



UNIVERZITET U NOVOM SADU

FAKULTET TEHNIČKIH NAUKA



**ANALIZA PRELAZNIH  
PROCESA, ENERGETSKOG  
BILANSA I FREKVENCIJSKIH  
KARAKTERISTIKA KOLA SA  
FRAKCIONIM ELEMENTIMA**

DOKTORSKA DISERTACIJA

Mentor:  
doc. dr Stevan Cvetićanin  
prof. dr Dušan Zorica

Kandidat:  
Kristian Haška

Novi Sad, 2022. godine

KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA<sup>1</sup>

Vrsta rada:	Doktorska disertacija
Ime i prezime autora:	Kristian Haška
Mentor (titula, ime, prezime, zvanje, institucija)	dr Stevan Cvetićanin, docent, Fakultet tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu dr Dušan Zorica, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
Naslov rada:	Analiza prelaznih procesa, energetskog bilansa i frekvencijskih karakteristika električnih kola sa frakcionim elementima
Jezik publikacije (pismo):	Srpski (latinica)
Fizički opis rada:	Uneti broj: Stranica 84 Poglavlja 4 Referenci 71 Tabela 1 Slika 37 Grafikona 0 Priloga 0
Naučna oblast:	Elektrotehničko i računarsko inženjerstvo
Uža naučna oblast (naučna disciplina):	Elektroenergetika
Ključne reči / predmetna odrednica:	frakciona uopštenja električnih elemenata; aktivni i pasivni električni elementi; frakciona $RC$ , $RL$ i $RLC$ kola; tranzijentni i kvazistacionarni režim; frekvencijska i asimptotska analiza
Rezime na jeziku rada:	Električni elementi, napravljeni od materijala kod kojih se procesi polarizacije i magnetizacije ne dešavaju trenutno, već zavise i od istorije procesa, mogu se konstitutivno modelirati uopštenjem klasične konstitutivne jednačine dodavanjem člana koji uključuje istoriju fizičkog procesa. Matematički model frakcionog kondenzatora, pored člana koji odgovara klasičnom kondenzatoru, uključuje i član koji sadrži frakcioni integral, te uvažava da količina naelektrisanja na frakcionom kondenzatoru ne zavisi samo od trenutne vrednosti napona, već i od njegove istorije. U slučaju frakcionog uopštenja modela kalema, odnosno u slučaju kada se proces magnetizacije materijala ne dešava trenutno, već je uključena i istorija njene promene, fluks vektora magnetske indukcije se može izraziti superpozicijom člana koji u obzir uzima trenutnu vrednost struje i člana kojim se, korišćenjem frakcionog integrala, modelira uticaj istorije promene struje. Navedeni konstitutivni modeli su korišćeni za formulisanje jednačina frakcionih rednih $RC$ , $RL$ i $RLC$ kola, koje daju struju kao odziv kola na pobudu u vidu elektromotorne sile.

<sup>1</sup> Autor doktorske disertacije potpisao je i priložio sledeće Obrascе:

5b – Izjava o autorstvu;

5v – Izjava o istovetnosti štampane i elektronske verzije i o ličnim podacima;

5g – Izjava o korišćenju.

Ove Izjave se čuvaju na fakultetu u štampanom i elektronskom obliku i ne koriče se sa tezom.

	Takođe je proučavan prelazni i kvazistacionarni režim kola, energetski bilans i frekvencijske karakteristike.
Datum prihvatanja teme od strane nadležnog veća:	21.04.2022.
Datum odbrane: (Popunjavanje odgovarajuća služba)	
Članovi komisije: (titula, ime, prezime, zvanje, institucija)	<p>Predsednik: dr Veran Vasić, redovni profesor, Fakultet tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu</p> <p>Član: dr Tomislav Šekara, redovni profesor, Elektrotehnički fakultet, Univerzitet u Beogradu</p> <p>Član: dr Jovan Mikulović, redovni profesor, Elektrotehnički fakultet, Univerzitet u Beogradu</p> <p>Član: dr Milica Kisić, docent, Fakultet tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu</p> <p>Član: dr Luka Strezoski, docent, Fakultet tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu</p> <p>Član, mentor: dr Stevan Cvetičanin, docent, Fakultet tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu</p> <p>Član, mentor: dr Dušan Zorica, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu</p>
Napomena:	

**UNIVERSITY OF NOVI SAD  
FACULTY OF TECHNICAL SCIENCES**

**KEY WORD DOCUMENTATION<sup>2</sup>**

Document type:	Doctoral dissertation
Author:	Kristian Haška
Supervisor (title, first name, last name, position, institution)	Dr Stevan Cvetičanin, Assistant Professor, Faculty of Technical Sciences, University of Novi Sad Dr Dušan Zorica, Full Professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad
Thesis title:	Analysis of transient processes, energy balance and frequency characteristics of electrical circuits with fractional elements
Language of text (script):	Serbian language (latin script)
Physical description:	Number of: Pages 84 Chapters 4 References 71 Tables 1 Illustrations 37 Graphs 0 Appendices 0
Scientific field:	Electrical and computer engineering
Scientific subfield (scientific discipline):	Power engineering
Subject, Key words:	fractionally generalized electric elements; dissipative and generative electric elements; fractional <i>RC</i> , <i>RL</i> , and <i>RLC</i> circuits; transient and steady state regimes; frequency and asymptotic analysis
Abstract in English language:	Electrical elements made of materials in which the processes of polarization and magnetization do not occur instantaneously, but also depend on the history of the process, can be constitutively modeled by generalizing the classical constitutive equation by adding a hereditary type term that includes the history of the physical process. The mathematical model of the fractional capacitor, in addition to the term corresponding to the classical capacitor, also includes the term containing the fractional integral, taking into account that the amount of charge on the fractional capacitor depends not only on the current voltage value, but also on its history. In the case of fractional generalization of the inductor model, ie in the case when the process of magnetization of the material does not occur instantaneously, but the history of its change is included, the total magnetic flux can be expressed in terms of current by superposition of the instantaneous and hereditary term, that is expressed through the fractional integral. These constitutive models are further used to formulate the governing equations of fractional series <i>RC</i> , <i>RL</i> and

<sup>2</sup> The author of doctoral dissertation has signed the following Statements:

5b – Statement on the authority,

5v – Statement that the printed and e-version of doctoral dissertation are identical and about personal data,

5g – Statement on copyright licenses.

The paper and e-versions of Statements are held at the faculty and are not included into the printed thesis.

	<i>RLC</i> circuits, which provide circuit's current as a response to the excitation in the form of electromotive force. The transient and steady state regime, energy balance and frequency characteristics of the circuits are also studied.
Accepted on Scientific Board on:	21.04.2022.
Defended: (Filled by the faculty service)	
Thesis Defend Board: (title, first name, last name, position, institution)	President: Dr Veran Vasić, Full Professor, Faculty of Technical Sciences, University of Novi Sad Member: Dr Tomislav Šekara, Full Professor, School of Electrical Engineering, University of Belgrade Member: Dr Jovan Mikulović, Full Professor, School of Electrical Engineering, University of Belgrade Member: Dr Milica Kisić, Assistant Professor, Faculty of Technical Sciences, University of Novi Sad Member: Dr Luka Strezoski, Assistant Professor, Faculty of Technical Sciences, University of Novi Sad Member, mentor: Dr Stevan Cvetičanin, Assistant Professor, Faculty of Technical Sciences, University of Novi Sad Member, mentor: Dr Dušan Zorica, Full Professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad
Note:	

# Sadržaj

<b>Predgovor</b>	<b>iii</b>
<b>Zahvalnica</b>	<b>v</b>
<b>1 Uvod</b>	<b>1</b>
1.1 Klasična električna kola . . . . .	1
1.2 Laplasova transformacija i analitički metodi inverzije . . . . .	4
1.3 Frakcioni račun . . . . .	6
<b>2 Frakciona uopštenja modela električnih elemenata</b>	<b>9</b>
2.1 Konstitutivne relacije električnih elemenata . . . . .	9
2.2 Energetski bilans elemenata u kvazistacionarnom režimu . . . . .	13
<b>3 RC i RL kola sa frakcionim elementima</b>	<b>17</b>
3.1 Formulacija modela frakcionih RC i RL kola . . . . .	17
3.1.1 Model frakcionog RC kola . . . . .	17
3.1.2 Model frakcionog RL kola . . . . .	19
3.2 Tranzijentni i kvazistacionarni režim frakcionih RC i RL kola . . . . .	21
3.2.1 Tranzijentni režim . . . . .	21
3.2.2 Kvazistacionarni režim . . . . .	27
3.2.3 Numerički primeri . . . . .	29
3.3 Frekvencijske karakteristike frakcionih RC kola . . . . .	33
<b>4 RLC kola sa frakcionim elementima</b>	<b>39</b>
4.1 Formulacija modela RLC kola . . . . .	39
4.2 Tranzijentni odziv disipativno-disipativnog RLC kola . . . . .	42
4.2.1 Priroda polova funkcije prenosa $\hat{g}_C$ i određivanje impulsnog odziva $g_C$ . . . . .	44
4.2.2 Numerički primeri . . . . .	50
4.3 Energetski bilans RLC kola u kvazistacionarnom režimu . . . . .	54
4.4 Frekvencijske karakteristike frakcionih RLC kola . . . . .	59
4.4.1 Disipativno-disipativno RLC kolo . . . . .	60
4.4.2 Generativno-generativno RLC kolo . . . . .	62
4.4.3 Disipativno-generativno RLC kolo . . . . .	65
4.4.4 Generativno-disipativno RLC kolo . . . . .	68
<b>Zaključak</b>	<b>71</b>
<b>Bibliografija</b>	<b>75</b>



# Predgovor

Električni elementi, napravljeni od materijala kod kojih se procesi polarizacije i magnetizacije ne dešavaju trenutno, već zavise i od istorije procesa, mogu se konstitutivno modelirati uopštenjem klasične konstitutivne jednačine dodavanjem člana koji uključuje istoriju fizičkog procesa. Matematički model frakcionog kondenzatora, električnog elementa sa memorijskim svojstvima, pored člana koji odgovara klasičnom kondenzatoru, uključuje i član koji sadrži frakcioni integral, te uvažava da količina naelektrisanja na frakcionom kondenzatoru ne zavisi samo od trenutne vrednosti napona, već i od njegove istorije. Takođe, frakcioni kondenzator je moguće modelirati konstitutivnom jednačinom istog matematičkog oblika, tako što će se napon izraziti preko trenutne vrednosti naelektrisanja na njegovim oblogama, kao i istorije promene naelektrisanja. U slučaju frakcionog uopštenja modela kalema, odnosno u slučaju kada se proces magnetizacije materijala ne dešava trenutno, već je uključena i istorija njene promene, fluks vektora magnetske indukcije se može izraziti superpozicijom člana koji u obzir uzima trenutnu vrednost struje i člana kojim se, korišćenjem frakcionog integrala, modelira uticaj istorije promene struje. Takođe, matematičkim modelom istog oblika je moguće izraziti struja kalema u zavisnosti od trenutne vrednosti i istorije magnetskog fluksa. Pokazaće se da predloženi konstitutivni modeli, sa aspekta energetskog bilansa, mogu odgovarati kako elementima koji disipiraju energiju, tako i elementima koji ju generišu.

Navedeni konstitutivni modeli su korišćeni za formulisanje jednačina frakcionih rednih  $RC$ ,  $RL$  i  $RLC$  kola, koje daju struju kao odziv kola na pobudu u vidu elektromotorne sile. U cilju analize odziva kola u tranzijentnom režimu za pobudu proizvoljnog oblika, neophodno je rešiti jednačine kojima su modelirana frakciona  $RC$ ,  $RL$  i  $RLC$  kola, što je učinjeno primenom Laplasove transformacije, kojom se odziv kola dobija u obliku konvolucije sopstvenog (impulsnog) odziva i pobude. Među specijalnim slučajevima oblika pobude posebno su razmatrane pobude u obliku Hevisajdove i prostoperiodične funkcije. U slučaju prostoperiodične pobude, rešenje jednačine koja opisuje prelazni režim kola je upoređeno sa rešenjem jednačine kola, koje ab initio odgovara prostoperiodičnom režimu. Prostoperiodični režim kola je posebno analiziran u pogledu energetskog bilansa kola u zavisnosti od učestalosti pobude, kao i u pogledu frekvencijskih karakteristika kola, zajedno sa asimptomskim ponašanjem frekvencijskih karakteristika.

Sadržaj doktorske disertacije je podeljen na četiri glave. U prvoj glavi je dat kratak pregled svojstava klasičnih  $RC$ ,  $RL$  i  $RLC$  kola, matematičkog alata, koji uključuje Laplasovu transformaciju, neke od teorema kompleksne analize i njihovu primenu u određivanju inverzne Laplasove transformacije metodom konturne integracije. Takođe su navedeni i najvažniji elementi frakcionog računa, kao i neka svojstva operatora frakcione integracije i frakcionog diferenciranja.

Druga glava disertacije je posvećena frakcionim uopštenjima električnih elemenata. Pretpostavljajući da količina naelektrisanja na oblogama kondenzatora zavisi od istorije promene napona na njemu, ili obrnuto, da je napon na kondenzatoru zavisn od istorije promene naelektrisanja na njegovim oblogama, odnosno izražavanjem magnetskog fluksa kalema u funkciji istorije njegove struje, ili obrnuto, izražavanjem struje kalema preko istorije njegovog magnetskog fluksa, frakcioni kondenzator i kalem su konstitutivno modelirani zbirom članova koji opisuju trenutni i memorijski doprinos. Takođe, u kvazistacionarnom režimu je izvršena analiza energetskog bilansa električnih elemenata opisanih navedenim modelima i komentaran je njihov karakter.

Formulacija modela disipativnih i generativnih  $RC$  i  $RL$  kola je data u trećoj glavi i određena je struja kola, kao analitičko rešenje jednačina kola korišćenjem Laplasove transformacije i metoda konturne integracije. Kola su zatim razmatrana u kvazistacionarnom režimu i komentaran je njihov energetski bilans i karakter. Prethodna analiza je potkrepljena ilustrativnim numeričkim primerima za pobudu kola u obliku Hevisajdove i prostoperiodične funkcije, dok su na kraju glave razmatrane frekvencijske karakteristike modula i argumenta funkcije prenosa koja odgovara struji aktivnog i pasivnog  $RC$  kola zajedno sa njihovim asimptomskim ponašanjem.

U poslednjoj, četvrtoj glavi, formulisani su modeli četiri redna frakciona  $RLC$  kola, koja se sastoje od kombinacija otpornika sa pasivnim/aktivnim kalemom i pasivnim/aktivnim kondenzatorom: disipativno-



disipativnog, generativno-generativnog, disipativno-generativnog i generativno-disipativnog  $RLC$  kola. Analiziran je tranzijentni režim i prelazak u kvazistacionarno stanje disipativno-disipativnog  $RLC$  kola, a takođe je razmatran energetska bilans i frekvencijske karakteristike sva četiri kola.

Nakon poslednje glave disertacije je izložen rezime i navedeni su zaključci proistekli iz dobijenih rezultata. Na samom kraju je naveden spisak korišćene literature i data je ključna dokumentacijska informacija.

Originalni naučni doprinos disertacije sadržan je u drugoj, trećoj i četvrtoj glavi i rezultat je istraživanja, čiji je deo sadržan u radovima [23, 24, 25, 26], objavljenim u visokorangiranim međunarodnim naučnim časopisima, kao i u zborniku radova međunarodne naučne konferencije.

# Zahvalnica

Najpre bih želeo da se zahvalim ljudima bez kojih ove disertacije ne bi ni bilo – mojim mentorima, dr Dušanu Zorici i dr Stevanu Cvetičaninu. Hvala im na istrajnosti, uloženom vremenu, posvećenosti detaljima i prenesenom znanju. Malo je ljudi koji svoj posao obavljaju tako savesno.

Takođe bih se zahvalio dragim profesorima dr Iliji Kovačeviću, dr Vladimiru Strezoskom i dr Veranu Vasiću na prijateljskom odnosu, patronstvu i izuzetnom zalaganju.

Zahvaljujem se članovima Komisije, koji su svojim sugestijama, komentarima i savetima doprineli poboljšanju kvaliteta ove disertacije.

Neizmerno hvala mojoj porodici. Pre svega, mami Nataši što je verovala u mene i ogromnom trudu koji je uložila u moje odrastanje. Tati Pavelu, sestri Aleksandri i Alisi, bakama Slavici i Ani i dedama Njegomiru i Pavelu na smernicama, poverenju, motivaciji, podršci, razumevanju i pomoći. Posebno hvala mojoj supruzi Ivani na razumevanju, strpljenju i što mi je ukazala na odgovore koji se ne nalaze u stručnoj literaturi.



# Glava 1

## Uvod

Klasične konstitutivne jednačine električnih elemenata, kao i matematički modeli, impulsni odzivi struje i frekvencijske karakteristike klasičnih  $RC$ ,  $RL$  i  $RLC$  kola, razmatrani su kao motivacija za uopštenja konstitutivnih jednačina električnih elemenata i kola čiji su konstituenti uopšteni elementi. Takođe su navedeni i neophodni matematički alati korišćeni za uopštenje konstitutivnih relacija i određivanje odziva kola konstituisanih uopštenim elementima.

### 1.1 Klasična električna kola

Konstitutivne relacije osnovnih električnih elemenata: otpornika, klasičnog kondenzatora i klasičnog kalema, date su sledećim izrazima

$$u_R(t) = R i(t), \quad q(t) = C u_C(t) \quad \text{i} \quad \phi(t) = L i_L(t), \quad (1.1)$$

gde  $R[\Omega]$ ,  $C[\text{F}]$  i  $L[\text{H}]$  predstavljaju otpornost otpornika, kapacitivnost kondenzatora i induktivnost kalema, respektivno, dok su sa  $u$ ,  $i$  i  $\phi$  označeni napon, struja i magnetski fluks na odgovarajućem elementu, a  $t > 0$  je vreme. Kako bi se formulisali modeli klasičnih  $RC$ ,  $RL$  i  $RLC$  kola, konstitutivne relacije elemenata izražene su preko napona i struje odgovarajućeg elementa, te se konstitutivne relacije klasičnog kondenzatora i kalema, date izrazima (1.1)<sub>2</sub> i (1.1)<sub>3</sub>, zapisuju u obliku

$$i(t) = C \frac{d}{dt} u_C(t) \quad \text{i} \quad u_L(t) = L \frac{d}{dt} i(t), \quad (1.2)$$

koji je dobijen diferenciranjem izraza (1.1)<sub>2</sub> i (1.1)<sub>3</sub> i korišćenjem definicije jačine električne struje  $i(t) = \frac{d}{dt} q(t)$  i Faradejevog zakona elektromagnetske indukcije  $u_L(t) = \frac{d}{dt} \phi(t)$ .

#### Klasično $RC$ i $RL$ kolo

Ponašanje klasičnog  $RC$  kola, kao i klasičnog  $RL$  kola, prikazanih na slici 1.1, koja su formirana rednom vezom otpornika i klasičnog kondenzatora, odnosno rednom vezom otpornika i klasičnog kalema, modeliranih relacijama (1.1) i koja su pobuđena elektromotornom silom  $\mathcal{E}$ , određeno je drugim Kirhofovom zakonom kombinovanim sa Omovim zakonom, odnosno jednačinom klasičnog  $RC$  kola u vremenskom domenu

$$\mathcal{E}(t) = R i(t) + u_C(t), \quad \text{odnosno} \quad R \left( \tau_C \frac{d}{dt} + 1 \right) i(t) = \tau_C \frac{d}{dt} \mathcal{E}(t), \quad (1.3)$$

pri čemu je  $\tau_C = RC$  [s] klasična vremenska konstanta, dok je u slučaju klasičnog  $RL$  kola drugi Kirhofov zakon kombinovanim sa Omovim zakonom, odnosno jednačina kola u vremenskom domenu određena sa

$$\mathcal{E}(t) = R i(t) + u_L(t), \quad \text{odnosno} \quad R \left( \tau_L \frac{d}{dt} + 1 \right) i(t) = \mathcal{E}(t), \quad (1.4)$$

gde je  $\tau_L = \frac{L}{R}$  [s] klasična vremenska konstanta.

