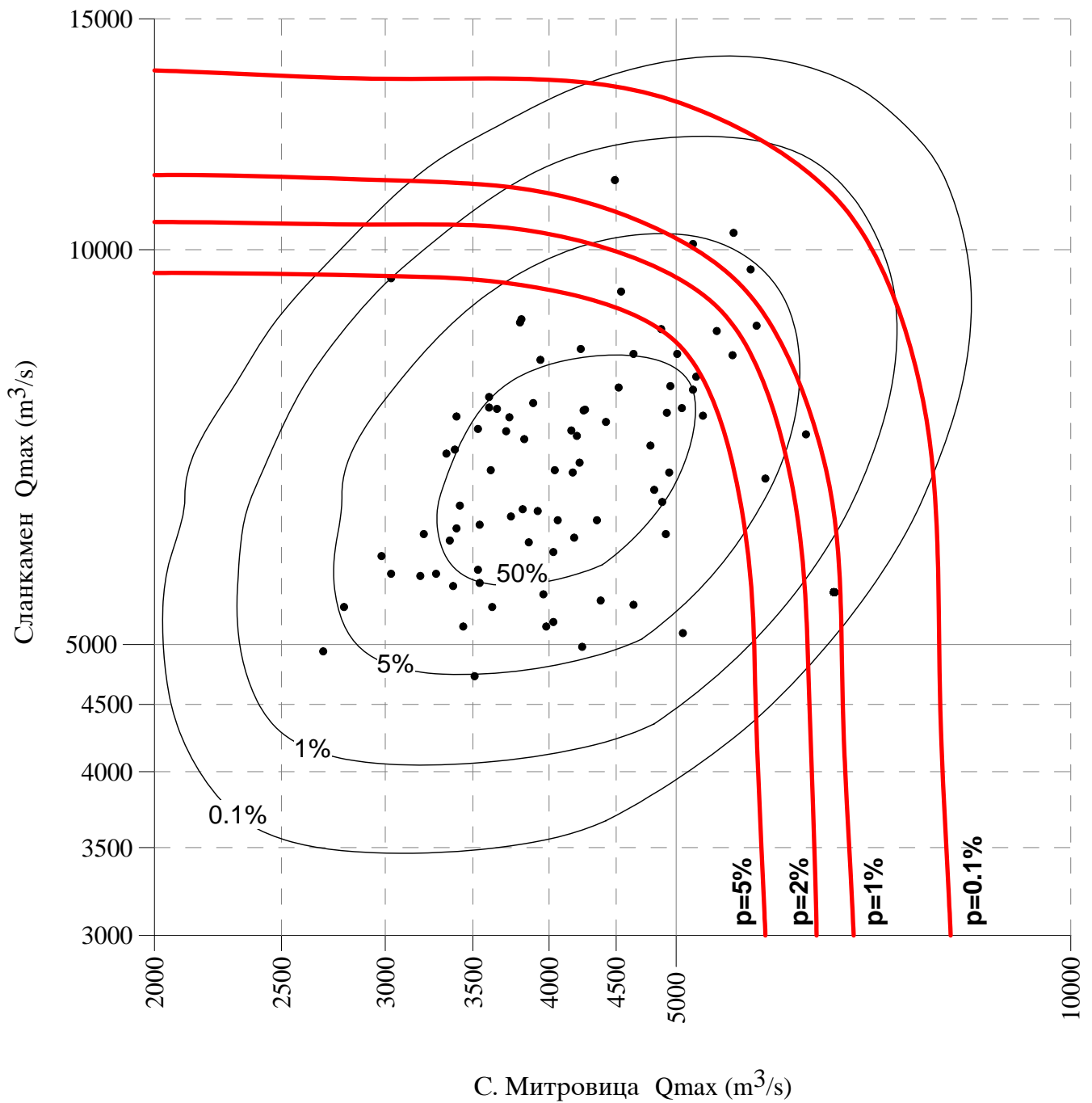
**КОИНЦИДЕНЦИЈА ПОПЛАВНИХ ТАЛАСА ДУНАВА И САВЕ**



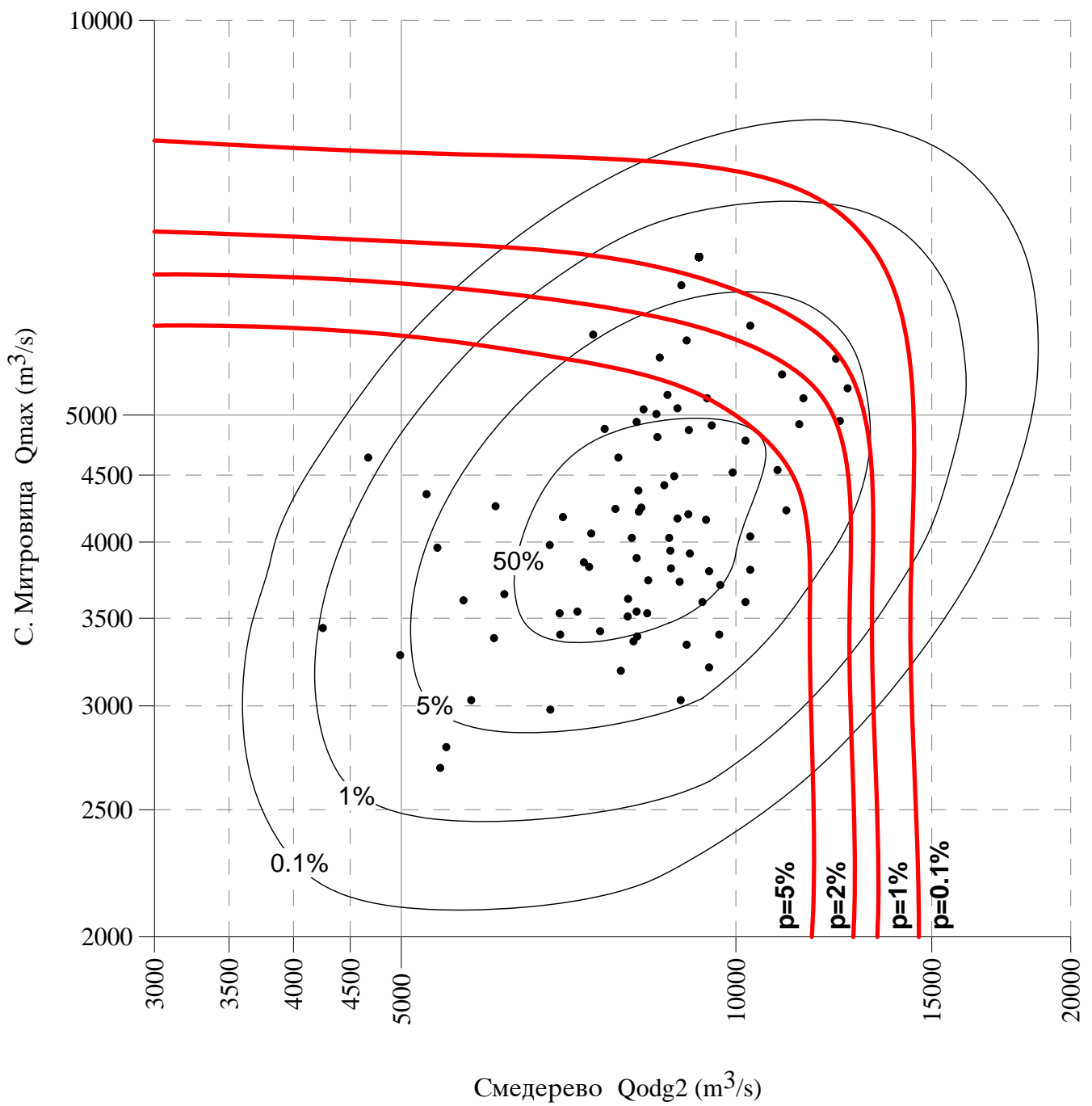
**КОИНЦИДЕНЦИЈА ПОПЛАВНИХ ТАЛАСА ДУНАВА И САВЕ**



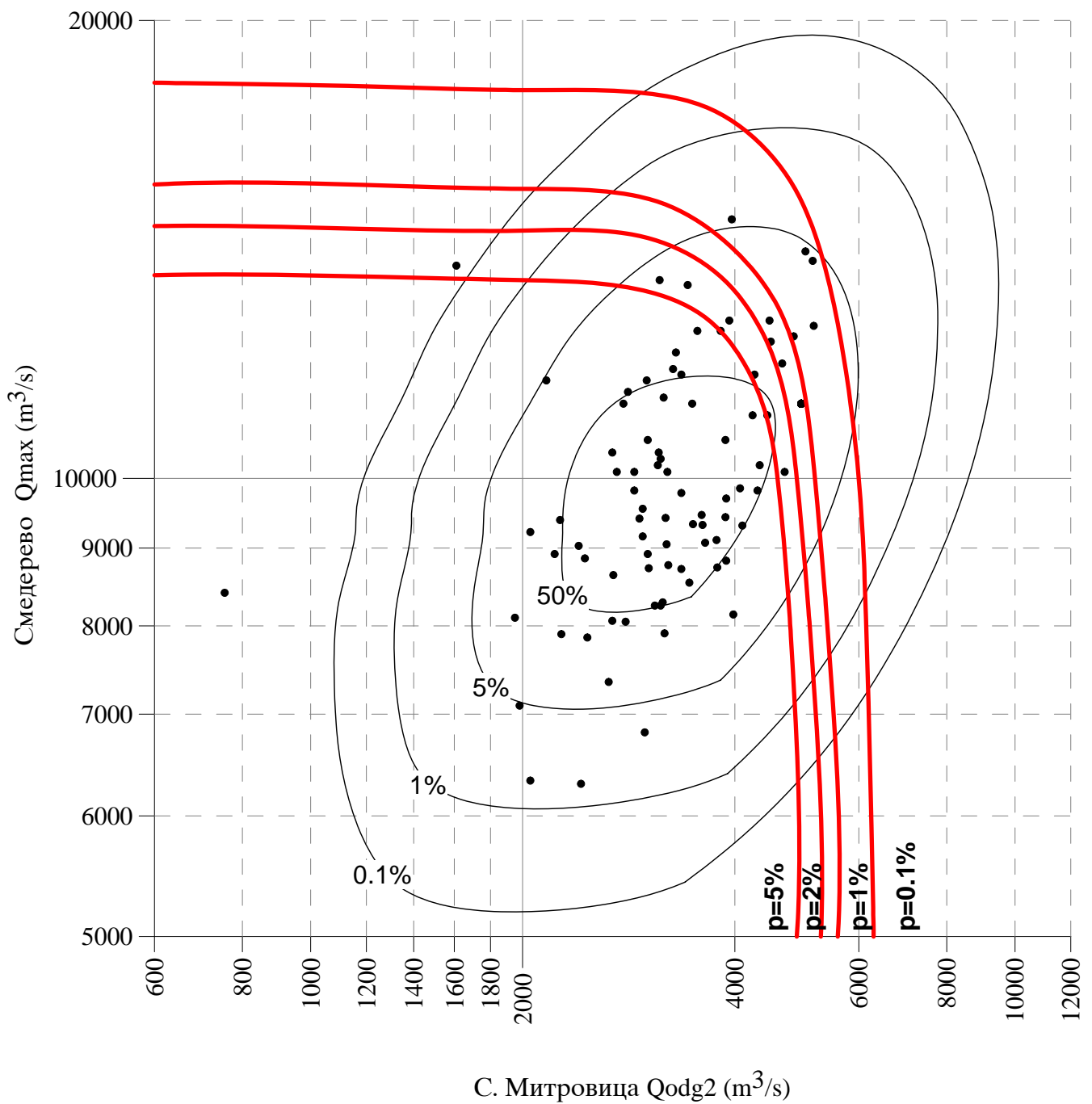
**КОИНЦИДЕНЦИЈА ПОПЛАВНИХ ТАЛАСА ДУНАВА И САВЕ**



**КОИНЦИДЕНЦИЈА ПОПЛАВНИХ ТАЛАСА ДУНАВА И САВЕ**

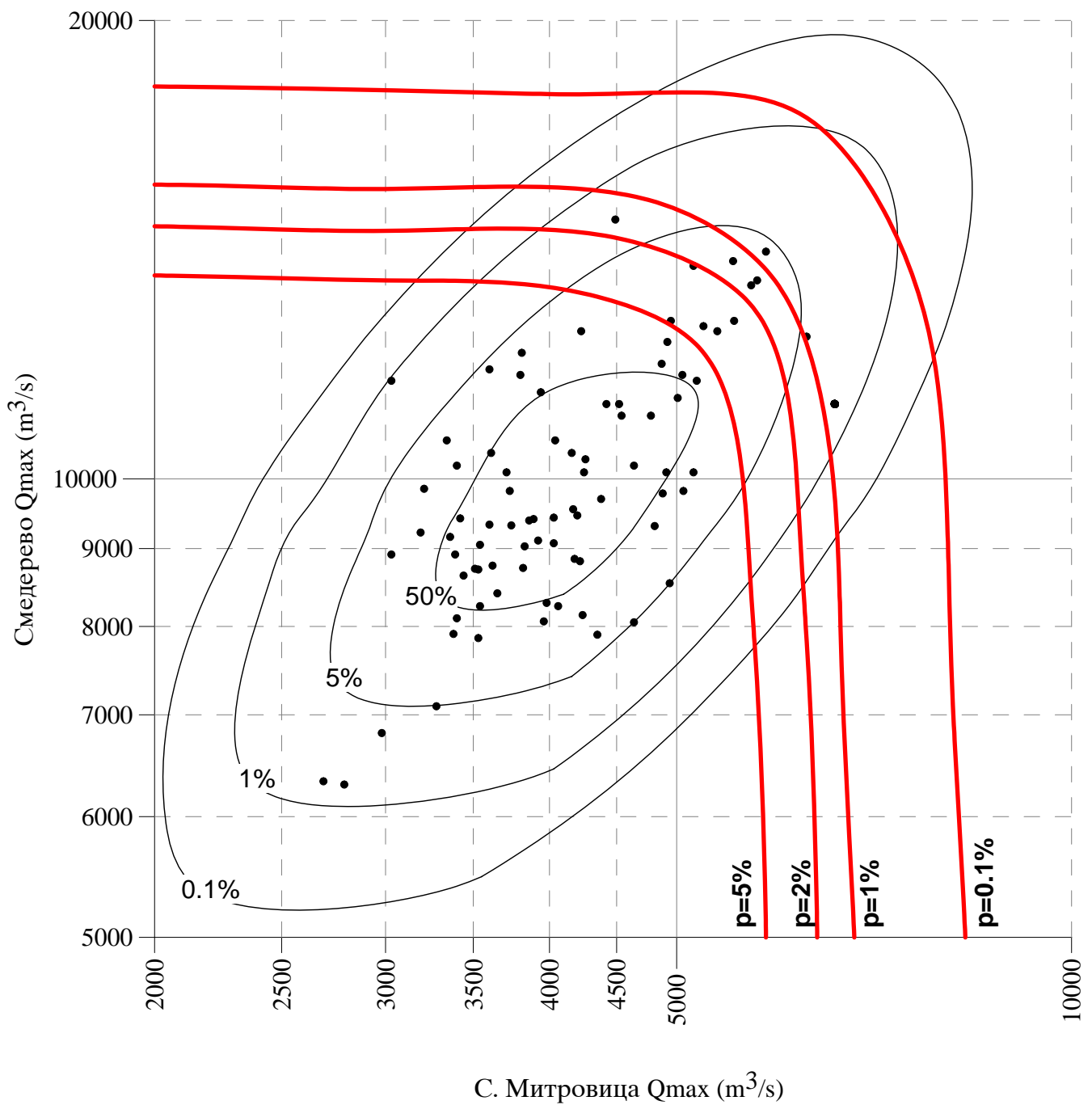


**КОИНЦИДЕНЦИЈА ПОПЛАВНИХ ТАЛАСА ДУНАВА И САВЕ**

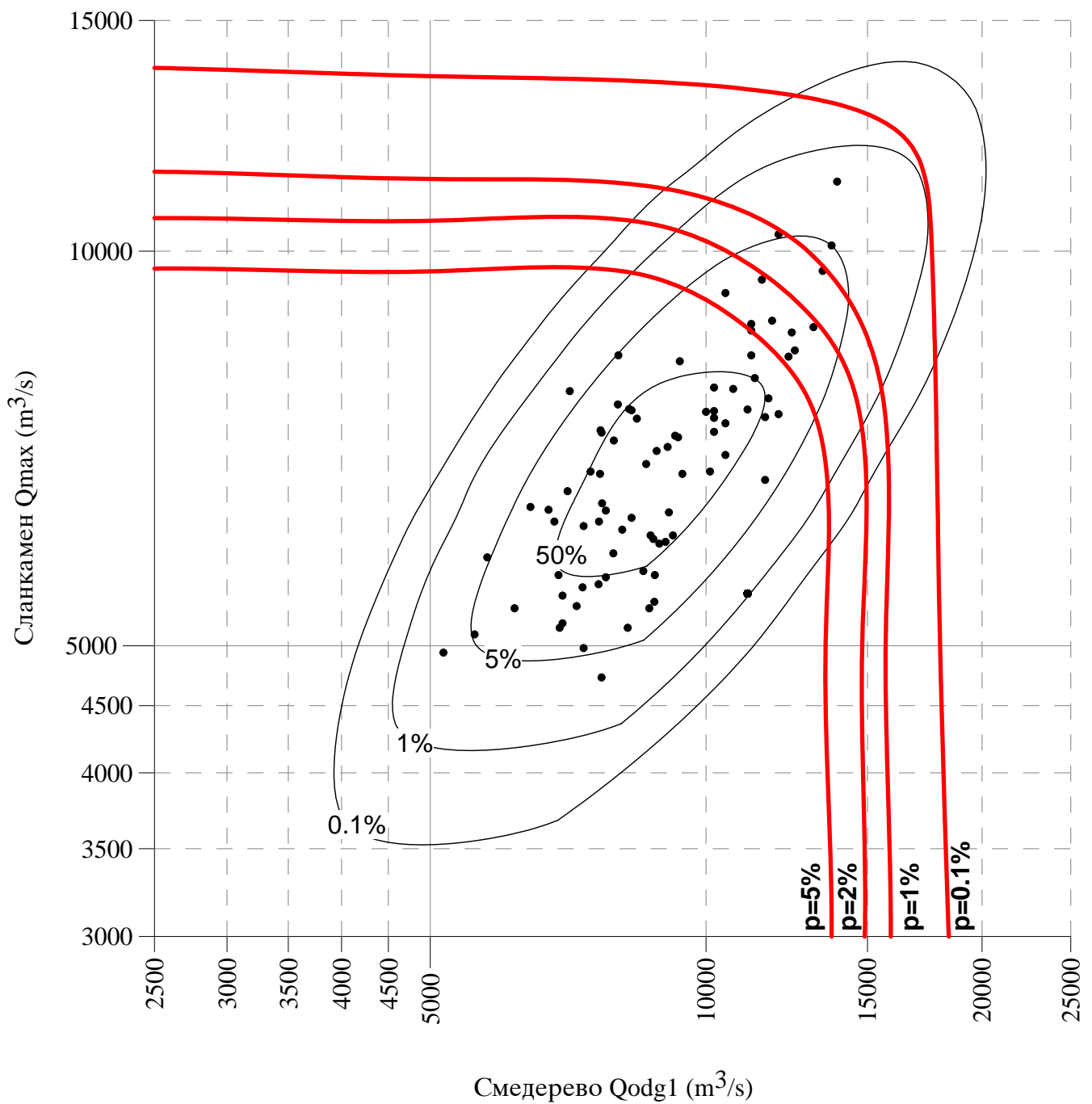




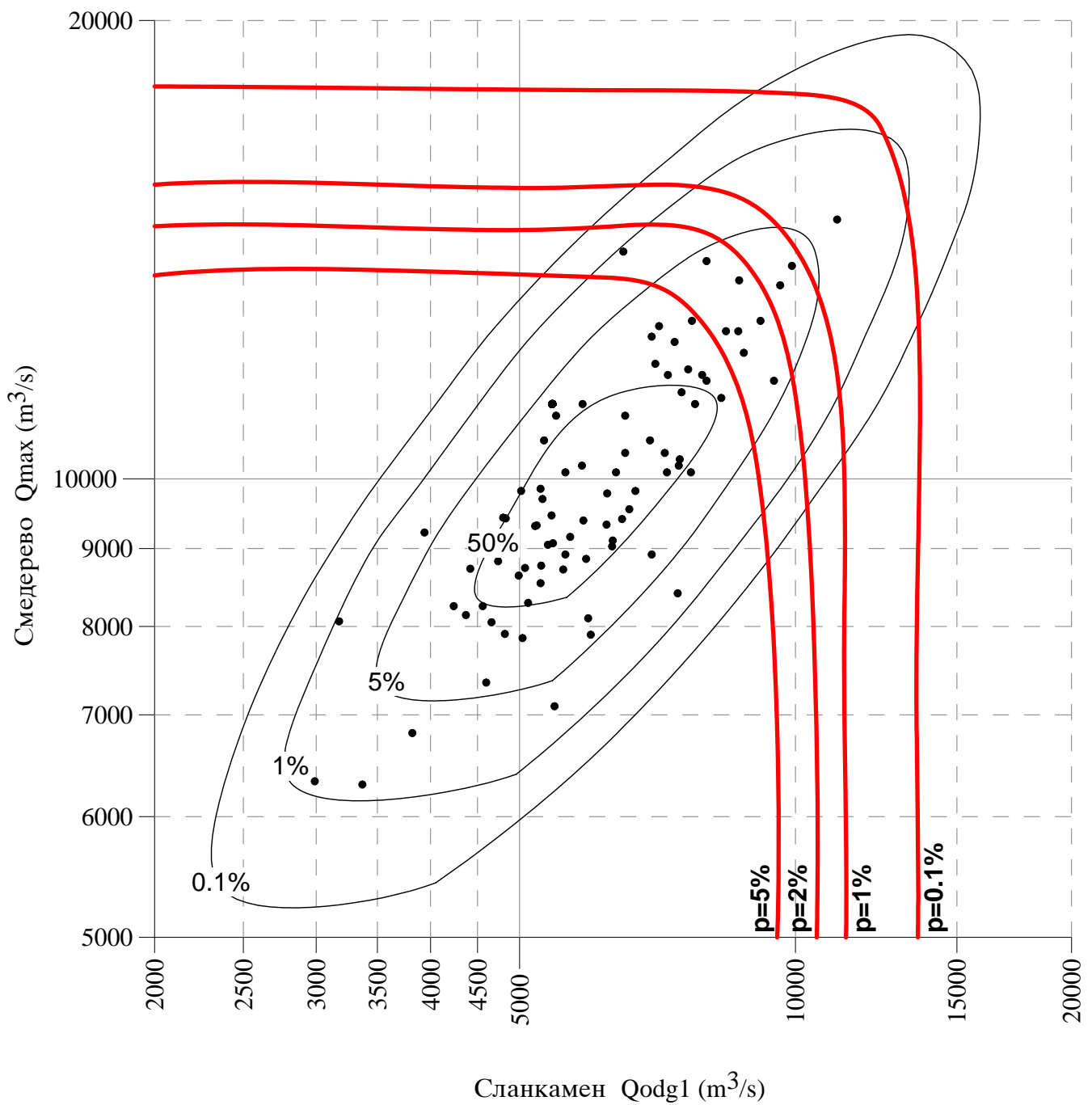
**КОИНЦИДЕНЦИЈА ПОПЛАВНИХ ТАЛАСА ДУНАВА И САВЕ**



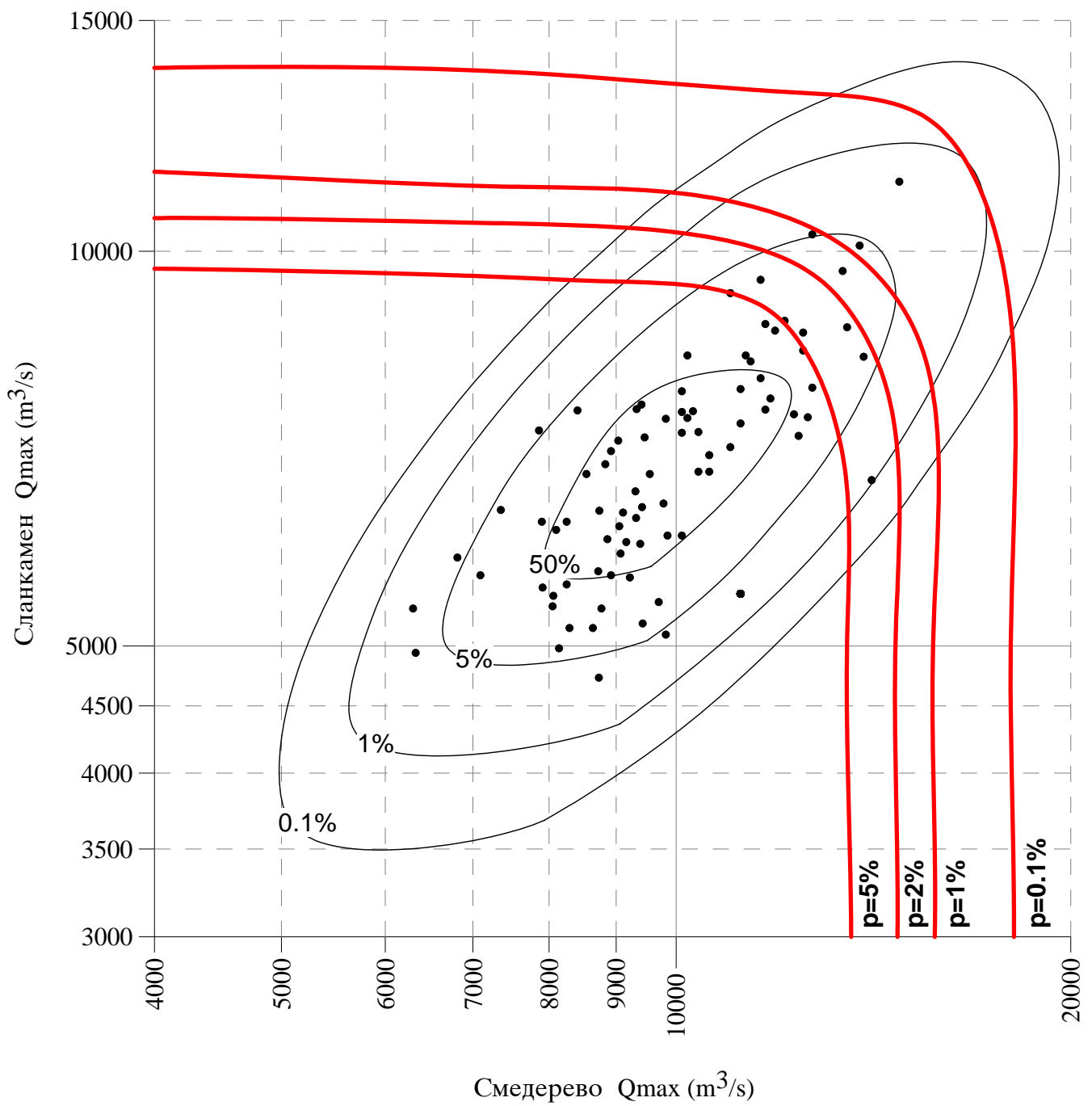
**КОИНЦИДЕНЦИЈА ПОПЛАВНИХ ТАЛАСА ДУНАВА И САВЕ**



**КОИНЦИДЕНЦИЈА ПОПЛАВНИХ ТАЛАСА ДУНАВА И САВЕ**



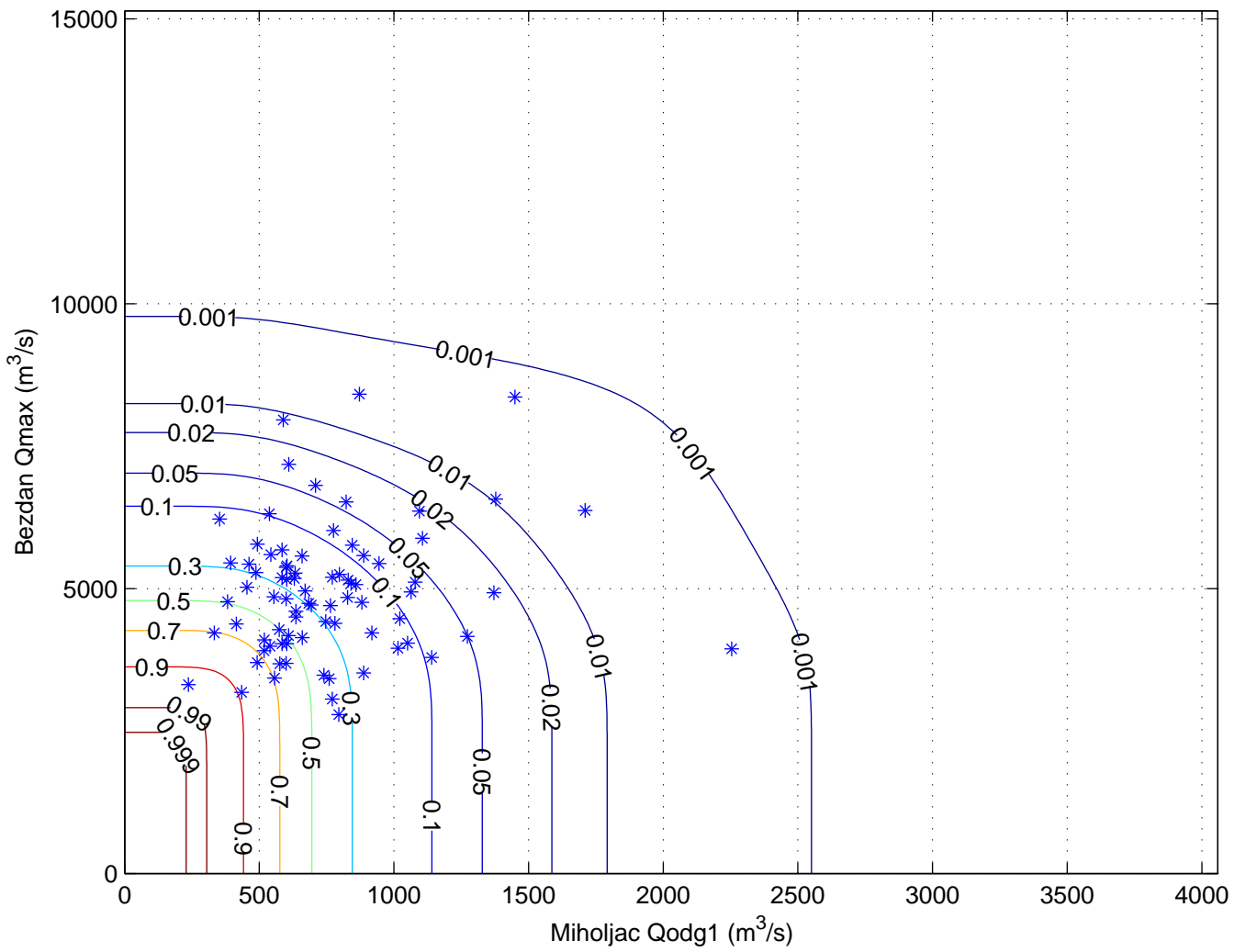
**КОИНЦИДЕНЦИЈА ПОПЛАВНИХ ТАЛАСА ДУНАВА И САВЕ**