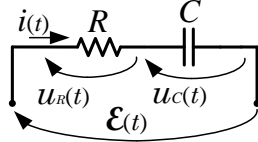
Primenom Laplasove transformacije, u nastavku definisane relacijom (1.20), na jednačine  $RC$  i  $RL$  kola u vremenskom domenu (1.3)<sub>2</sub> i (1.4)<sub>2</sub>, podrazumevajući nulte početne uslove, dobijaju se funkcije

prenosa koje odgovaraju struji, definisane kao količnik Laplasovih transformacija struje i elektromotorne sile, u oblicima

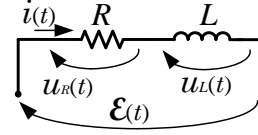
$$\hat{g}_i^{(RC)}(s) = \frac{\hat{i}(s)}{\hat{\mathcal{E}}(s)} = \frac{1}{R} \frac{\tau_C s}{\tau_C s + 1} = \frac{1}{R} \left( 1 - \frac{1}{\tau_C s + 1} \right) = \frac{1}{R} \hat{g}_R^{(RC)}(s), \quad (1.5)$$

$$\hat{g}_i^{(RL)}(s) = \frac{\hat{i}(s)}{\hat{\mathcal{E}}(s)} = \frac{1}{R} \frac{1}{\tau_L s + 1} = \frac{1}{R} \hat{g}_R^{(RL)}(s), \quad (1.6)$$

gde su  $\hat{g}_R^{(RC)}$  i  $\hat{g}_R^{(RL)}$  funkcije prenosa koje odgovaraju naponu na otporniku.



(a) Šema klasičnog  $RC$  kola.



(b) Šema klasičnog  $RL$  kola.

Slika 1.1: Šema klasičnog  $RC$  i  $RL$  kola.

Struja  $RC$  i  $RL$  kola u obliku konvolucije impulsnog odziva struje i elektromotorne sile u obliku

$$i(t) = g_i^{(RC)}(t) * \mathcal{E}(t) \quad \text{i} \quad i(t) = g_i^{(RL)}(t) * \mathcal{E}(t), \quad (1.7)$$

sledi iz definicije funkcije prenosa koja odgovara struji  $RC$  kola (1.5), odnosno definicije funkcije prenosa koja odgovara struji  $RL$  kola (1.6), primenom inverzne Laplasove transformacije, gde je impulsni odziv struje  $RC$  kola određen sa

$$g_i^{(RC)}(t) = \frac{1}{R} g_R^{(RC)}(t), \quad \text{gde je} \quad g_R^{(RC)}(t) = \delta(t) - \frac{1}{\tau_C} e^{-\frac{t}{\tau_C}}, \quad t > 0, \quad (1.8)$$

dok je impulsni odziv struje  $RL$  kola dat izrazom

$$g_i^{(RL)}(t) = \frac{1}{R} g_R^{(RL)}(t), \quad \text{gde je} \quad g_R^{(RL)}(t) = \frac{1}{\tau_L} e^{-\frac{t}{\tau_L}}. \quad (1.9)$$

Izrazi za moduo i argument funkcije prenosa koja odgovara struji  $RC$  kola (1.5), dobijeni su u obliku

$$\left| \hat{g}_R^{(RC)}(\omega) \right|_{\text{dB}} = 20 \log \left| \hat{g}_R^{(RC)}(\omega) \right| = 10 \log \frac{\tau_C^2 \omega^2}{1 + \tau_C^2 \omega^2} \quad \text{i} \quad \arg \hat{g}_R^{(RC)}(\omega) = \arctan \frac{1}{\tau_C \omega}, \quad (1.10)$$

dok su izrazi za moduo i argument funkcije prenosa koja odgovara struji  $RL$  kola (1.6), dati izrazom

$$\left| \hat{g}_R^{(RL)}(\omega) \right|_{\text{dB}} = 20 \log \left| \hat{g}_R^{(RL)}(\omega) \right| = -10 \log (1 + \tau_L^2 \omega^2) \quad \text{i} \quad \arg \hat{g}_R^{(RL)}(\omega) = -\arctan(\tau_L \omega), \quad (1.11)$$

određeni uvrštavanjem  $s = j\omega$  u izraze za funkcije prenosa (1.5), odnosno (1.6), gde je  $\omega$  ugaona učestalost.

Struja kao odziv klasičnog  $RC$  kola na elektromotornu silu zadatu u obliku Hevisajdove funkcije  $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 H(t)$ , prema izrazima (1.7)<sub>1</sub> i (1.8), određena je sa

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau_C}}, \quad t > 0,$$

odakle se vidi da struja kola, počevši od vrednosti  $\frac{\mathcal{E}_0}{R}$ , sa porastom vremena, eksponencijalno opada na nultu vrednost, što je u skladu sa činjenicom da napunjeni kondenzator predstavlja prekid za vremenski konstantnu struju. Sa druge strane, frekvencijska karakteristika modula funkcije prenosa, prema (1.10)<sub>1</sub>, monotono raste od negativne beskonačnosti do nule, što implicira da je  $RC$  kolo propusnik visokih učestalosti. Ovakav oblik frekvencijske karakteristike modula funkcije prenosa je očekivan s obzirom da funkcija prenosa ima nulu u koordinatnom početku, kao i jedan realan pol. Argument funkcije prenosa sa porastom učestalosti monotono opada sa vrednosti  $\frac{\pi}{2}$  na nultu vrednost, što je evidentno iz izraza (1.10)<sub>2</sub>.

Ukoliko se elektromotorna sila zada u obliku Hevisajdove funkcije  $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 H(t)$ , struja kao odziv klasičnog  $RL$  kola, prema izrazima (1.7)<sub>2</sub> i (1.9), određena je izrazom

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_L}}\right), \quad t > 0,$$

odakle se vidi da struja kola, počevši od nulte vrednosti, sa porastom vremena, eksponencijalno raste i asimptotski se približava vrednosti  $\frac{\mathcal{E}_0}{R}$ , što je u skladu sa činjenicom da kalem predstavlja kratki spoj za vremenski konstantnu struju. Sa druge strane, frekvencijska karakteristika modula funkcije prenosa, prema (1.11)<sub>1</sub>, kao posledica postojanja realnog pola monotono opada od nule do negativne beskonačnosti, što implicira da je  $RL$  kolo propusnik niskih učestalosti. Argument funkcije prenosa sa porastom učestalosti monotono opada sa nulte vrednosti na vrednost  $-\frac{\pi}{2}$ , što je evidentno iz izraza (1.11)<sub>2</sub>.

### Klasično $RLC$ kolo

Model klasičnog  $RLC$  kola, formiranog rednom vezom otpornika, klasičnog kondenzatora i klasičnog kalema, videti sliku 1.2 i pobuđenog elektromotornom silom  $\mathcal{E}$ , formuliše se korišćenjem drugog Kirhofovog zakona kombinovanog sa Omovim zakonom

$$\mathcal{E}(t) = Ri(t) + u_L(t) + u_C(t), \quad (1.12)$$

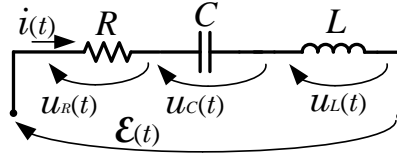
koji Laplasovom transformacijom jednačine (1.12) i konstitutivnih jednačina (1.2), uzimajući u obzir nulte početne uslove, u kompleksnom domenu dobija oblik

$$R(\tau_L \tau_C s^2 + \tau_C s + 1) \hat{i}(s) = \tau_C s \hat{\mathcal{E}}(s), \quad (1.13)$$

gde su  $\tau_C = RC$  [s] i  $\tau_L = \frac{L}{R}$  [s] klasične vremenske konstante, te se inverznom Laplasovom transformacijom jednačine kola u kompleksnom domenu (1.13) dobija

$$R \left( \tau_L \tau_C \frac{d^2}{dt^2} + \tau_C \frac{d}{dt} + 1 \right) i(t) = \tau_C \frac{d}{dt} \mathcal{E}(t)$$

za jednačinu kola u vremenskom domenu.



Slika 1.2: Šema klasičnog  $RLC$  kola.

Funkcija prenosa koja odgovara struji klasičnog  $RLC$  kola, definisana kao količnik Laplasovih slika struje i elektromotorne sile, sledi u obliku

$$\hat{g}_i^{(RLC)}(s) = \frac{\hat{i}(s)}{\hat{\mathcal{E}}(s)} = \frac{1}{R} \frac{\tau_C s}{\tau_L \tau_C s^2 + \tau_C s + 1} = \frac{1}{R} \hat{g}_R^{(RLC)}(s), \quad (1.14)$$

iz jednačine kola u kompleksnom domenu (1.13). Kvalitativna svojstva impulsnog odziva struje kola zavise od prirode dva pola funkcije prenosa, dobijena kao nule karakterističnog polinoma (imenioca funkcije prenosa), te, ukoliko su polovi kompleksno konjugovani brojevi sa negativnim realnim delom, funkcija prenosa se zapisuje u obliku

$$\hat{g}_R^{(RLC)}(s) = \frac{1}{\tau_L} \frac{s}{\left(s + \frac{1}{2\tau_L}\right)^2 + \Omega^2} = \frac{1}{\tau_L} \left( \frac{s + \frac{1}{2\tau_L}}{\left(s + \frac{1}{2\tau_L}\right)^2 + \Omega^2} - \frac{1}{2\tau_L \Omega} \frac{\Omega}{\left(s + \frac{1}{2\tau_L}\right)^2 + \Omega^2} \right), \quad (1.15)$$

gde je

$$\Omega^2 = \frac{1}{\tau_L \tau_C} - \frac{1}{4\tau_L^2} > 0, \quad (1.16)$$

što, primenom inverzne Laplasove transformacije, daje impulsni odziv struje

$$g_i^{(\text{RLC})}(t) = \frac{1}{R} g_R^{(\text{RLC})}(t), \quad \text{gde je} \quad g_R^{(\text{RLC})}(t) = \frac{1}{\tau_L} e^{-\frac{t}{2\tau_L}} \left( \cos(\Omega t) - \frac{1}{2\tau_L \Omega} \sin(\Omega t) \right), \quad (1.17)$$

koji je harmonijska funkcija sa eksponencijalno opadajućom amplitudom. Ukoliko su polovi funkcije prenosa  $\hat{g}_i^{(\text{RLC})}$  realni i različiti, tada je

$$v^2 = -\Omega^2 = \frac{1}{4\tau_L^2} - \frac{1}{\tau_L \tau_C}, \quad \text{odnosno} \quad v = j\Omega,$$

gde je  $\Omega$  dato izrazom (1.16), te se impulsni odziv struje (1.17) transformiše u

$$g_i^{(\text{RLC})}(t) = \frac{1}{R} g_R^{(\text{RLC})}(t), \quad \text{gde je} \quad g_R^{(\text{RLC})}(t) = \frac{1}{\tau_L} e^{-\frac{t}{2\tau_L}} \left( \text{ch}(vt) - \frac{1}{2\tau_L v} \text{sh}(vt) \right),$$

koji je neoscilatorna, ali moguće nemonotona funkcija vremena, koja teži u nulu za dovoljno veliko vreme. U slučaju da funkcija prenosa  $\hat{g}_i^{(\text{RLC})}$  ima realni dvostruki pol, impulsni odziv je oblika

$$g_i^{(\text{RLC})}(t) = \frac{1}{R} g_R^{(\text{RLC})}(t), \quad \text{gde je} \quad g_R^{(\text{RLC})}(t) = \frac{1}{\tau_L} e^{-\frac{t}{2\tau_L}} \left( 1 - \frac{1}{2\tau_L} t \right),$$

koji je funkcija koja ima minimum i teži u nulu za veliko vreme, a čiji oblik sledi primenom inverzne Laplasove transformacije na funkciju prenosa zapisanu u obliku

$$\hat{g}_R^{(\text{RLC})}(s) = \frac{1}{\tau_L} \left( \frac{1}{s + \frac{1}{2\tau_L}} - \frac{1}{2\tau_L} \frac{1}{\left(s + \frac{1}{2\tau_L}\right)^2} \right),$$

dobijenom iz izraza (1.15) kada je  $\Omega = 0$ , odnosno kada je  $\tau_C = 4\tau_L$  u (1.16).

Izrazi za moduo i argument funkcije prenosa koja odgovara struji *RLC* kola

$$\left| \hat{g}_R^{(\text{RLC})}(\omega) \right|_{\text{dB}} = 20 \log \left| \hat{g}_R^{(\text{RLC})}(\omega) \right| = -10 \log \left( 1 + \left( \frac{1}{\tau_C \omega} - \tau_L \omega \right)^2 \right) \quad \text{i} \quad (1.18)$$

$$\arg \hat{g}_R^{(\text{RLC})}(\omega) = \arctan \left( \frac{1}{\tau_C \omega} - \tau_L \omega \right), \quad (1.19)$$

dobijaju se uvrštavanjem  $s = j\omega$  u izraz za funkciju prenosa (1.14). Moduo funkcije prenosa, odnosno pojačanje, prema izrazu (1.18), je funkcija koja, sa porastom učestalosti, iz negativne beskonačnosti raste do maksimalne vrednosti  $\left| \hat{g}_R^{(\text{RLC})}(\omega_r) \right|_{\text{dB}} = 0$ , ostvarene za  $\omega_r = \frac{1}{\sqrt{\tau_L \tau_C}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ , te sa daljim porastom učestalosti teži ka negativnoj beskonačnosti, što implicira da je *RLC* kolo propusnik opsega. Ovakav oblik frekvencijske karakteristike modula funkcije prenosa je posledica postojanja nule funkcije prenosa u koordinatnom početku, koja obezbeđuje rast pojačanja za  $+20 \frac{\text{dB}}{\text{dec}}$  na svim učestalostima, kao i dva pola, koji na učestalostima višim od svojih unose promenu pojačanja za  $-20 \frac{\text{dB}}{\text{dec}}$ . Sa druge strane, argument funkcije prenosa je, prema izrazu (1.19), monotono opadajuća funkcija, koja asimptotski teži vrednosti  $\frac{\pi}{2}$  za niske učestalosti i prolazeći kroz nulu za  $\omega_r$  sa porastom učestalosti asimptotski teži vrednosti  $-\frac{\pi}{2}$  za visoke učestalosti.

## 1.2 Laplasova transformacija i analitički metodi inverzije

Laplasova transformacija je jedna od najčešće korišćenih integralnih transformacija u inženjerstvu. Posebno je korisna za rešavanje običnih linearnih diferencijalnih jednačina, koje se javljaju pri analizi električnih kola. Laplasova transformacija preslikava original, odnosno datu kauzalnu funkciju  $f(t)$ ,  $t > 0$ , iz vremenskog domena u lik, odnosno u funkciju  $\hat{f}(s)$ ,  $\text{Res} > s_0 > 0$ , u kompleksnom domenu i definisana je relacijom

$$\hat{f}(s) = \mathcal{L}[f(t)](s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt. \quad (1.20)$$

Inverzna Laplasova transformacija, odnosno original  $f$ , određuje se korišćenjem slike  $\hat{f}$  primenom Bromvičovog integrala

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[\hat{f}(s)](t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma_{Br}} \hat{f}(s) e^{st} ds, \quad (1.21)$$

gde je  $\Gamma_{Br}$  prava u kompleksnoj ravni, parametrizovana sa  $s = s_0 + j\rho$ , gde je  $\rho \in (-\infty, \infty)$ . Pored određivanja inverzne Laplasove transformacije korišćenjem definicije (1.21), inverzija se može izvršiti mnogobrojnim analitičkim i numeričkim postupcima. Najčešći razlozi za nalaženje originala alternativnim načinom su potreba za proverom rešenja dobijenog po definiciji, ili u slučajevima kada je određivanje inverzne Laplasove transformacije po definiciji previše kompleksno. Jedan od najčešće korišćenih analitičkih metoda za određivanje inverzne Laplasove transformacije jeste metod konturne integracije, koji će detaljnije biti opisan u nastavku, čemu će prethoditi izlaganje o elementima i teoremama kompleksne analize na kojima se ovaj metod zasniva. Literatura koja se bavi kompleksnom analizom, kao i njenom širokom primenom, veoma je obimna. Teoreme koje slede u nastavku biće date bez suvišnih detalja i dokaza, a preuzete su iz sledeće literature [5].

### Košijeva integralna formula

Ako je funkcija  $f(z)$  kompleksne promenljive  $z$  analitička u jednostruko povezanoj oblasti  $G$ , tada za proizvoljnu zatvorenu konturu  $\Gamma$  unutar oblasti  $G$  važi da je

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 0. \quad (1.22)$$

### Košijeva teorema o reziduumima

Ako je funkcija  $f(z)$  kompleksne promenljive  $z$  u unutrašnjosti i na zatvorenoj pozitivno orijentisanoj konturi  $\Gamma$  analitička, osim u konačno mnogo tačaka  $z_k$ ,  $z_k \in \text{int } \Gamma$ , tada je

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi j \sum_k \text{Res}(f(z), z_k), \quad (1.23)$$

gde je  $\text{Res}(f(z), z_k)$  reziduum funkcije  $f(z)$  izračunat u tački  $z = z_k$ .

Ukoliko je  $z_k$  pol prvog reda funkcije  $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ , tada je  $\text{Res}(f(z), z_k) = \left. \frac{g(z)}{\frac{d}{dz} h(z)} \right|_{z=z_k}$ .

### Princip argumenta

Ukoliko se nezavisna promenljiva  $z$  menja duž zatvorene konture  $\gamma$  u kompleksnoj ravni, tada je ukupan broj nula  $N$  funkcije  $f(z)$  unutar oblasti koja je oivičena konturom  $\gamma$  određen promenom argumenta  $\Delta \arg f(z) = 2\pi N$ , pod pretpostavkom da funkcija  $f$  nema polove u pomenutom domenu.

### Metod konturne integracije

Metod konturne integracije je jedan od analitičkih metoda za određivanje inverzne Laplasove transformacije, a zasniva se na definiciji inverzne Laplasove transformacije. Inverzna Laplasova transformacija funkcije  $\hat{f}$  može se odrediti korišćenjem definicije inverzije (1.21) primenjujući Košijevu integralnu formulu (1.22) ili Košijevu teoremu o reziduumima (1.23), gde se zatvorena pozitivno orijentisana kontura  $\Gamma$  bira tako da kontura  $\Gamma_{Br}$  bude njen deo. Naime, ukoliko unutar zatvorene konture  $\Gamma$  funkcija  $\hat{f}$  nema izolovanih singulariteta, odnosno ukoliko je funkcija  $\hat{f}$  analitička unutar konture  $\Gamma$ , tada je, prema Košijevoj integralnoj formuli (1.22), inverzna Laplasova transformacija data izrazom

$$f(t) = -\frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma - \Gamma_{Br}} \hat{f}(s) e^{st} ds,$$

a ukoliko izolovani singulariteti postoje, tada je, prema Košijevoj teoremi o reziduumima (1.23), inverzna Laplasova transformacija data sa

$$f(t) = -\frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma - \Gamma_{Br}} \hat{f}(s) e^{st} ds + \sum_k \text{Res}(f(z), z_k),$$

gde je integral po  $\Gamma - \Gamma_{Br}$  zbir integrala po svim konturama koje čine konturu  $\Gamma$ , osim konture  $\Gamma_{Br}$ .



### 1.3 Frakcioni račun

Navedene su osnovne definicije i svojstva integrala i izvoda necelog reda, a mnogo više detalja iz oblasti frakcionog računa i njegove veoma široke primene se može naći u bogatoj literaturi posvećenoj ovoj materiji, videti [10, 19, 21, 35, 40, 46].

#### Frakcioni integral

Frakcioni integral reda  $\xi > 0$ , definisan je konvolucijom funkcije  $f$  i jezgra stepenog tipa u obliku

$${}_0I_t^\xi f(t) = \frac{t^{\xi-1}}{\Gamma(\xi)} * f(t) = \frac{1}{\Gamma(\xi)} \int_0^t \frac{f(t')}{(t-t')^{1-\xi}} dt', \quad (1.24)$$

videti [35], gde je sa  $\Gamma$  označena Ojlerova gama funkcija, a  $*$  označava konvoluciju, koja je za kauzalne signale definisana izrazom

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(t')g(t-t')dt'.$$

Ukoliko je red integrala  $\xi$  celobrojan, tada se frakcioni integral svodi na klasični, odnosno na dobro poznatu Košijevu formulu za  $n$ -tostruku integraciju

$${}_0I_t^n f(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} * f(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t \frac{f(t')}{(t-t')^{1-n}} dt', \quad (1.25)$$

gde je u obzir uzeta činjenica da je  $\Gamma$  funkcija za argument  $n$  iz skupa prirodnih brojeva uopštenje faktorijela, takvo da važi  $\Gamma(n) = (n-1)!$ .

Kako je sa  ${}_0I_t^\xi$  označen operator frakcione integracije reda  $\xi$ , notacija  ${}_0I_t$  označava klasičnu jednostruku integraciju, dok frakcioni integral nultog reda konvergira, u slabom smislu, samoj podintegralnoj funkciji.

Slično operatoru klasične višestruke integracije (1.25), operator frakcione integracije (1.24), poseduje svojstvo asocijativnosti, a takode poseduje i svojstvo komutativnosti, odnosno važi

$${}_0I_t^\xi {}_0I_t^\zeta = {}_0I_t^\zeta {}_0I_t^\xi = {}_0I_t^{\xi+\zeta} \quad \text{za } \xi, \zeta > 0. \quad (1.26)$$

Laplasova transformacija frakcionog integrala je data izrazom

$$\mathcal{L} \left[ {}_0I_t^\xi f(t) \right] (s) = \frac{1}{s^\xi} \hat{f}(s). \quad (1.27)$$

Frakcioni integral harmonijske funkcije nije harmonijska funkcija, ali se ponaša kao harmonijska funkcija za dovoljno veliko vreme i dat je izrazom

$${}_0I_t^\xi e^{j(\omega t + \phi)} = \frac{1}{(j\omega)^\xi} e^{j(\omega t + \phi)} = \frac{1}{\omega^\xi} e^{j(\omega t + \phi - \frac{\xi\pi}{2})} \quad \text{kada } t \rightarrow \infty, \quad (1.28)$$

videti [19].

#### Riman-Liuvilov frakcioni izvod

Postoji više vrsta frakcionih izvoda, a za razmatrane probleme je korišćen Riman-Liuvilov frakcioni izvod, koji je definisan izrazom

$${}_0D_t^\xi f(t) = \frac{d}{dt} {}_0I_t^{1-\xi} f(t) = \frac{d}{dt} \left( \frac{t^{-\xi}}{\Gamma(1-\xi)} * f(t) \right), \quad (1.29)$$

ukoliko je red frakcionog izvoda  $\xi \in (0, 1)$ , a ukoliko je red frakcionog izvoda  $n + \xi$ , gde je  $n \in \mathbb{N}_0$ , a  $\xi \in (0, 1)$ , tada je Riman-Liuvilov frakcioni izvod definisan izrazom

$${}_0D_t^{n+\xi} f(t) = \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} {}_0I_t^{1-\xi} f(t) = \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} \left( \frac{t^{-\xi}}{\Gamma(1-\xi)} * f(t) \right).$$

Analogno notaciji korišćenoj za frakcionu integraciju, kako  ${}_0D_t^\xi$  označava operator frakcionog diferenciranja reda  $\xi$ , notacija  ${}_0D_t$  označava klasično jednostruko diferenciranje, odnosno prvi izvod. Riman-Liuvilov frakcioni izvod (1.29) teži prvom izvodu ukoliko red frakcionog izvoda teži jedinici, a ukoliko red frakcionog izvoda teži nuli, tada se Riman-Liuvilov frakcioni izvod funkcije svodi na samu funkciju.

Ukoliko je funkcija  $f$  ograničena u nuli, tada se sukcesivnom primenom Riman-Liuvilovih frakcionih izvoda redova  $\xi$  i  $\zeta$  dobija Riman-Liuvilov frakcioni izvod reda  $\xi + \zeta$ , odnosno važi da je

$${}_0D_t^\xi {}_0D_t^\zeta f(t) = {}_0D_t^{\xi+\zeta} f(t), \quad \text{kada } \xi, \zeta \in (0, 1).$$

Laplasova transformacija Riman-Liuvilovog frakcionog izvoda, datog izrazom (1.29), je

$$\mathcal{L} \left[ {}_0D_t^\xi f(t) \right] (s) = s^\xi \hat{f}(s) - \left[ {}_0I_t^{1-\xi} f(t) \right]_{t=0} = s^\xi \hat{f}(s) \quad (1.30)$$

i važi ukoliko je funkcija  $f$  ograničena u nuli.

Riman-Liuvilov frakcioni izvod harmonijske funkcije nije harmonijska funkcija, ali se ponaša kao harmonijska funkcija za dovoljno veliko vreme i dat je izrazom

$${}_0D_t^\xi e^{j(\omega t + \phi)} = (j\omega)^\xi e^{j(\omega t + \phi)} = \omega^\xi e^{j(\omega t + \phi + \frac{\xi\pi}{2})} \quad \text{kada } t \rightarrow \infty, \quad (1.31)$$

videti [19].



## Glava 2

# Frakciona uopštenja modela električnih elemenata

Standardne konstitutivne relacije kabela i kondenzatora dobro opisuju materijale kod kojih se procesi polarizacije i magnetizacije dešavaju trenutno, odnosno gde nije bitno uzeti u obzir istoriju tih procesa. Ukoliko se istorijski fenomeni ne mogu zanemariti, odnosno ukoliko postoji potreba da se oni uzmu u obzir, tada se klasične konstitutivne relacije mogu uopštiti dodavanjem člana koji uzima u obzir memorijske efekte. Kod klasičnih memorijskih modela, memorijsko jezgro je eksponencijalnog tipa, što implicira memoriju materijala koja vrlo brzo opada sa vremenom, dok je u slučaju memorijskih modela frakcionog tipa proces relaksacije sporiji i odgovara mu memorijska funkcija stepenog tipa i upravo su takvi modeli korišćeni za uopštavanje standardnih konstitutivnih relacija.

### 2.1 Konstitutivne relacije električnih elemenata

Električni elementi napravljeni od materijala kod kojih se procesi polarizacije i magnetizacije ne dešavaju trenutno, već zavise od istorije, mogu se modelirati uopštenjem klasične konstitutivne jednačine dodavanjem člana koji uključuje istoriju fizičkog procesa uz član koji opisuje njegov trenutni doprinos. Ukoliko količina naelektrisanja na oblogama kondenzatora  $q$  ne zavisi samo od trenutne vrednosti napona na kondenzatoru  $u_C$ , već i od njegove istorije, konstitutivna jednačina se može pretpostaviti u obliku

$$q(t) = C u_C(t) + C_\alpha {}_0I_t^{1-\alpha} u_C(t), \quad \alpha \in (0, 1), \quad (2.1)$$

a ukoliko model kondenzatora podrazumeva da se napon  $u_C$  izražava preko trenutne vrednosti količine naelektrisanja  $q$  na njegovim oblogama, kao i istorije količine naelektrisanja, tada se konstitutivna jednačina pretpostavlja u obliku

$$u_C(t) = \frac{1}{C} q(t) + \frac{1}{C_\mu} {}_0I_t^\mu q(t). \quad \mu \in (0, 1). \quad (2.2)$$

U konstitutivnim jednačinama (2.1) i (2.2), operator  ${}_0I_t^\xi$ , definisan relacijom (1.24), označava Riman-Ljuvilov integral necelog reda, koji je u opštem slučaju reda  $\xi > 0$ , a parametri  $C[\text{F}]$ ,  $C_\alpha[\frac{\text{F}}{\text{s}^{1-\alpha}}]$  i  $C_\mu[\text{F s}^\mu]$  predstavljaju klasične i frakcione kapacitivnosti. Iako navedeni modeli imaju isti matematički oblik, na osnovu termodinamičke analize sprovedene u sledećem odeljku, utvrđeno je da sa aspekta proizvodnje i potrošnje energije, odnosno elektroenergetskog bilansa, oni opisuju elemente sa različitim svojstvima, te konstitutivni model (2.1) opisuje pasivni (disipativni) kondenzator, dok model (2.2) predstavlja njegov aktivni (generativni) pandan. Frakcioni električni elementi, modelirani relacijama (2.1) i (2.2), mogu se posmatrati kao paralelna veza klasičnog i pasivnog frakcionog kondenzatora, odnosno redna veza klasičnog i aktivnog frakcionog kondenzatora, respektivno.

Konstitutivne relacije pasivnog i aktivnog kondenzatora (2.1) i (2.2) moguće je zapisati na ekvivalentan način, izražavanjem napona  $u_C$  u funkciji količine naelektrisanja  $q$  u slučaju pasivnog kondenzatora, odnosno izražavanjem količine naelektrisanja  $q$  preko napona  $u_C$  u slučaju aktivnog kondenzatora

$$u_C(t) = \frac{1}{C} q(t) + \frac{1}{C} \dot{e}_{1-\alpha, \frac{C}{C_\alpha}}(t) * q(t), \quad (2.3)$$

$$q(t) = C u_C(t) + C \dot{e}_{\mu, \frac{C}{C_\mu}}(t) * u_C(t), \quad (2.4)$$

pri čemu  $\dot{e}_{1-\alpha, \frac{C_\alpha}{C}}$  i  $\dot{e}_{\mu, \frac{C}{C_\mu}}$  predstavljaju prve vremenske izvode jednoparametarske Mittag-Lefflerove funkcije, definisane izrazima

$$e_{\eta, \lambda}(t) = E_\eta(-\lambda t^\eta), \quad \text{gde } E_\eta(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\eta k + 1)},$$

odnosno izražavajući ih u obliku analognom konstitutivnim jednačinama (2.2) i (2.1), respektivno, pri čemu memorijsko jezgro više nije stepenog tipa već je oblika Mittag-Lefflerove funkcije, što dodatno naglašava istorijsku zavisnost između ovih fizičkih veličina. Konstitutivna jednačina (2.3), kao ekvivalentni oblik jednačine pasivnog kondenzatora (2.1), može sa aspekta topologije posmatrati kao redna veza klasičnog i uopštenog kondenzatora, dok se konstitutivna jednačina (2.4), kao ekvivalentni oblik konstitutivne jednačine aktivnog kondenzatora (2.2), može se topološki posmatrati kao paralelna veza klasičnog i uopštenog kondenzatora.

Ukoliko se žele uzeti u obzir memorijski efekti magnetskih materijala korišćenih u kalemu, tada se mogu koristiti jednačine istog matematičkog oblika kao i u slučaju frakcionog kondenzatora. Naime, ukoliko se fluks vektora magnetske indukcije  $\phi$  izrazi u zavisnosti od istorije struje kalema  $i_L$ , tada se konstitutivna relacija uzima u obliku

$$\phi(t) = L i_L(t) + L_\beta {}_0I_t^{1-\beta} i_L(t), \quad \beta \in (0, 1), \quad (2.5)$$

a ukoliko se struja kroz kalem  $i_L$  izrazi u zavisnosti od trenutne vrednosti i istorije magnetskog fluksa  $\phi$ , dobija se konstitutivna relacija oblika

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \phi(t) + \frac{1}{L_\nu} {}_0I_t^\nu \phi(t), \quad \nu \in (0, 1), \quad (2.6)$$

gde  $L[\text{H}]$ ,  $L_\beta[\frac{\text{H}}{\text{s}^{1-\beta}}]$  i  $L_\nu[\text{H s}^\nu]$  predstavljaju klasične i frakcione induktivnosti. Na osnovu termodinamičke analize, sprovedene u odeljku 2.2, odnosno sa aspekta proizvodnje i potrošnje energije na elementu, utvrđeno je da konstitutivni model (2.5) opisuje pasivni kalem, dok model (2.6) predstavlja aktivni kalem. Električni element modeliran relacijom (2.5) predstavlja rednu vezu klasičnog i pasivnog frakcionog kalema, dok se model (2.6) može posmatrati kao paralelna veza klasičnog i aktivnog frakcionog kalema.

Slično modelima frakcionih kondenzatora, konstitutivnu relaciju pasivnog kalema (2.5) moguće je zapisati u ekvivalentnom obliku

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \phi(t) + \frac{1}{L} \dot{e}_{1-\beta, \frac{L_\beta}{L}}(t) * \phi(t), \quad (2.7)$$

izražavanjem struje kalema  $i_L$  preko magnetskog fluksa  $\phi$ , dok se u slučaju konstitutivne relacije aktivnog kalema (2.6), fluks  $\phi$  može izraziti preko istorije struje  $i_L$  u obliku

$$\phi(t) = L i_L(t) + L \dot{e}_{\nu, \frac{L_\nu}{L}}(t) * i_L(t), \quad (2.8)$$

kao što je to učinjeno u relacijama (2.6) i (2.5), međutim sa promenjenim memorijskim jezgrom. Relacija (2.8), koja je po obliku ekvivalentna jednačini (2.6), predstavlja rednu vezu klasičnog i uopštenog kalema, dok jednačina (2.7), koja je po obliku ekvivalentna jednačini (2.5) opisuje paralelnu vezu klasičnog i uopštenog kalema. Dakle, uz odabir odgovarajućih memorijskih jezgara, različita topološka uopštenja električnih elemenata mogu opisivati iste fizičke procese.

Konstitutivna jednačina (2.1), odnosno njen pandan (2.3), kao i model (2.5), odnosno njegov pandan (2.7), su modeli pasivnog kondenzatora i kalema, dok su konstitutivne jednačine (2.2) i (2.4), odnosno (2.6) i (2.8), modeli aktivnog kondenzatora i kalema.

U cilju formulisanja modela rednih  $RC$ ,  $RL$  i  $RLC$  kola, koja će se izučavati u nastavku, koristiće se konstitutivne jednačine elemenata izražene preko napona i struje kroz element, te konstitutivne jednačine pasivnog kondenzatora i pasivnog kalema, koji su modelirani relacijama (2.1) i (2.5), respektivno glase

$$i(t) = C \frac{d}{dt} u_C(t) + C_\alpha {}_0D_t^\alpha u_C(t), \quad (2.9)$$

$$u_L(t) = L \frac{d}{dt} i(t) + L_\beta {}_0D_t^\beta i(t), \quad (2.10)$$

gde  ${}_0D_t^\xi$ ,  $\xi \in (0, 1)$ , označava operator Riman-Ljuvilovog frakcionog diferenciranja, dat relacijom (1.29), a dobijene su diferenciranjem relacija (2.1) i (2.5) i upotrebom definicije struje  $i(t) = \frac{d}{dt} q(t)$  u slučaju

relacije (2.9), odnosno Faradejevog zakona elektromagnetske indukcije  $u_L(t) = \frac{d}{dt}\phi(t)$  u slučaju jednačine (2.10).

Konstitutivni model pasivnog kondenzatora (2.9) u graničnim slučajevima reda frakcionog izvoda svodi se na klasične modele, te se u slučaju  $\alpha = 0$  dobija model klasičnog kondenzatora paralelno vezanog sa otpornikom provodnosti  $G \equiv C_\alpha$  [S]

$$i(t) = C \frac{d}{dt} u_C(t) + G u_C(t), \quad (2.11)$$

koji takođe odgovara pasivnom elementu, dok se za  $\alpha = 1$  dobija

$$i(t) = C_{cl} \frac{d}{dt} u_C(t), \quad (2.12)$$

što opisuje klasični kondenzator kapacitivnosti  $C_{cl} = C + C_\alpha$  [F], koji niti rasipa niti generiše energiju. Dakle, element opisan relacijom (2.9) pokazuje svojstva klasičnog kondenzatora u paralelnoj vezi sa frakcionim elementom, čija svojstva interpoliraju između svojstava otpornika i klasičnog kondenzatora.

Slično, konstitutivna relacija pasivnog kalema (2.10) se u graničnim slučajevima kada je red frakcionog izvoda  $\beta = 0$ , odnosno kada je  $\beta = 1$ , transformiše u

$$u_L(t) = L \frac{d}{dt} i(t) + R i(t), \quad \text{odnosno u} \quad u_L(t) = L_{cl} \frac{d}{dt} i(t),$$

što odgovara rednoj vezi klasičnog kalema i otpornika otpornosti  $R \equiv L_\beta$  [ $\Omega$ ], odnosno klasičnom kalemu induktivnosti  $L_{cl} = L + L_\beta$  [H]. Dakle, element opisan relacijom (2.10) pokazuje svojstva klasičnog kalema redno vezanog sa frakcionim elementom čija svojstva interpoliraju između svojstava otpornika i klasičnog kalema.

Konstitutivne jednačine pasivnog kondenzatora i kalema u kompleksnom domenu

$$\hat{i}(s) = (C s + C_\alpha s^\alpha) \hat{u}_C(s), \quad (2.13)$$

$$\hat{u}_L(s) = (L s + L_\beta s^\beta) \hat{i}(s), \quad (2.14)$$

dobijene su primenom Laplasove transformacije na konstitutivne jednačine u vremenskom domenu (2.9) i (2.10), korišćenjem Laplasove transformacije Riman-Ljuvilovog frakcionog izvoda, date relacijom (1.30), uzimajući u obzir nulte početne uslove. Na osnovu konstitutivnih jednačina pasivnog kondenzatora i kalema (2.13) i (2.14), dobijaju se izrazi za impedansu disipativnog kondenzatora i impedansu pasivnog kalema u kompleksnom domenu

$$\hat{Z}_C^{(d)}(s) = \frac{\hat{u}_C(s)}{\hat{i}(s)} = \frac{1}{C s + C_\alpha s^\alpha}, \quad (2.15)$$

$$\hat{Z}_L^{(d)}(s) = \frac{\hat{u}_L(s)}{\hat{i}(s)} = L s + L_\beta s^\beta. \quad (2.16)$$

Ukoliko se električni elementi posmatraju u kvazistacionarnom režimu, odnosno ukoliko se struja i odgovarajući naponi pretpostave u obliku harmonijskih funkcija

$$\underline{i}(t) = i_0 e^{j(\omega t + \phi_i)}, \quad \underline{u}_C(t) = u_{C0} e^{j(\omega t + \phi_C)}, \quad \text{ i } \quad \underline{u}_L(t) = u_{L0} e^{j(\omega t + \phi_L)}, \quad (2.17)$$

gde su  $i_0$ ,  $u_{C0}$  i  $u_{L0}$  amplitude, a  $\phi_i$ ,  $\phi_C$  i  $\phi_L$  faze, tada se uvrštavanjem izraza (2.17) za struje i napone u konstitutivne jednačine pasivnih elemenata u vremenskom domenu (2.9) i (2.10) i korišćenjem asimptotike Riman-Ljuvilovog frakcionog izvoda za veliko vreme (1.31) dobijaju izrazi za admitansu pasivnog kondenzatora i impedansu pasivnog kalema u obliku

$$Y_C^{(d)}(\omega) = \frac{\underline{i}(t)}{\underline{u}_C(t)} = C \omega e^{j\frac{\pi}{2}} + C_\alpha \omega^\alpha e^{j\frac{\alpha\pi}{2}}, \quad (2.18)$$

$$Z_L^{(d)}(\omega) = \frac{\underline{u}_L(t)}{\underline{i}(t)} = L \omega e^{j\frac{\pi}{2}} + L_\beta \omega^\beta e^{j\frac{\beta\pi}{2}}, \quad (2.19)$$

tako da su odgovarajuće impedanse

$$Z_C^{(d)}(\omega) = \frac{1}{Y_C^{(d)}(\omega)} = \frac{C_\alpha \omega^\alpha \cos \frac{\alpha\pi}{2} - j (C\omega + C_\alpha \omega^\alpha \sin \frac{\alpha\pi}{2})}{C^2 \omega^2 + 2C C_\alpha \omega^{1+\alpha} \sin \frac{\alpha\pi}{2} + C_\alpha^2 \omega^{2\alpha}}, \quad (2.20)$$

$$Z_L^{(d)}(\omega) = L_\beta \omega^\beta \cos \frac{\beta\pi}{2} + j \left( L\omega + L_\beta \omega^\beta \sin \frac{\beta\pi}{2} \right). \quad (2.21)$$

Admitansa pasivnog kondenzatora (2.18) i impedansa pasivnog kalem (2.19) mogu se dobiti iz konstitutivnih jednačina pasivnog kondenzatora i kalem u kompleksnom domenu (2.13) i (2.14) uvrštavanjem  $s = j\omega$ .

Konstitutivne jednačine aktivnih elemenata (2.2) za aktivni kondenzator i (2.6) za aktivni kalem, izražene preko napona i struje, dobijaju oblike

$$u_C(t) = \frac{1}{C} {}_0I_t i(t) + \frac{1}{C_\mu} {}_0I_t^{1+\mu} i(t), \quad (2.22)$$

$$i(t) = \frac{1}{L} {}_0I_t u_L(t) + \frac{1}{L_\nu} {}_0I_t^{1+\nu} u_L(t), \quad (2.23)$$

upotrebom izraza  $q(t) = \int_0^t i(t') dt' = {}_0I_t^1 i(t)$  u slučaju modela (2.22), odnosno izraza  $\phi(t) = \int_0^t u_L(t') dt' = {}_0I_t^1 u_L(t)$  u slučaju jednačine (2.23), pod uslovom da je  $q(0) = 0$  i  $\phi(0) = 0$ , kao i korišćenjem svojstva polugrupe za frakcione integrale (1.26).