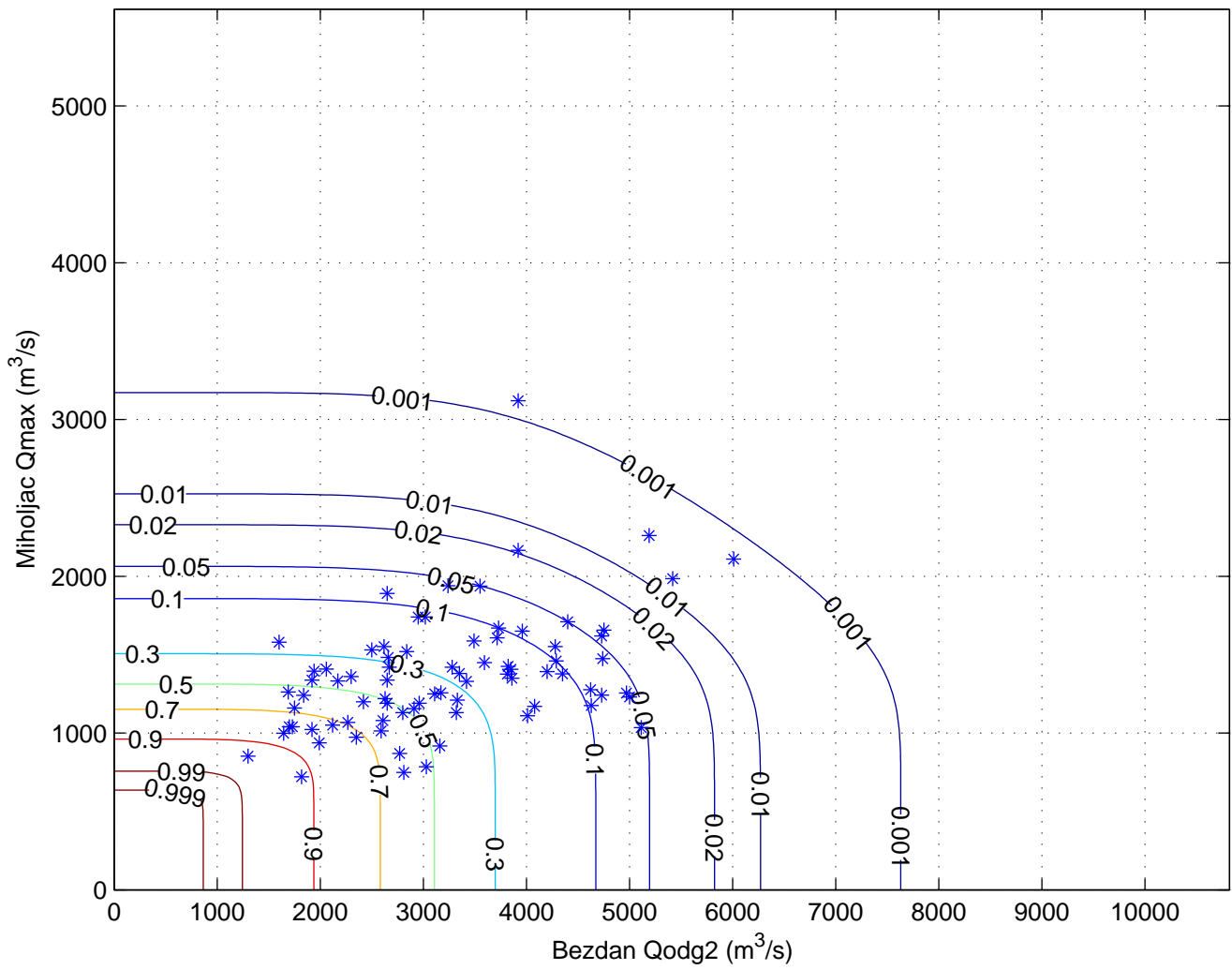
## **ПРИЛОГ 7**

Копуле преживљавања комбинација протока Дунава и притока  
(параметри маргиналних расподела оцењени методом максималне  
веродостојности)

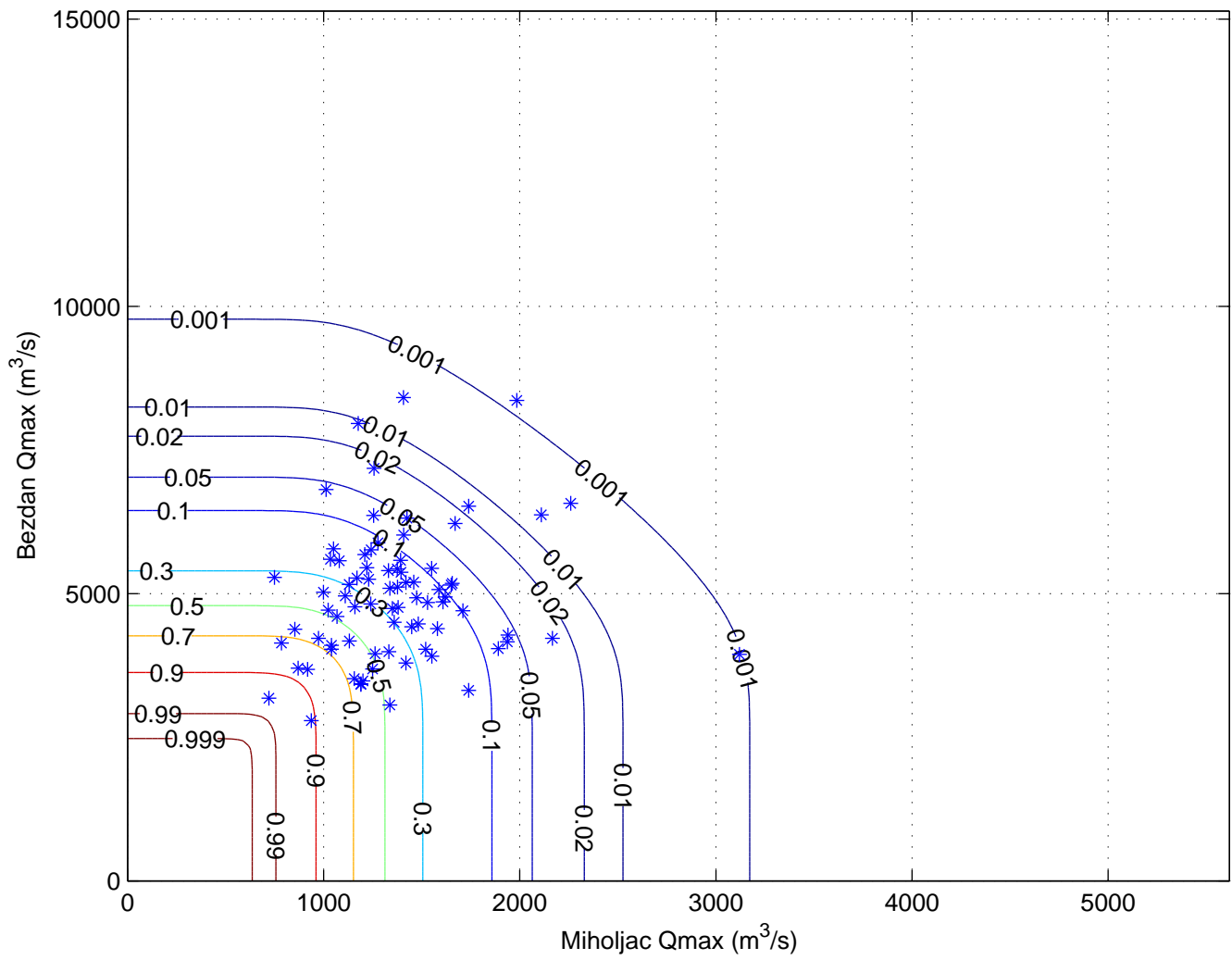
Isolines of  $\hat{C}$  for Gumbel copula: Miholjac vs Bezdán  
marginals: GEV, GEV ( $\tau = 0.083577$   $\theta = 1.0912$ )



Isolines of  $\hat{C}$  for Frank copula: Bezdan vs Miholjac  
marginals: LP3, GEV ( $\tau = 0.31112$   $\theta = 3.0445$ )

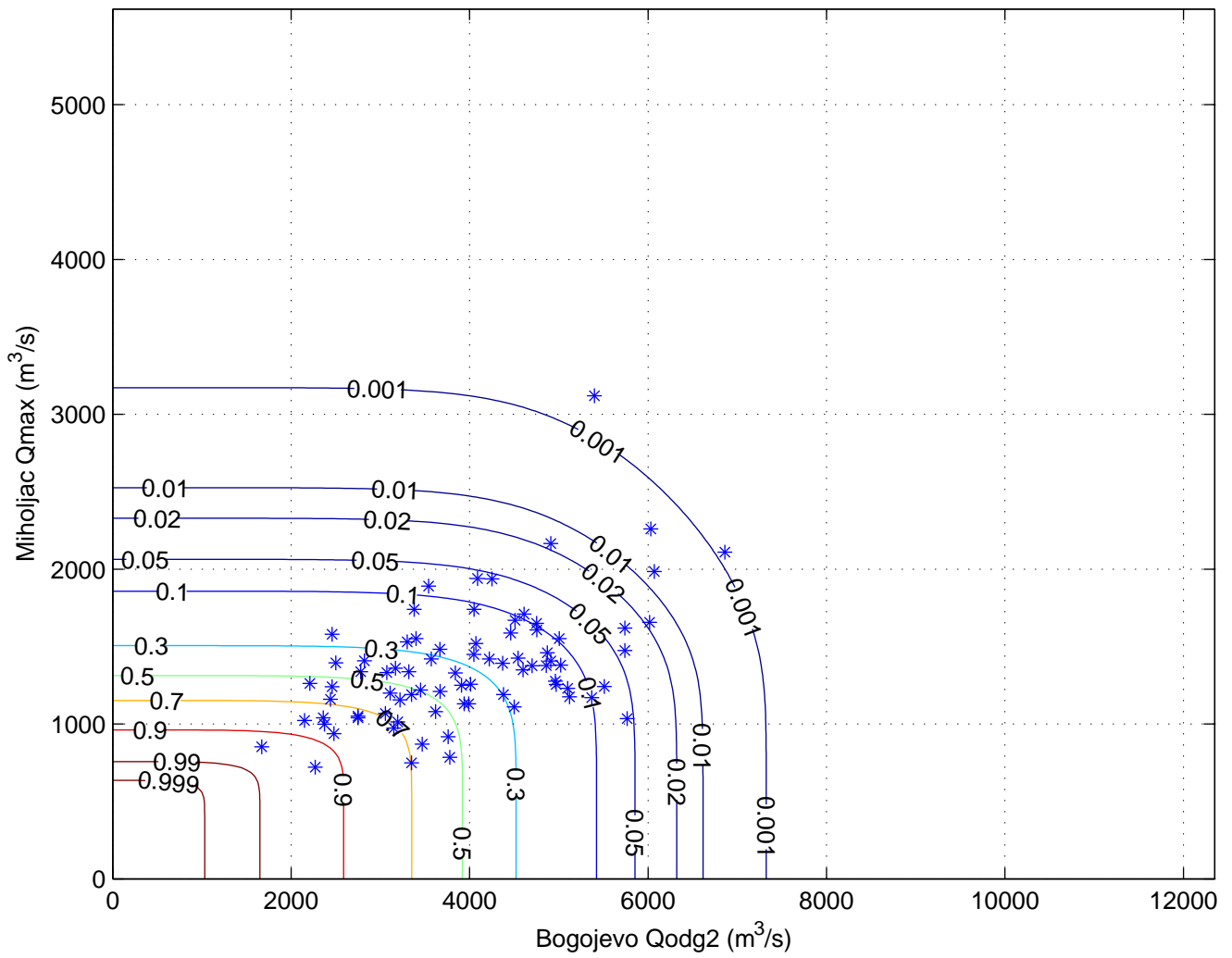


Isolines of  $\hat{C}$  for Clayton copula: Miholjac vs Bezdán  
marginals: GEV, GEV ( $\tau = 0.10333$   $\theta = 0.23048$ )

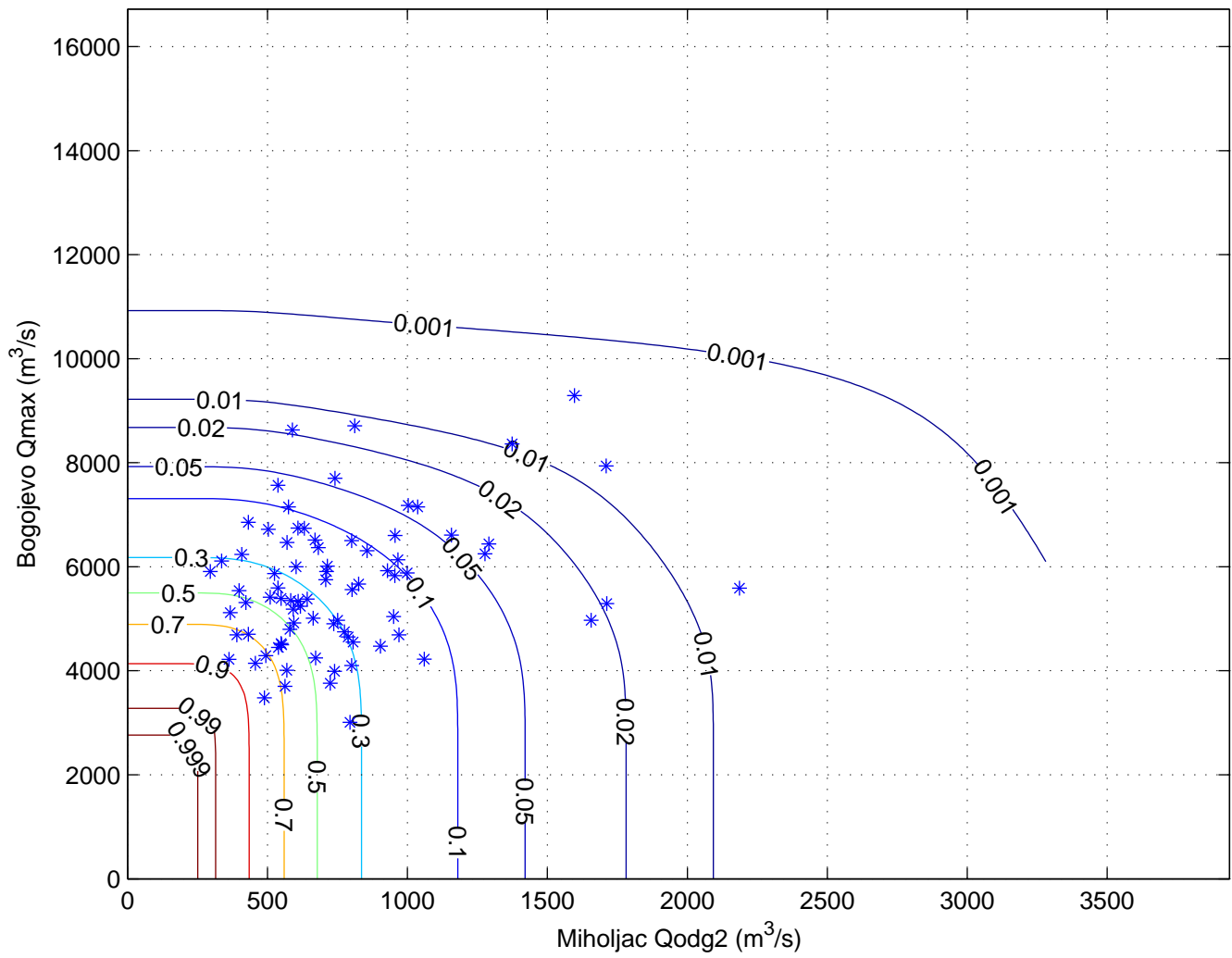




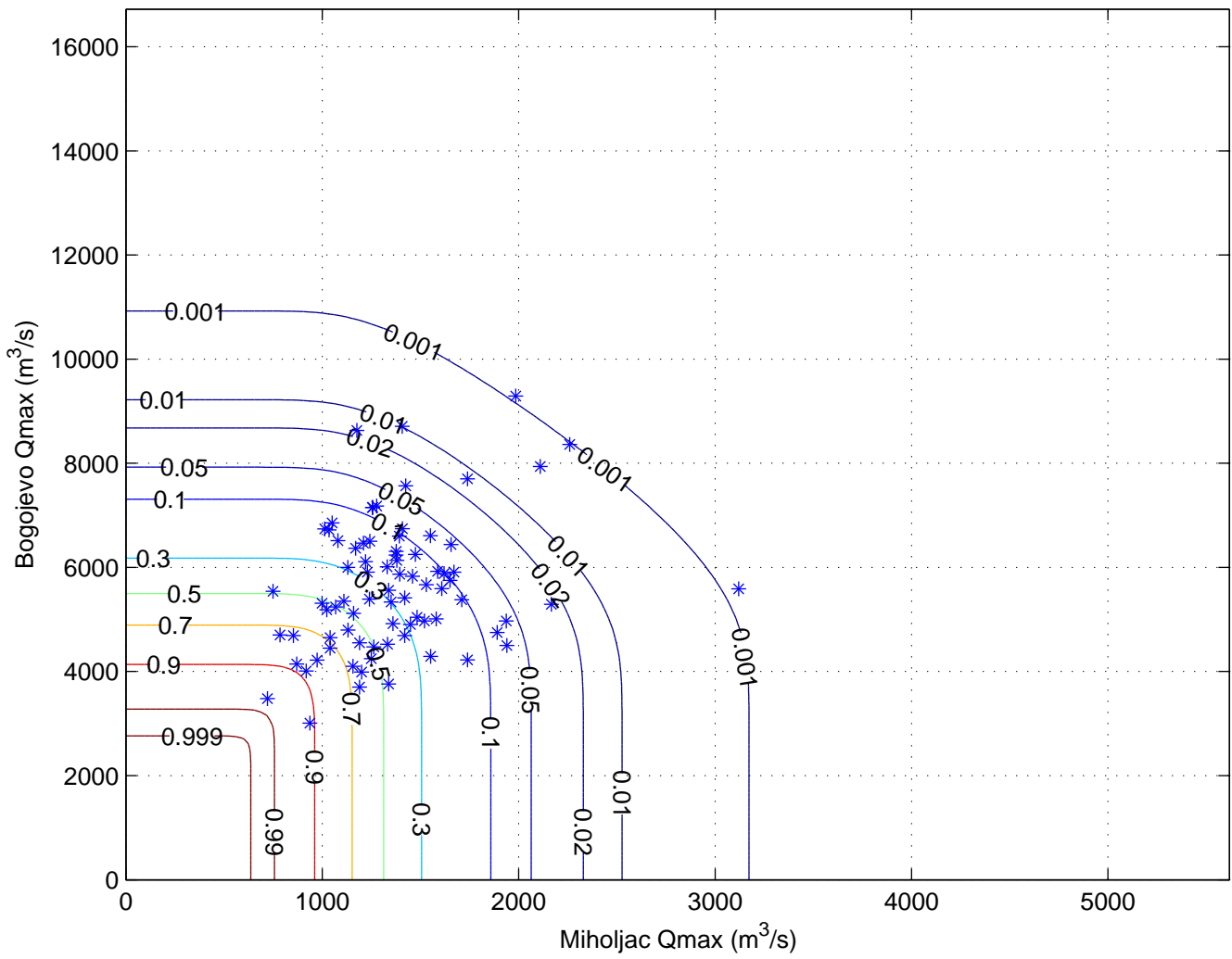
Isolines of  $\hat{C}$  for Frank copula: Bogojevo vs Miholjac  
marginals: GEV, GEV ( $\tau = 0.34493$   $\theta = 3.4464$ )



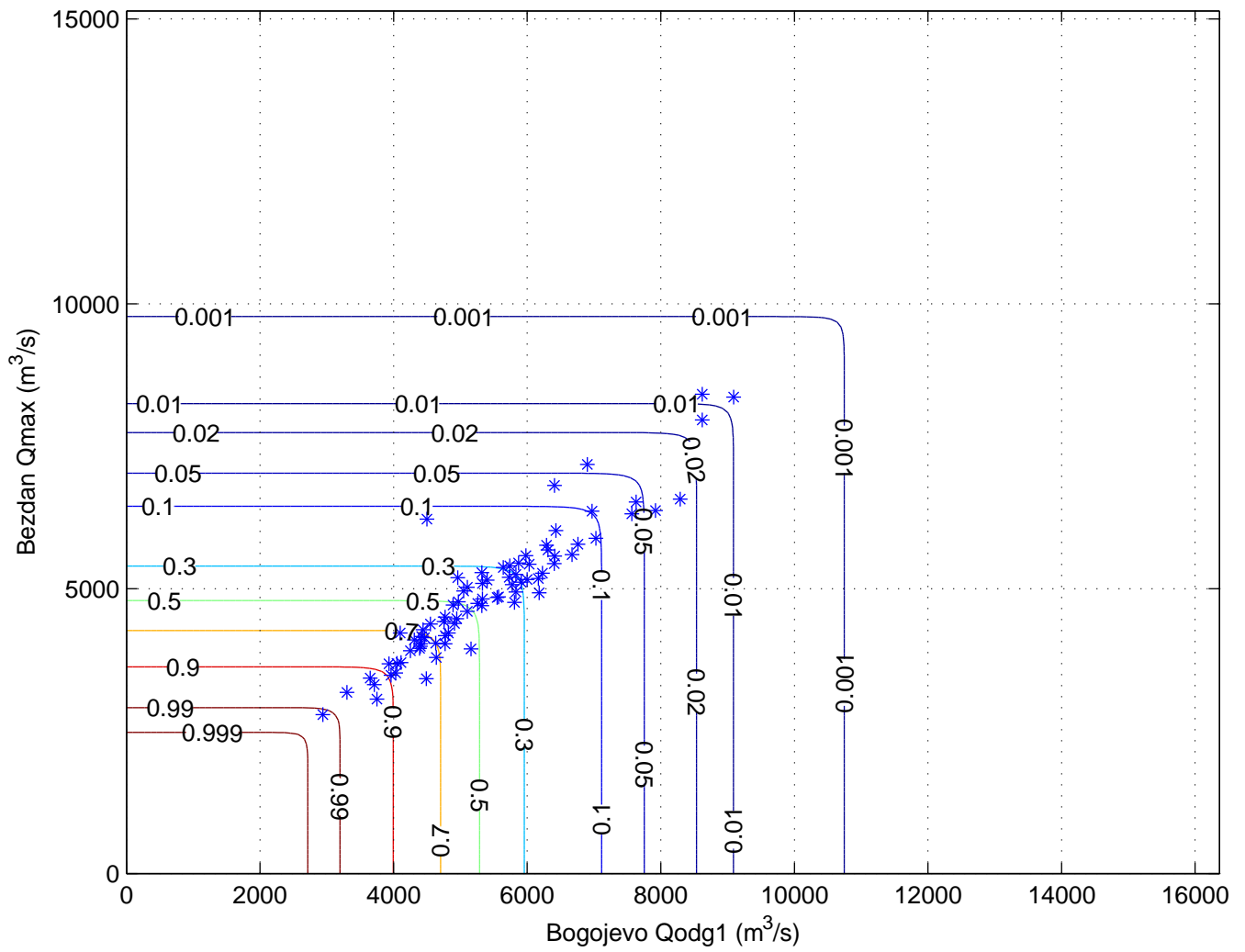
Isolines of  $\hat{C}$  for Gumbel copula: Miholjac vs Bogojevo  
marginals: GEV, LGN ( $\tau = 0.15042$   $\theta = 1.1771$ )



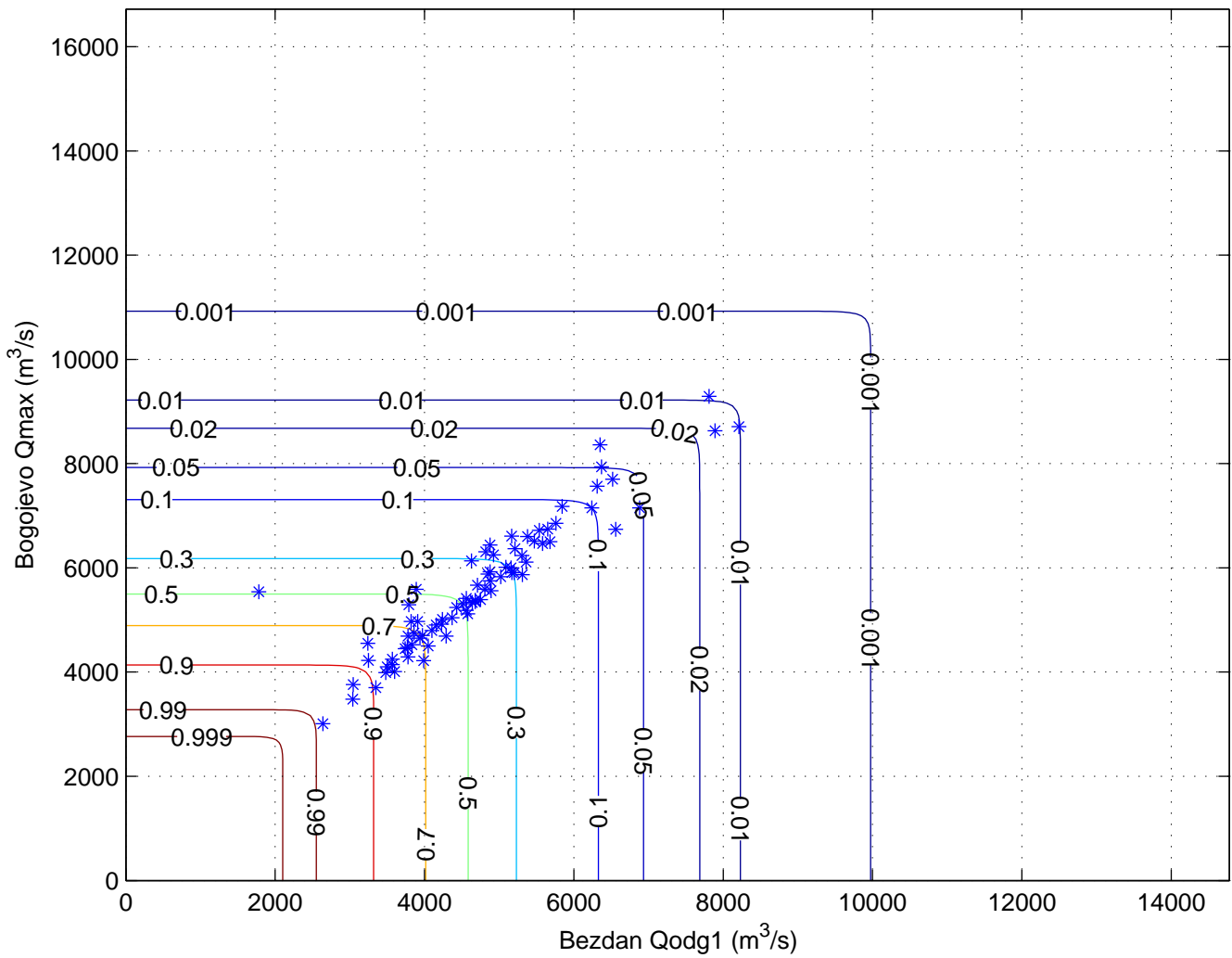
Isolines of  $\hat{C}$  for Clayton copula: Miholjac vs Bogojeho  
marginals: GEV, LGN ( $\tau = 0.17872$   $\theta = 0.43521$ )