Konstitutivni model aktivnog kondenzatora (2.2) u graničnom slučaju kada je red integracije  $\mu = 0$ , svodi se na

$$u_C(t) = \frac{1}{C_{cl}} q(t), \quad (2.24)$$

što opisuje klasični kondenzator kapacitivnosti  $C_{cl} = \left( \frac{1}{C} + \frac{1}{C_\mu} \right)^{-1}$  [F], dok se u slučaju  $\mu = 1$  konstitutivni model (2.2) svodi na model sa uniformnom memorijom

$$u_C(t) = \frac{1}{C} q(t) + \frac{1}{C_\mu} \int_0^t q(t') dt', \quad (2.25)$$

što odgovara rednoj vezi klasičnog kondenzatora i elementa sa uniformnom memorijom. Dakle, element opisan relacijom (2.22) pokazuje svojstva klasičnog kondenzatora redno vezanog sa frakcionim elementom čija svojstva interpoliraju između svojstava klasičnog kondenzatora i elementa sa uniformnom memorijom. Model aktivnog kalem (2.6), u graničnim slučajevima kada je red frakcionog integrala  $\nu = 0$ , odnosno kada je  $\nu = 1$ , svodi se na konstitutivne jednačine

$$i_L(t) = \frac{1}{L_{cl}} \phi(t) \quad \text{i} \quad i_L(t) = \frac{1}{L} \phi(t) + \frac{1}{L_\nu} \int_0^t \phi(t') dt', \quad (2.26)$$

koje odgovaraju modelu klasičnog kalem induktivnosti  $L_{cl} = \frac{LL_\nu}{L+L_\nu}$  [H], odnosno modelu induktivnog elementa koji se može posmatrati kao paralelna veza klasičnog kalem i elementa sa uniformnom memorijom. Dakle, element opisan relacijom (2.23) pokazuje svojstva klasičnog kalem paralelno vezanog sa frakcionim elementom čija svojstva interpoliraju između svojstava klasičnog kalem i elementa sa uniformnom memorijom.

Analogno slučaju pasivnih elemenata, primenom Laplasove transformacije na konstitutivnu jednačinu (2.22), koja odgovara aktivnom kondenzatoru, kao i na model (2.23), koji odgovara aktivnom kalem, dobija se

$$\hat{u}_C(s) = \left( \frac{1}{C s} + \frac{1}{C_\mu s^{1+\mu}} \right) \hat{i}(s), \quad (2.27)$$

$$\hat{i}(s) = \left( \frac{1}{L s} + \frac{1}{L_\nu s^{1+\nu}} \right) \hat{u}_L(s), \quad (2.28)$$

pri čemu je korišćena Laplasova transformacija frakcionog integrala (1.27). Korišćenjem konstitutivnih jednačina aktivnog kondenzatora i kalem u kompleksnom domenu (2.27) i (2.28), dobija se impedansa generativnog kondenzatora i impedansa generativnog kalem u kompleksnom domenu u obliku

$$\hat{Z}_C^{(g)}(s) = \frac{\hat{u}_C(s)}{\hat{i}(s)} = \frac{1}{C s} + \frac{1}{C_\mu s^{1+\mu}}, \quad (2.29)$$

$$\hat{Z}_L^{(g)}(s) = \frac{\hat{u}_L(s)}{\hat{i}(s)} = \frac{1}{\frac{1}{L s} + \frac{1}{L_\nu s^{1+\nu}}} = \frac{L L_\nu s^{1+\nu}}{L_\nu s^\nu + L}. \quad (2.30)$$

Ponašanje aktivnih elemenata u kvazistacionarnom režimu se određuje analognim postupkom kao i u slučaju pasivnih elemenata: uvrštavanjem struje i odgovarajućih napona u obliku harmonijskih funkcija (2.17) u konstitutivne jednačine aktivnih elemenata u vremenskom domenu (2.22) i (2.23) i korišćenjem asimptotike frakcionog integrala za veliko vreme (1.28), iz čega slede izrazi za impedansu aktivnog kondenzatora i admitansu aktivnog kalema

$$\begin{aligned} Z_C^{(g)}(\omega) &= \frac{\underline{u}_C(t)}{\underline{i}(t)} = \frac{1}{C} \frac{1}{\omega e^{j\frac{\pi}{2}}} + \frac{1}{C_\mu} \frac{1}{\omega^{1+\mu} e^{j\frac{(1+\mu)\pi}{2}}}, \\ Y_L^{(g)}(\omega) &= \frac{\underline{i}(t)}{\underline{u}_L(t)} = \frac{1}{L} \frac{1}{\omega e^{j\frac{\pi}{2}}} + \frac{1}{L_\nu} \frac{1}{\omega^{1+\nu} e^{j\frac{(1+\nu)\pi}{2}}}, \end{aligned}$$

dok su odgovarajuće impedanse date izrazima

$$Z_C^{(g)}(\omega) = -\frac{\sin \frac{\mu\pi}{2}}{C_\mu \omega^{1+\mu}} - j \left( \frac{1}{C\omega} + \frac{\cos \frac{\mu\pi}{2}}{C_\mu \omega^{1+\mu}} \right), \quad (2.31)$$

$$Z_C^{(g)}(\omega) = \frac{1}{Y_L^{(g)}(\omega)} = -LL_\nu \omega^{1+\nu} \frac{L \sin \frac{\nu\pi}{2} - j (L_\nu \omega^\nu + L \cos \frac{\nu\pi}{2})}{L_\nu^2 \omega^{2\nu} + 2LL_\nu \omega^\nu \cos \frac{\nu\pi}{2} + L^2}. \quad (2.32)$$

Analiza prelaznog režima uopštenih električnih kola sa memorijskim svojstvima, koja su modelirana frakcionim računom, sprovedena je u [20, 22], razmatranjem klasičnih  $RLC$  i  $RC$  kola i uopštenjem odgovarajućih jednačina, zamenom celobrojnih vremenskih izvoda frakcionim. Termodinamička analiza, sprovedena u prostoperiodičnom režimu rada elementa u [23, 24], implicira da uopšteni modeli elemenata, pored kapacitivnog i induktivnog karaktera, karakterističnog za klasične elemente, uzimaju u obzir kako potrošnju tako i proizvodnju električne energije i zbog toga se uopštenje promenom konstitutivnih relacija električnih elemenata, čini fizički smislenijim, naročito ukoliko je posledica konstitutivnih modela koji opisuju interakciju elektromagnetnog polja i materijalne sredine, kao što je to učinjeno u [42, 60, 61]. Različite definicije snage za kola koja sadrže frakciono uopštene elemente razmatrane su u [65], gde su predložene definicije za prividnu, aktivnu, reaktivnu i rasipnu snagu frakcionih elemenata. Kapacitivnost i induktivnost necelog reda se takođe razmatraju u [37, 56, 62]. Valjanost frakcionog uopštenja na nivou električnih elemenata leži u mogućnosti adekvatnog opisa fizičkih procesa, kao što je razmatrano u [69]. Analiza frakcionih sistema sprovedena je u [66, 67], gde su dati praktični primeri realizacije takvih sistema i njihove dinamičke osobine.

Praktični primeri primene frakcionih modela električnih elemenata su superkondenzatori, ultrakondenzatori i elektrohemijski dvoslojni kondenzatori (EDLC) razmatrani u [2, 4, 18, 30, 34, 38, 39, 49]. Superkondenzatori i ultrakondenzatori modelirani su jednačinama, počevši od linearnih konstitutivnih jednačina dobijenih kombinovanjem otpornika i frakcionih kondenzatora, kao u [15, 47, 48], pa sve do nelinearnih modela predloženih u [18]. Prisustvo istorijskih fenomena u elektrohemijskim dvoslojnim kondenzatorima eksperimentalno je ispitivano u [4]. Primena frakciono uopštenih elemenata u elektroenergetici ilustrovana je u [17]. U [31] se razmatraju frakcioni modeli kondenzatora koji imaju red izvoda veći od jedan, zajedno sa njihovim ponašanjem kao elementima kola. Frakcioni elementi mogu se proizvesti sa željenim karakteristikama, kao što je prikazano u [32, 36, 41], dok je u [7, 8] prikazana njihova realizacija korišćenjem elementa konstantne faze. Frakcioni modeli kalema i kondenzatora se takođe koriste za preciznije modeliranje složene električne mreže, kao što je urađeno u [55, 71], dok su u [11, 12, 13, 14] frakcioni modeli primenjeni na modeliranje vodova, odnosno kola sa raspodeljenim parametrima, gde je analiziran tranzijentni režim električnog voda, kao i njegove frekvencijske karakteristike.

Pregled karakteristika frakcionih elemenata, zajedno sa njihovim različitim realizacijama i njihovim primenama u modeliranju različitih pojava dati su u [57], dok je pregled primene frakcionog računa u modeliranju svojstava superkondenzatora predstavljen u [3]. Sveobuhvatni materijal u vezi sa modeliranjem klasičnih i frakcionih sistema, prostiranja signala i kola necelog reda nalazi se u [44, 45, 70].

## 2.2 Energetski bilans elemenata u kvazistacionarnom režimu

Termodinamičke osobine uopštenih električnih elemenata: pasivnog kondenzatora i pasivnog kalema, modeliranih konstitutivnim jednačinama (2.1) i (2.5), kao i aktivnog kondenzatora i aktivnog kalema, modeliranih konstitutivnim jednačinama (2.2) i (2.6), analiziraju se razmatrajući kvazistacionarni režim datog elementa, tako što se napon na elementu pretpostavi u obliku harmonijske funkcije

$$\underline{u}(t) = u_0 e^{j\omega t}, \quad (2.33)$$



amplitude  $u_0$  i ugaone učestalosti  $\omega$ , što, usled linearnosti konstitutivnih jednačina, implicira da je i struja prostoperiodična funkcija oblika

$$\underline{i}(t) = i_0 e^{j(\omega t + \phi_i)}, \quad (2.34)$$

amplitude  $i_0$ , iste učestalosti kao i napon (2.33), ali fazno pomerena za ugao  $\phi_i$  u odnosu na napon.

Veličine koje imaju fizičko značenje u (2.33) i (2.34) su trenutna vrednost napona i trenutna vrednost struje

$$u = \operatorname{Re} \underline{u} \quad i = \operatorname{Re} \underline{i},$$

respektivno, te se električna energija na uopštenom elementu tokom periode  $T$ , data izrazom

$$W = \int_{nT}^{(n+1)T} u(t) i(t) dt = u_0 i_0 \int_{nT}^{(n+1)T} \cos(\omega t) \cos(\omega t + \phi_i) dt = \frac{1}{2} u_0 i_0 T \cos \phi_i$$

disipira ukoliko je  $\cos \phi_i > 0$ , a generiše ako je  $\cos \phi_i < 0$ . Prema tome, element disipira energiju, tj. smatra se pasivnim, ako se, pretpostavljajući kvazistacionarni režim rada elementa, odnosno pretpostavljajući napon i struju u obliku (2.33) i (2.34) u njegovoj konstitutivnoj jednačini, za sve učestalosti  $\omega$  dobija  $\cos \phi_i > 0$ , odnosno element generiše energiju, tj. smatra se aktivnim, ako se, pretpostavljajući kvazistacionarni režim rada elementa, odnosno pretpostavljajući napon i struju u obliku (2.33) i (2.34) u njegovoj konstitutivnoj jednačini, za sve učestalosti  $\omega$  dobija  $\cos \phi_i < 0$ .

Umesto uvrštavanja izraza (2.33) i (2.34) za prostoperiodični oblik napona i struje u konstitutivnu jednačinu elementa, izrazi za  $\cos \phi_i$  i  $\sin \phi_i$  biće izvedeni korišćenjem impedanse elementa  $Z$  i Omovog zakona

$$\underline{u}(t) = Z \underline{i}(t),$$

na osnovu koga se, uz pomoć (2.33) i (2.34), dobija da je

$$Z = \frac{u_0}{i_0} e^{-j\phi_i}, \quad \text{odakle sledi da je} \quad \cos \phi_i = \frac{\operatorname{Re} Z}{|Z|} \quad \text{i} \quad \sin \phi_i = -\frac{\operatorname{Im} Z}{|Z|}.$$

U slučaju pasivnog kondenzatora, iz izraza za impedansu (2.20) se dobija

$$\sin \phi_i(\omega) = \left| Z_C^{(d)}(\omega) \right| \left( C\omega + C_\alpha \omega^\alpha \sin \frac{\alpha\pi}{2} \right) > 0 \quad \text{i} \quad \cos \phi_i(\omega) = \left| Z_C^{(d)}(\omega) \right| C_\alpha \omega^\alpha \cos \frac{\alpha\pi}{2} > 0,$$

dok iz izraza za impedansu pasivnog kalema (2.21) sledi

$$\sin \phi_i(\omega) = -\frac{1}{\left| Z_L^{(d)}(\omega) \right|} \left( L\omega + L_\beta \omega^\beta \sin \frac{\beta\pi}{2} \right) < 0 \quad \text{i} \quad \cos \phi_i(\omega) = \frac{1}{\left| Z_L^{(d)}(\omega) \right|} L_\beta \omega^\beta \cos \frac{\beta\pi}{2} > 0.$$

Sa druge strane, u slučaju aktivnog kondenzatora, iz izraza za impedansu (2.31), nalazi se

$$\sin \phi_i(\omega) = \frac{1}{\left| Z_C^{(g)}(\omega) \right|} \left( \frac{1}{C\omega} + \frac{1}{C_\mu \omega^{1+\mu}} \cos \frac{\mu\pi}{2} \right) > 0 \quad \text{i} \quad \cos \phi_i(\omega) = -\frac{1}{\left| Z_C^{(g)}(\omega) \right|} \frac{1}{C_\mu \omega^{1+\mu}} \sin \frac{\mu\pi}{2} < 0,$$

dok za aktivni kalem izraz za impedansu (2.32) daje

$$\sin \phi_i(\omega) = -\left| Z_L^{(g)}(\omega) \right| \left( \frac{1}{L\omega} + \frac{1}{L_\nu \omega^{1+\nu}} \cos \frac{\nu\pi}{2} \right) < 0 \quad \text{i} \quad \cos \phi_i(\omega) = -\left| Z_L^{(g)}(\omega) \right| \frac{1}{L_\nu \omega^{1+\nu}} \sin \frac{\nu\pi}{2} < 0.$$

Dakle, i kondenzator i kalem, modelirani jednačinama (2.1) i (2.5), rasipaju energiju i stoga se smatraju pasivnim elementima, budući da je  $\cos \phi_i(\omega) > 0$  za sve učestalosti  $\omega$ , dok i kondenzator i kalem, modelirani korišćenjem (2.2) i (2.6), generišu energiju i stoga se smatraju aktivnim elementima, s obzirom da je  $\cos \phi_i(\omega) < 0$  za svako  $\omega$ . Sa druge strane, znak  $\sin \phi_i$  govori o tome da li element ima induktivni ili kapacitivni karakter, jer u slučaju kalema za sve učestalosti  $\omega$  važi da je  $\sin \phi_i(\omega) < 0$ , što implicira da struja fazno kasni za naponom, dok u slučaju kondenzatora za sve učestalosti  $\omega$  važi da je  $\sin \phi_i(\omega) > 0$ , što implicira da struja fazno prednjači u odnosu na napon.

Konstitutivni model aktivnog kondenzatora u graničnom slučaju kada je red integracije  $\mu = 1$ , dat izrazom (2.25) u kome je naelektrisanje zapisano u obliku  $q(t) = \int_0^t i(t') dt'$  uz pretpostavku  $q(0) = 0$ , postaje

$$u_C(t) = \frac{1}{C} {}_0I_t^1 i(t) + \frac{1}{C_\mu} {}_0I_t^2 i(t)$$

i opisuje kapacitivni element koji generiše energiju, jer se u kvazistacionarnom stanju, tj. kada su napon i struja prostoperiodične funkcije oblika (2.33) i (2.34), dobija

$$\sin \phi_i(\omega) = \frac{i_0}{u_0} \frac{1}{C \omega} > 0 \quad \text{i} \quad \cos \phi_i(\omega) = -\frac{i_0}{u_0} \frac{1}{C_\mu \omega^2} < 0.$$

Analogno, u slučaju aktivnog kalema kada je red integracije  $\nu = 1$ , uz pretpostavku da su napon i struja prostoperiodične funkcije oblika (2.33) i (2.34), iz modela (2.26)<sub>2</sub>, uz korišćenje  $\phi(t) = \int_0^t u_L(t') dt'$  i  $\phi(0) = 0$ , dobija se

$$\sin \phi_i(\omega) = -\frac{u_0}{i_0} \frac{1}{L \omega} < 0 \quad \text{i} \quad \cos \phi_i(\omega) = -\frac{u_0}{i_0} \frac{1}{L_\nu \omega^2} < 0,$$

na osnovu čega se zaključuje da je u pitanju generativni element induktivnog karaktera.



## Glava 3

# *RC* i *RL* kola sa frakcionim elementima

Konstitutivnim jednačinama pasivnog ili aktivnog kalema i kondenzatora modelirani su odgovarajući elementi u *RC* i *RL* kolima, te se korišćenjem konstitutivnih modela elemenata, zajedno sa drugim Kirhofovom i Omovim zakonom, dobijaju obične frakcione diferencijalne jednačine u vremenskom domenu, koje opisuju prelazne procese u kolu. Jednačine *RC* i *RL* kola sa frakcionim elementima su rešene, te su njihova rešenja kvalitativno analizirana i korišćena kako bi se dobili ilustrativni numerički primeri. Ponašanje frakcionih *RC* i *RL* kola analizirano je i u kvazistacionarnom režimu, što je iskorišćeno za analizu njihovog elektroenergetskog bilansa, kao i za analizu frekvencijskih karakteristika modula i argumenta funkcija prenosa.

### 3.1 Formulacija modela frakcionih *RC* i *RL* kola

#### 3.1.1 Model frakcionog *RC* kola

Ukoliko se *RC* kolo pobudi elektromotornom silom  $\mathcal{E}$ , njegovo ponašanje u tranzijentnom režimu određeno je drugim Kirhofovom zakonom, koji kombinovan sa Omovim zakonom glasi

$$\mathcal{E}(t) = R i(t) + u_C(t), \quad (3.1)$$

budući da se kolo sastoji od otpornika otpornosti  $R$  vezanog redno ili sa pasivnim kondenzatorom modeliranim jednačinom (2.9), ili sa aktivnim kondenzatorom modeliranim jednačinom (2.22), što je prikazano na slikama 3.1 i 3.2. Primenom Laplasove transformacije, definisane relacijom (1.20), na drugi Kirhofov zakon u vremenskom domenu (3.1), dobija se

$$\hat{\mathcal{E}}(s) = R \hat{i}(s) + \hat{u}_C(s),$$

odnosno

$$\hat{\mathcal{E}}(s) = \left( R + \hat{Z}_C(s) \right) \hat{i}(s), \quad (3.2)$$

izražavanjem napona na kondenzatoru  $\hat{u}_C$  korišćenjem kompleksne impedanse kondenzatora  $\hat{Z}_C$ , te je izrazom

$$\hat{g}_i(s) = \frac{\hat{i}(s)}{\hat{\mathcal{E}}(s)} = \frac{1}{R + \hat{Z}_C(s)}, \quad (3.3)$$

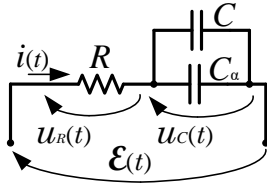
definisana funkcija prenosa kao količnik Laplasovih transformacija struje i elektromotorne sile. Model *RC* kola u vremenskom domenu se dobija primenom inverzne Laplasove transformacije na jednačinu (3.2), odnosno na njoj ekvivalentnu jednačinu (3.3).

U slučaju disipativnog *RC* kola, prikazanog na slici 3.1, korišćenjem izraza za kompleksnu impedansu pasivnog kondenzatora (2.15), za funkciju prenosa koja odgovara struji se, iz relacije (3.3), dobija

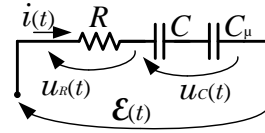
$$\hat{g}_i^{(RC-d)}(s) = \frac{\hat{i}(s)}{\hat{\mathcal{E}}(s)} = \frac{1}{R + \hat{Z}_C^{(d)}(s)} = \frac{1}{R \tau_C s + \tau_\alpha s^\alpha + 1} = \frac{1}{R} \left( 1 - \hat{g}_C^{(d)}(s) \right), \quad (3.4)$$

gde je

$$\hat{g}_C^{(d)}(s) = \frac{1}{\tau_C s + \tau_\alpha s^\alpha + 1}, \quad (3.5)$$



Slika 3.1: Šema disipativnog RC kola.



Slika 3.2: Šema generativnog RC kola.

odakle sledi model disipativnog RC kola u kompleksnom domenu

$$R(\tau_C s + \tau_\alpha s^\alpha + 1)\hat{i}(s) = (\tau_C s + \tau_\alpha s^\alpha)\hat{\mathcal{E}}(s), \quad (3.6)$$

pri čemu je  $\tau_C = RC$  [s] klasična, dok je  $\tau_\alpha = RC_\alpha$  [s $^\alpha$ ] frakciona vremenska konstanta. Primenom inverzne Laplasove transformacije na jednačinu (3.6), dobija se jednačina disipativnog RC kola u vremenskom domenu

$$R\left(\tau_C \frac{d}{dt} + \tau_\alpha {}_0D_t^\alpha + 1\right)i(t) = \left(\tau_C \frac{d}{dt} + \tau_\alpha {}_0D_t^\alpha\right)\mathcal{E}(t), \quad (3.7)$$

čije je rešenje tranzijentni odziv struje kola na pobudu zadatu u vidu elektromotorne sile. Analogno, uvrštavanjem izraza za kompleksnu impedansu aktivnog kondenzatora (2.29) u izraz za funkciju prenosa (3.3), dobija se funkcija prenosa koja odgovara struji generativnog RC kola, prikazanog na slici 3.2, u obliku

$$\hat{g}_i^{(RC-g)}(s) = \frac{\hat{i}(s)}{\hat{\mathcal{E}}(s)} = \frac{1}{R + \hat{Z}_C^{(g)}(s)} = \frac{1}{R} \frac{\tau_\mu s^{1+\mu}}{\tau_\mu s^{1+\mu} + \frac{\tau_\mu}{\tau_C} s^\mu + 1} = \frac{1}{R} \left(1 - \hat{g}_C^{(g)}(s)\right), \quad (3.8)$$

gde je

$$\hat{g}_C^{(g)}(s) = \frac{\frac{\tau_\mu}{\tau_C} s^\mu + 1}{\tau_\mu s^{1+\mu} + \frac{\tau_\mu}{\tau_C} s^\mu + 1},$$

dok je  $\tau_\mu = RC_\mu$  [s $^{1+\mu}$ ] frakciona vremenska konstanta. Primenom inverzne Laplasove transformacije na jednačinu generativnog RC kola u kompleksnom domenu

$$R\left(1 + \frac{1}{\tau_C} \frac{1}{s} + \frac{1}{\tau_\mu} \frac{1}{s^{1+\mu}}\right)\hat{i}(s) = \hat{\mathcal{E}}(s),$$

koja sledi iz jednačine (3.8), dobija se jednačina generativnog RC kola u vremenskom domenu u obliku

$$R\left(1 + \frac{1}{\tau_C} {}_0I_t + \frac{1}{\tau_\mu} {}_0I_t^{1+\mu}\right)i(t) = \mathcal{E}(t), \quad (3.9)$$

čijim je rešenjem određena struja kola kao odziv u tranzijentnom režimu na zadatu elektromotornu silu kao pobudu.

Pored funkcije prenosa koja odgovara struji RC kola, definisane izrazom (3.3), može se definisati i funkcija prenosa

$$\hat{g}_C(s) = \frac{\hat{u}_C(s)}{\hat{\mathcal{E}}(s)} = \frac{\hat{Z}_C(s)\hat{i}(s)}{\hat{\mathcal{E}}(s)} = \hat{Z}_C(s)\hat{g}_i(s) = \frac{\hat{Z}_C(s)}{R + \hat{Z}_C(s)}, \quad (3.10)$$

koja odgovara naponu na kondenzatoru. U slučaju disipativnog RC kola, upotrebom izraza za kompleksnu impedansu kondenzatora (2.15), funkcija prenosa (3.10) se dobija u obliku

$$\hat{g}_C^{(d)}(s) = \frac{\hat{u}_C(s)}{\hat{\mathcal{E}}(s)} = \frac{\hat{Z}_C^{(d)}(s)}{R + \hat{Z}_C^{(d)}(s)} = \frac{1}{\tau_C s + \tau_\alpha s^\alpha + 1}, \quad (3.11)$$

videti i jednačine (3.4) i (3.5), koja je u nastavku korišćena za određivanje odziva kola u prelaznom režimu, kao i jednačine disipativnog RC kola u kompleksnom domenu

$$(\tau_C s + \tau_\alpha s^\alpha + 1)\hat{u}_C(s) = \hat{\mathcal{E}}(s),$$

koja povezuje napon na pasivnom kondenzatoru  $\hat{u}_C$  sa elektromotornom silom  $\hat{\mathcal{E}}$ , čijom se inverzijom dobija odgovarajuća jednačina u vremenskom domenu

$$\left( \tau_C \frac{d}{dt} + \tau_{\alpha 0} D_t^\alpha + 1 \right) u_C(t) = \mathcal{E}(t). \quad (3.12)$$

Jednačina kola (3.12) je našla primenu u modeliranju procesa punjenja i pražnjenja superkondenzatora, proučavanog u [64]. Funkcija prenosa koja povezuje napon na kondenzatoru i elektromotornu silu u Laplasovoj slici za aktivno  $RC$  kolo, dobija se korišćenjem izraza (3.10) i kompleksne impedanse aktivnog kondenzatora (2.29) u obliku

$$\hat{g}_C^{(g)}(s) = \frac{\hat{u}_C(s)}{\hat{\mathcal{E}}(s)} = \frac{\hat{Z}_C^{(g)}(s)}{R + \hat{Z}_C^{(g)}(s)} = \frac{\frac{\tau_\mu}{\tau_C} s^\mu + 1}{\tau_\mu s^{1+\mu} + \frac{\tau_\mu}{\tau_C} s^\mu + 1} \quad (3.13)$$

i koristi se u nastavku za određivanje odziva kola u prelaznom režimu, kao i jednačine aktivnog  $RC$  kola u kompleksnom domenu

$$\left( \tau_\mu s^{1+\mu} + \frac{\tau_\mu}{\tau_C} s^\mu + 1 \right) \hat{u}_C(s) = \left( \frac{\tau_\mu}{\tau_C} s^\mu + 1 \right) \hat{\mathcal{E}}(s),$$

izražene preko napona na kondenzatoru  $\hat{u}_C$  i elektromotorne sile  $\hat{\mathcal{E}}$ , iz koje se, primenom inverzne Laplasove transformacije, dobija odgovarajuća jednačina u vremenskom domenu

$$\left( \tau_\mu {}_0D_t^{1+\mu} + \frac{\tau_\mu}{\tau_C} {}_0D_t^\mu + 1 \right) u_C(t) = \left( \frac{\tau_\mu}{\tau_C} {}_0D_t^\mu + 1 \right) \mathcal{E}(t). \quad (3.14)$$

### 3.1.2 Model frakcionog $RL$ kola

U slučaju disipativnog  $RL$  kola, prikazanog na slici 3.3, koje se sastoji od otpornika redno vezanog sa pasivnim kalemom konstitutivno modeliranim relacijom (2.5), odnosno u slučaju generativnog  $RL$  kola, prikazanog na slici 3.4, kod koga je otpornik redno vezan sa aktivnim kalemom, opisanim relacijom (2.6), ponašanje kola u prelaznom režimu određeno je drugim Kirhofovom zakonom

$$\mathcal{E}(t) = R i(t) + u_L(t), \quad (3.15)$$

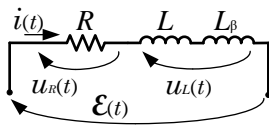
koji je kombinovan sa Omovim zakonom. Model  $RL$  kola u kompleksnom domenu

$$\hat{\mathcal{E}}(s) = \left( R + \hat{Z}_L(s) \right) \hat{i}(s), \quad (3.16)$$

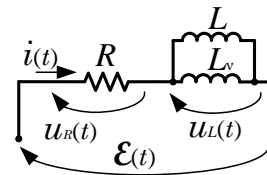
dobija se uvrštavanjem napona na kalemu  $\hat{u}_L$ , izraženog korišćenjem kompleksne impedanse kalema  $\hat{Z}_L$ , u Kirhofov zakon u kompleksnom domenu, koji je dobijen primenom Laplasove transformacije na (3.15), te funkcija prenosa koja odgovara struji  $RL$  kola, data izrazom

$$\hat{g}_i(s) = \frac{\hat{i}(s)}{\hat{\mathcal{E}}(s)} = \frac{1}{R + \hat{Z}_L(s)}, \quad (3.17)$$

sledi iz jednačine (3.16). Model  $RL$  kola u vremenskom domenu se dobija primenom inverzne Laplasove transformacije na jednačinu (3.16), odnosno na njoj ekvivalentnu jednačinu (3.17).



Slika 3.3: Šema disipativnog  $RL$  kola.



Slika 3.4: Šema generativnog  $RL$  kola.

U slučaju pasivnog  $RL$  kola sa slike 3.3, korišćenjem izraza za kompleksnu impedansu disipativnog kalema (2.16), za funkciju prenosa koja odgovara struji se iz (3.17) dobija

$$\hat{g}_i^{(RL-d)}(s) = \frac{\hat{i}(s)}{\hat{\mathcal{E}}(s)} = \frac{1}{R + \hat{Z}_L^{(d)}(s)} = \frac{1}{R} \frac{1}{\tau_L s + \tau_\beta s^\beta + 1} = \frac{1}{R} \hat{g}_R^{(RL-d)}(s), \quad (3.18)$$

gde je  $\hat{g}_R^{(RL-d)}$  funkcija prenosa koja odgovara naponu na otporniku, odakle sledi jednačina disipativnog  $RL$  kola u kompleksnom domenu

$$R(\tau_L s + \tau_\beta s^\beta + 1)\hat{i}(s) = \hat{\mathcal{E}}(s), \quad (3.19)$$

gde je  $\tau_L = \frac{L}{R}$  [s] klasična, dok je  $\tau_\beta = \frac{L_\beta}{R}$  [s $^\beta$ ] frakciona vremenska konstanta. Primenom inverzne Laplasove transformacije na jednačinu (3.19), dobija se jednačina

$$R\left(\tau_L \frac{d}{dt} + \tau_\beta {}_0D_t^\beta + 1\right)i(t) = \mathcal{E}(t), \quad (3.20)$$

koja modelira disipativno  $RL$  kolo u vremenskom domenu. Matematički oblici funkcija prenosa  $\hat{g}_i^{(RL-d)}$  i  $\hat{g}_C^{(d)}$ , datih izrazima (3.18) i (3.11), su isti, te nije iznenađujuće da jednačina disipativnog  $RL$  kola (3.20) i jednačina disipativnog  $RC$  kola izražena preko napona na kondenzatoru (3.12) imaju ekvivalentnu formu. Korišćenjem izraza za kompleksnu impedansu aktivnog kalema (2.30), funkcija prenosa koja odgovara struji, data izrazom (3.17), dobija oblik

$$\hat{g}_i^{(RL-g)}(s) = \frac{\hat{i}(s)}{\hat{\mathcal{E}}(s)} = \frac{1}{R + \hat{Z}_L^{(g)}(s)} = \frac{1}{R} \frac{\frac{\tau_\nu}{\tau_L} s^\nu + 1}{\tau_\nu s^{1+\nu} + \frac{\tau_\nu}{\tau_L} s^\nu + 1} = \frac{1}{R} \hat{g}_R^{(RL-g)}(s), \quad (3.21)$$

gde je  $\hat{g}_R^{(RL-g)}$  funkcija prenosa koja odgovara naponu na otporniku, a  $\tau_\nu = \frac{L_\nu}{R}$  [s $^{1+\nu}$ ] je frakciona vremenska konstanta. Jednačina generativnog  $RL$  kola, prikazanog na slici 3.4, u kompleksnom domenu

$$R\left(\tau_\nu s^{1+\nu} + \frac{\tau_\nu}{\tau_L} s^\nu + 1\right)\hat{i}(s) = \left(\frac{\tau_\nu}{\tau_L} s^\nu + 1\right)\hat{\mathcal{E}}(s),$$

sledi iz izraza (3.21), te primenom inverzne Laplasove transformacije dobija oblik

$$R\left(\tau_\nu {}_0D_t^{1+\nu} + \frac{\tau_\nu}{\tau_L} {}_0D_t^\nu + 1\right)i(t) = \left(\frac{\tau_\nu}{\tau_L} {}_0D_t^\nu + 1\right)\mathcal{E}(t) \quad (3.22)$$

i modelira režim rada aktivnog  $RL$  kola u vremenskom domenu. Matematički oblici funkcija prenosa  $\hat{g}_i^{(RL-g)}$  i  $\hat{g}_C^{(g)}$ , datih izrazima (3.21) i (3.13), su isti, te nije iznenađujuće da jednačina generativnog  $RL$  kola (3.22) i jednačina generativnog  $RC$  kola izražena preko napona na kondenzatoru (3.14) imaju ekvivalentnu formu.

Pored funkcije prenosa koja odgovara struji  $RL$  kola (3.17), kao i u slučaju  $RC$  kola, može se definisati i funkcija prenosa

$$\hat{g}_L(s) = \frac{\hat{u}_L(s)}{\hat{\mathcal{E}}(s)} = \frac{\hat{Z}_L(s)\hat{i}(s)}{\hat{\mathcal{E}}(s)} = \hat{Z}_L(s)\hat{g}_i(s) = \frac{\hat{Z}_L(s)}{R + \hat{Z}_L(s)}, \quad (3.23)$$

koja odgovara naponu na kalem. Funkcija prenosa koja povezuje napon na kalem i elektromotornu silu u Laplasovoj slici za disipativno  $RL$  kolo, dobija se korišćenjem izraza (3.23) i kompleksne impedanse disipativnog kalema (2.16) u obliku

$$\hat{g}_L^{(d)}(s) = \frac{\hat{u}_L(s)}{\hat{\mathcal{E}}(s)} = \frac{\hat{Z}_L^{(d)}(s)}{R + \hat{Z}_L^{(d)}(s)} = \frac{\tau_L s + \tau_\beta s^\beta}{\tau_L s + \tau_\beta s^\beta + 1} = 1 - \hat{g}_R^{(RL-d)}, \quad (3.24)$$

odakle se dobija jednačina disipativnog  $RL$  kola u kompleksnom domenu

$$(\tau_L s + \tau_\beta s^\beta + 1)\hat{u}_L(s) = (\tau_L s + \tau_\beta s^\beta)\hat{\mathcal{E}}(s),$$

izražena preko napona na kalem  $\hat{u}_L$  i elektromotorne sile  $\hat{\mathcal{E}}$ , čijom se inverzijom dobija odgovarajuća jednačina u vremenskom domenu

$$\left(\tau_L \frac{d}{dt} + \tau_\beta {}_0D_t^\beta + 1\right)u_L(t) = \left(\tau_L \frac{d}{dt} + \tau_\beta {}_0D_t^\beta\right)\mathcal{E}(t). \quad (3.25)$$

Korišćenjem izraza (3.23) kojim je definisana funkcija prenosa, kao i izraza za kompleksnu impedansu aktivnog kalema (2.30), dobija se funkcija prenosa

$$\hat{g}_L^{(g)}(s) = \frac{\hat{u}_L(s)}{\hat{\mathcal{E}}(s)} = \frac{\hat{Z}_L^{(g)}(s)}{R + \hat{Z}_L^{(g)}(s)} = \frac{\tau_\nu s^{1+\nu}}{\tau_\nu s^{1+\nu} + \frac{\tau_\nu}{\tau_L} s^\nu + 1} = 1 - \hat{g}_R^{(RL-g)}, \quad (3.26)$$

koja povezuje napon na kalem u Laplasovoj slici za generativno  $RL$  kolo. Jednačina aktivnog  $RL$  kola u vremenskom domenu, izražena preko napona na kalem i elektromotorne sile, dobija se u obliku

$$\left(1 + \frac{1}{\tau_L} {}_0I_t^1 + \frac{1}{\tau_\nu} {}_0I_t^{1+\nu}\right) u_L(t) = \mathcal{E}(t), \quad (3.27)$$

primenom inverzne Laplasove transformacije na jednačinu u kompleksnom domenu

$$\left(1 + \frac{1}{\tau_L} \frac{1}{s} + \frac{1}{\tau_\nu} \frac{1}{s^{1+\nu}}\right) \hat{u}_L(s) = \hat{\mathcal{E}}(s),$$

koja sledi iz funkcije prenosa (3.26). Kako jednačine koje povezuju struju  $RL$  kola i elektromotornu silu imaju ekvivalentni oblik kao i jednačine  $RC$  kola koje povezuju napon na kondenzatoru i elektromotornu silu, tako i jednačine  $RL$  kola (3.25) i (3.27), koje povezuju napon na kalem i elektromotornu silu dele isti oblik sa jednačinama (3.7) i (3.9), koje povezuju struju  $RC$  kola i elektromotornu silu.

## 3.2 Tranzijentni i kvazistacionarni režim frakcionih $RC$ i $RL$ kola

### 3.2.1 Tranzijentni režim

Struja  $RC$  kola i napon na generalizovanom kondenzatoru u tranzijentnom režimu  $RC$  kola, određeni su inverznom Laplasovom transformacijom definicionih izraza za funkcije prenosa (3.4) i (3.11) u slučaju pasivnog kondenzatora, odnosno izraza (3.8) i (3.13) u slučaju aktivnog kondenzatora i dati su u obliku

$$i(t) = g_i(t) * \mathcal{E}(t) \quad \text{i} \quad u_C(t) = g_C(t) * \mathcal{E}(t), \quad (3.28)$$

koji predstavlja konvoluciju elektromotorne sile i impulsnog odziva struje  $g_i$ , odnosno impulsnog odziva napona na kondenzatoru  $g_C$ . Ukoliko su poznati impulсни odzivi napona na kondenzatoru  $g_C^{(d)}$  i  $g_C^{(g)}$ , tada se impulсни odzivi struje  $RC$  kola  $g_i^{(RC-d)}$  i  $g_i^{(RC-g)}$  lako određuju inverznom Laplasovom transformacijom izraza (3.4) i (3.8), koja daje

$$g_i(t) = \frac{1}{R} (\delta(t) - g_C(t)), \quad (3.29)$$

gde  $\delta$  predstavlja Dirakovu delta funkciju.

Impulсни odzivi  $g_C^{(d)}$  i  $g_C^{(g)}$ , tj. naponi na pasivnom i aktivnom kondenzatoru kao posledica primene elektromotorne sile u obliku Dirakove delta funkcije, dobijeni su primenom inverzne Laplasove transformacije na funkcije prenosa (3.11) i (3.13) i imaju sledeći oblik

$$g_C^{(d)}(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\tau_\alpha \rho^\alpha \sin(\alpha\pi)}{|1 - \tau_C \rho + \tau_\alpha \rho^\alpha e^{j\alpha\pi}|^2} e^{-\rho t} d\rho \quad \text{i} \quad (3.30)$$

$$g_C^{(g)}(t) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\tau_\mu \rho^{1+\mu} \sin(\mu\pi)}{|1 - \tau_\mu \rho^\mu \left(\rho - \frac{1}{\tau_C}\right) e^{j\mu\pi}|^2} e^{-\rho t} d\rho + 2 \operatorname{Re} \left( \frac{s_0^{1-\mu} \left(\frac{\tau_\mu}{\tau_C} s_0^\mu + 1\right)}{(1+\mu) \tau_\mu s_0 + \mu \frac{\tau_\mu}{\tau_C}} e^{jt \operatorname{Im} s_0} \right) e^{-| \operatorname{Re} s_0 | t}, \quad (3.31)$$

pri čemu je  $s_0$  pol funkcije prenosa  $\hat{g}_C^{(g)}$ , date izrazom (3.13), koji leži u gornjem levom kvadrantu kompleksne ravni i dobijen je kao rešenje jednačine

$$\tau_\mu s^{1+\mu} + \frac{\tau_\mu}{\tau_C} s^\mu + 1 = 0,$$

kao što je pokazano u odeljku 3.2.1. Impulсни odzivi  $g_C^{(d)}$  i  $g_C^{(g)}$ , dati izrazima (3.30) i (3.31), određeni su korišćenjem definicije inverzne Laplasove transformacije. Tačnije, impulсни odziv  $g_C^{(d)}$ , dat sa (3.30), nije određivan, pošto predstavlja rešenje obične diferencijalne jednačine (3.12), koja je dobro poznata kao



uopštena jednačina frakcione relaksacije, videti jednačinu (4.1) u [21], gde je ova jednačina rešena i gde je analizirano njeno asimptotsko ponašanje, dok impulsni odziv  $g_C^{(g)}$ , dat izrazom (3.31), predstavlja jezgro rešenja frakcione integralne jednačine (3.9) i određen je u odeljku 3.2.1.