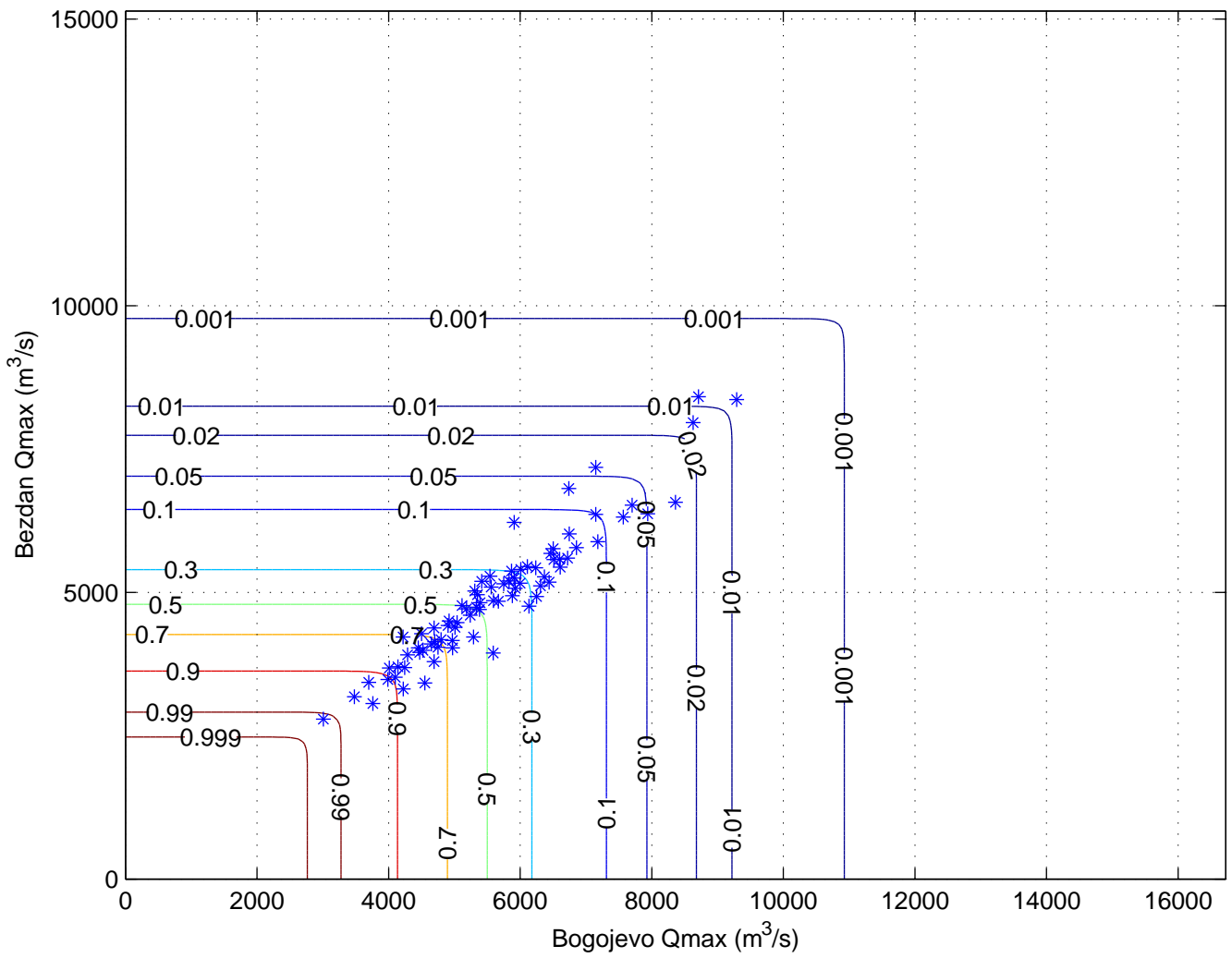
Isolines of  $\hat{C}$  for Gumbel copula: Bogojervo vs Bezdán  
 marginals: GEV, GEV ( $\tau = 0.80286$   $\theta = 5.0726$ )



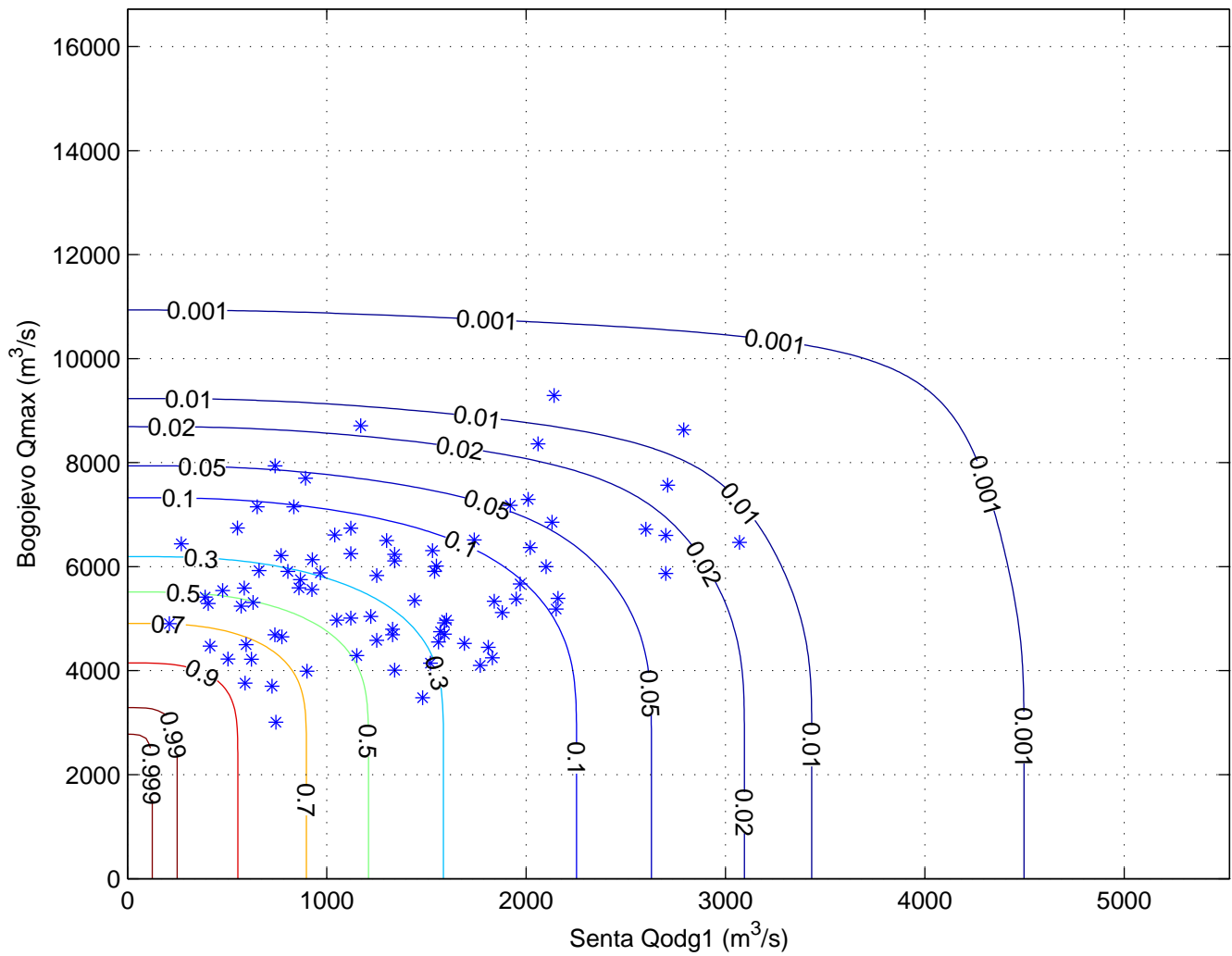
Isolines of  $\hat{C}$  for Gumbel copula: Bezdán vs Bogojevó  
 marginals: LGN, LGN ( $\tau = 0.8221$   $\theta = 5.621$ )



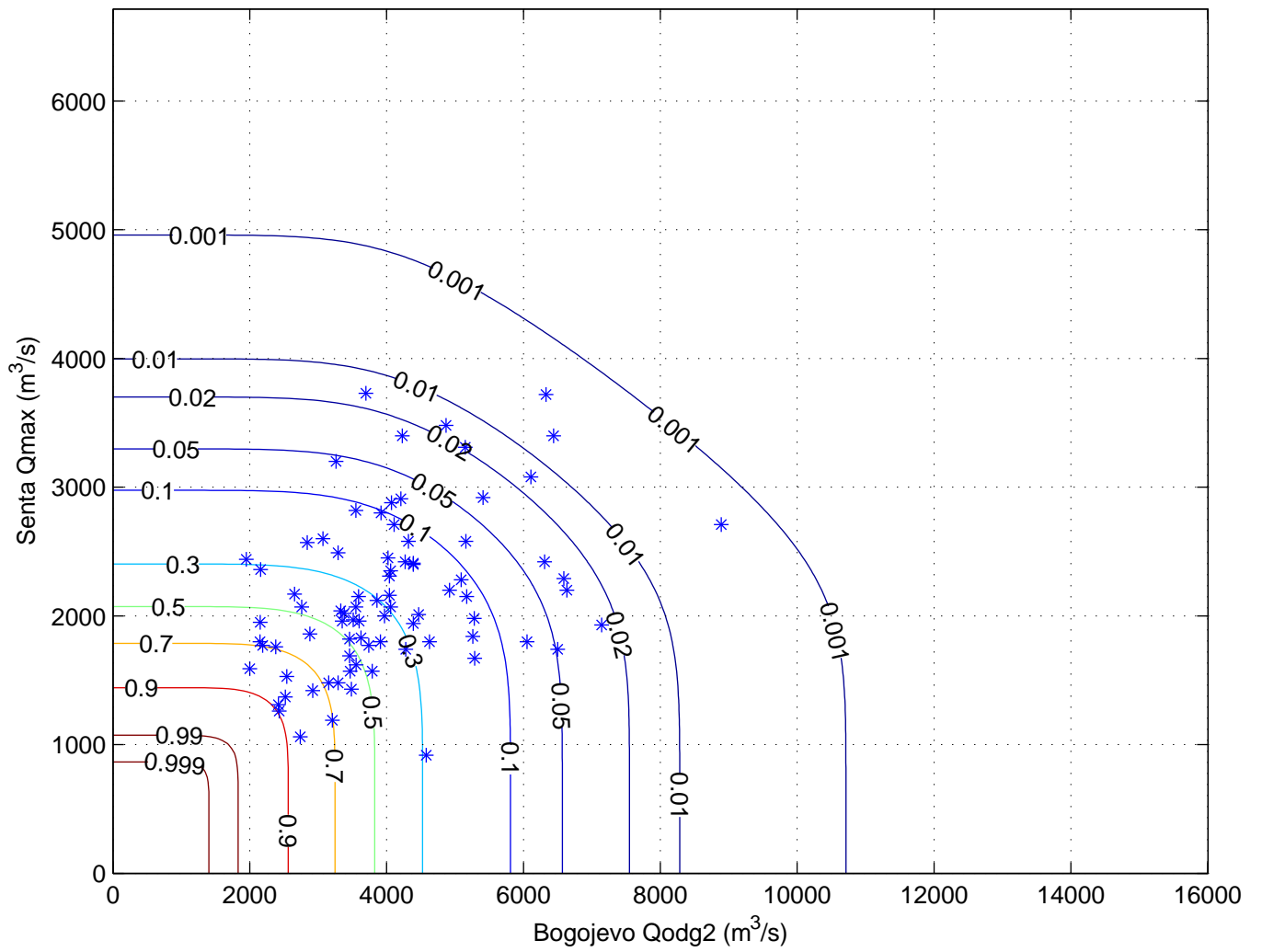
Isolines of  $\hat{C}$  for Gumbel copula: Bogojjevo vs Bezdán  
 marginals: LGN, GEV ( $\tau = 0.82722$   $\theta = 5.7876$ )



Isolines of  $\hat{C}$  for Gumbel copula: Senta vs Bogojevo  
 marginals: LP3, LGN ( $\tau = 0.1689$   $\theta = 1.2032$ )

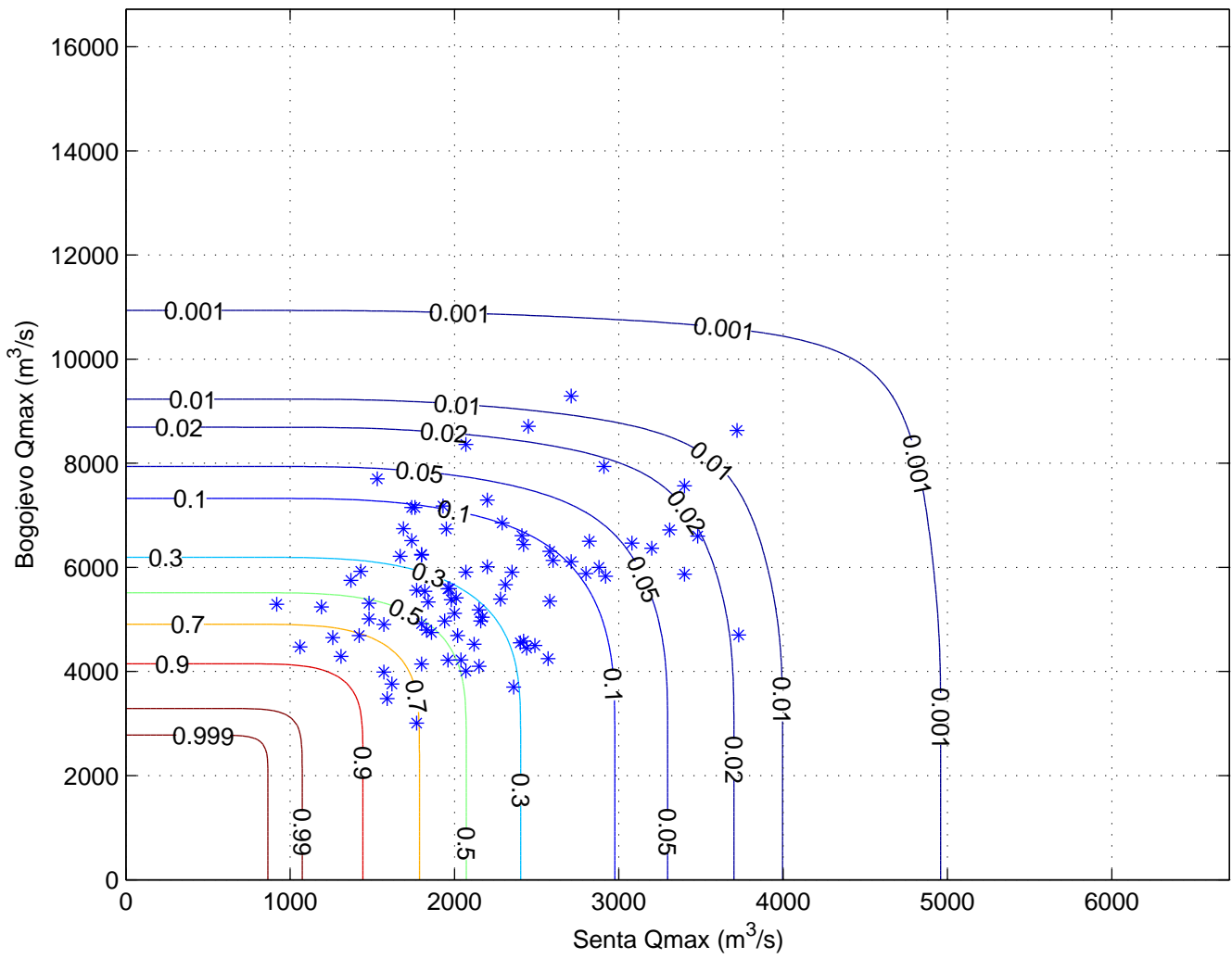


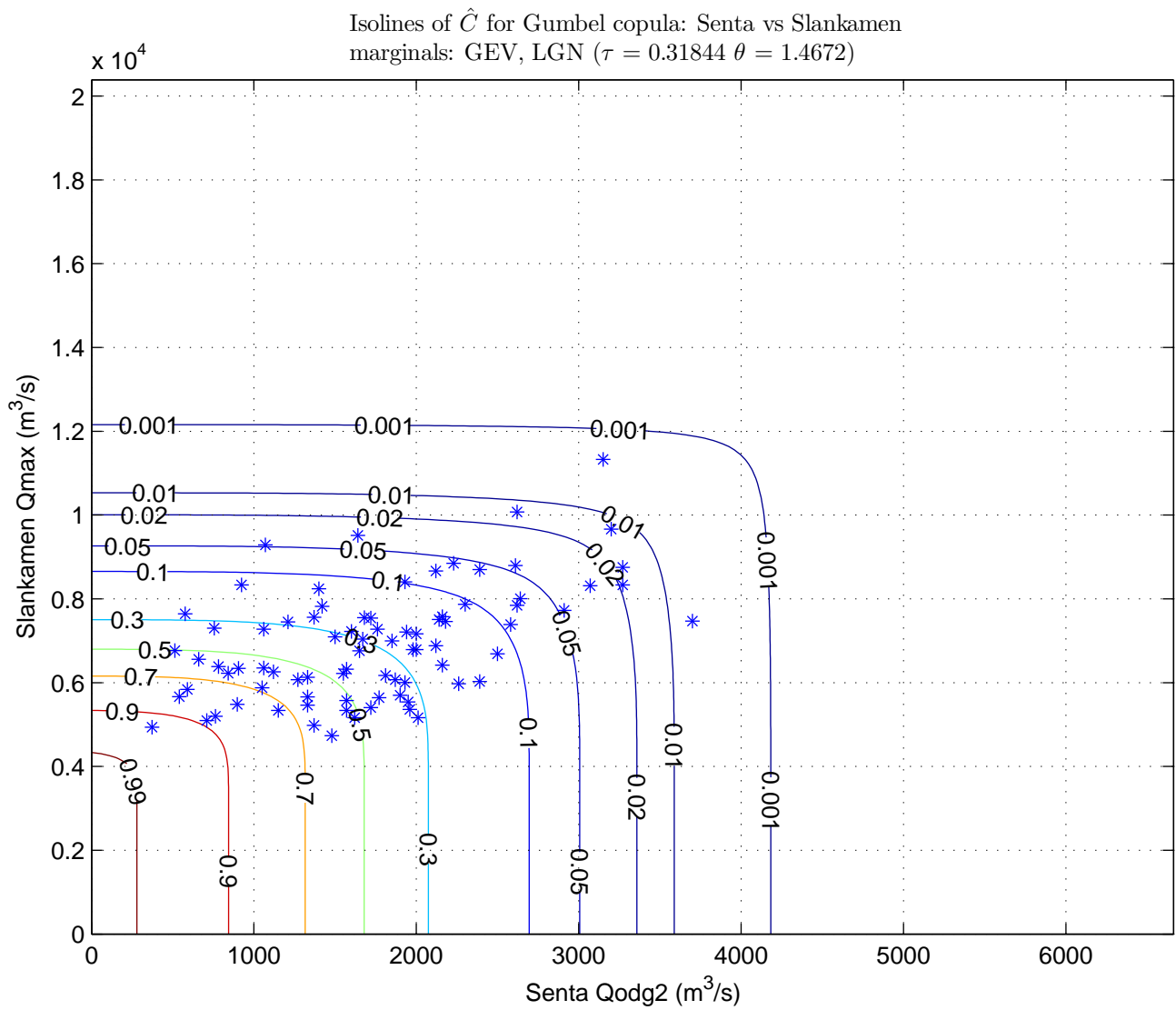
Isolines of  $\hat{C}$  for Frank copula: Bogojevo vs Senta  
marginals: EV1, LGN ( $\tau = 0.27245$   $\theta = 2.612$ )



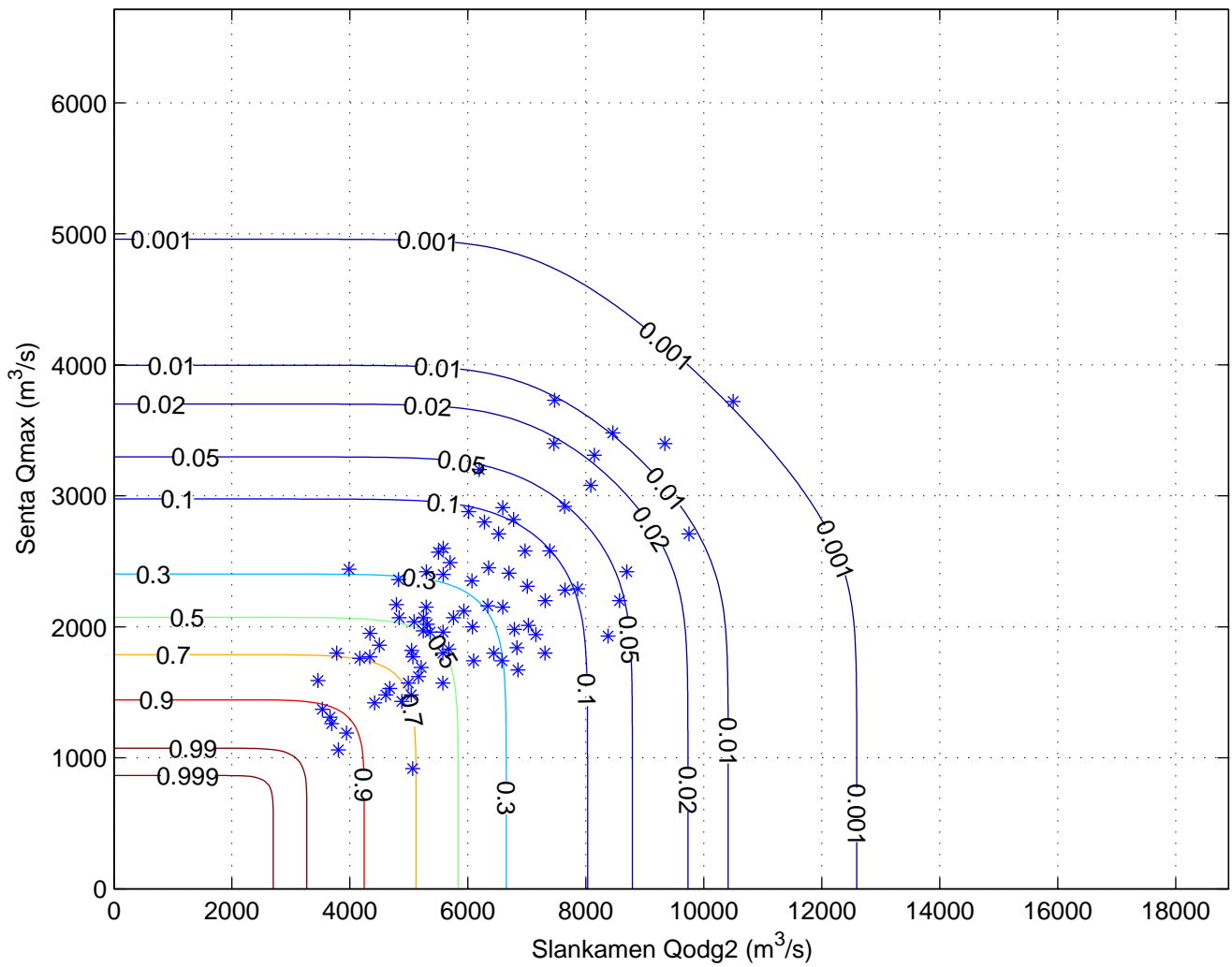


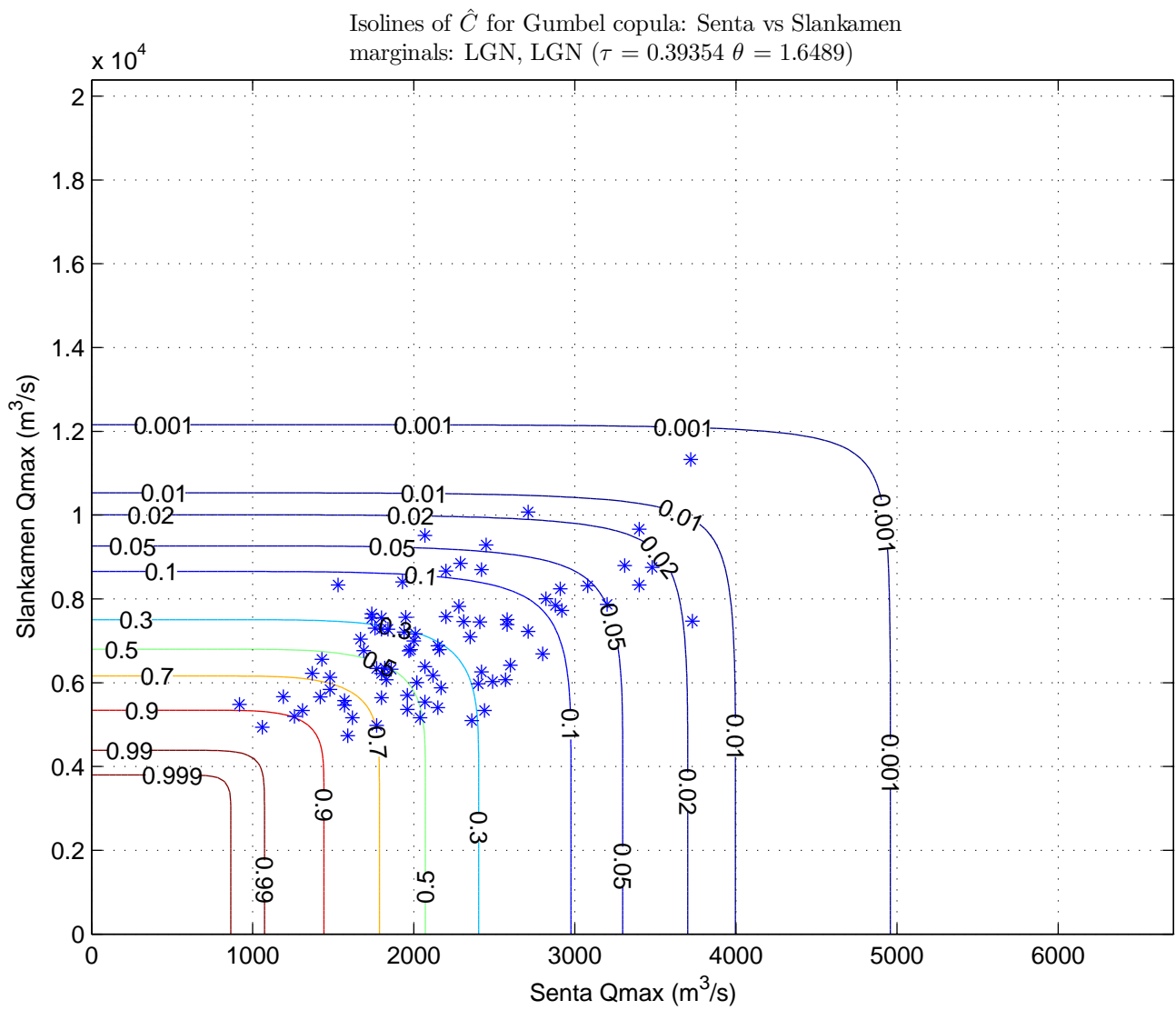
Isolines of  $\hat{C}$  for Gumbel copula: Senta vs Bogojevo  
marginals: LGN, LGN ( $\tau = 0.21387$   $\theta = 1.272$ )