Iako su posledice konstitutivnih jednačina pasivnog i aktivnog kondenzatora (2.1) i (2.2), koji fizičke veličine povezuju na isti način (uzimajući u obzir trenutni doprinos, ali i istoriju korišćenjem memorijskog jezgra stepenog tipa), impulsni odzivi  $g_C^{(d)}$  i  $g_C^{(g)}$  imaju potpuno različita kvalitativna svojstva. Naime, impulsni odziv  $g_C^{(d)}$ , dat izrazom (3.30), je kompletno monotona funkcija, tj. pozitivna, opadajuća, konveksna funkcija, što je posledica pozitivnosti podintegralne funkcije

$$K(\rho) = \frac{\tau_\alpha \rho^\alpha \sin(\alpha\pi)}{|1 - \tau_C \rho + \tau_\alpha \rho^\alpha e^{j\alpha\pi}|^2}$$

iz izraza za impulsni odziv  $g_C^{(d)}$ , dok je impulsni odziv  $g_C^{(g)}$  oscilatorna funkcija, čija je obvojnica eksponencijalno opadajuća funkcija, što je posledica oblika drugog člana u izrazu (3.31) za impulsni odziv  $g_C^{(g)}$ , pri čemu je prvi član izraza funkcije prenosa (3.31) negativna, rastuća, konkavna funkcija, što je posledica kompletne monotonosti integrala.

Ukoliko  $RL$  kolo sadrži pasivni kalem, tada je impulsni odziv struje dat izrazom

$$\begin{aligned} g_i^{(RL-d)}(t) &= \frac{1}{R} g_R^{(RL-d)}(t), \quad \text{gde je} \\ g_R^{(RL-d)}(t) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\tau_\beta \rho^\beta \sin(\beta\pi)}{|1 - \tau_L \rho + \tau_\beta \rho^\beta e^{j\beta\pi}|^2} e^{-\rho t} d\rho, \end{aligned} \quad (3.32)$$

koji ima identični matematički oblik kao i impulsni odziv napona na kondenzatoru  $g_C^{(d)}$ , dat izrazom (3.30), što je posledica identičnih matematičkih oblika funkcije prenosa koja odgovara struji disipativnog  $RL$  kola  $\hat{g}_i^{(RL-d)}$  i funkcije prenosa  $\hat{g}_C^{(d)}$ , koja odgovara naponu na pasivnom kondenzatoru u  $RC$  kolu, uporediti izraze (3.18) i (3.11). Ukoliko  $RL$  kolo sadrži aktivni kalem, tada je impulsni odziv struje dat izrazom

$$\begin{aligned} g_i^{(RL-g)}(t) &= \frac{1}{R} g_R^{(RL-g)}(t), \quad \text{gde je} \\ g_R^{(RL-g)}(t) &= -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\tau_\nu \rho^{1+\nu} \sin(\nu\pi)}{|1 - \tau_\nu \rho^\nu \left(\rho - \frac{1}{\tau_L}\right) e^{j\nu\pi}|^2} e^{-\rho t} d\rho + 2 \operatorname{Re} \left( \frac{s_0^{1-\nu} \left(\frac{\tau_\nu}{\tau_L} s_0^\nu + 1\right)}{(1+\nu) \tau_\nu s_0 + \nu \frac{\tau_\nu}{\tau_L}} e^{jt \operatorname{Im} s_0} \right) e^{-|\operatorname{Re} s_0| t}, \end{aligned} \quad (3.33)$$

koji ima identični matematički oblik kao i impulsni odziv napona na kondenzatoru  $g_C^{(g)}$ , dat izrazom (3.31), što je posledica identičnih matematičkih oblika funkcije prenosa koja odgovara struji generativnog  $RL$  kola  $\hat{g}_i^{(RL-g)}$  i funkcije prenosa  $\hat{g}_C^{(g)}$ , koja odgovara naponu na aktivnom kondenzatoru u  $RC$  kolu, uporediti izraze (3.21) i (3.13).

Impulsni odziv napona na kalemu može se dobiti inverznom Laplasovom transformacijom izraza (3.24) i (3.26) u obliku

$$g_L(t) = \delta(t) - g_R(t), \quad (3.34)$$

gde je impulsni odziv napona na otporniku u disipativnom  $RL$  kolu  $g_R^{(RL-d)}$  dat izrazom (3.32), dok je impulsni odziv napona na otporniku u generativnom  $RL$   $g_R^{(RL-g)}$  dat izrazom (3.33). Može se primetiti da je izraz za impulsni odziv napona na kalemu identičnog matematičkog oblika kao i izraz za impulsni odziv struje  $RC$  kola, uporediti izraze (3.34) i (3.29).

Struja  $RL$  kola, kao i napon na kalemu, izraženi su korišćenjem konvolucije elektromotorne sile i impulsnog odziva struje, odnosno impulsnog odziva napona na kalemu

$$i(t) = g_i(t) * \mathcal{E}(t) \quad \text{i} \quad u_L(t) = g_L(t) * \mathcal{E}(t),$$

što se dobija primenom inverzne Laplasove transformacije na izraze za funkcije prenosa (3.18) i (3.24) u slučaju disipativnog  $RL$  kola, odnosno izraza (3.21) i (3.26) u slučaju generativnog  $RL$  kola.

Modeliranje uopštenog kondenzatora kao redne veze otpornika i frakcionog kondenzatora i analiza karakteristika frakcionog  $RC_\alpha$  kola u prelaznom režimu urađena je u [27]. Modeliranjem uopštenog kondenzatora kao frakcionog, odziv  $RC$  kola u tranzijentnom režimu razmatran je u [6], zajedno sa primerom

složenijeg kola koje sadrži frakcioni kalem i kondenzator. Frakcione diferencijalne jednačine koje opisuju ovako uopštena električna kola rešavane su pomoću različitih numeričkih alata u [9, 58, 59].

U nastavku će se određivati impulsni odziv primenom definicije inverzne Laplasove transformacije i metode konturne integracije, čemu će prethoditi analiza prirode polova funkcije prenosa, tako što će se odrediti broj i višestrukost nula imenioca funkcije prenosa upotrebom principa argumenta.

### Priroda polova funkcije prenosa $\hat{g}_C^{(g)}$

Postojanje polova funkcije prenosa  $\hat{g}_C^{(g)}$  u prvoj Rimanovoj ravni određeno je postojanjem nula u imeniocu funkcije prenosa  $\hat{g}_C^{(g)}$ , prepisanom u sledećem obliku

$$\psi(s) = as^{1+\mu} + bs^\mu + 1, \quad \text{pri čemu je } a = \tau_\mu \text{ i } b = \frac{\tau_\mu}{\tau_C}. \quad (3.35)$$

U cilju određivanja nula funkcije  $\psi$ , date sa (3.35), kompleksna funkcija  $\psi$  kompleksne promenljive  $s$  zapisuje se u obliku

$$\operatorname{Re}\psi(\rho, \varphi) = a\rho^{1+\mu} \cos((1+\mu)\varphi) + b\rho^\mu \cos(\mu\varphi) + 1, \quad (3.36)$$

$$\operatorname{Im}\psi(\rho, \varphi) = a\rho^{1+\mu} \sin((1+\mu)\varphi) + b\rho^\mu \sin(\mu\varphi), \quad (3.37)$$

koji je dobijen uvođenjem smene  $s = \rho e^{j\varphi}$  u funkciju  $\psi(s)$ , te razdvajanjem realnog i imaginarnog dela. Svojstva realnog i imaginarnog dela funkcije  $\psi$

$$\operatorname{Re}\psi(\rho, -\varphi) = \operatorname{Re}\psi(\rho, \varphi) \quad \text{i} \quad \operatorname{Im}\psi(\rho, -\varphi) = -\operatorname{Im}\psi(\rho, \varphi)$$

impliciraju da je funkcija  $\psi$  simetrična u odnosu na realnu osu, što znači da ako funkcija  $\psi$  ima nulu  $s_0$  u gornjoj kompleksnoj poluravni, onda i kompleksno konjugovana vrednost  $\bar{s}_0$  takođe predstavlja nulu funkcije  $\psi$ , tako da je dovoljno tražiti nule samo u gornjoj kompleksnoj poluravni. Štaviše, funkcija  $\psi$  nema nule u gornjem desnom kvadrantu kompleksne ravni (samim tim ni u donjem desnom kvadrantu kompleksne ravni), pošto je za  $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2}]$ , prema (3.37),  $\operatorname{Im}\psi(\rho, \varphi) > 0$ , dok za  $\varphi = 0$  važi da je  $\operatorname{Im}\psi(\rho, \varphi) = 0$ , ali prema (3.36) imamo da je  $\operatorname{Re}\psi(\rho, \varphi) > 0$ . Dakle, ako funkcija  $\psi$  ima nule, one leže u gornjem levom kvadrantu kompleksne ravni, a njihove kompleksno konjugovane vrednosti u donjem levom kvadrantu.

Jednačina  $\operatorname{Im}\psi(\rho, \varphi) = 0$ , rešena po promenljivoj  $\rho > 0$  daje

$$\rho = -\frac{b}{a} \frac{\sin(\mu\varphi)}{\sin((1+\mu)\varphi)} = \frac{b}{a} \frac{\sin(\mu\varphi)}{|\sin((1+\mu)\varphi)|} \quad \text{za } \varphi \in \left(\frac{\pi}{1+\mu}, \pi\right),$$

a kada se tako dobijeno  $\rho$  uvrsti u jednačinu  $\operatorname{Re}\psi(\rho, \varphi) = 0$ , dobija se

$$\left(\frac{a}{\sin(\mu\varphi)}\right)^\mu = \sin\varphi \left(\frac{b}{\sin((1+\mu)\varphi)}\right)^{1+\mu}. \quad (3.38)$$

Ostaje nejasno da li jednačina (3.38) ima rešenje na intervalu  $\varphi \in (\frac{\pi}{1+\mu}, \pi)$  i stoga se postojanje nula funkcije  $\psi$ , date sa (3.35), u gornjem levom kvadrantu kompleksne ravni ispituje korišćenjem principa argumenta i konture  $\gamma$  sa slike 4.5, pošto  $s = 0$  predstavlja tačku grananja funkcije.

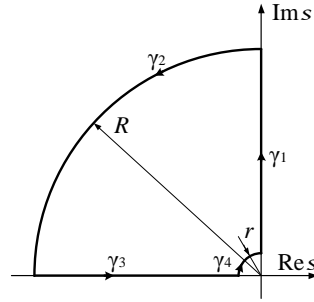
Podsećanja radi, prema principu argumenta, ako nezavisna promenljiva  $z$  menja vrednosti duž zatvorene konture  $\gamma$  u kompleksnoj ravni, onda je broj nula  $N$  funkcije  $f(z)$  u domenu ograničenom konturom  $\gamma$  određen promenom argumenta:  $\Delta \arg f(z) = 2\pi N$ , pod pretpostavkom da funkcija  $f$  nema polova u pomenutom domenu.

Duž konture  $\gamma_1$ , parametrizovane sa  $s = \rho e^{j\frac{\pi}{2}}$ , pri čemu  $\rho \in (0, \infty)$ , imaginarni deo funkcije  $\psi$  je, prema (3.37), oblika

$$\operatorname{Im}\psi\left(\rho, \frac{\pi}{2}\right) = a\rho^{1+\mu} \cos\frac{\mu\pi}{2} + b\rho^\mu \sin\frac{\mu\pi}{2} > 0,$$

pošto je  $\mu \in (0, 1)$ , dok je u graničnom slučaju

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\psi\left(\rho, \frac{\pi}{2}\right) &\sim 1 \quad \text{i} \quad \operatorname{Im}\psi\left(\rho, \frac{\pi}{2}\right) \sim b\rho^\mu \sin\frac{\mu\pi}{2} \rightarrow 0 \quad \text{kada } \rho \rightarrow 0, \\ \operatorname{Re}\psi\left(\rho, \frac{\pi}{2}\right) &\sim -a\rho^{1+\mu} \sin\frac{\mu\pi}{2} \rightarrow -\infty \quad \text{i} \quad \operatorname{Im}\psi\left(\rho, \frac{\pi}{2}\right) \sim a\rho^{1+\mu} \cos\frac{\mu\pi}{2} \rightarrow \infty \quad \text{kada } \rho \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Slika 3.5: Kontura  $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$ .

Duž konture  $\gamma_2$ , parametrizovane sa  $s = Re^{j\varphi}$ , pri čemu  $\varphi \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$  i  $R \rightarrow \infty$ , prema (3.36) i (3.37), za  $\varphi \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ , važi da je

$$\operatorname{Re}\psi(R, \varphi) \sim aR^{1+\mu} \cos((1+\mu)\varphi) \quad \text{i} \quad \operatorname{Im}\psi(R, \varphi) \sim aR^{1+\mu} \sin((1+\mu)\varphi),$$

odakle sledi

$$|\psi(R, \varphi)| \sim aR^{1+\mu} \rightarrow \infty,$$

dok za  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  i  $\varphi = \pi$  važi

$$\operatorname{Re}\psi\left(R, \frac{\pi}{2}\right) \sim -aR^{1+\mu} \sin\frac{\mu\pi}{2} \rightarrow -\infty \quad \text{i} \quad \operatorname{Im}\psi\left(R, \frac{\pi}{2}\right) \sim aR^{1+\mu} \cos\frac{\mu\pi}{2} \rightarrow \infty,$$

$$\operatorname{Re}\psi(R, \pi) \sim -aR^{1+\mu} \cos(\mu\pi) \rightarrow \begin{cases} -\infty, & \text{ako je } \mu < \frac{1}{2} \\ \infty, & \text{ako je } \mu > \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{i} \quad \operatorname{Im}\psi(R, \pi) \sim -aR^{1+\mu} \sin(\mu\pi) \rightarrow -\infty.$$

Duž konture  $\gamma_3$ , parametrizovane sa  $s = \rho e^{j\pi}$ , pri čemu  $\rho \in (0, \infty)$ , realni i imaginarni deo funkcije  $\psi$ , prema (3.36) i (3.37), glase

$$\operatorname{Re}\psi(\rho, \varphi) = -a\rho^{1+\mu} \cos(\mu\pi) + b\rho^\mu \cos(\mu\pi) + 1 = \rho^\mu \cos(\mu\pi)(b - a\rho) + 1, \quad (3.39)$$

$$\operatorname{Im}\psi(\rho, \varphi) = -a\rho^{1+\mu} \sin(\mu\pi) + b\rho^\mu \sin(\mu\pi) = \rho^\mu \sin(\mu\pi)(b - a\rho). \quad (3.40)$$

Asimptotsko ponašanje

$$\operatorname{Re}\psi(\rho, \pi) \sim 1 \quad \text{i} \quad \operatorname{Im}\psi(\rho, \pi) \sim b\rho^\mu \sin(\mu\pi) \rightarrow 0^+ \quad \text{kada } \rho \rightarrow 0,$$

$$\operatorname{Re}\psi(\rho, \pi) \sim -a\rho^{1+\mu} \cos(\mu\pi) \rightarrow \begin{cases} -\infty, & \text{ako je } \mu < \frac{1}{2} \\ \infty, & \text{ako je } \mu > \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{i} \quad \operatorname{Im}\psi(\rho, \pi) \sim -a\rho^{1+\mu} \sin(\mu\pi) \rightarrow -\infty,$$

kada  $\rho \rightarrow \infty$ , funkcija  $\operatorname{Re}\psi$  i  $\operatorname{Im}\psi$ , datih sa (3.39) i (3.40), implicira da imaginarni deo funkcije  $\psi$  duž  $\gamma_3$  menja svoj znak iz negativnog u pozitivan i stoga za određenu vrednost  $\rho^*$  postaje jednak nuli, odnosno

$$\operatorname{Im}\psi(\rho^*, \pi) = 0 \quad \text{implicira} \quad \rho^* = \frac{b}{a} \quad \text{i} \quad \operatorname{Re}\psi(\rho^*, \pi) = 1.$$

Duž konture  $\gamma_4$ , parametrizovane sa  $s = re^{j\varphi}$ , pri čemu  $\varphi \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$  i  $r \rightarrow 0$ , prema (3.36) i (3.37), važi

$$\operatorname{Re}\psi(r, \varphi) \sim 1 \quad \text{i} \quad \operatorname{Im}\psi(r, \varphi) \sim br^\mu \sin(\mu\pi) \rightarrow 0^+.$$

Na osnovu prethodne analize, zaključuje se da je  $\Delta \arg \psi(s) = 2\pi$ , te, prema principu argumenta, funkcija  $\psi$  ima jednu nulu u gornjem levom kvadrantu kompleksne ravni, odnosno ima par kompleksno konjugovanih nula sa negativnim realnim delom u prvoj Rimanovoj ravni.

### Određivanje impulsnog odziva $g_C^{(g)}$

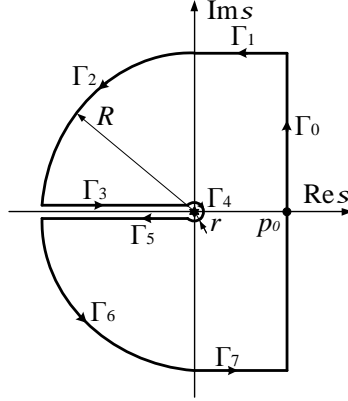
Impulсни odziv  $g_C^{(g)}$  dobija se iz funkcije prenosa  $\hat{g}_C^{(g)}$ , date izrazom (3.13), korišćenjem inverzne Laplasove transformacije

$$g_C^{(g)}(t) = \mathcal{L}^{-1}[\hat{g}_C^{(g)}(s)](t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma_{Br}} \hat{g}_C^{(g)}(s) e^{st} ds \quad (3.41)$$

uz primenu Košijeve teoreme o reziduumima (1.23), koja je za funkciju  $\hat{g}_C^{(g)}$  oblika

$$\oint_{\Gamma} \hat{g}_C^{(g)}(s) e^{st} ds = 2\pi j \left( \text{Res} \left( \hat{g}_C^{(g)}(s) e^{st}, s_0 \right) + \text{Res} \left( \hat{g}_C^{(g)}(s) e^{st}, \bar{s}_0 \right) \right), \quad (3.42)$$

gde je putanja integracije  $\Gamma$ , koja sadrži Bromvičovu putanju  $\Gamma_{Br}$ , odabrana kao na slici 3.6, pošto funkcija  $\hat{g}_C^{(g)}$  ima  $s = 0$  kao tačku grananja i par kompleksno konjugovanih polova  $s_0$  i  $\bar{s}_0$  sa negativnim realnim delom, kao što je dokazano u prethodnom odeljku.



Slika 3.6: Kontura  $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4 \cup \Gamma_5 \cup \Gamma_6 \cup \Gamma_7$ .