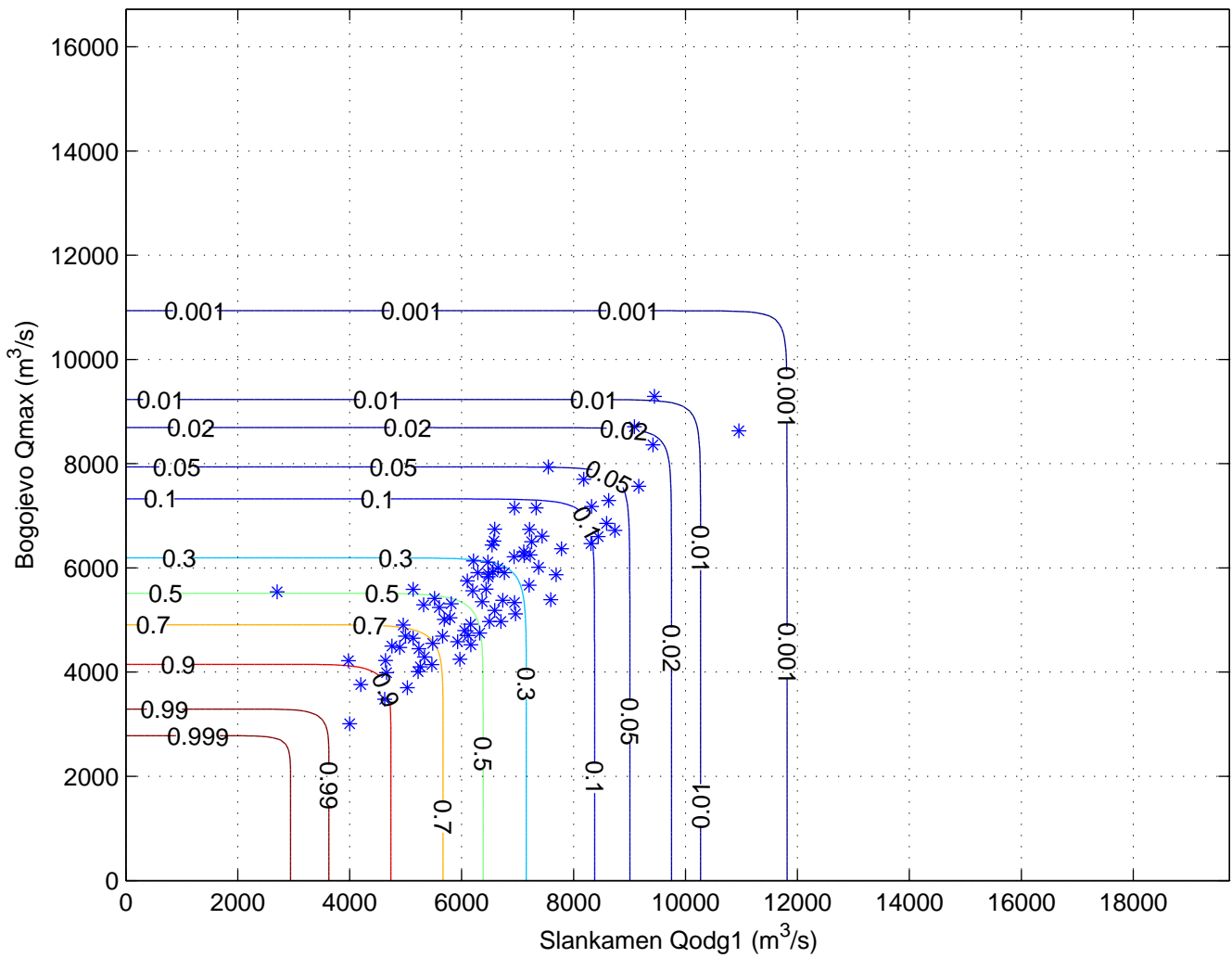


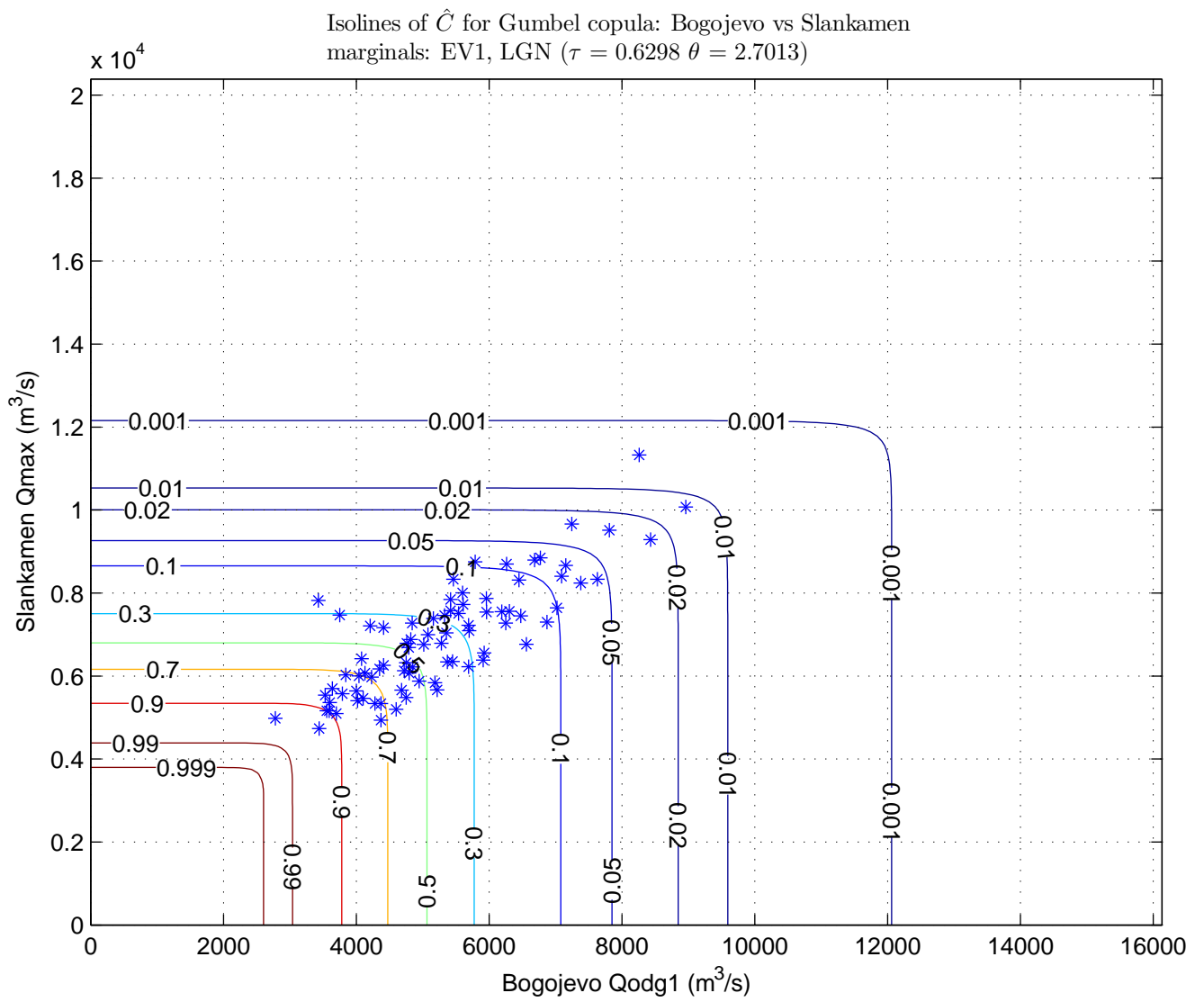
Isolines of  $\hat{C}$  for Frank copula: Slankamen vs Senta  
marginals: LGN, LGN ( $\tau = 0.48173$   $\theta = 5.4137$ )



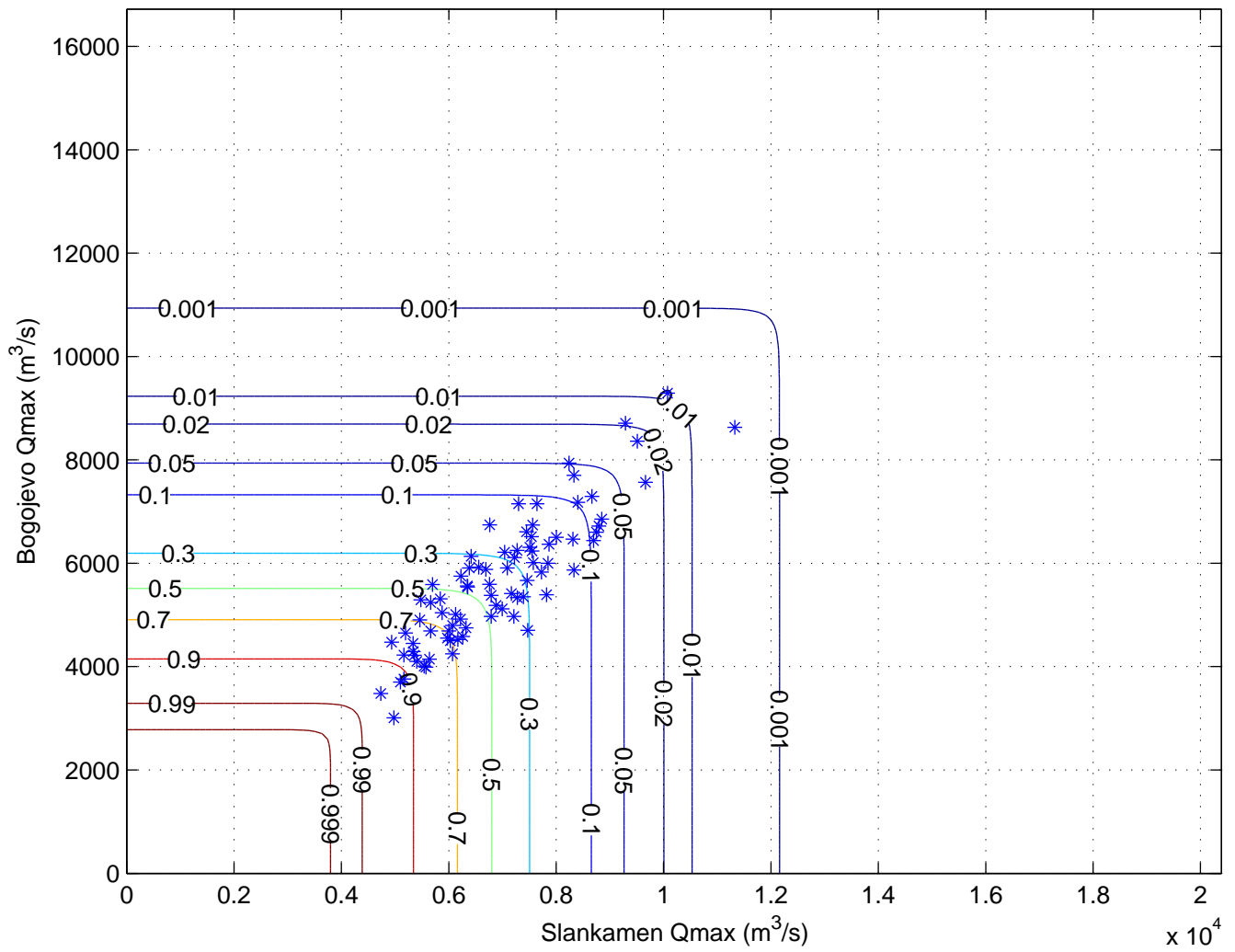


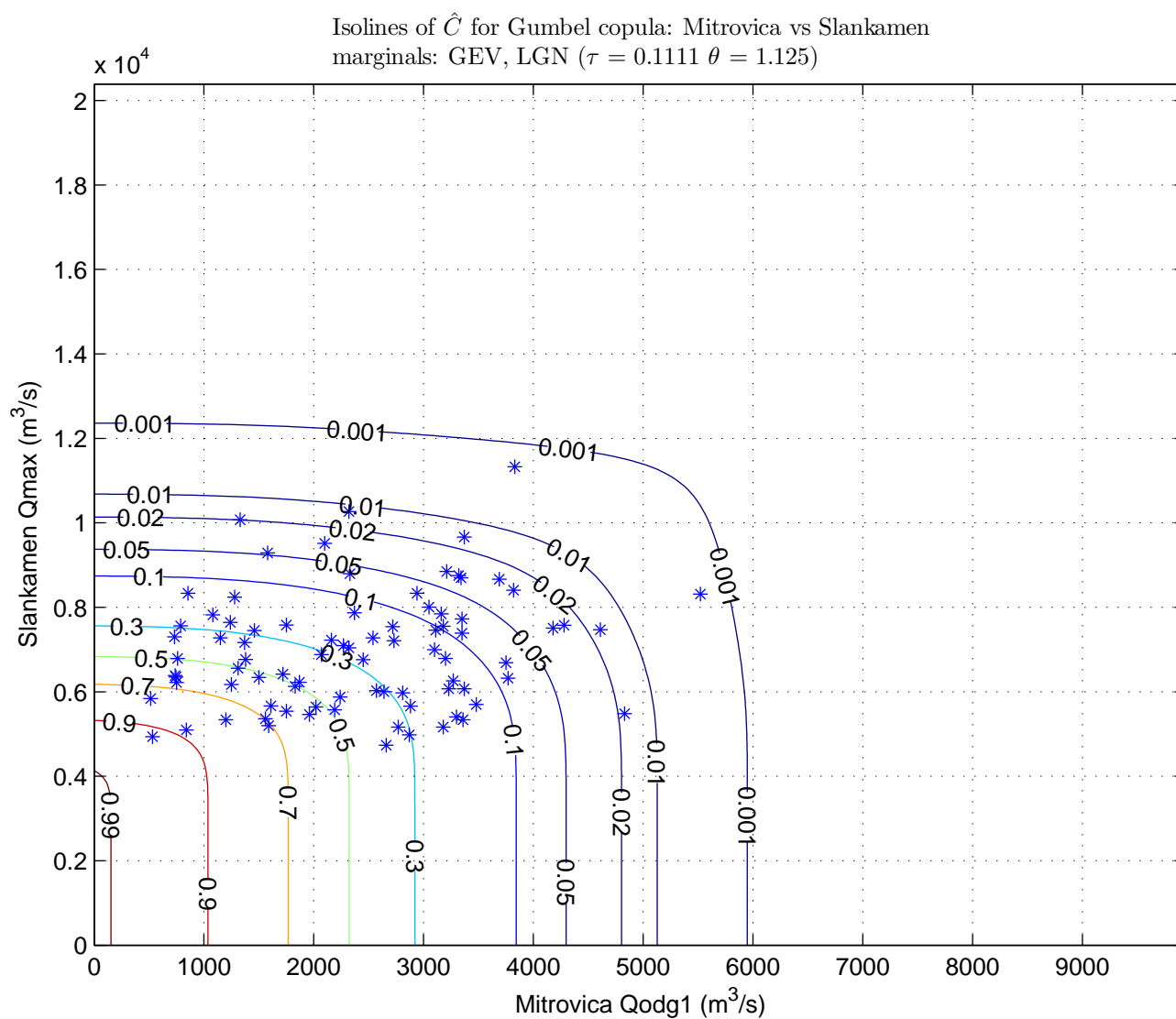
Isolines of  $\hat{C}$  for Gumbel copula: Slankamen vs Bogojveo  
 marginals: LP3, LGN ( $\tau = 0.68705$   $\theta = 3.1954$ )





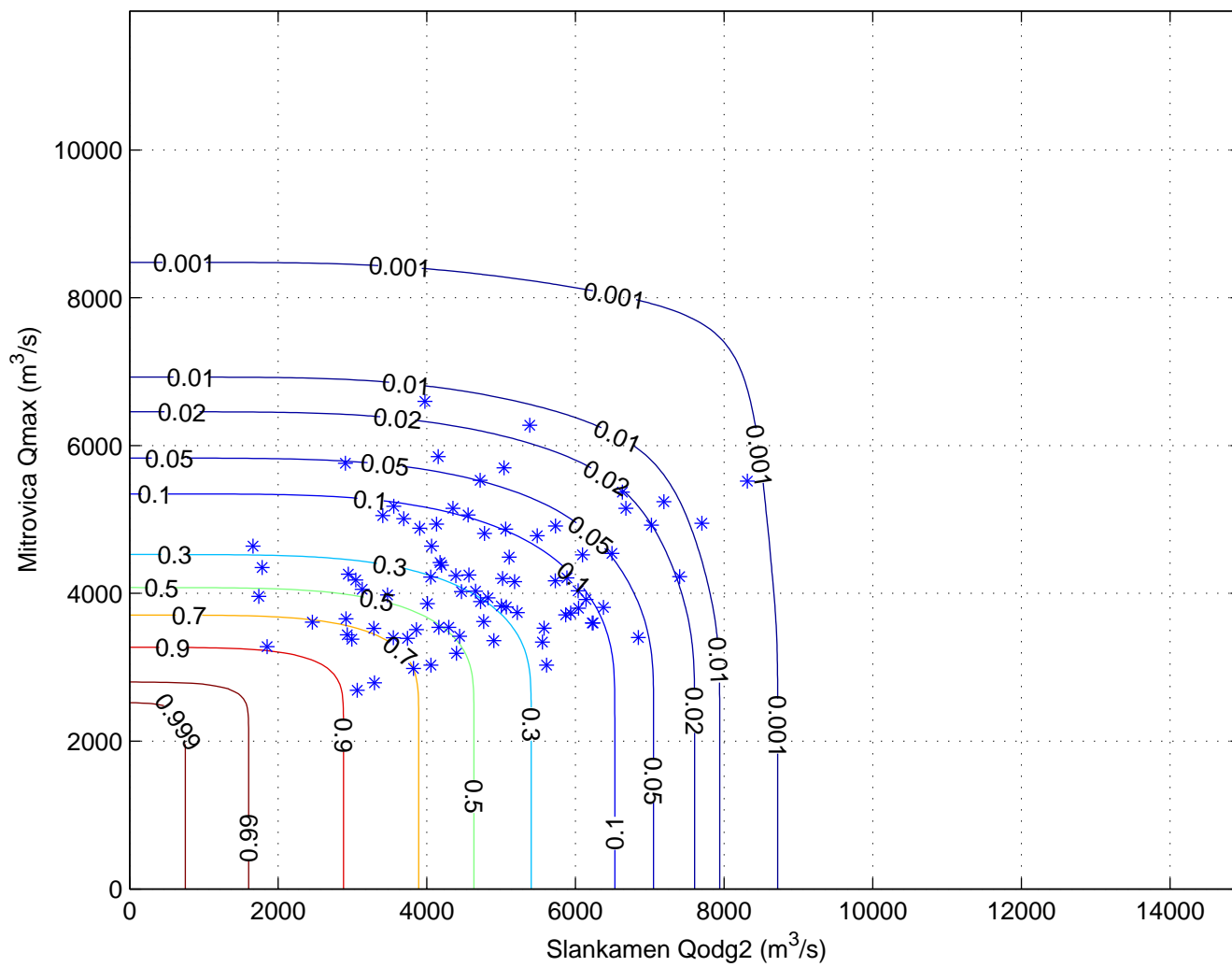
Isolines of  $\hat{C}$  for Gumbel copula: Slankamen vs Bogojevo  
 marginals: LGN, LGN ( $\tau = 0.69267$   $\theta = 3.2538$ )

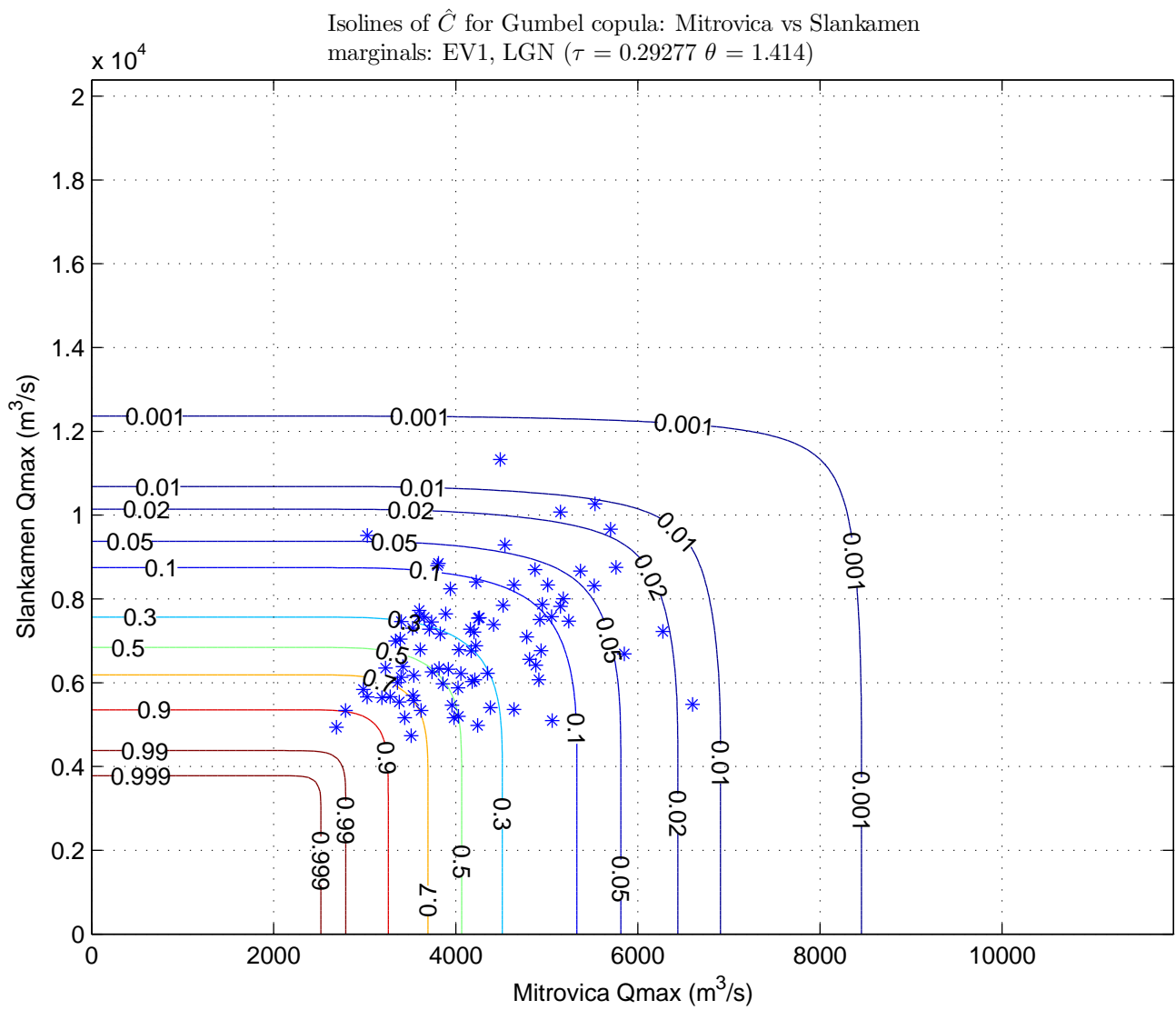




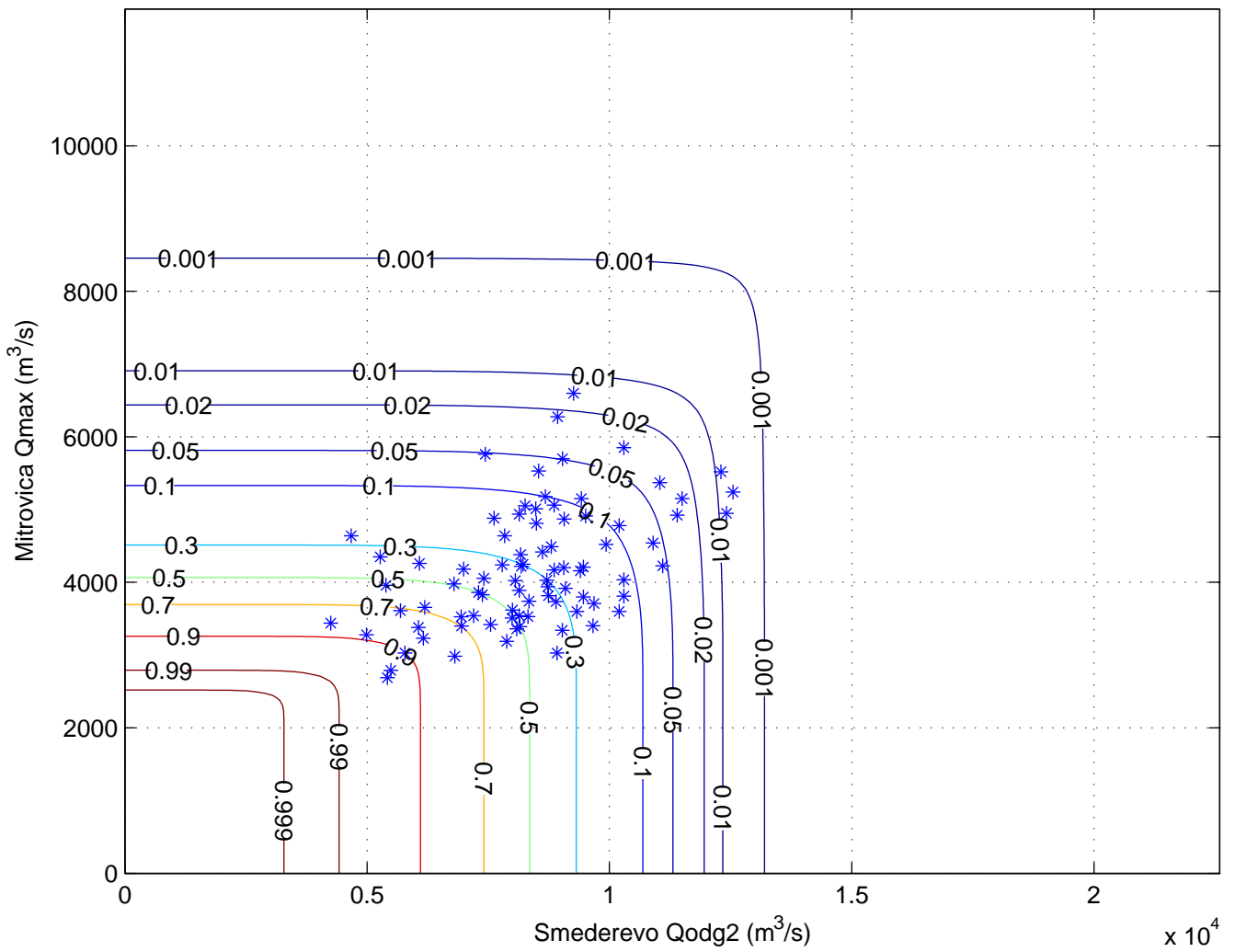


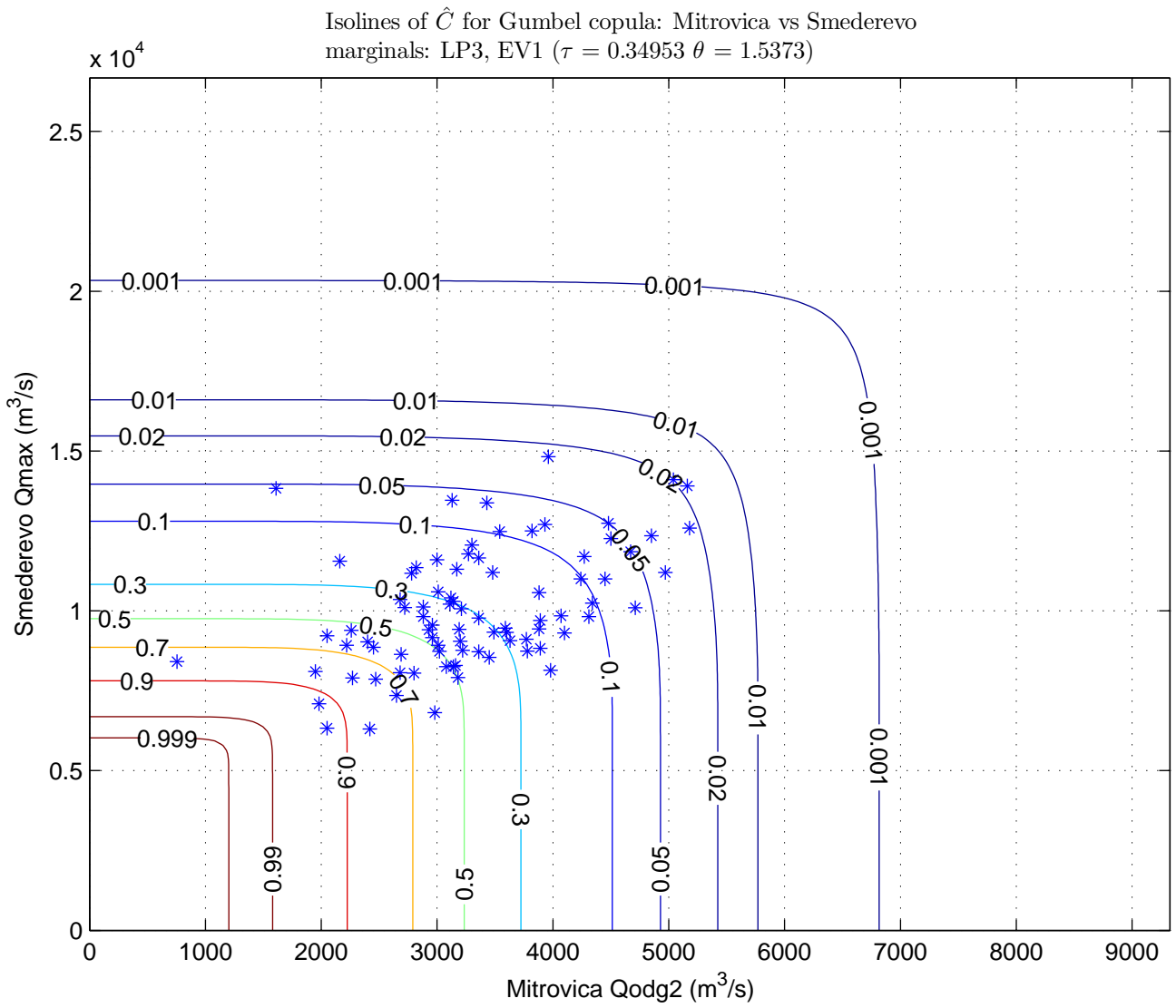
Isolines of  $\hat{C}$  for Gumbel copula: Slankamen vs Mitrovica  
marginals: GEV, EV1 ( $\tau = 0.11261$   $\theta = 1.1269$ )

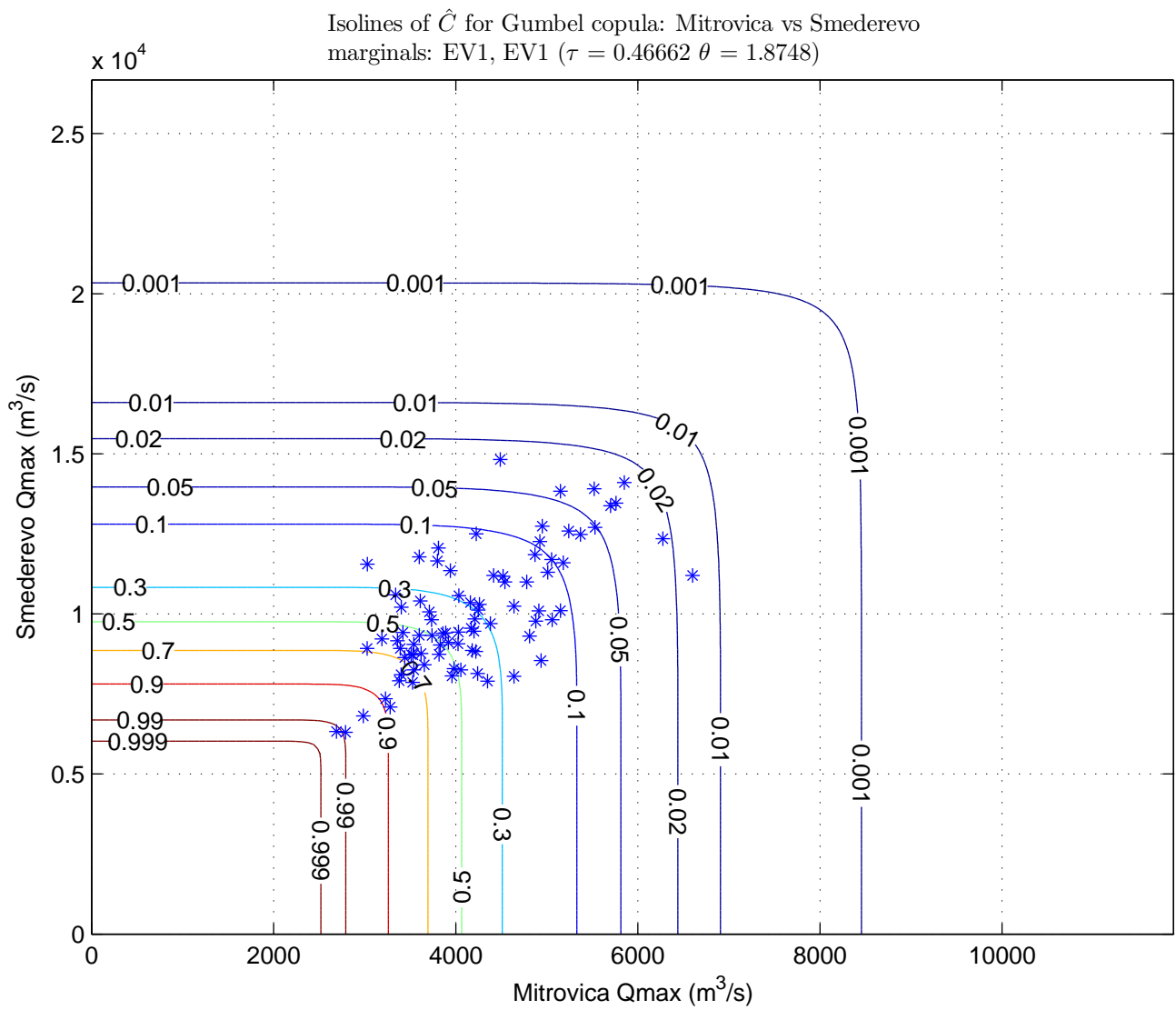


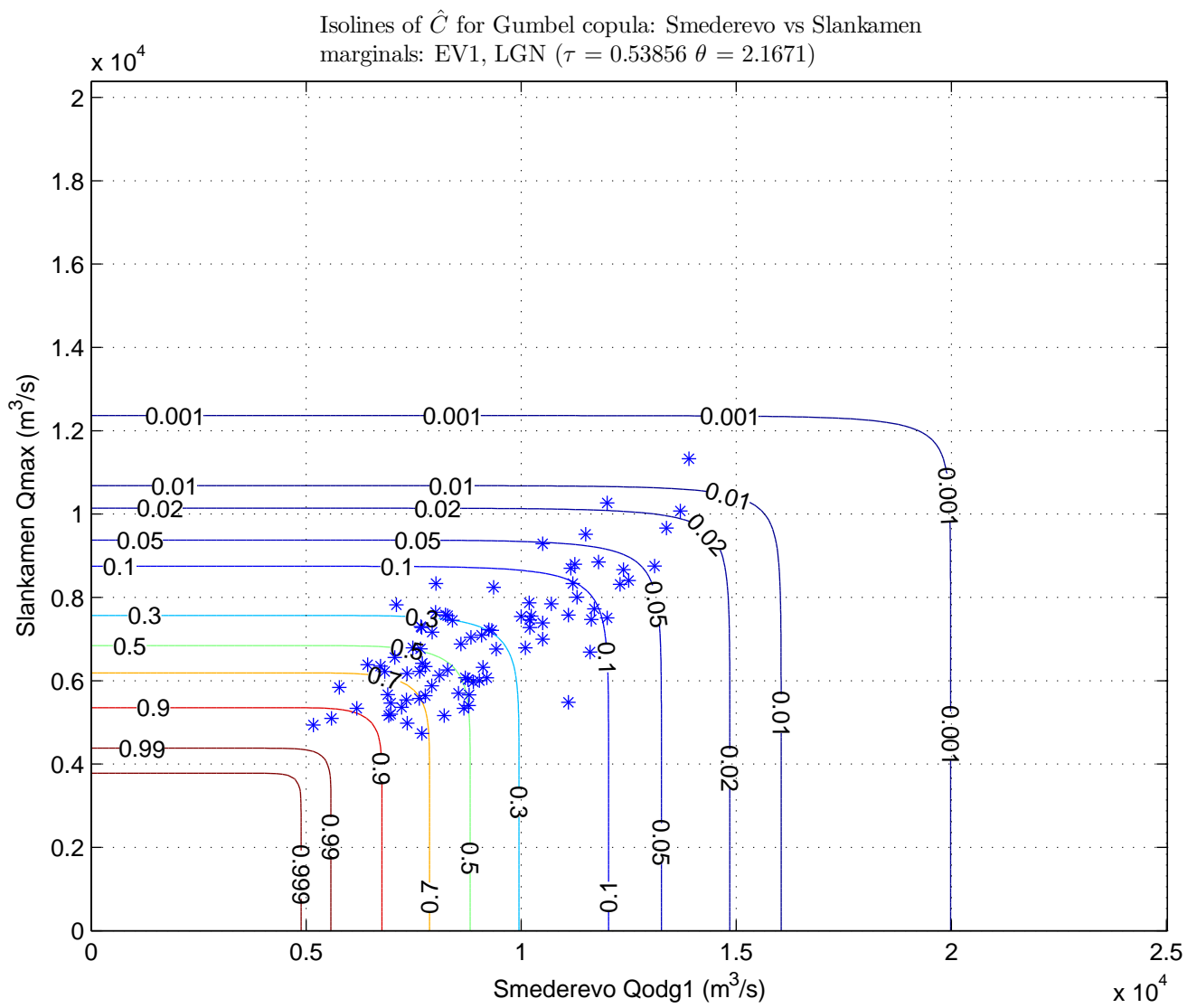


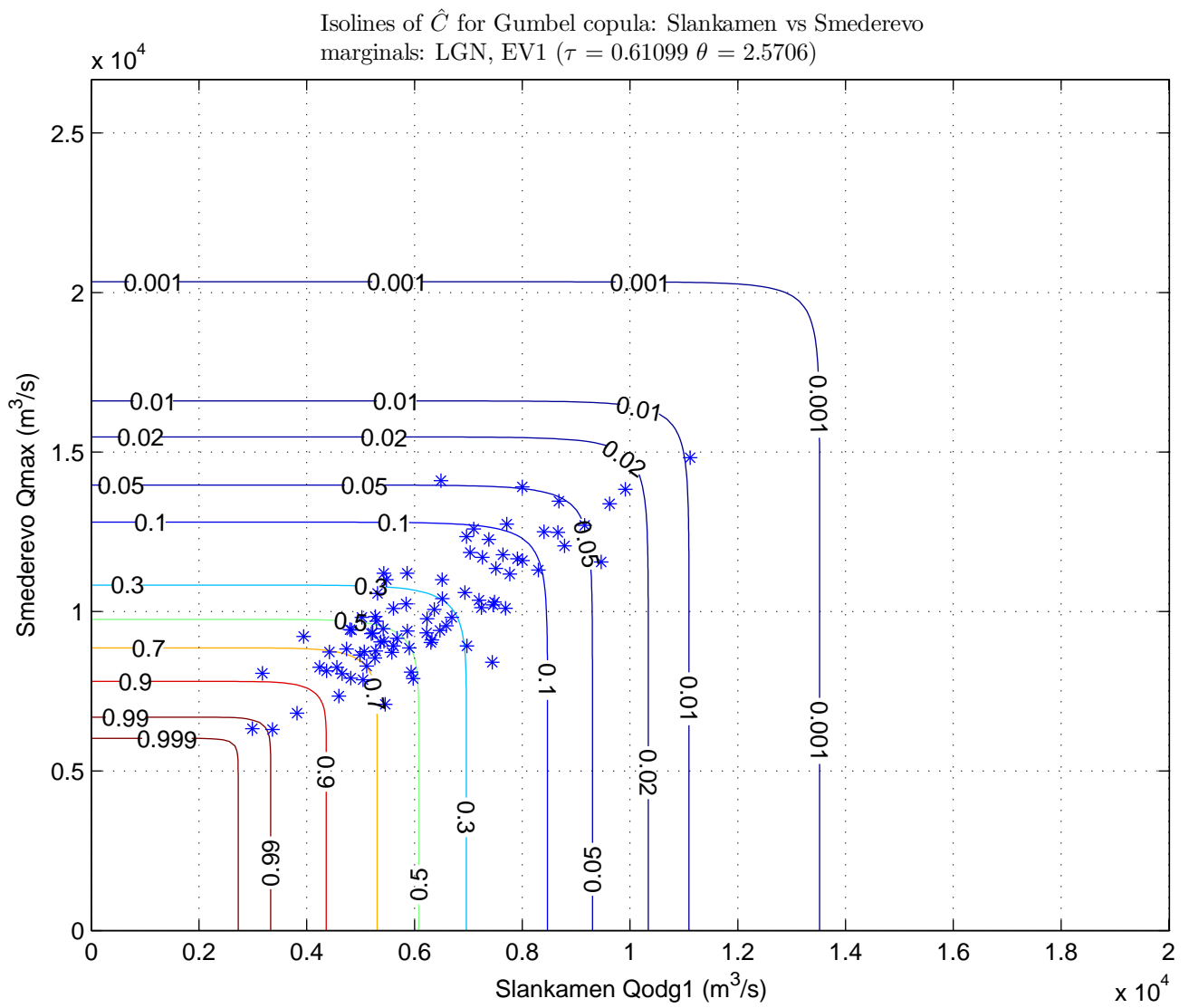
Isolines of  $\hat{C}$  for Gumbel copula: Smederevo vs Mitrovica  
 marginals: GEV, EV1 ( $\tau = 0.33137$   $\theta = 1.4956$ )

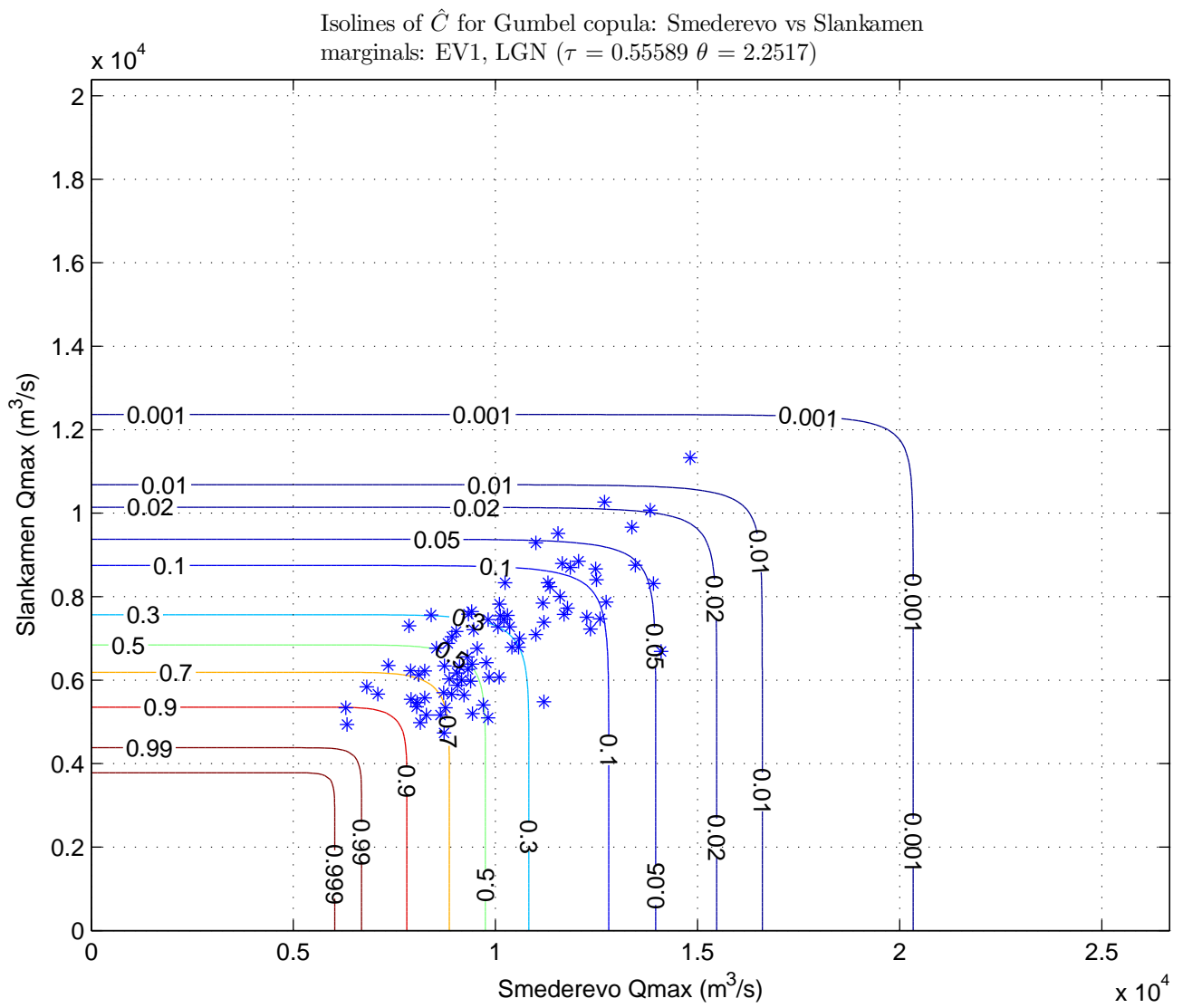










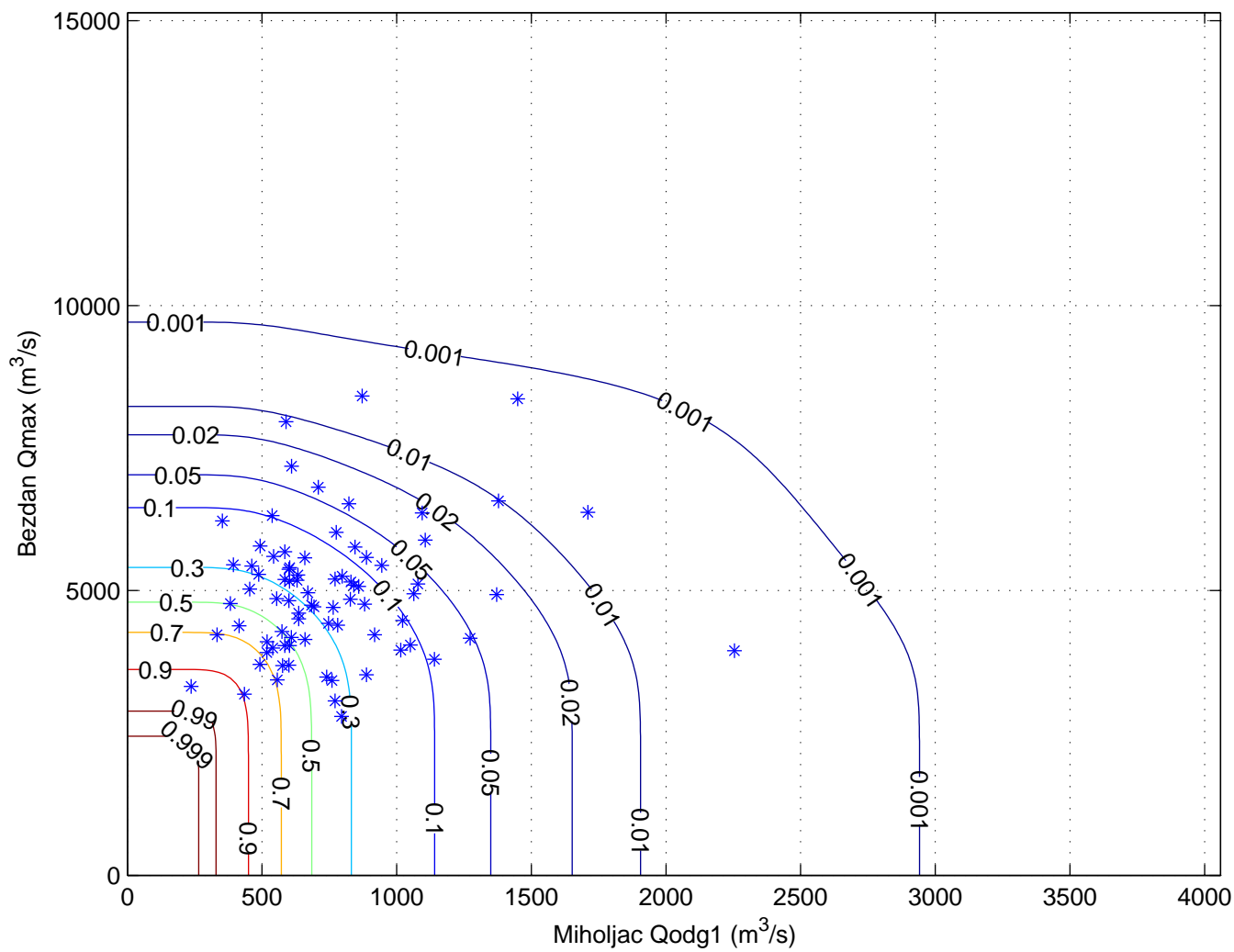




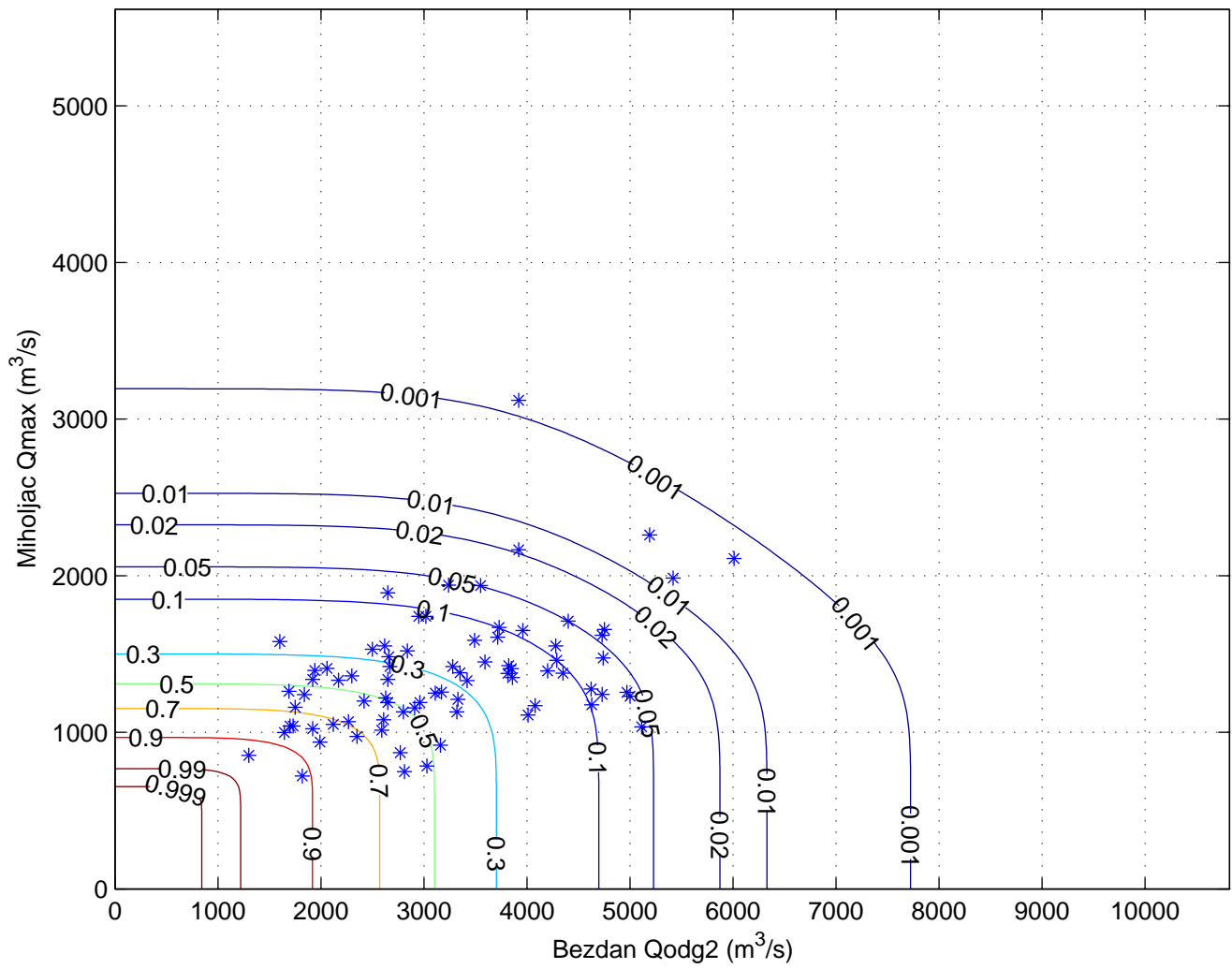
## **ПРИЛОГ 8**

Копуле преживљавања комбинација протока Дунава и притока  
(параметри маргиналних расподела оцењени методом Л-момената)

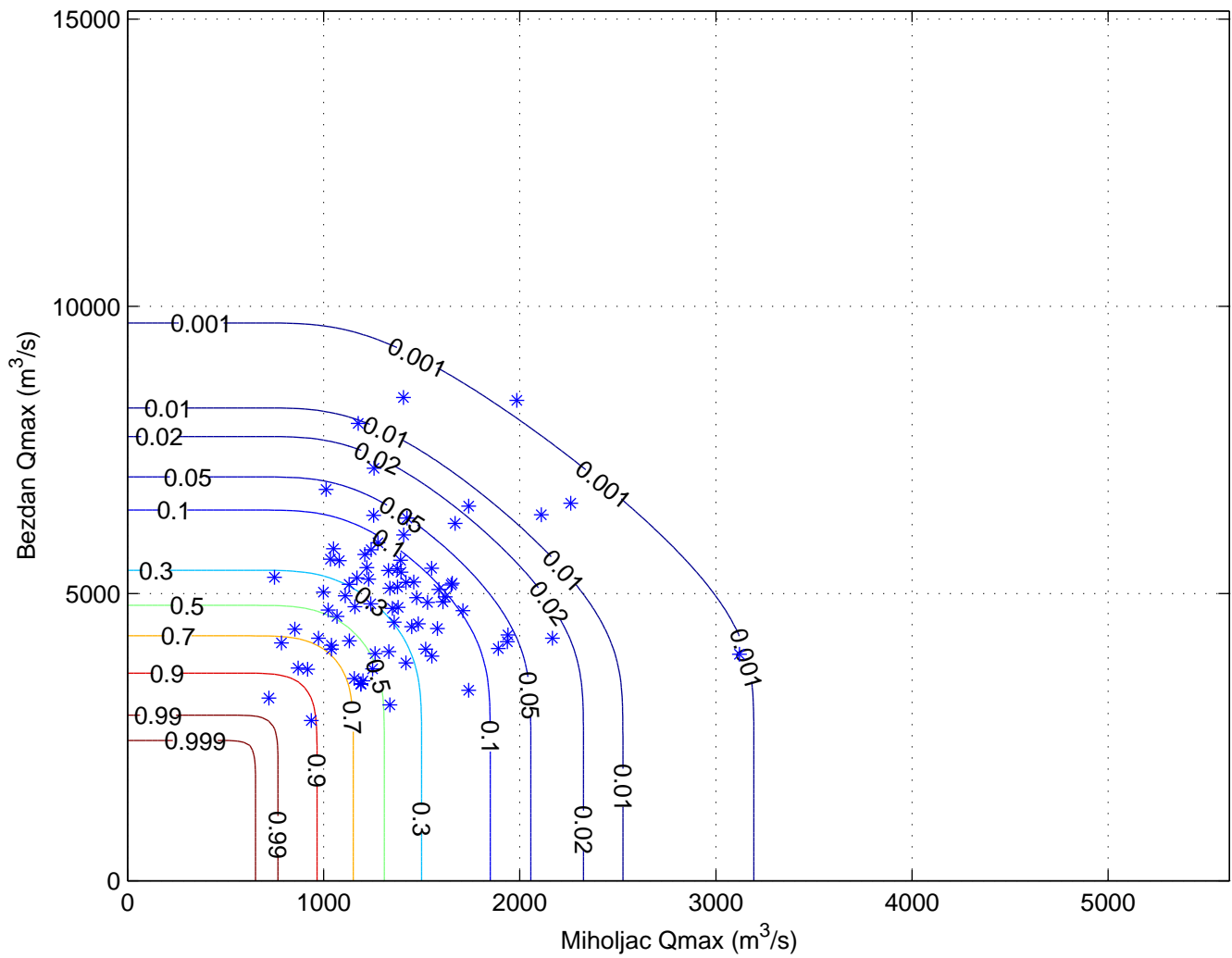
Isolines of  $\hat{C}$  for Gumbel copula: Miholjac vs Bezdán  
marginals: GEV, GEV ( $\tau = 0.083577$   $\theta = 1.0912$ )



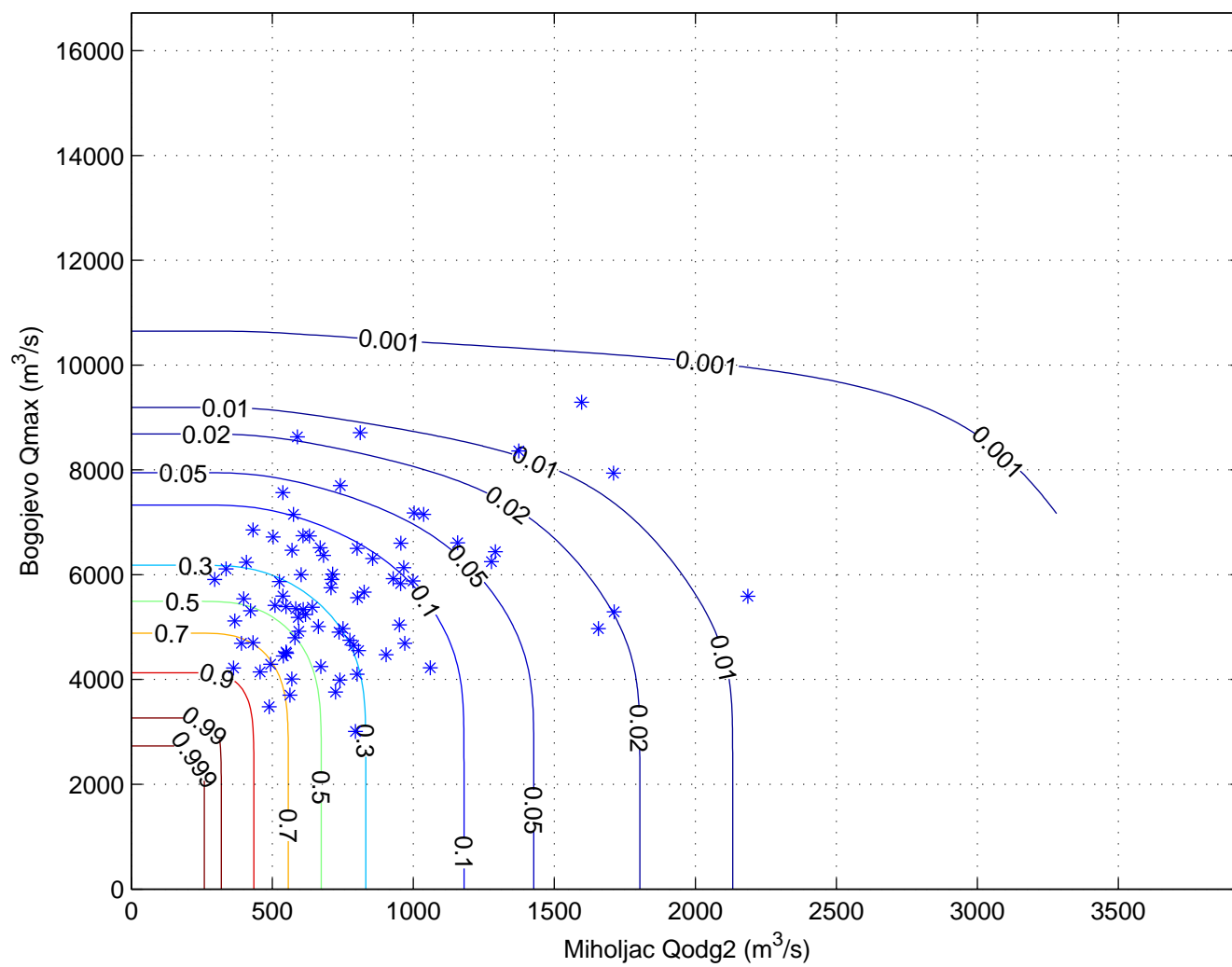
Isolines of  $\hat{C}$  for Frank copula: Bezdan vs Miholjac  
 marginals: LP3, GEV ( $\tau = 0.31112$   $\theta = 3.0445$ )