Integracija duž kontura  $\Gamma_3$  i  $\Gamma_5$ , parametrizovanih sa  $s = \rho e^{j\pi}$  i  $s = \rho e^{-j\pi}$ , pri čemu  $\rho \in (0, \infty)$ , respektivno daje

$$\begin{aligned} I_{\Gamma_3} &= \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ r \rightarrow 0}} \int_{\Gamma_3} \hat{g}_C^{(g)}(s) e^{st} ds = \int_{\infty}^0 \frac{\frac{\tau_{\mu}}{\tau_C} \rho^{\mu} e^{j\mu\pi} + 1}{\psi(\rho e^{j\pi})} e^{\rho t e^{j\pi}} e^{j\pi} d\rho \\ &= \int_0^{\infty} \frac{\left(\frac{\tau_{\mu}}{\tau_C} \rho^{\mu} e^{j\mu\pi} + 1\right) \bar{\psi}(\rho e^{j\pi})}{|\psi(\rho e^{j\pi})|^2} e^{-\rho t} d\rho, \end{aligned} \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned} I_{\Gamma_5} &= \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ r \rightarrow 0}} \int_{\Gamma_5} \hat{g}_C^{(g)}(s) e^{st} ds = \int_0^{\infty} \frac{\frac{\tau_{\mu}}{\tau_C} \rho^{\mu} e^{-j\mu\pi} + 1}{\psi(\rho e^{-j\pi})} e^{\rho t e^{-j\pi}} e^{-j\pi} d\rho \\ &= - \int_0^{\infty} \frac{\left(\frac{\tau_{\mu}}{\tau_C} \rho^{\mu} e^{-j\mu\pi} + 1\right) \psi(\rho e^{j\pi})}{|\psi(\rho e^{j\pi})|^2} e^{-\rho t} d\rho, \end{aligned} \quad (3.44)$$

pošto je  $\psi(\rho e^{-j\pi}) = \bar{\psi}(\rho e^{j\pi})$ , gde linija iznad  $\psi$  označava kompleksnu konjugaciju, tako da, prema (3.43) i (3.44), važi

$$\frac{1}{2\pi j} (I_{\Gamma_3} + I_{\Gamma_5}) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\tau_{\mu} \rho^{1+\mu} \sin(\mu\pi)}{|\psi(\rho e^{j\pi})|^2} e^{-\rho t} d\rho. \quad (3.45)$$

Pošto je integral duž  $\Gamma_0$  dat sa (3.41) i pošto su integrali duž  $\Gamma_3$  i  $\Gamma_5$  dati sa (3.45), dok integrali duž svih ostalih kontura na slici 3.6 teže nuli kada  $R \rightarrow \infty$  i  $r \rightarrow 0$ , Košijeva teorema o reziduumima (3.42) dobija sledeći oblik

$$g_C^{(g)}(t) + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\tau_{\mu} \rho^{1+\mu} \sin(\mu\pi)}{|\psi(\rho e^{j\pi})|^2} e^{-\rho t} d\rho = \text{Res} \left( \hat{g}_C^{(g)}(s) e^{st}, s_0 \right) + \text{Res} \left( \hat{g}_C^{(g)}(s) e^{st}, \bar{s}_0 \right), \quad (3.46)$$

gde su reziduumi dati izrazima

$$\begin{aligned} \text{Res} \left( \hat{g}_C^{(g)}(s) e^{st}, s_0 \right) &= \left. \frac{\left(\frac{\tau_{\mu}}{\tau_C} s^{\mu} + 1\right) e^{st}}{\frac{d}{ds} \psi(s)} \right|_{s=s_0} = \frac{\left(\frac{\tau_{\mu}}{\tau_C} s_0^{\mu} + 1\right) e^{jt \text{Im} s_0}}{\left. \frac{d}{ds} \psi(s) \right|_{s=s_0}} e^{-|\text{Re} s_0| t}, \\ \text{Res} \left( \hat{g}_C^{(g)}(s) e^{st}, \bar{s}_0 \right) &= \left. \frac{\left(\frac{\tau_{\mu}}{\tau_C} s^{\mu} + 1\right) e^{st}}{\frac{d}{ds} \psi(s)} \right|_{s=\bar{s}_0} = \frac{\left(\frac{\tau_{\mu}}{\tau_C} \bar{s}_0^{\mu} + 1\right) e^{-jt \text{Im} s_0}}{\left. \frac{d}{ds} \psi(s) \right|_{s=\bar{s}_0}} e^{-|\text{Re} s_0| t}, \end{aligned}$$

tako da je

$$\operatorname{Res} \left( \hat{g}_C^{(g)}(s) e^{st}, s_0 \right) + \operatorname{Res} \left( \hat{g}_C^{(g)}(s) e^{st}, \bar{s}_0 \right) = 2 \operatorname{Re} \left( \frac{\frac{\tau_\mu}{\tau_C} s_0^\mu + 1}{\frac{d}{ds} \psi(s) \Big|_{s=s_0}} e^{j t \operatorname{Im} s_0} \right) e^{-|\operatorname{Res}_0| t},$$

pošto je  $\frac{d}{ds} \psi(s) \Big|_{s=\bar{s}_0} = \overline{\frac{d}{ds} \psi(s) \Big|_{s=s_0}}$ , odakle, prema (3.46), sledi

$$g_C^{(g)}(t) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\tau_\mu \rho^{1+\mu} \sin(\mu\pi)}{|\psi(\rho e^{j\pi})|^2} e^{-\rho t} d\rho + 2 \operatorname{Re} \left( \frac{\frac{\tau_\mu}{\tau_C} s_0^\mu + 1}{\frac{d}{ds} \psi(s) \Big|_{s=s_0}} e^{j t \operatorname{Im} s_0} \right) e^{-|\operatorname{Res}_0| t}.$$

Ostalo je da se pokaže da integrali duž kontura:  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_4, \Gamma_6$  i  $\Gamma_7$  teže nuli kada  $R \rightarrow \infty$  i  $r \rightarrow 0$ .

Integral duž konture  $\Gamma_1$ , parametrizovane sa  $s = p + jR$ , pri čemu  $p \in (0, p_0)$  i  $R \rightarrow \infty$ , daje

$$I_{\Gamma_1} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_1} \hat{g}_C^{(g)}(s) e^{st} ds = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{p_0}^0 \frac{\frac{\tau_\mu}{\tau_C} (p + jR)^\mu + 1}{\psi(p + jR)} e^{(p+jR)t} dp,$$

tako da je

$$|I_{\Gamma_1}| \leq \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{p_0} \frac{\left| \frac{\tau_\mu}{\tau_C} (p + jR)^\mu + 1 \right|}{|\psi(p + jR)|} e^{pt} dp \leq \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{p_0} \frac{1}{\tau_C R} e^{pt} dp \rightarrow 0 \quad \text{kada } R \rightarrow \infty,$$

pošto za  $|s| = \sqrt{p^2 + R^2} \sim R$  i  $\arg s = \arctan \frac{R}{p} \sim \frac{\pi}{2}$ , važi da je

$$\left| \frac{\tau_\mu}{\tau_C} R^\mu e^{j \frac{\mu\pi}{2}} + 1 \right| \sim \frac{\tau_\mu}{\tau_C} R^\mu \quad \text{i} \quad |\psi(R e^{j \frac{\pi}{2}})| \sim \tau_\mu R^{1+\mu} \quad \text{kada } R \rightarrow \infty,$$

gde je funkcija  $\psi$  data sa (3.35), odakle sledi da  $I_{\Gamma_1} \rightarrow 0$  kada  $R \rightarrow \infty$ . Slična argumentacija daje da  $I_{\Gamma_7} \rightarrow 0$  kada  $R \rightarrow \infty$ .

Integral duž konture  $\Gamma_2$ , parametrizovane sa  $s = R e^{j\varphi}$ , pri čemu  $\varphi \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$  i  $R \rightarrow \infty$ , daje

$$I_{\Gamma_2} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_2} \hat{g}_C^{(g)}(s) e^{st} ds = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \frac{\frac{\tau_\mu}{\tau_C} R^\mu e^{j\mu\varphi} + 1}{\psi(R e^{j\varphi})} e^{R t e^{j\varphi}} j R e^{j\varphi} d\varphi,$$

odakle sledi da je

$$|I_{\Gamma_2}| \leq \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \frac{\left| \frac{\tau_\mu}{\tau_C} R^\mu e^{j\mu\varphi} + 1 \right|}{|\psi(R e^{j\varphi})|} R e^{R t \cos \varphi} d\varphi \leq \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \frac{1}{\tau_C} e^{R t \cos \varphi} d\varphi \rightarrow 0 \quad \text{kada } R \rightarrow \infty,$$

pošto je  $\cos \varphi < 0$  kada  $\varphi \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ , dok se

$$\left| \frac{\tau_\mu}{\tau_C} R^\mu e^{j\mu\varphi} + 1 \right| \sim \frac{\tau_\mu}{\tau_C} R^\mu \quad \text{i} \quad |\psi(R e^{j\varphi})| \sim \tau_\mu R^{1+\mu} \quad \text{kada } R \rightarrow \infty,$$

gde je funkcija  $\psi$  data sa (3.35), odakle sledi da i  $I_{\Gamma_2} \rightarrow 0$  kada  $R \rightarrow \infty$ . Slična argumentacija daje da  $I_{\Gamma_6} \rightarrow 0$  kada  $R \rightarrow \infty$ .

Integral duž konture  $\Gamma_4$ , parametrizovane sa  $s = r e^{j\varphi}$ , pri čemu  $\varphi \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$  i  $r \rightarrow 0$ , daje

$$I_{\Gamma_4} = \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\Gamma_4} \hat{g}_C^{(g)}(s) e^{st} ds = \lim_{r \rightarrow 0} \int_\pi^{-\pi} \frac{\frac{\tau_\mu}{\tau_C} r^\mu e^{j\mu\varphi} + 1}{\psi(r e^{j\varphi})} e^{r t e^{j\varphi}} j r e^{j\varphi} d\varphi,$$

tako da je

$$|I_{\Gamma_4}| \leq \lim_{r \rightarrow 0} \int_{-\pi}^\pi \frac{\left| \frac{\tau_\mu}{\tau_C} r^\mu e^{j\mu\varphi} + 1 \right|}{|\psi(r e^{j\varphi})|} r e^{r t \cos \varphi} d\varphi \leq \lim_{r \rightarrow 0} \int_{-\pi}^\pi r d\varphi \rightarrow 0 \quad \text{kada } r \rightarrow 0,$$

pošto prema (3.35) imamo da je  $|\psi(r e^{j\varphi})| \sim 1$  kada  $r \rightarrow 0$ , odakle sledi da  $I_{\Gamma_4} \rightarrow 0$  kada  $r \rightarrow 0$ .

### 3.2.2 Kvizistacionarni režim

U kvazistacionarnom režimu će se razmatrati kako redno frakciono  $RC$  kolo koje sadrži, ili pasivni kondenzator modeliran relacijom (2.1), ili aktivni kondenzator modeliran konstitutivnom jednačinom (2.2), tako i redno frakciono  $RL$  kolo koje sadrži, ili pasivni kalem modeliran relacijom (2.5), ili aktivni kalem modeliran konstitutivnom jednačinom (2.6). Pretpostavljajući pobudu u obliku harmonijske funkcije

$$\underline{\mathcal{E}}(t) = \mathcal{E}_0 e^{j\omega t}, \quad (3.47)$$

amplitude  $\mathcal{E}_0$  i ugaone učestalosti  $\omega$ , usled linearnosti, kako jednačina  $RC$  kola (3.7) i (3.9), tako i jednačina  $RL$  kola (3.20) i (3.22), sledi da je struja kola takođe harmonijska funkcija oblika

$$\underline{i}(t) = i_0 e^{j(\omega t + \phi_i)}, \quad (3.48)$$

gde je  $i_0$  amplituda struje, a  $\phi_i$  predstavlja njen fazni stav. Veličine koje imaju fizičko značenje u relacijama za elektromotornu silu i struju kola (3.47) i (3.48) su  $\text{Re } \underline{\mathcal{E}}$  i  $\text{Re } \underline{i}$ .

Činjenica da kolo ulazi u kvazistacionarni režim može se pokazati analizom impulsnog odziva kola. Naime, usled preovlađujućeg uticaja harmonijske pobude nad impulsnim odzivima  $g_i^{(RC-d)}$  i  $g_i^{(RC-g)}$ , datih relacijom (3.29), frakciono  $RC$  kolo ulazi u stacionarni režim posle dovoljno dugog vremena, pošto impulsni odzivi  $g_i^{(RC-d)}$  i  $g_i^{(RC-g)}$  teže nuli prema Tauberovoj teoremi, odnosno

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g_i^{(RC-d)}(t) = \lim_{s \rightarrow 0} (s \hat{g}_i^{(RC-d)}(s)) = 0 \quad \text{i} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} g_i^{(RC-g)}(t) = \lim_{s \rightarrow 0} (s \hat{g}_i^{(RC-g)}(s)) = 0,$$

pri čemu su funkcije prenosa koje odgovaraju struji kola  $\hat{g}_i^{(RC-d)}$  i  $\hat{g}_i^{(RC-g)}$  date izrazima (3.4) i (3.8), što znači da struja, kao rešenje jednačina kola u tranzijentnom režimu (3.7) i (3.9), posle dovoljno dugog vremena takođe ima oblik harmonijske funkcije. Analogno  $RC$  kolu, nakon dovoljno dugog vremena, frakciono  $RL$  kolo takođe ulazi u stacionarni režim, pošto je prema Tauberovoj teoremi

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g_i^{(RL-d)}(t) = \lim_{s \rightarrow 0} (s \hat{g}_i^{(RL-d)}(s)) = 0 \quad \text{i} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} g_i^{(RL-g)}(t) = \lim_{s \rightarrow 0} (s \hat{g}_i^{(RL-g)}(s)) = 0,$$

odnosno, pošto impulsni odzivi  $g_i^{(RL-d)}$  i  $g_i^{(RL-g)}$ , dati relacijama (3.32) i (3.33), teže nuli, što implicira da struja kola posle dovoljno dugog vremena takođe ima oblik harmonijske funkcije.

Kako je energija, koju frakciono  $RC$  ili  $RL$  kolo troši ili proizvodi tokom jedne periode  $T$  harmonijskih funkcija elektromotorne sile (3.47) i struje (3.48), određena sa

$$W = \int_{nT}^{(n+1)T} \mathcal{E}(t) i(t) dt = \mathcal{E}_0 i_0 \int_{nT}^{(n+1)T} \cos(\omega t) \cos(\omega t + \phi_i) dt = \frac{1}{2} \mathcal{E}_0 i_0 T \cos \phi_i, \quad (3.49)$$

gde su

$$\mathcal{E} = \text{Re } \underline{\mathcal{E}} \quad \text{i} \quad i = \text{Re } \underline{i},$$

jasno je da znak kosinusa faznog ugla struje određuje da li kolo disipira ili generiše energiju, dok znak sinusa faznog ugla određuje da li kolo ima kapacitivni ili induktivni karakter. Naime, ukoliko je  $\cos \phi_i > 0$ , kolo disipira energiju, a ukoliko je  $\cos \phi_i < 0$ , kolo generiše energiju, dok za  $\sin \phi_i > 0$  kolo ima kapacitivni karakter, pošto struja prednjači elektromotornoj sili, a za  $\sin \phi_i < 0$  kolo ima induktivni karakter, jer struja kasni za elektromotornom silom.

Uvrštavanjem elektromotorne sile i struje u obliku (3.47) i (3.48), jednačina disipativnog  $RC$  kola (3.7) se transformiše u

$$e^{-j\phi_i^{(d)}(\omega)} = \frac{R i_0 \tau_C j\omega + \tau_\alpha (j\omega)^\alpha + 1}{\mathcal{E}_0 \tau_C j\omega + \tau_\alpha (j\omega)^\alpha},$$

prema formuli (1.31) za frakcioni izvod harmonijske funkcije kada  $t \rightarrow \infty$ , odakle se određivanjem realnog i imaginarnog dela dobijaju

$$\cos \phi_i^{(d)}(\omega) = \frac{R i_0 \tau_C^2 \omega^2 + 2\tau_C \tau_\alpha \omega^{1+\alpha} \sin \frac{\alpha\pi}{2} + \tau_\alpha^2 \omega^{2\alpha} + \tau_\alpha \omega^\alpha \cos \frac{\alpha\pi}{2}}{\mathcal{E}_0 \tau_C^2 \omega^2 + 2\tau_C \tau_\alpha \omega^{1+\alpha} \sin \frac{\alpha\pi}{2} + \tau_\alpha^2 \omega^{2\alpha}}, \quad (3.50)$$

$$\sin \phi_i^{(d)}(\omega) = \frac{R i_0 \tau_C \omega + \tau_\alpha \omega^\alpha \sin \frac{\alpha\pi}{2}}{\mathcal{E}_0 \tau_C^2 \omega^2 + 2\tau_C \tau_\alpha \omega^{1+\alpha} \sin \frac{\alpha\pi}{2} + \tau_\alpha^2 \omega^{2\alpha}}, \quad (3.51)$$

tako da su amplituda i fazni stav struje dati izrazima

$$i_0^{(d)}(\omega) = \frac{\mathcal{E}_0}{R} \sqrt{\frac{\tau_C^2 \omega^2 + 2\tau_C \tau_\alpha \omega^{1+\alpha} \sin \frac{\alpha\pi}{2} + \tau_\alpha^2 \omega^{2\alpha}}{\tau_C^2 \omega^2 + 2\tau_C \tau_\alpha \omega^{1+\alpha} \sin \frac{\alpha\pi}{2} + \tau_\alpha^2 \omega^{2\alpha} + 2\tau_\alpha \omega^\alpha \cos \frac{\alpha\pi}{2} + 1}}, \quad (3.52)$$

$$\phi_i^{(d)}(\omega) = \arctan \frac{\tau_C \omega + \tau_\alpha \omega^\alpha \sin \frac{\alpha\pi}{2}}{\tau_C^2 \omega^2 + 2\tau_C \tau_\alpha \omega^{1+\alpha} \sin \frac{\alpha\pi}{2} + \tau_\alpha^2 \omega^{2\alpha} + \tau_\alpha \omega^\alpha \cos \frac{\alpha\pi}{2}}. \quad (3.53)$$

Na osnovu izraza (3.50) i (3.51) očigledno je da je kolo disipativno, odnosno da je njegov karakter kapacitivan za sve učestalosti, pošto su  $\cos \phi^{(d)}(\omega) > 0$  i  $\sin \phi^{(d)}(\omega) > 0$  za sve učestalosti  $\omega$ .

Pretpostavljajući elektromotornu silu i struju u obliku (3.47) i (3.48), te korišćenjem formule (1.28) za fracioni integral harmonijske funkcije kada  $t \rightarrow \infty$ , iz jednačine generativnog RC kola (3.9), sledi

$$e^{-j\phi_i^{(g)}(\omega)} = \frac{R i_0}{\mathcal{E}_0} \left( 1 + \frac{1}{\tau_C j\omega} + \frac{1}{\tau_\mu (j\omega)^{1+\mu}} \right), \quad (3.54)$$

te se određivanjem realnog i imaginarnog dela izraza (3.54) dobijaju

$$\cos \phi_i^{(g)}(\omega) = \frac{R i_0}{\mathcal{E}_0} \left( 1 - \frac{1}{\tau_\mu \omega^{1+\mu}} \sin \frac{\mu\pi}{2} \right), \quad (3.55)$$

$$\sin \phi_i^{(g)}(\omega) = \frac{R i_0}{\mathcal{E}_0} \left( \frac{1}{\tau_C \omega} + \frac{1}{\tau_\mu \omega^{1+\mu}} \cos \frac{\mu\pi}{2} \right), \quad (3.56)$$

odakle slede izrazi za amplitudu i fazni stav struje

$$i_0^{(g)}(\omega) = \frac{\mathcal{E}_0}{R} \frac{1}{\sqrt{1 - 2\frac{1}{\tau_\mu \omega^{1+\mu}} \sin \frac{\mu\pi}{2} + \frac{1}{\tau_C^2 \omega^2} + 2\frac{1}{\tau_C \tau_\mu \omega^{2+\mu}} \cos \frac{\mu\pi}{2} + \frac{1}{\tau_\mu^2 \omega^{2+2\mu}}}}, \quad (3.57)$$

$$\phi_i^{(g)}(\omega) = \arctan \frac{\frac{1}{\tau_C \omega} + \frac{1}{\tau_\mu \omega^{1+\mu}} \cos \frac{\mu\pi}{2}}{1 - \frac{1}{\tau_\mu \omega^{1+\mu}} \sin \frac{\mu\pi}{2}}. \quad (3.58)$$

Relacija (3.55) implicira da je generativno RC kolo generativno za niske učestalosti, a disipativno za visoke učestalosti, pošto je

$$\cos \phi_i^{(g)}(\omega) < 0 \quad \text{kada} \quad \omega \rightarrow 0 \quad \text{i} \quad \cos \phi_i^{(g)}(\omega) > 0 \quad \text{kada} \quad \omega \rightarrow \infty,$$

dok je kapacitivan karakter dominantan za sve učestalosti, pošto je  $\sin \phi^{(g)}(\omega) > 0$ , za svako  $\omega$ , videti (3.56).