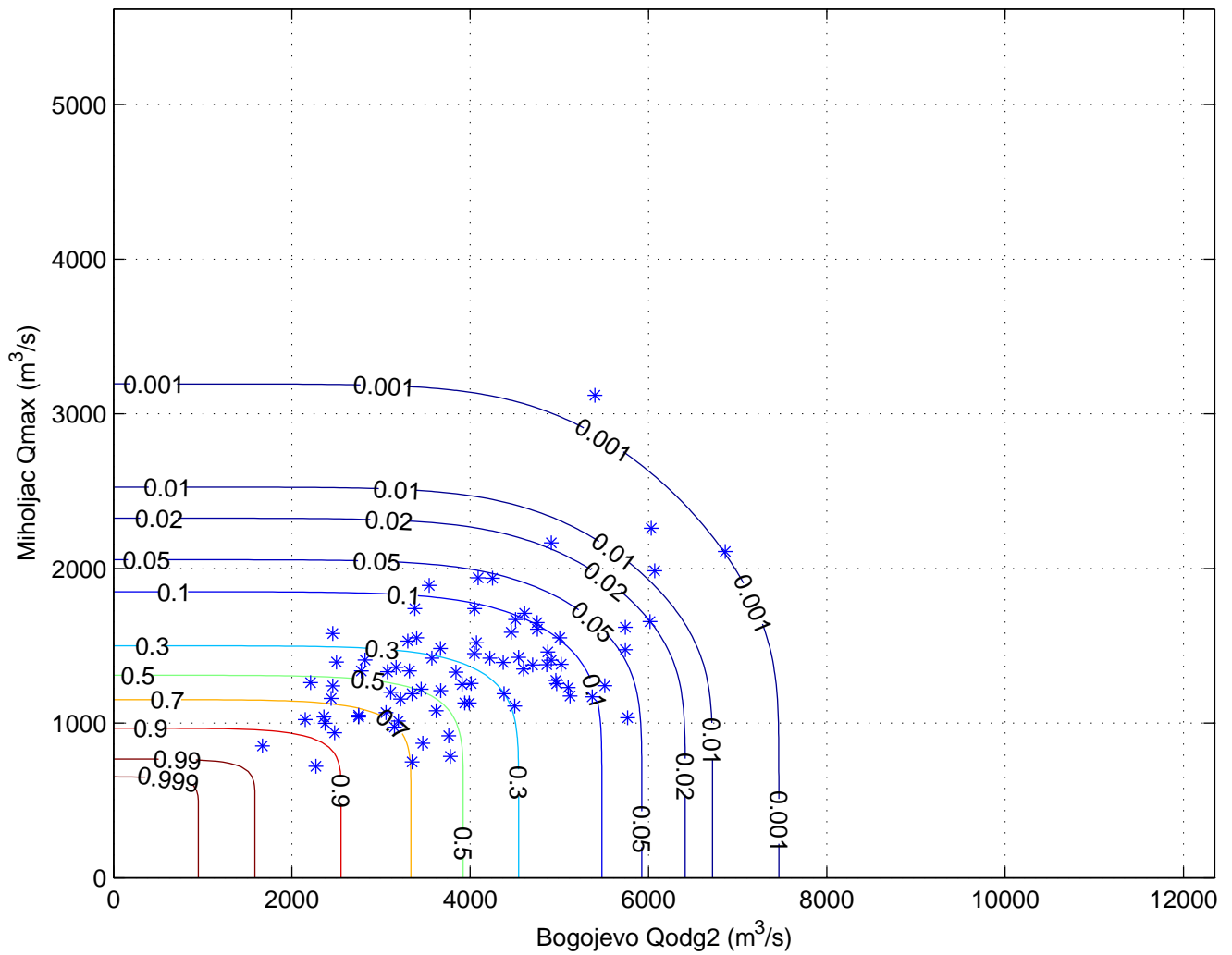
Isolines of  $\hat{C}$  for Clayton copula: Miholjac vs Bezdán  
marginals: GEV, GEV ( $\tau = 0.10333$   $\theta = 0.23048$ )



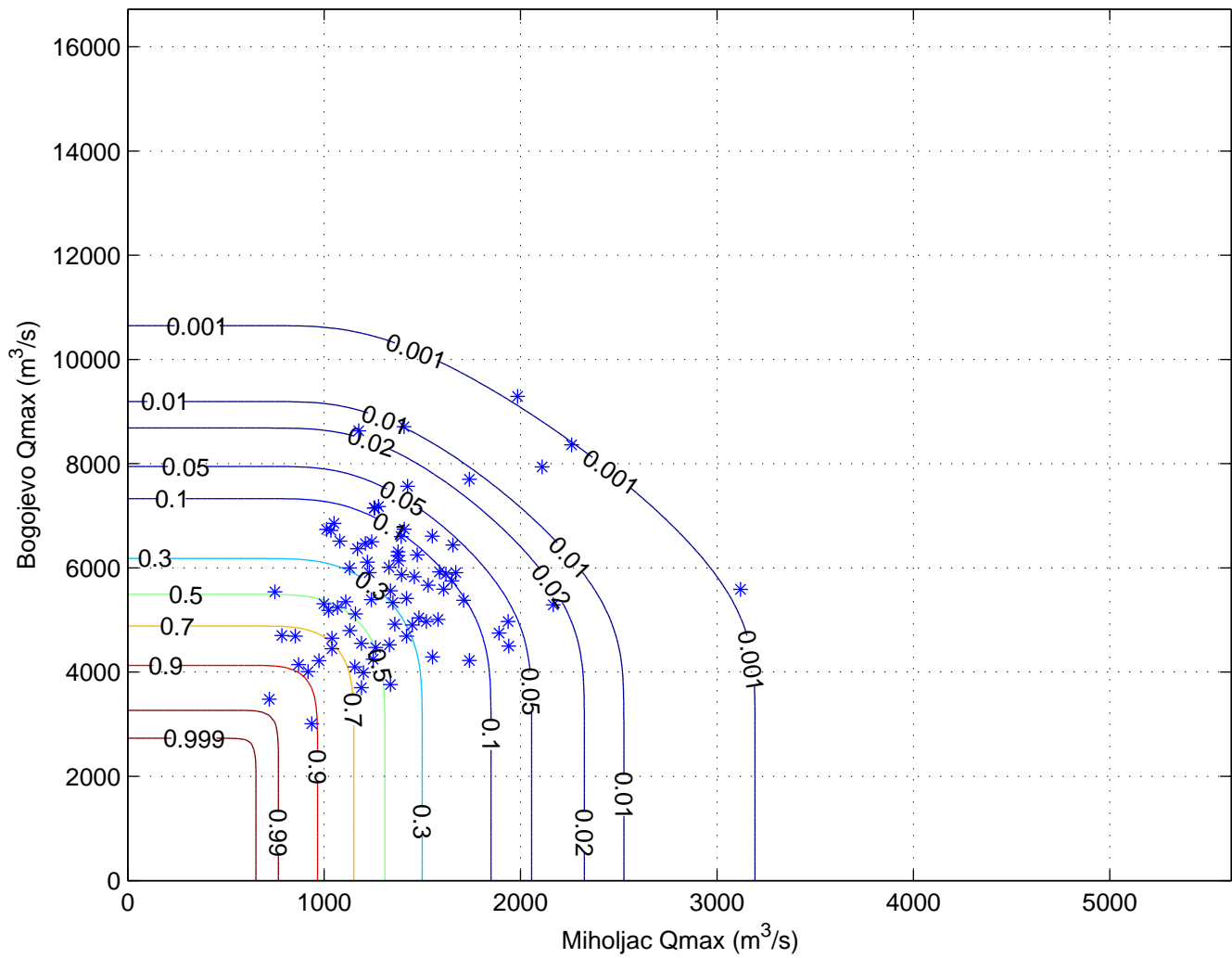
Isolines of  $\hat{C}$  for Gumbel copula: Miholjac vs Bogojevo  
marginals: GEV, GEV ( $\tau = 0.15042$   $\theta = 1.1771$ )



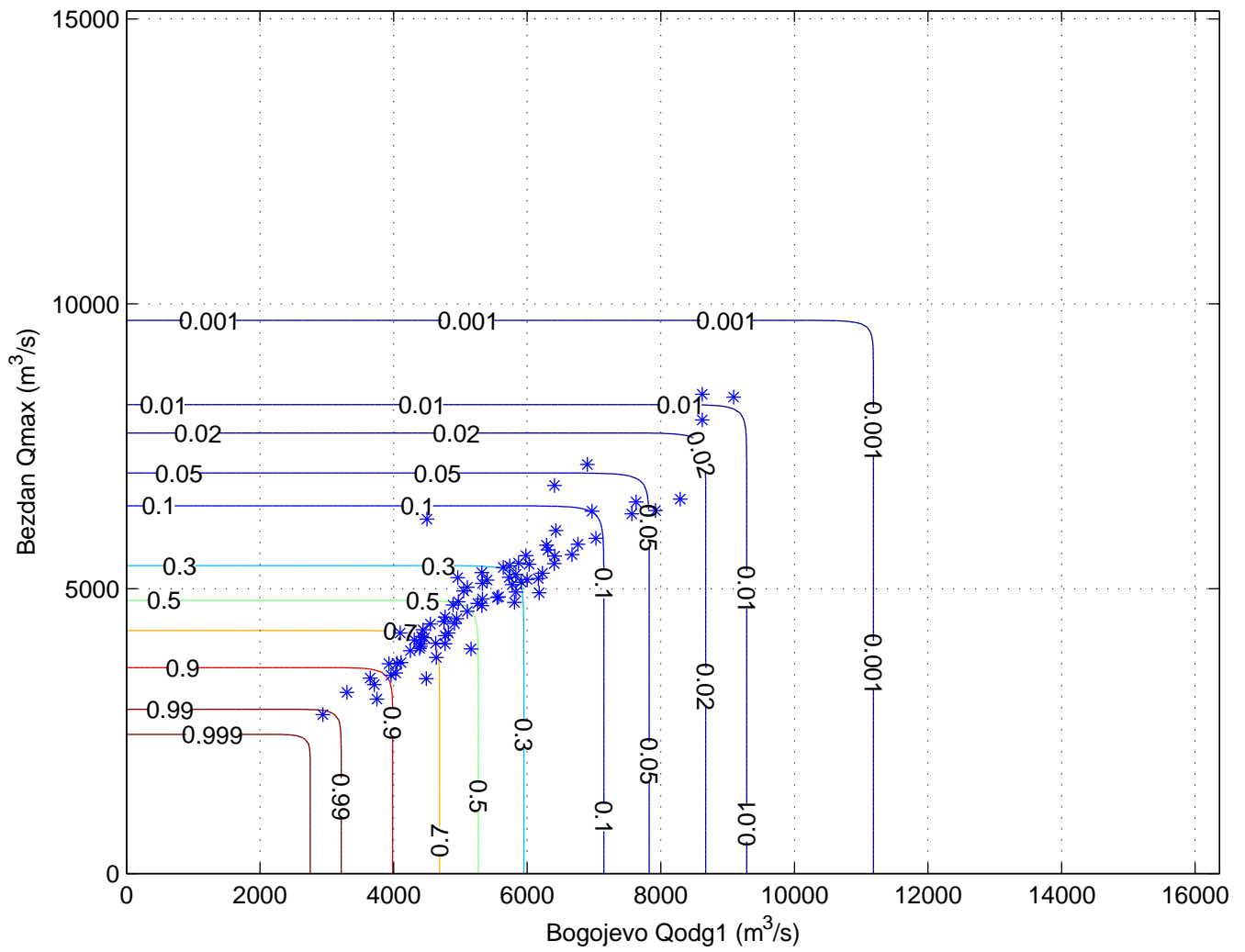
Isolines of  $\hat{C}$  for Frank copula: Bogojevo vs Miholjac  
marginals: GEV, GEV ( $\tau = 0.34493$   $\theta = 3.4464$ )



Isolines of  $\hat{C}$  for Clayton copula: Miholjac vs Bogojevo  
marginals: GEV, GEV ( $\tau = 0.17872$   $\theta = 0.43521$ )

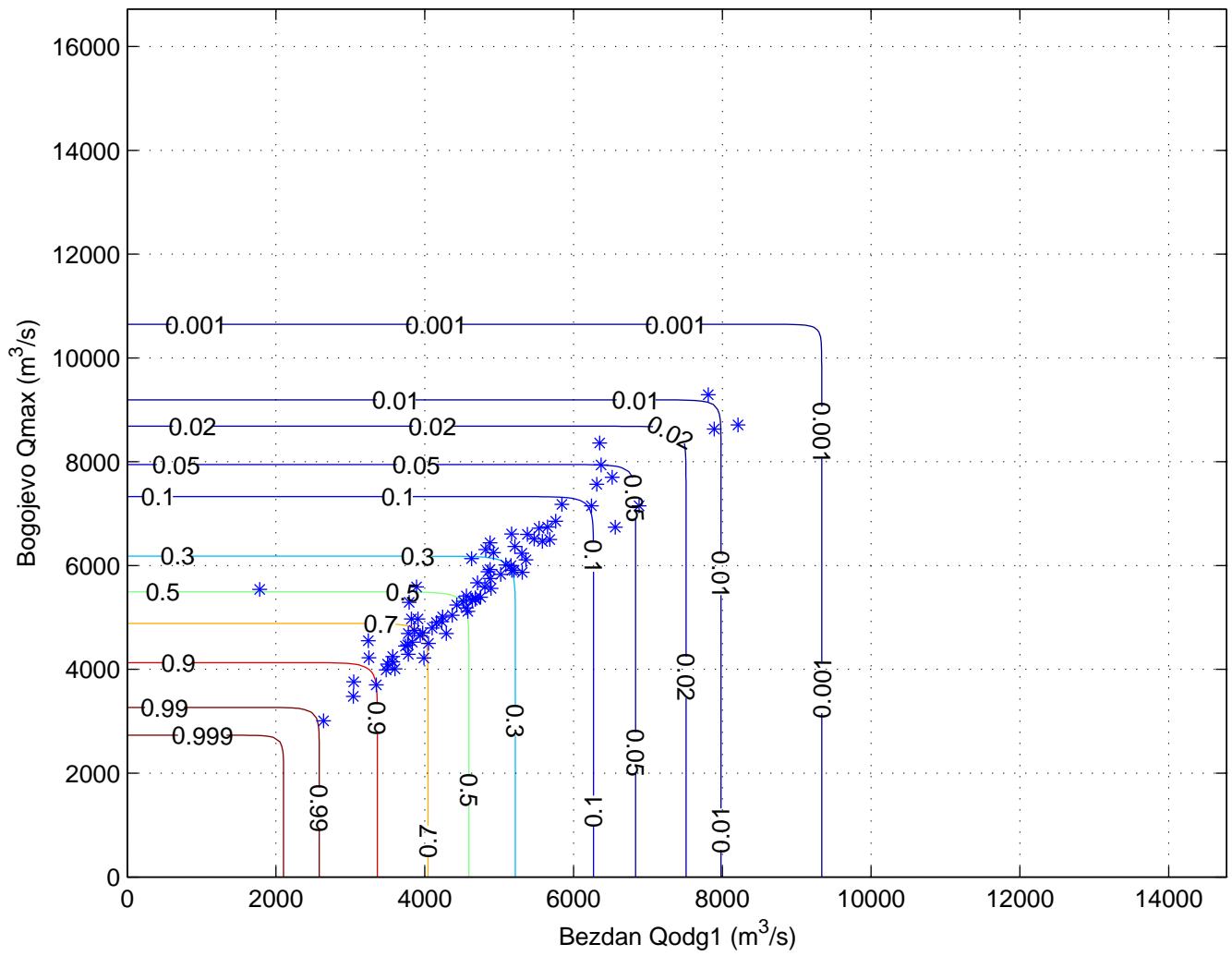


Isolines of  $\hat{C}$  for Gumbel copula: Bogojervo vs Bezdán  
marginals: GEV, GEV ( $\tau = 0.80286$   $\theta = 5.0726$ )

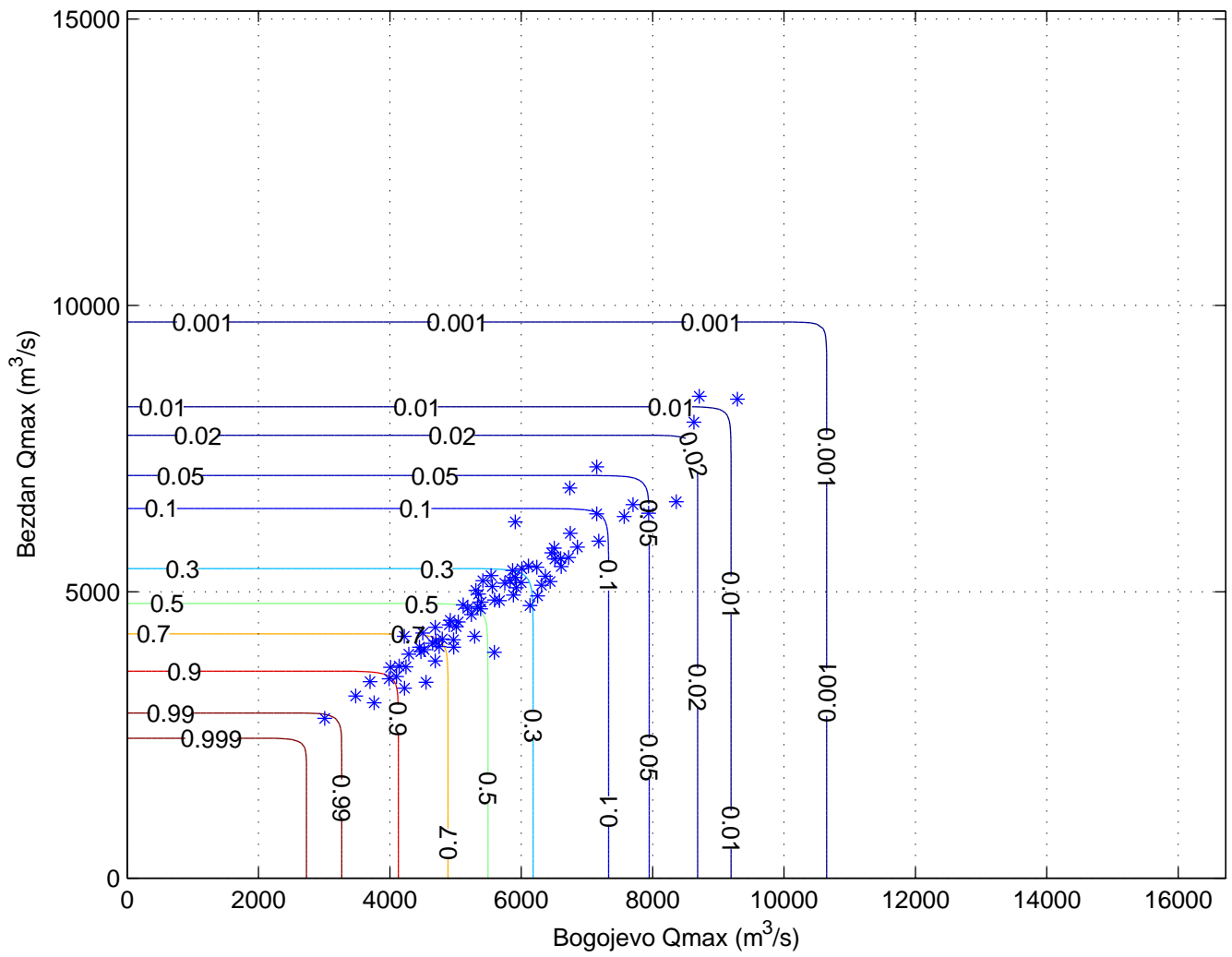




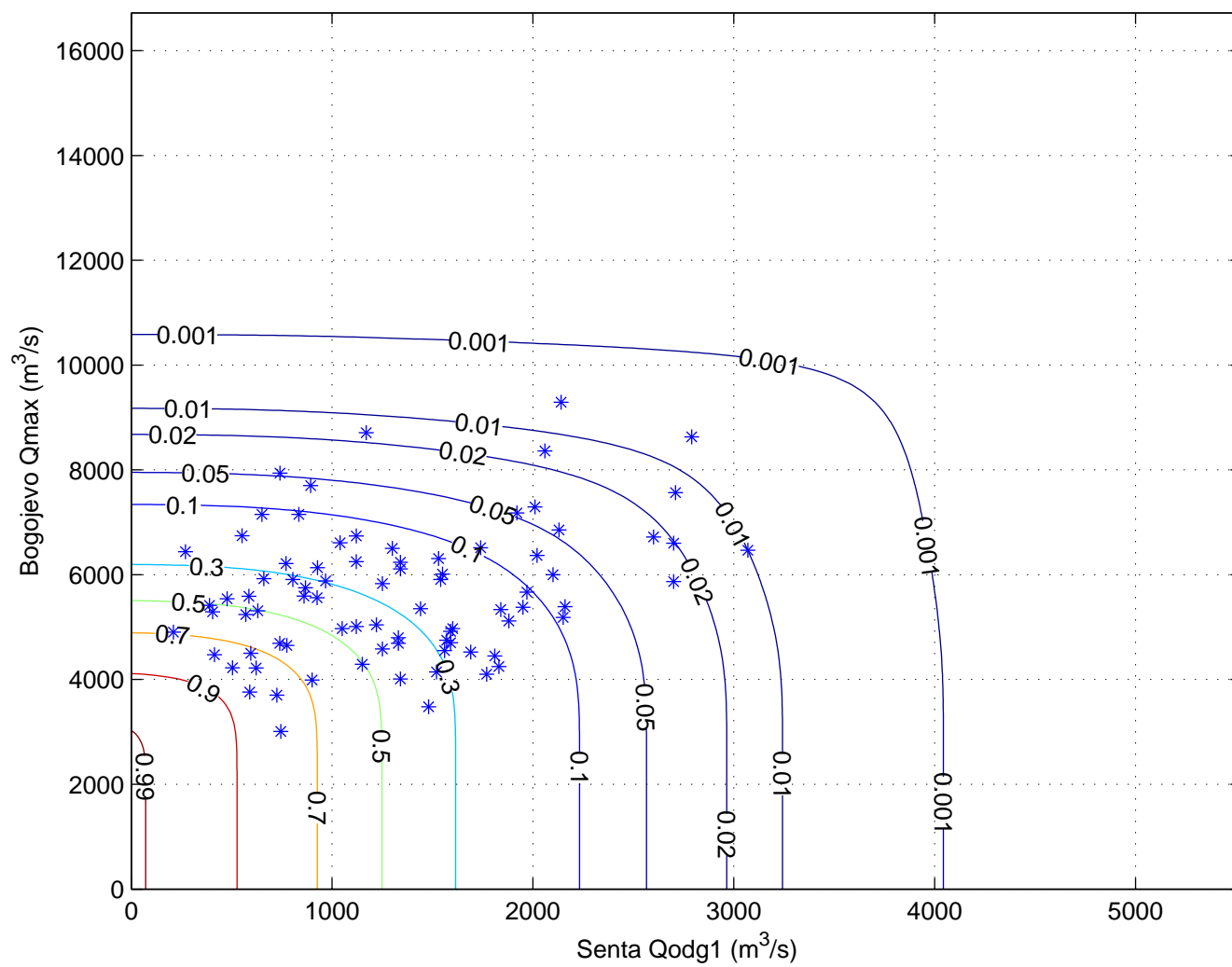
Isolines of  $\hat{C}$  for Gumbel copula: Bezdán vs Bogojévo  
 marginals: GEV, GEV ( $\tau = 0.8221$   $\theta = 5.621$ )



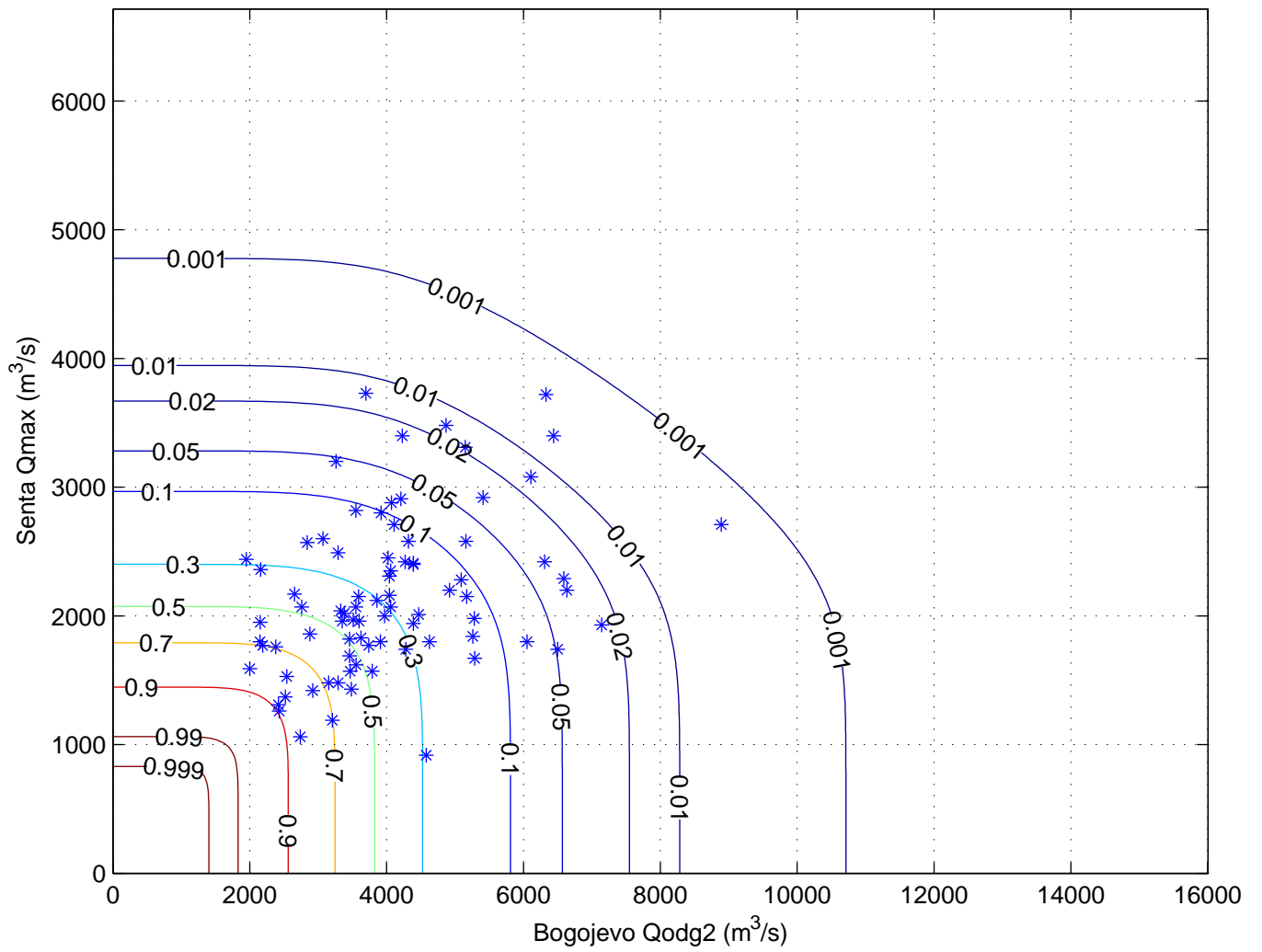
Isolines of  $\hat{C}$  for Gumbel copula: Bogojjevo vs Bezdán  
 marginals: GEV, GEV ( $\tau = 0.82722$   $\theta = 5.7876$ )



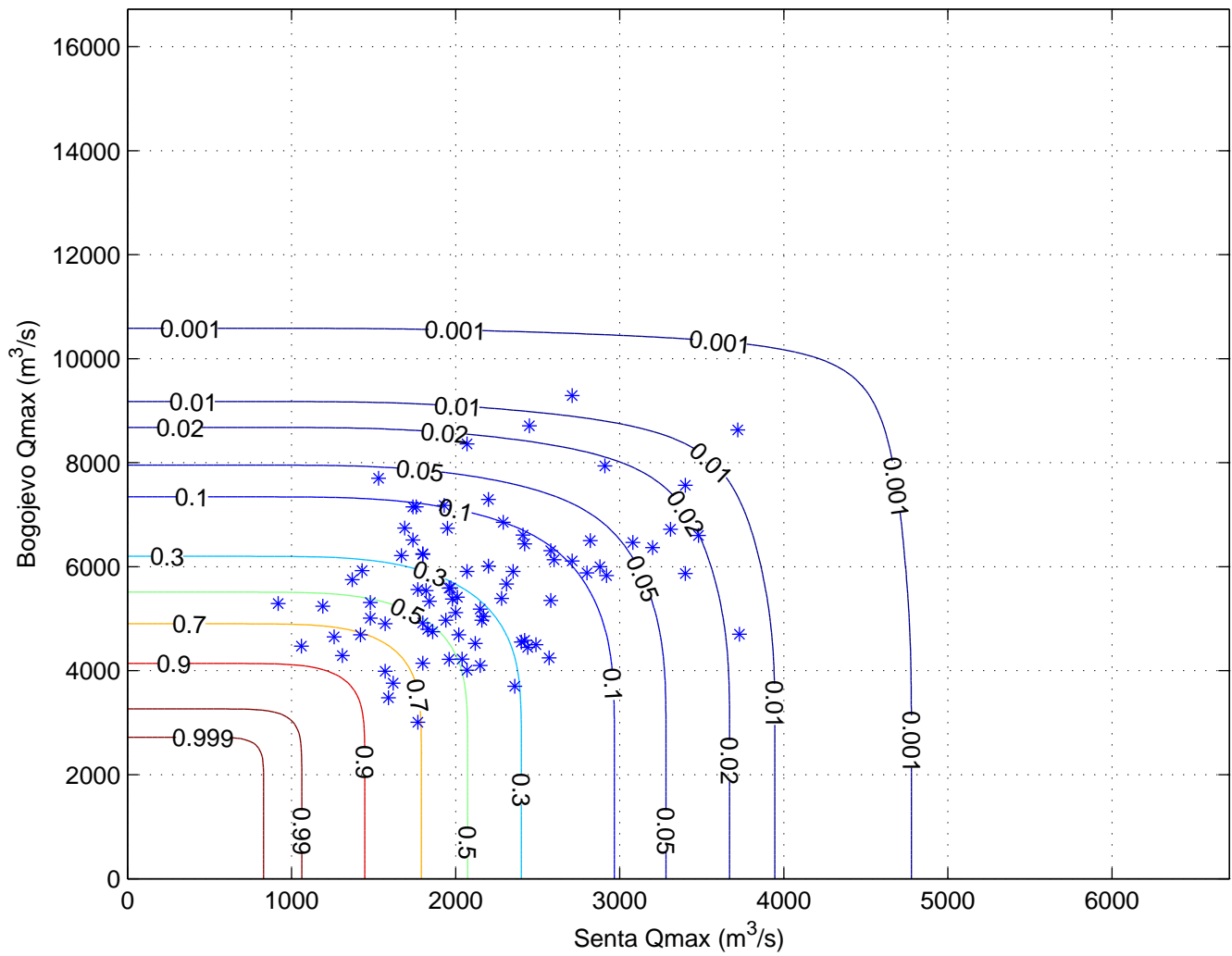
Isolines of  $\hat{C}$  for Gumbel copula: Senta vs Bogojevo  
marginals: GEV, GEV ( $\tau = 0.1689$   $\theta = 1.2032$ )



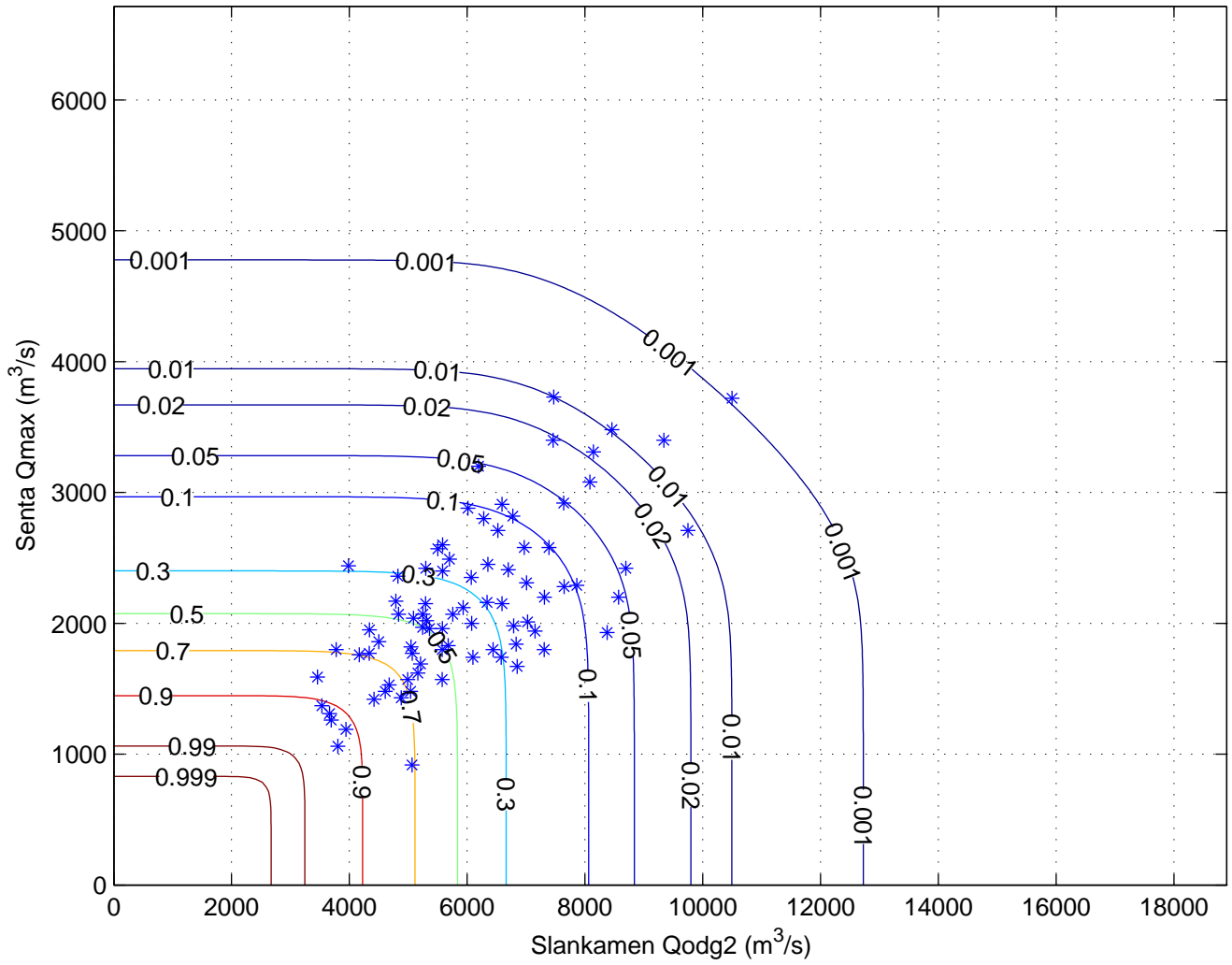
Isolines of  $\hat{C}$  for Frank copula: Bogojevo vs Senta  
marginals: EV1, GEV ( $\tau = 0.27245$   $\theta = 2.612$ )

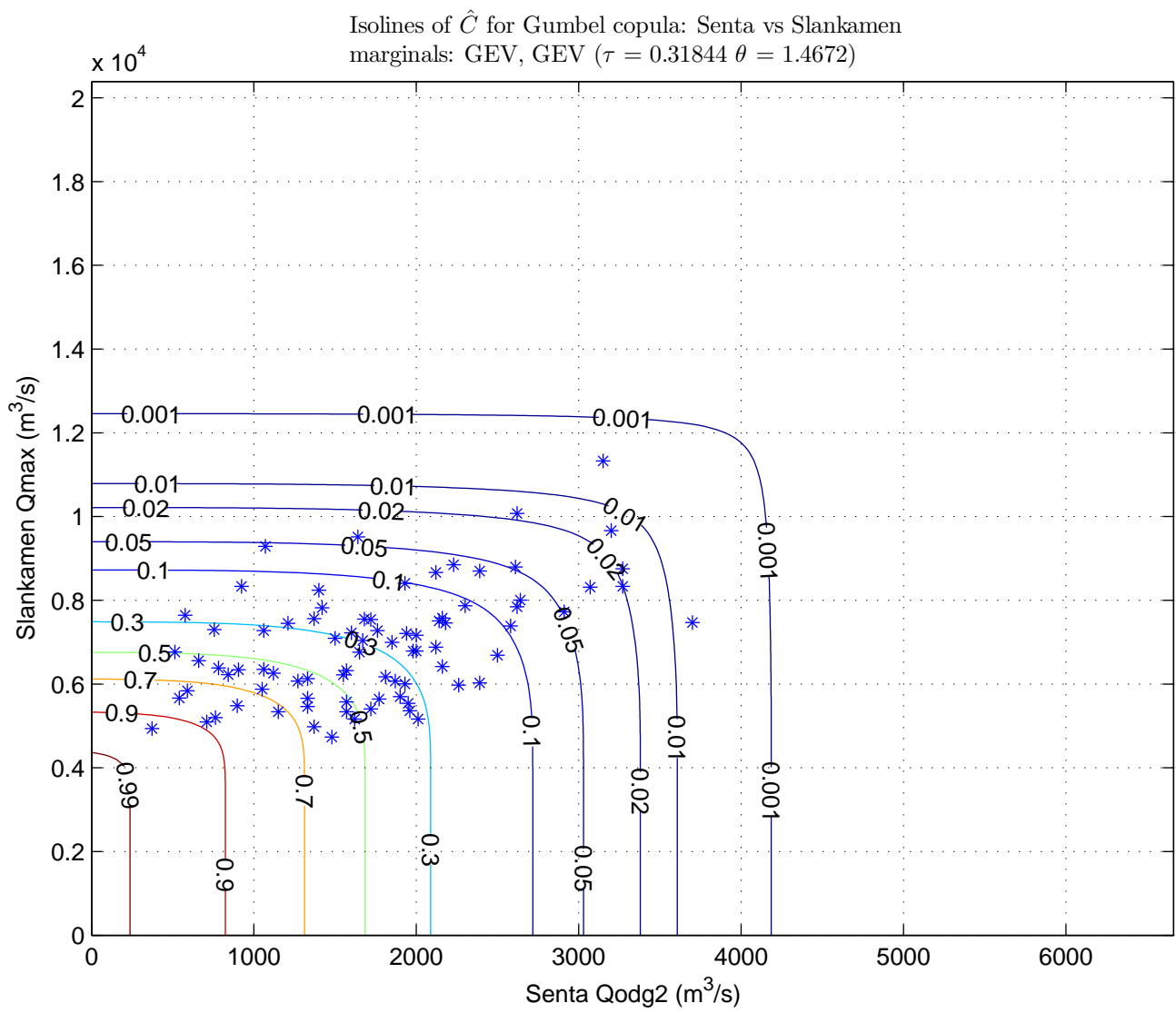


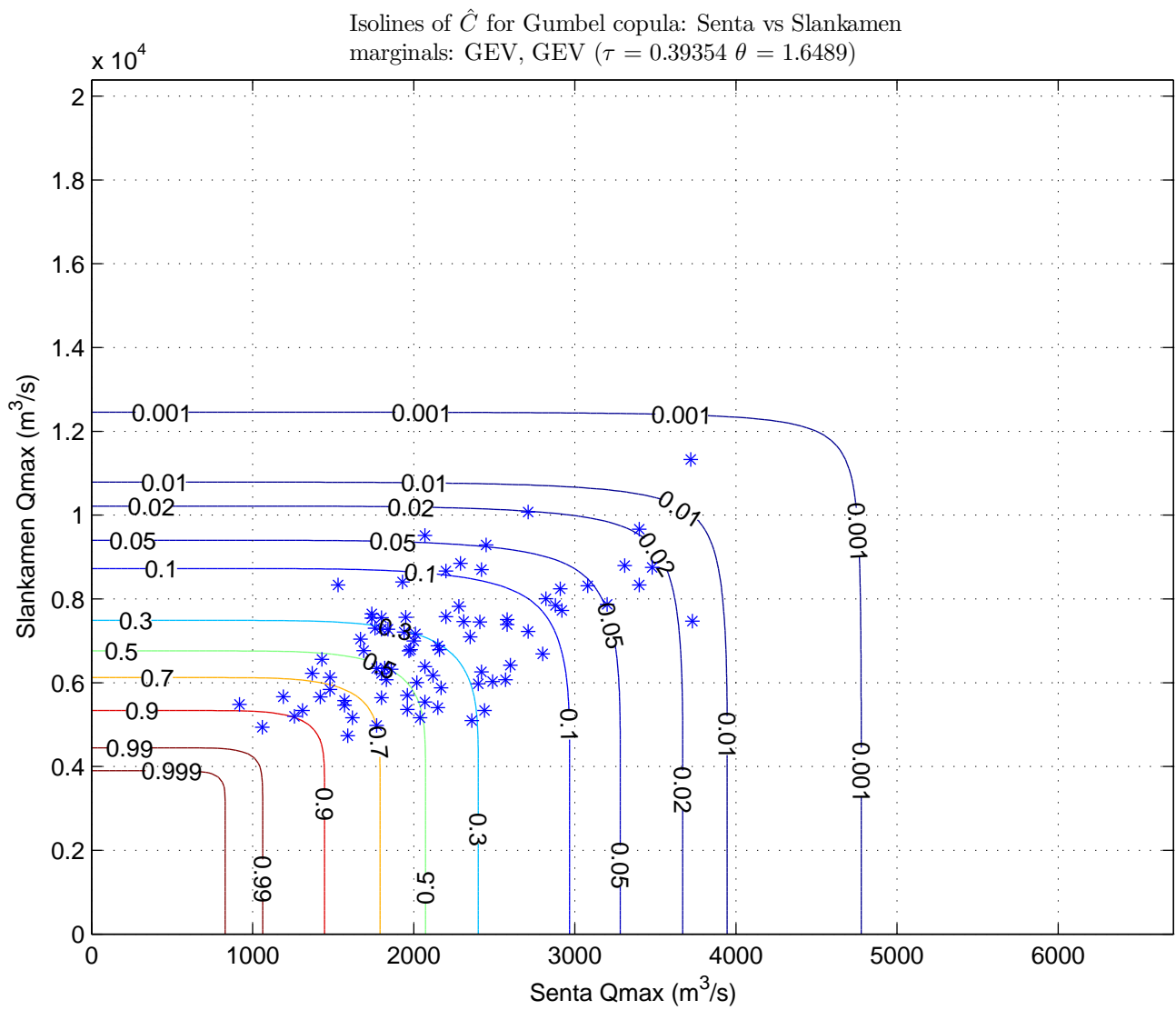
Isolines of  $\hat{C}$  for Gumbel copula: Senta vs Bogojevo  
marginals: GEV, GEV ( $\tau = 0.21387$   $\theta = 1.272$ )



Isolines of  $\hat{C}$  for Frank copula: Slankamen vs Senta  
marginals: LGN, GEV ( $\tau = 0.48173$   $\theta = 5.4137$ )

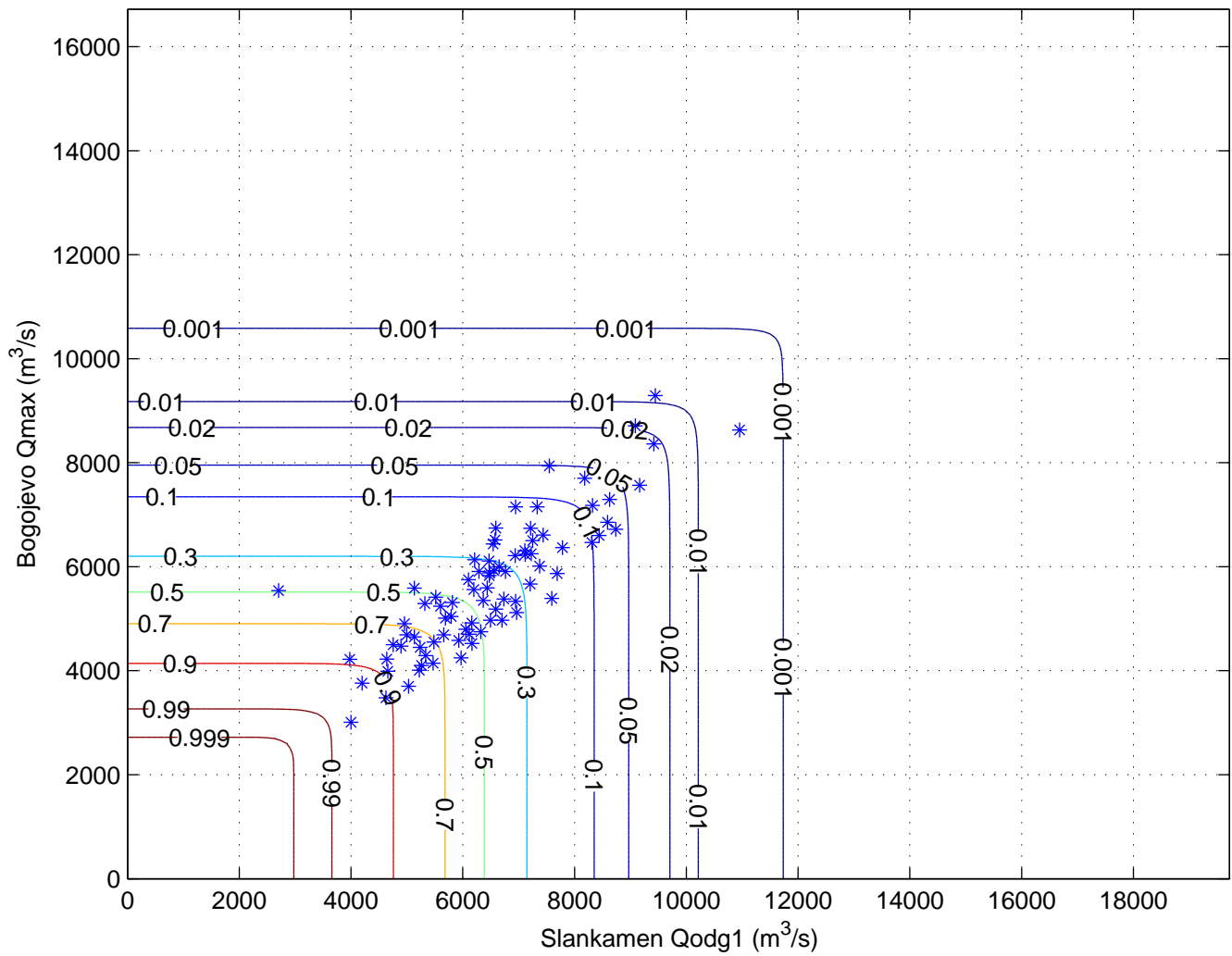


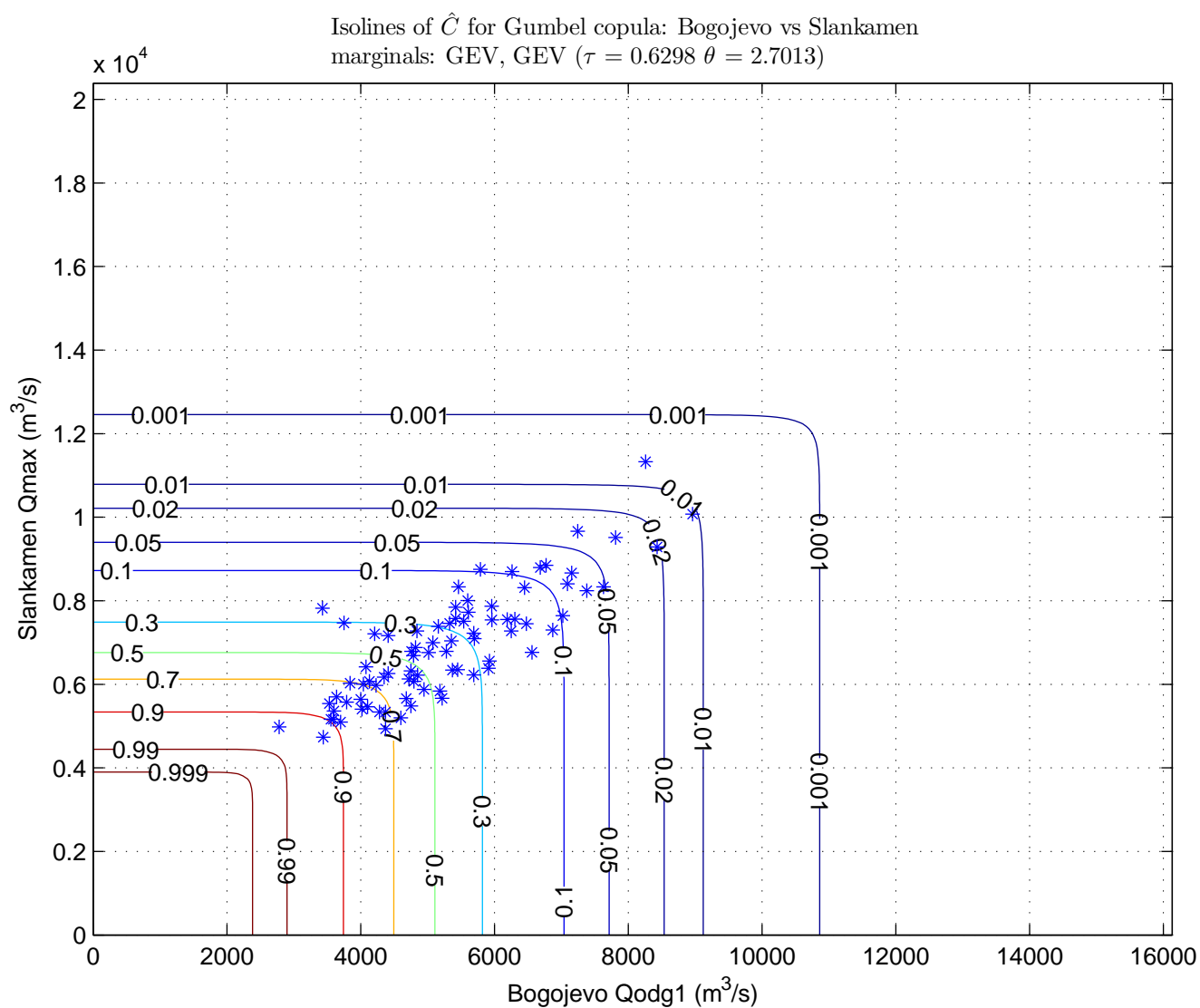




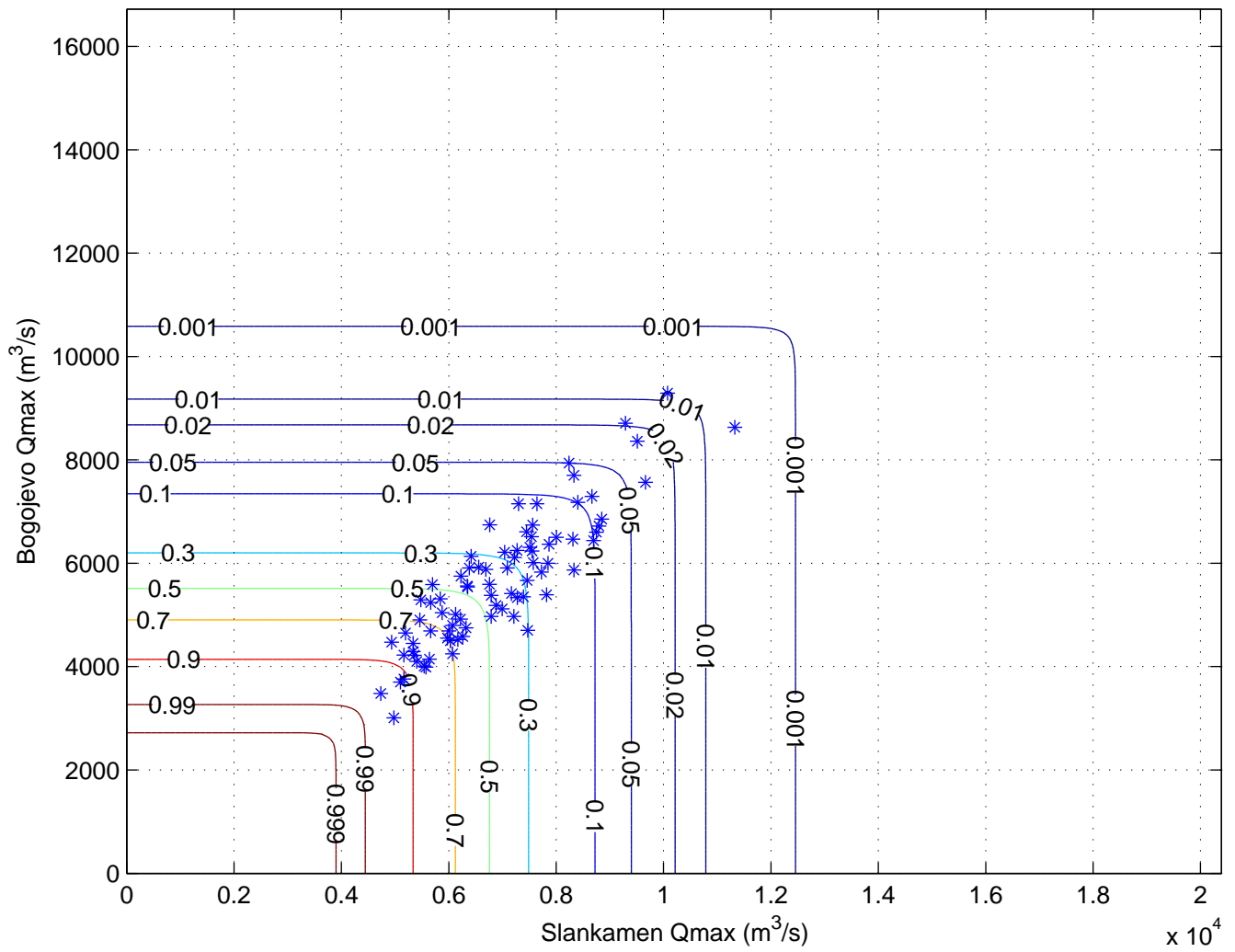


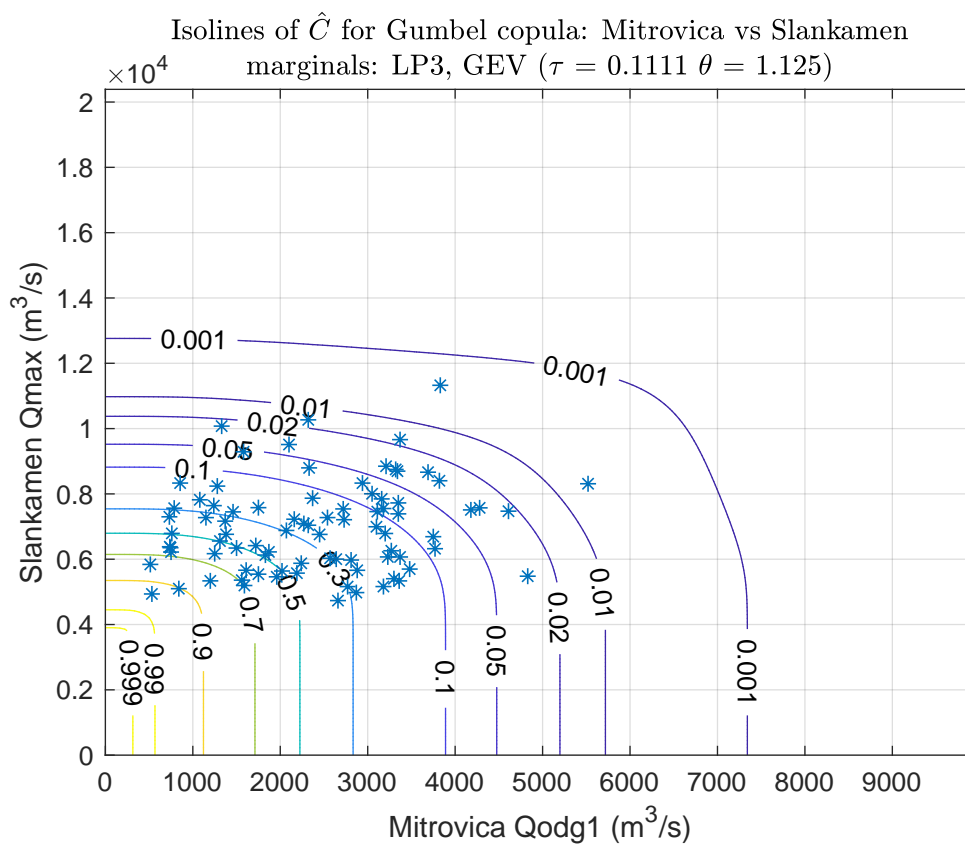
Isolines of  $\hat{C}$  for Gumbel copula: Slankamen vs Bogojveo  
 marginals: LP3, GEV ( $\tau = 0.68705$   $\theta = 3.1954$ )



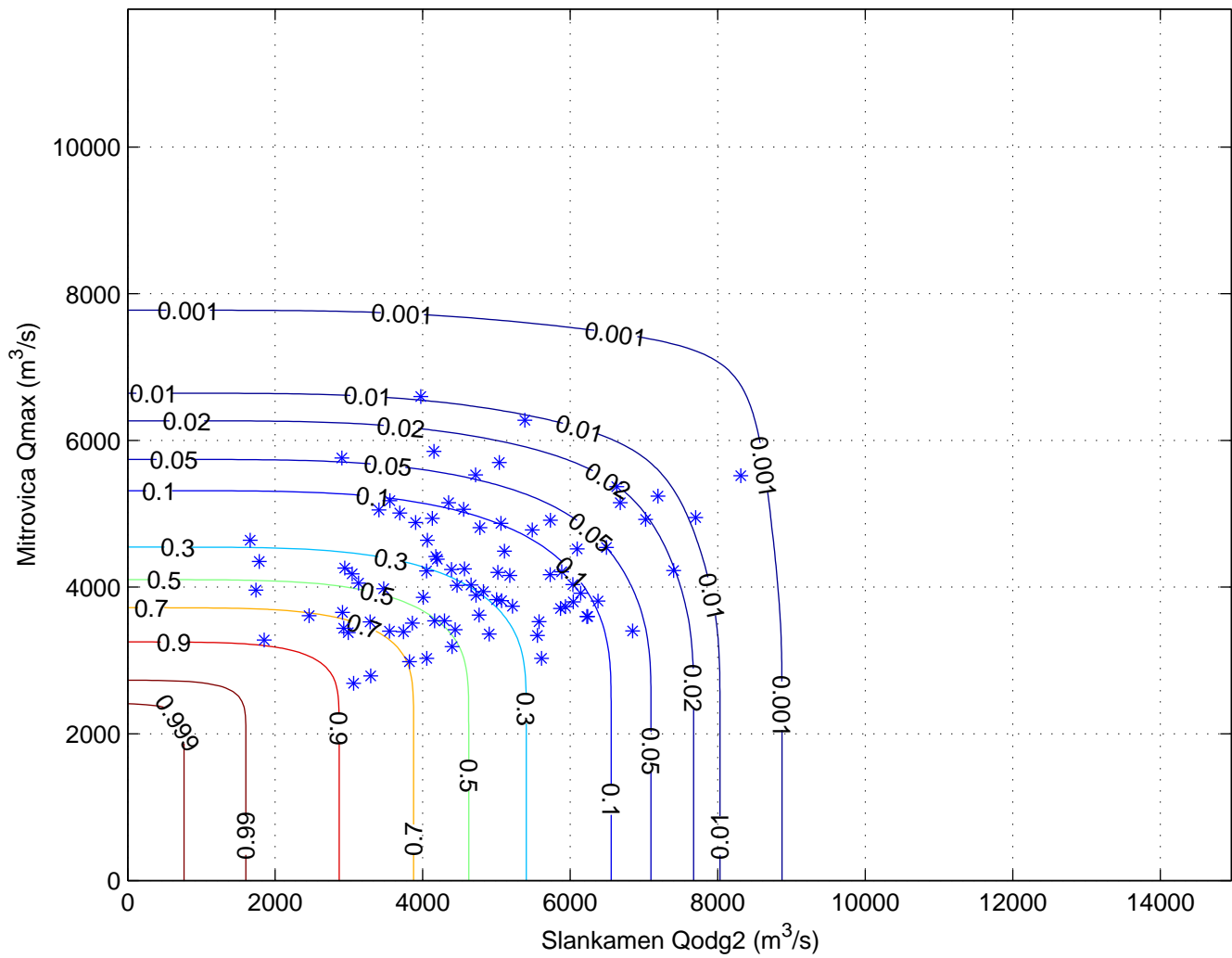


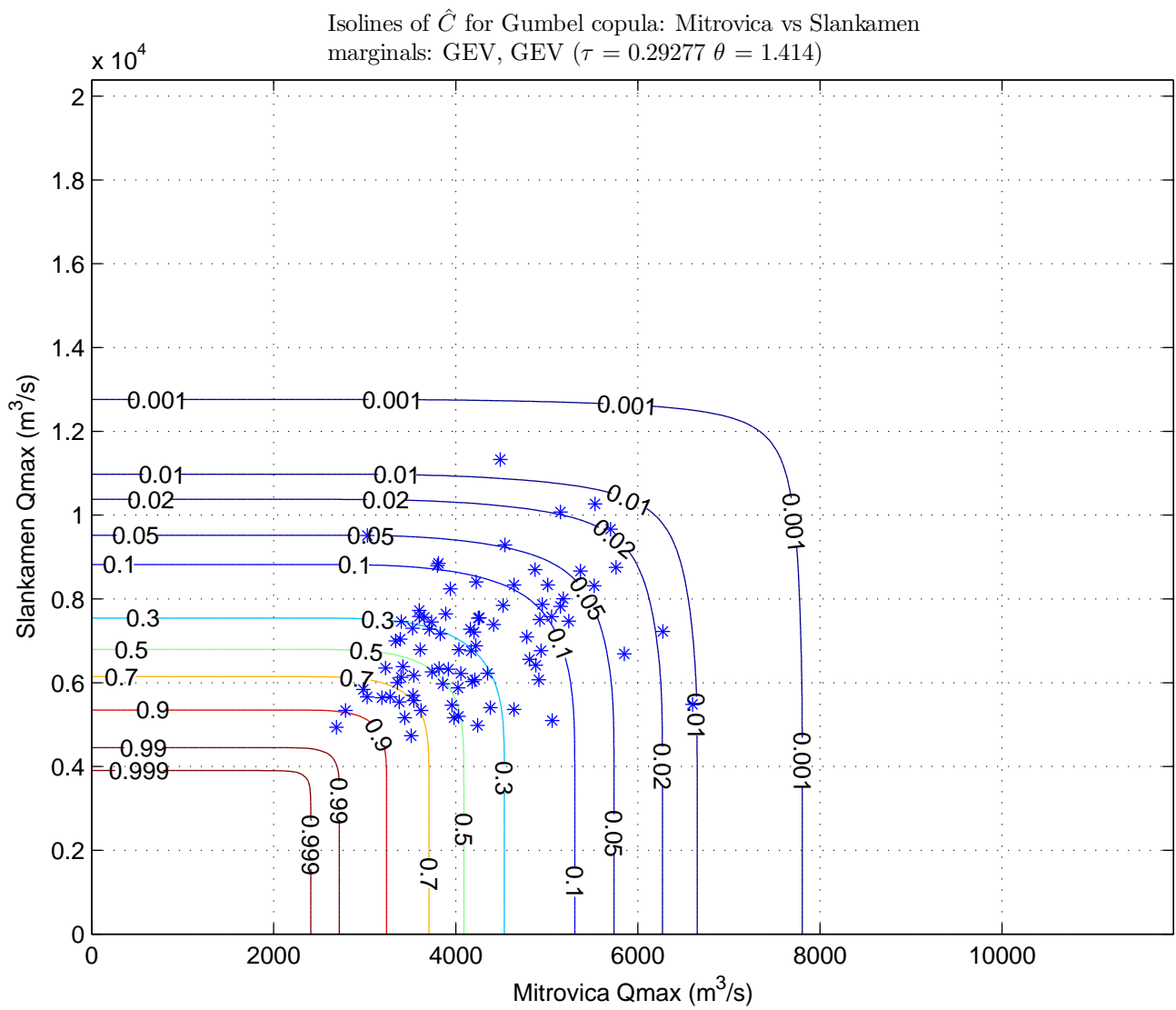
Isolines of  $\hat{C}$  for Gumbel copula: Slankamen vs Bogojevo  
 marginals: GEV, GEV ( $\tau = 0.69267$   $\theta = 3.2538$ )



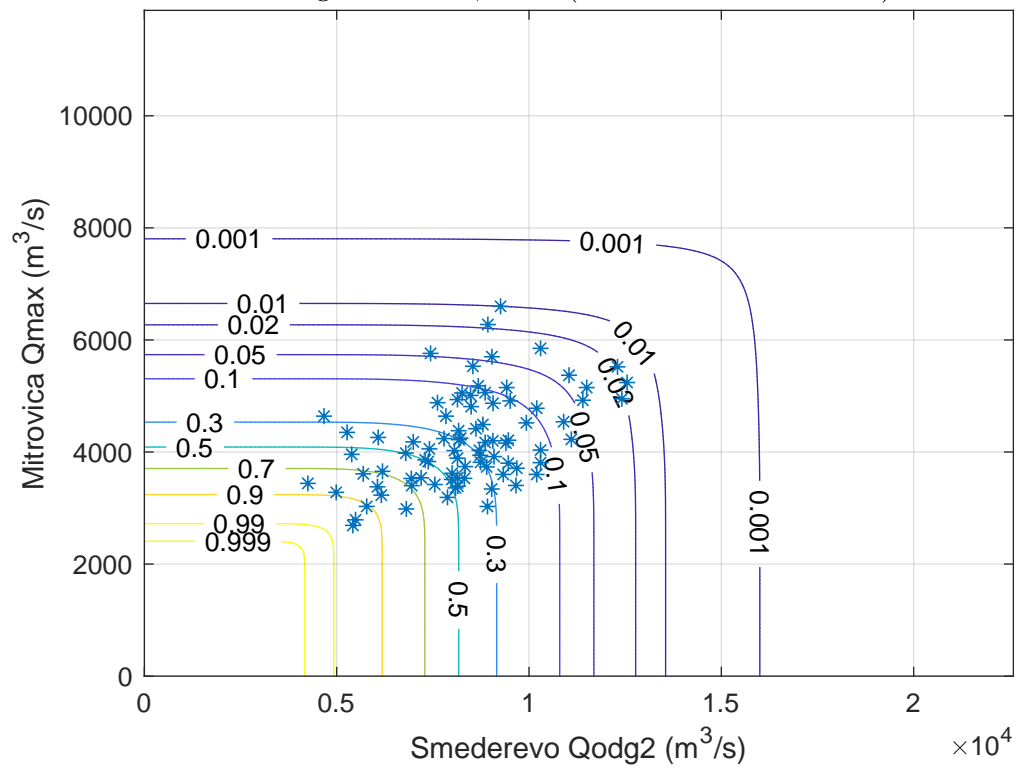


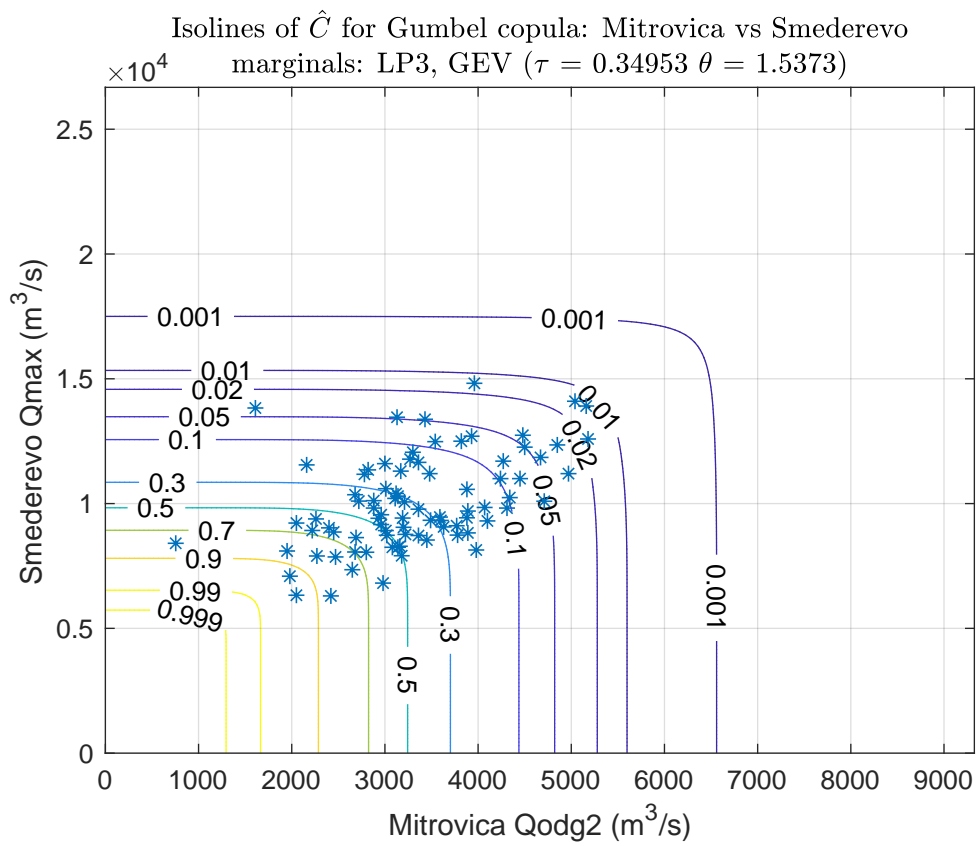
Isolines of  $\hat{C}$  for Gumbel copula: Slankamen vs Mitrovica  
 marginals: GEV, GEV ( $\tau = 0.11261$   $\theta = 1.1269$ )



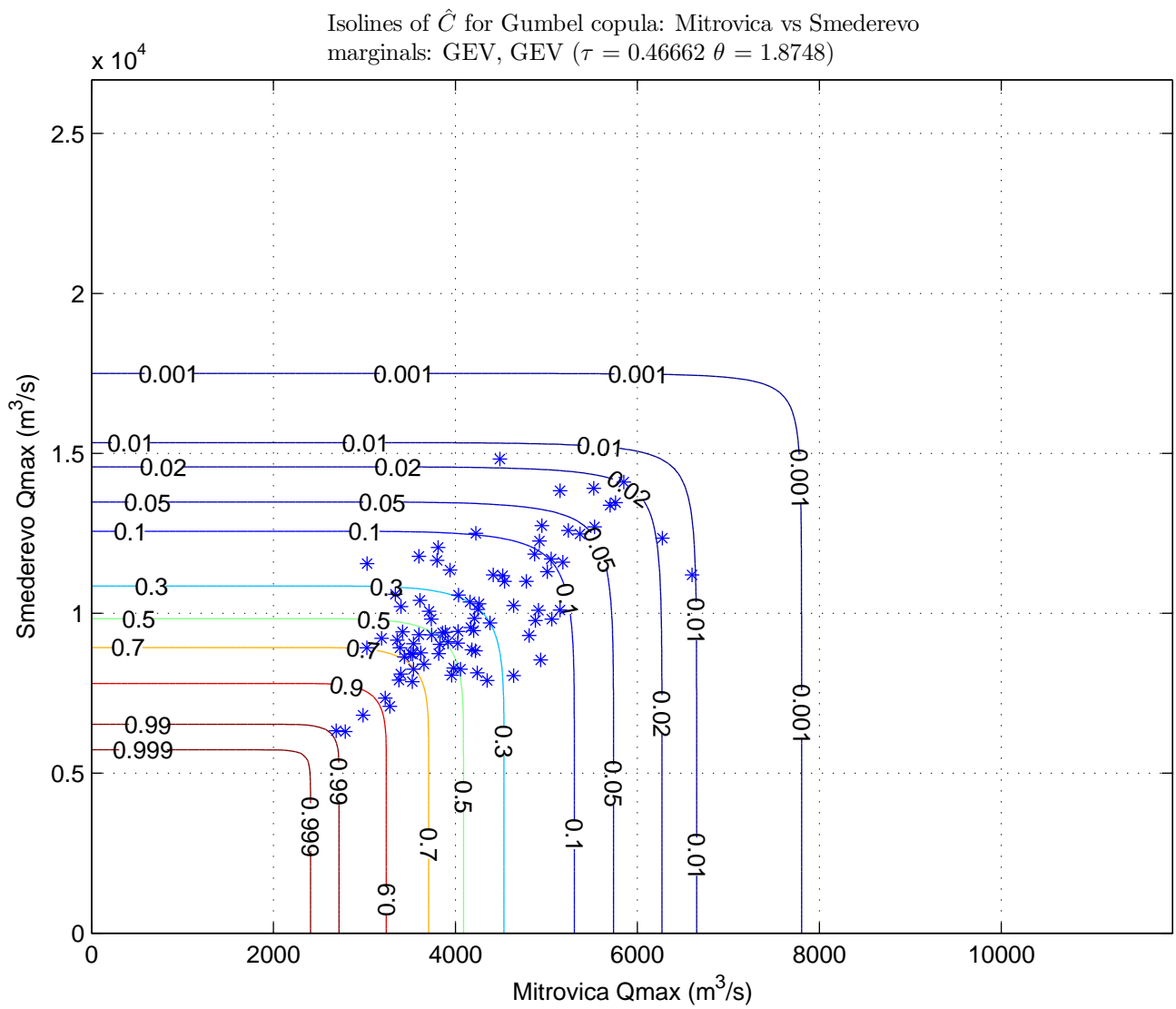


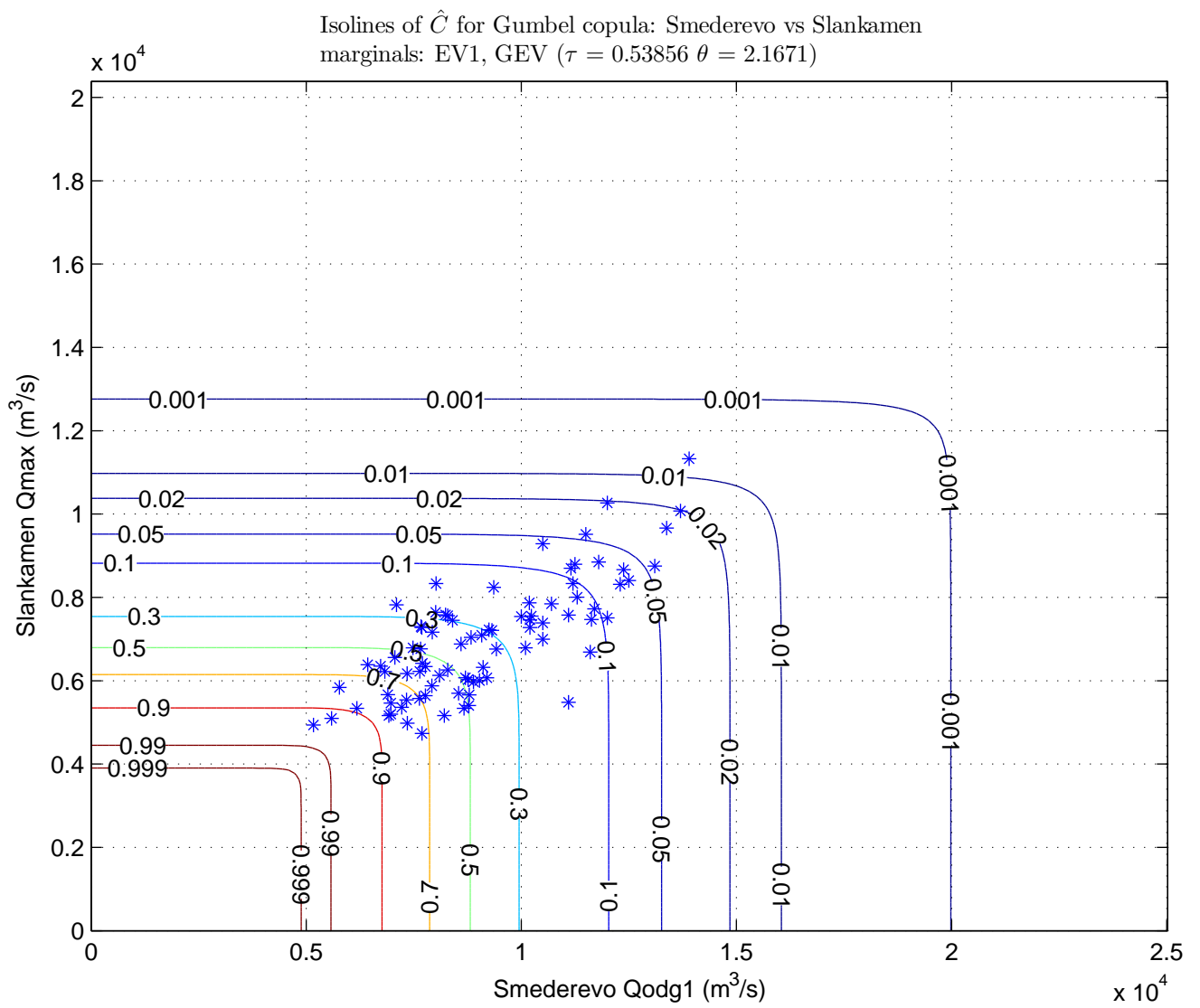
Isolines of  $\hat{C}$  for Gumbel copula: Smederevo vs Mitrovia  
 marginals: LGN, GEV ( $\tau = 0.33137$   $\theta = 1.4956$ )

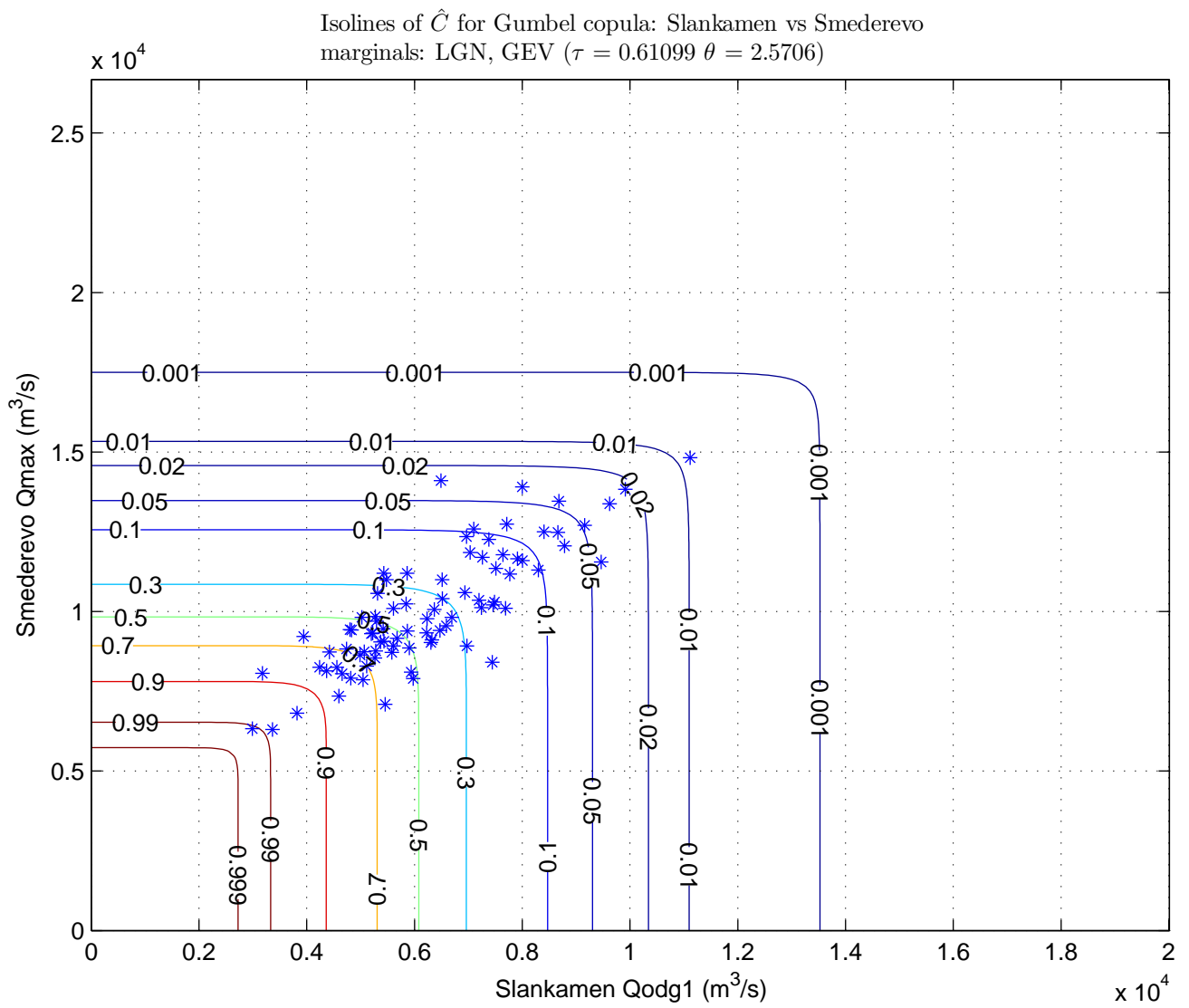


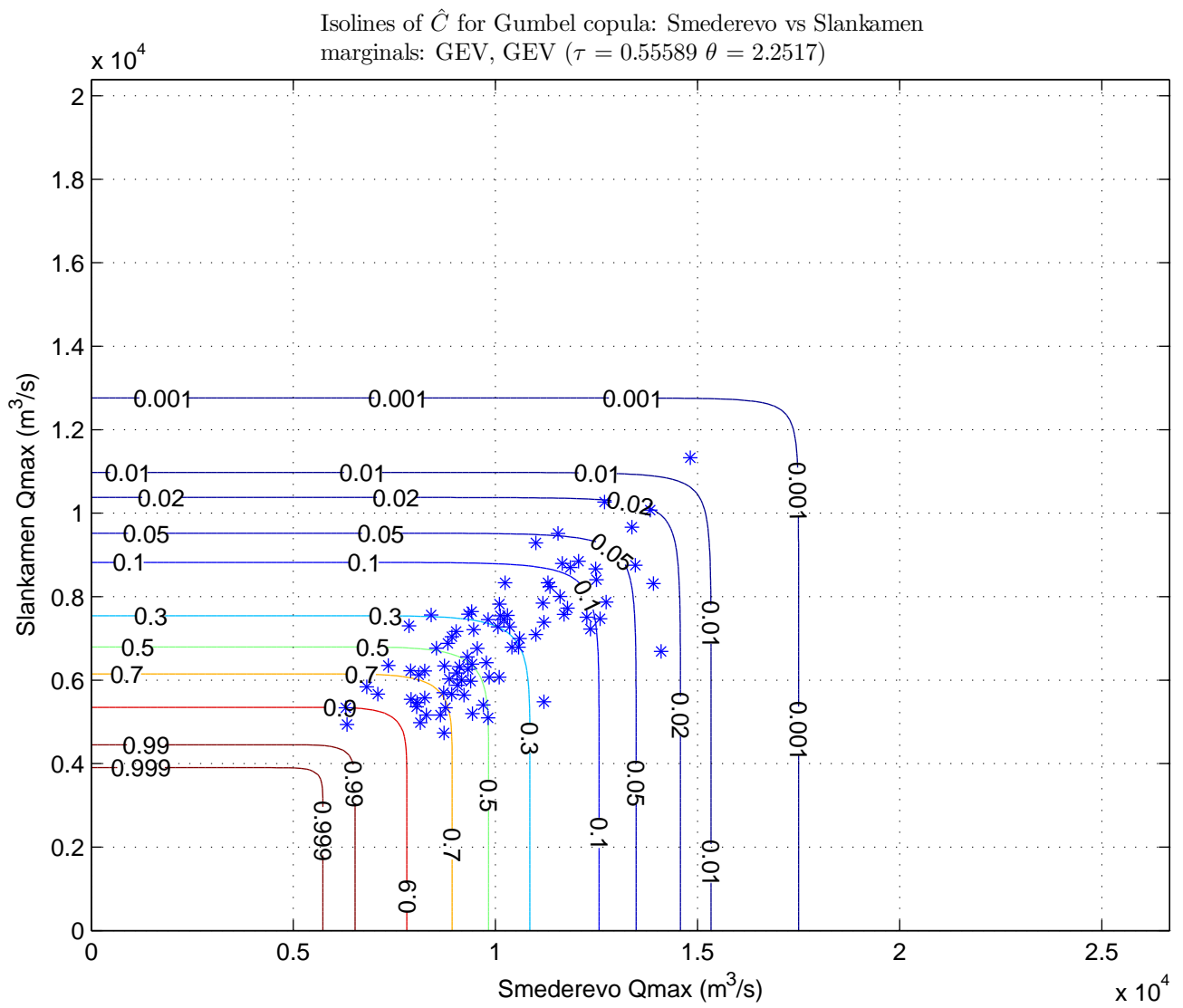












## ИЗЈАВА О АУТОРСТВУ

Изјављујем да је докторска дисертација, под насловом

ВИШЕДИМЕНЗИОНАЛНИ ПРИСТУП ПРОРАЧУНУ МЕРОДАВНИХ  
ВЕЛИКИХ ВОДА НА СЕКТОРИМА РЕКА СА ПРИТОКАМА

која је одбрањена на Грађевинско-архитектонском факултету Универзитета у Нишу:

- резултат сопственог истраживачког рада;
- да ову дисертацију, ни у целини, нити у деловима, нисам пријављивао/ла на другим факултетима, нити универзитетима;
- да нисам повредио/ла ауторска права, нити злоупотребио/ла интелектуалну својину других лица.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци, који су у вези са ауторством и добијањем академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада, и то у каталогу Библиотеке, Дигиталном репозиторијуму Универзитета у Нишу, као и у публикацијама Универзитета у Нишу.

У Нишу, 15.03.2021.

Потпис аутора дисертације:

Александра С. Илић  
(Име, средње слово и презиме)

**ИЗЈАВА О ИСТОВЕТНОСТИ ЕЛЕКТРОНСКОГ И ШТАМПАНОГ ОБЛИКА  
ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ**

Наслов дисертације: ВИШЕДИМЕНЗИОНАЛНИ ПРИСТУП ПРОРАЧУНУ  
МЕРОДАВНИХ ВЕЛИКИХ ВОДА НА СЕКТОРИМА РЕКА СА ПРИТОКАМА

Изјављујем да је електронски облик моје докторске дисертације, коју сам предао/ла за уношење у **Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу**, истоветан штампаном облику.

У Нишу, 15.03.2021.

Потпис аутора дисертације:

Александра С. Шит  
(Име, средње слово и презиме)

## ИЗЈАВА О КОРИШЋЕЊУ

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Никола Тесла“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу унесе моју докторску дисертацију, под насловом:

**ВИШЕДИМЕНЗИОНАЛНИ ПРИСТУП ПРОРАЧУНУ МЕРОДАВНИХ ВЕЛИКИХ ВОДА НА СЕКТОРИМА РЕКА СА ПРИТОКАМА.**

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском облику, погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију, унету у Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу, могу користити сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons), за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство (CC BY)
2. Ауторство – некомерцијално (CC BY-NC)
3. Ауторство – некомерцијално – без прераде (CC BY-NC-ND)
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима (CC BY-NC-SA)
5. Ауторство – без прераде (CC BY-ND)
6. Ауторство – делити под истим условима (CC BY-SA)

У Нишу, 15.03.2021.

Потпис аутора дисертације:

Александра С. Илић  
(Име, средње слово и презиме)