Ukoliko je pasivni kalem u rednom fracionom RL kolu, koje je pobuđeno elektromotornom silom oblika (3.47), modeliran konstitutivnom relacijom (2.5), tada je struja data izrazom (3.48), sa amplitudom i faznim stavom u sledećem obliku

$$i_0^{(d)}(\omega) = \frac{\mathcal{E}_0}{R} \frac{1}{\sqrt{\tau_L^2 \omega^2 + 2\tau_L \tau_\beta \omega^{1+\beta} \sin \frac{\beta\pi}{2} + \tau_\beta^2 \omega^{2\beta} + 2\tau_\beta \omega^\beta \cos \frac{\beta\pi}{2} + 1}},$$

$$\phi_i^{(d)}(\omega) = -\arctan \frac{\tau_L \omega + \tau_\beta \omega^\beta \sin \frac{\beta\pi}{2}}{\tau_\beta \omega^\beta \cos \frac{\beta\pi}{2} + 1},$$

pošto su  $\cos \phi_i^{(d)}$  i  $\sin \phi_i^{(d)}$  određeni korišćenjem jednačine disipativnog RL kola (3.20) i formule (1.31) za fracioni izvod harmonijske funkcije kada  $t \rightarrow \infty$  kao realni i imaginarni delovi izraza

$$e^{-j\phi_i^{(d)}(\omega)} = \frac{R i_0}{\mathcal{E}_0} \left( \tau_L j\omega + \tau_\beta (j\omega)^\beta + 1 \right),$$

koji implicira

$$\cos \phi_i^{(d)}(\omega) = \frac{R i_0}{\mathcal{E}_0} \left( \tau_\beta \omega^\beta \cos \frac{\beta\pi}{2} + 1 \right),$$

$$\sin \phi_i^{(d)}(\omega) = -\frac{R i_0}{\mathcal{E}_0} \left( \tau_L \omega + \tau_\beta \omega^\beta \sin \frac{\beta\pi}{2} \right),$$

odakle se vidi da je kolo disipativno, odnosno da je njegov karakter induktivan na celom opsegu učestalosti, pošto je  $\cos \phi^{(d)}(\omega) > 0$  i  $\sin \phi^{(d)}(\omega) < 0$  za svako  $\omega$ .

Analogno, u slučaju aktivnog kabela modeliranog konstitutivnom relacijom (2.6), struja generativnog  $RL$  kola je prostoperiodična funkcija amplitude i faznog stava

$$i_0^{(g)}(\omega) = \frac{\mathcal{E}_0}{R} \sqrt{\frac{\frac{\tau_\nu^2}{\tau_L^2} \omega^{2\nu} + 2\frac{\tau_\nu}{\tau_L} \omega^\nu \cos \frac{\nu\pi}{2} + 1}{\tau_\nu^2 \omega^{2+2\nu} - 2\tau_\nu \omega^{1+\nu} \sin \frac{\nu\pi}{2} + \frac{\tau_\nu^2}{\tau_L^2} \omega^{2\nu} + 2\frac{\tau_\nu}{\tau_L} \omega^\nu \cos \frac{\nu\pi}{2} + 1}},$$

$$\phi_i^{(g)}(\omega) = -\arctan \frac{\frac{\tau_\nu}{\tau_L} \omega^{1+2\nu} + \tau_\nu \omega^{1+\nu} \cos \frac{\nu\pi}{2}}{-\tau_\nu \omega^{1+\nu} \sin \frac{\nu\pi}{2} + \frac{\tau_\nu^2}{\tau_L^2} \omega^{2\nu} + 2\frac{\tau_\nu}{\tau_L} \omega^\nu \cos \frac{\nu\pi}{2} + 1},$$

pošto su  $\cos \phi_i^{(g)}$  i  $\sin \phi_i^{(g)}$  određeni korišćenjem jednačine generativnog  $RL$  kola (3.22) i formule (1.28) za integral harmonijske funkcije kada  $t \rightarrow \infty$  kao realni i imaginarni delovi izraza

$$e^{-j\phi_i^{(g)}(\omega)} = \frac{R i_0 \tau_\nu (j\omega)^{1+\nu} + \frac{\tau_\nu}{\tau_L} (j\omega)^\nu + 1}{\mathcal{E}_0 \frac{\tau_\nu}{\tau_L} (j\omega)^\nu + 1},$$

koji implicira

$$\cos \phi_i^{(g)}(\omega) = \frac{R i_0 \frac{-\tau_\nu \omega^{1+\nu} \sin \frac{\nu\pi}{2} + \frac{\tau_\nu^2}{\tau_L^2} \omega^{2\nu} + 2\frac{\tau_\nu}{\tau_L} \omega^\nu \cos \frac{\nu\pi}{2} + 1}{\mathcal{E}_0 \frac{\tau_\nu^2}{\tau_L^2} \omega^{2\nu} + 2\frac{\tau_\nu}{\tau_L} \omega^\nu \cos \frac{\nu\pi}{2} + 1}, \quad (3.59)$$

$$\sin \phi_i^{(g)}(\omega) = -\frac{R i_0 \frac{\tau_\nu}{\tau_L} \omega^{1+2\nu} + \tau_\nu \omega^{1+\nu} \cos \frac{\nu\pi}{2}}{\mathcal{E}_0 \frac{\tau_\nu^2}{\tau_L^2} \omega^{2\nu} + 2\frac{\tau_\nu}{\tau_L} \omega^\nu \cos \frac{\nu\pi}{2} + 1}. \quad (3.60)$$

Što se tiče potrošnje, odnosno proizvodnje energije, zaključuje se da generativno  $RL$  kolo rasipa energiju za niske učestalosti, a generiše je za visoke učestalosti, pošto je

$$\cos \phi_i^{(g)}(\omega) > 0 \quad \text{kada} \quad \omega \rightarrow 0 \quad \text{i} \quad \cos \phi_i^{(g)}(\omega) < 0 \quad \text{kada} \quad \omega \rightarrow \infty,$$

videti (3.59), dok je induktivni karakter dominantan za sve učestalosti, pošto je  $\sin \phi^{(g)}(\omega) < 0$ , za svako  $\omega$ , videti (3.60).

Opsežna analiza frakcionih  $RC$ ,  $RL$  i  $LC$  kola, sa naglaskom na njihovim karakteristikama u prostoperiodičnom režimu, sprovedena je u [52, 53].

### 3.2.3 Numerički primeri

Pretpostavljajući elektromotornu silu u obliku Hevisajdove funkcije  $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 H(t)$ , gde je  $\mathcal{E}_0$  intenzitet elektromotorne sile, struja  $RC$  kola je, prema (3.28)<sub>1</sub>, određena izrazom

$$i(t) = \mathcal{E}_0 (g_i(t) * H(t)) = \mathcal{E}_0 \int_0^t g_i(t') dt', \quad (3.61)$$

gde je impulsni odziv struje dat relacijom (3.29).

Vremenska zavisnost struje frakcionog  $RC$  kola koje sadrži pasivni kondenzator, modeliran konstitutivnom relacijom (2.1), određena je korišćenjem relacije (3.61) i predstavljena je na slici 3.7 zajedno sa vremenskim profilima struja, određenih izrazima

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}_0 \tau_\alpha + e^{-\frac{\tau_\alpha+1}{\tau_C} t}}{R \tau_\alpha + 1} \quad \text{za} \quad \alpha = 0 \quad \text{i} \quad i(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{R} e^{-\frac{1}{\tau_C + \tau_\alpha} t} \quad \text{za} \quad \alpha = 1,$$

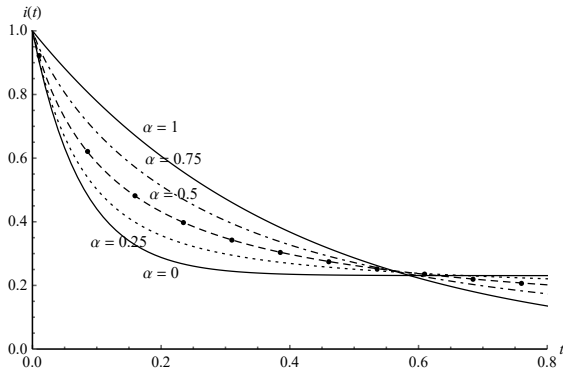
koje odgovaraju klasičnim  $RC$  kolima, odnosno kolima u kojima se frakcioni kondenzator svodi na klasične elemente za granične vrednosti reda frakcionog izvoda  $\alpha$ , videti (2.11) i (2.12). Vremenski profili struje disipativnog  $RC$  kola su monotono opadajuće funkcije vremena, koje kako za kratka tako i za dugačka vremena, leže između odgovarajućih vremenskih profila struja  $RC$  kola koja sadrže klasične elemente, što je očigledno sa slike 3.7. Za malo vreme, struja opada najbrže u slučaju reda frakcionog izvoda  $\alpha = 0$ , dok struja disipativnih  $RC$  kola opada sve sporije kako se povećava red frakcionog izvoda  $\alpha$  i konačno, u



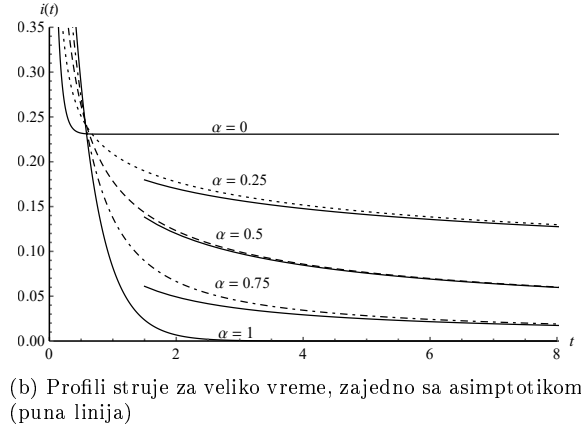
slučaju kada je  $\alpha = 1$ , struja opada najsporije, kao što se vidi sa slike 3.7a. Situacija je obrnuta za veliko vreme, kao što je prikazano na slici 3.7b, pošto je odziv koji odgovara slučaju  $\alpha = 0$  gotovo konstantan, dok odzivi u slučaju kada je  $\alpha \in (0, 1)$ , prema asimptotici

$$i(t) \sim \frac{\mathcal{E}_0}{R} \begin{cases} \tau_\alpha \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} - \tau_\alpha^2 \frac{t^{-2\alpha}}{\Gamma(1-2\alpha)}, & \text{za } \alpha \in (0, \frac{1}{2}), \\ \tau_\alpha \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}, & \text{za } \alpha \in [\frac{1}{2}, 1), \end{cases} \quad \text{kako } t \rightarrow \infty,$$

videti [21], opadaju kao stepena funkcija, a odziv koji odgovara slučaju  $\alpha = 1$  opada eksponencijalno. Primitimo da svi odzivi koji odgovaraju  $\alpha \in (0, 1]$  teže nuli za veliko vreme, osim odziva za  $\alpha = 0$  koji teži konstanti:  $\lim_{t \rightarrow \infty} i(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{R} \frac{\tau_\alpha}{\tau_\alpha + 1}$ .



(a) Profili struje za malo vreme



(b) Profili struje za veliko vreme, zajedno sa asimptotikom (puna linija)

Slika 3.7: Slučaj pasivnog kondenzatora – vremenski profili struje  $RC$  kola kao odgovor na elektromotornu silu u obliku Hevisajdove funkcije intenziteta  $\mathcal{E}_0 = 1$ , dobijeni analitički (linije) i numerički (tačke) za parametre modela:  $R = 1$ ,  $\tau_C = 0.1$  i  $\tau_\alpha = 0.3$ .

Struja generativnog  $RC$  kola koje sadrži aktivni kondenzator, modeliran konstitutivnom relacijom (2.2), kao odziv na elektromotornu silu pretpostavljenu u obliku Hevisajdove funkcije, izračunava se korišćenjem izraza (3.61), a odgovarajući vremenski profili su prikazani na slici 3.8, zajedno sa odzivima određenim izrazima

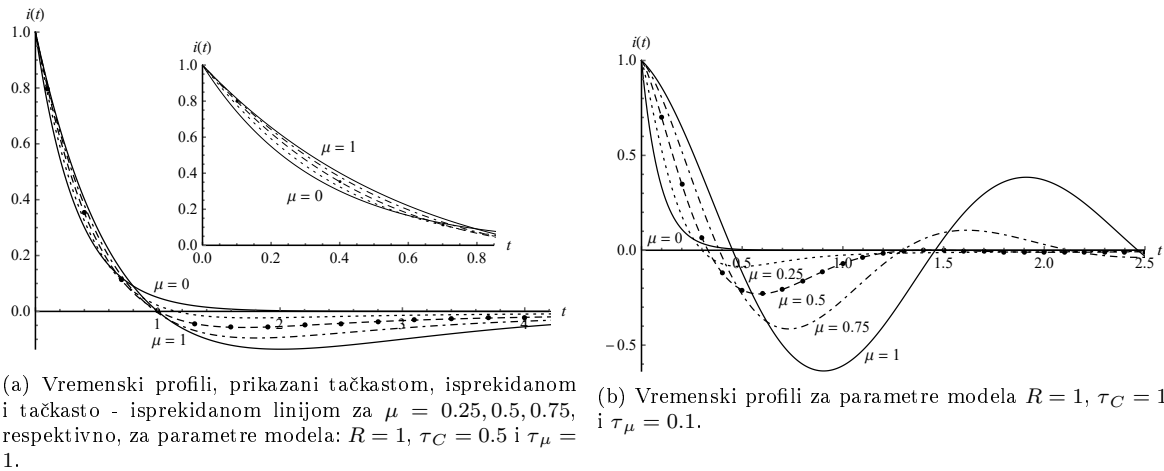
$$i(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{R} e^{-\left(\frac{1}{\tau_C} + \frac{1}{\tau_\mu}\right)t} \quad \text{za } \mu = 0 \quad \text{i} \quad (3.62)$$

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{R} \begin{cases} e^{-\frac{t}{2\tau_C}} \left( \cosh(\lambda t) - \frac{\sinh(\lambda t)}{2\tau_C \lambda} \right), & \lambda = \sqrt{\left(\frac{1}{2\tau_C}\right)^2 - \frac{1}{\tau_\mu}}, \\ (1 - \sigma t) e^{-\sigma t}, & \sigma = \frac{1}{2\tau_C} + \sqrt{\left(\frac{1}{2\tau_C}\right)^2 - \frac{1}{\tau_\mu}}, \quad \text{za } \mu = 1, \\ e^{-\frac{t}{2\tau_C}} \left( \cos(\omega t) - \frac{\sin(\omega t)}{2\tau_C \omega} \right), & \omega = \sqrt{\frac{1}{\tau_\mu} - \left(\frac{1}{2\tau_C}\right)^2}, \end{cases} \quad (3.63)$$

koji odgovaraju  $RC$  kolima u kojima se za granične vrednosti reda frakcionog integrala  $\mu$  frakcioni kondenzator svodi ili na klasični ili na element sa uniformnom memorijom, videti (2.24) i (2.25).

Slično prethodnom slučaju, ukoliko je red frakcionog integrala  $\mu \in (0, 1)$ , odnosno u slučaju generativnog  $RC$  kola, vremenski profili struje leže između profila koji odgovaraju graničnim slučajevima reda frakcionog integrala  $\mu = 0$  i  $\mu = 1$ , određenih prema izrazima (3.62) i (3.63) respektivno, kao što je i prikazano na slici 3.8. Klasično  $RC$  kolo, prema (3.62), ima monotoni eksponencijalno opadajući odziv za bilo koje vrednosti parametara modela, dok u slučaju  $RC$  kola sa uniformnom memorijom, prema (3.63), parametri modela određuju da li je odziv aperiodičan ili oscilatoran, tako da je odziv sa slike 3.8a, dobijen korišćenjem (3.63)<sub>1</sub>, aperiodičan, ali nemonoton, dok odziv sa slike 3.8b, dobijen iz (3.63)<sub>2</sub>, ima prigušeni oscilatorni karakter. Odziv generativnog  $RC$  kola pokazuje prigušeno oscilatorno ponašanje, videti krive za  $\mu = 0.5$  i  $\mu = 0.75$  na slici 3.8b, čije se oscilacije mogu umanjiti toliko da je prisutan samo jedan minimum, videti sve krive sa slike 3.8a i krivu za  $\mu = 0.25$  sa slike 3.8b.

Sa slika 3.7 i 3.8 je očigledno da postoji savršeno poklapanje između krivih koje su dobijene pomoću analitičkih izraza i onih koje su računane pomoću Talbotovog algoritma za numeričku inverziju Laplasove



Slika 3.8: Slučaj aktivnog kondenzatora – vremenski profili struje  $RC$  kola kao odgovor na elektromotornu silu u obliku Hevisajdove funkcije intenziteta  $\mathcal{E}_0 = 1$ , dobijeni analitički (linije) i numerički (tačke).

transformacije, koji su razvili J. Abate i P. P. Valkó u [1] i čija je implementacija u programskom paketu *Mathematica* dostupna na: <http://library.wolfram.com/infocenter/MathSource/4738/>.

Pretpostavljajući elektromotornu silu u obliku harmonijske funkcije vremena

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t)$$

i prikazujući vremenske profile struje, na slikama 3.9 i 3.10 je ilustrovan prelazak disipativnog i generativnog  $RC$  kola iz tranzijentnog u kvazistacionarni režim. Struja u prelaznom režimu, kao odziv kola na harmonijsku elektromotornu silu, se izračunava prema (3.28) u obliku

$$i(t) = \mathcal{E}_0 (g_i(t) * \cos(\omega t)) = \frac{\mathcal{E}_0}{R} \cos(\omega t) - \frac{\mathcal{E}_0}{R} \int_0^t g_C(t-t') \cos(\omega t') dt', \quad (3.64)$$

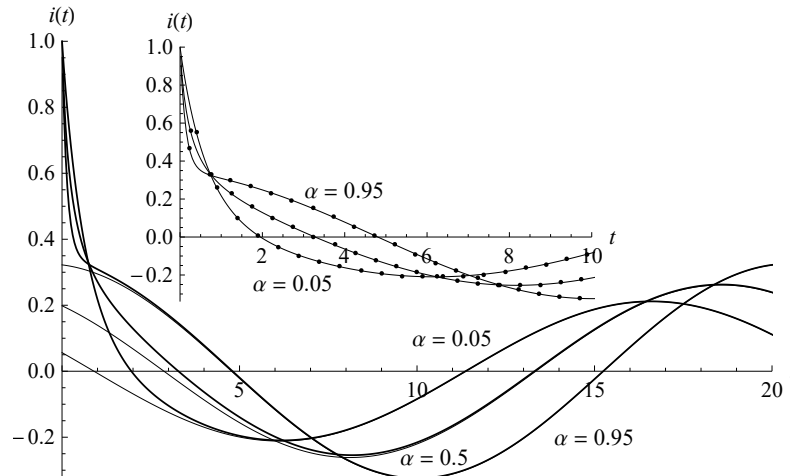
pošto impulsni odzivi struje  $g_i$  imaju oblik (3.29), a impulsni odzivi napona  $g_C$  su dati sa (3.30) u slučaju disipativnog  $RC$  kola i (3.31) u slučaju generativnog  $RC$  kola. Realni deo izraza (3.48) za struju pretpostavljenu u obliku harmonijske funkcije, određen relacijom

$$i(t) = i_0 \cos(\omega t + \phi_i), \quad (3.65)$$

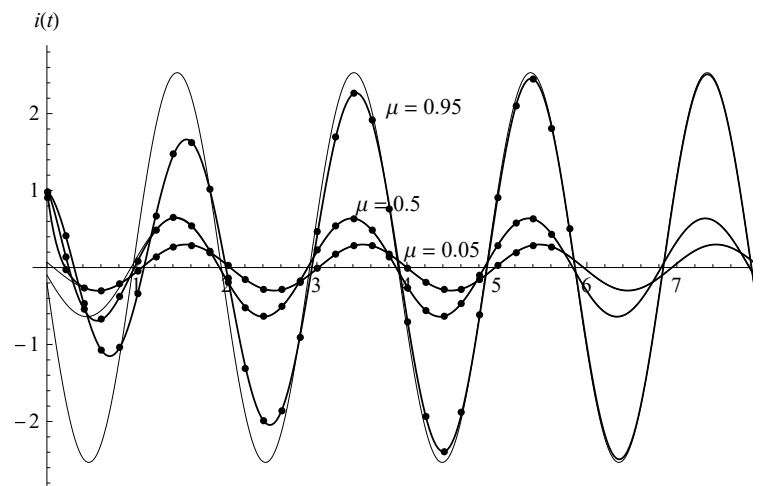
predstavlja struju  $RC$  kola u kvazistacionarnom režimu, gde je amplituda struje  $i_0$  data izrazima (3.52) i (3.57), dok je fazni ugao  $\phi_i$  dat izrazima (3.53) i (3.58) u slučaju disipativnog i generativnog  $RC$  kola, respektivno.

Sa slike 3.9 je očigledno da disipativno  $RC$  kolo prilično brzo ulazi u kvazistacionarni režim, bez obzira na vrednost reda frakcionog izvoda  $\alpha$ , pošto se krive koje odgovaraju prelaznom i kvazistacionarnom režimu preklapaju čak i za malo vreme, što je verovatno posledica potpune monotonosti impulsnog odziva  $g_C^{(d)}$ . Evidentno je i dobro slaganje između krivih dobijenih pomoću analitičkih izraza za prelazni režim i krivih dobijenih numeričkim postupkom inverzije Laplasove transformacije.

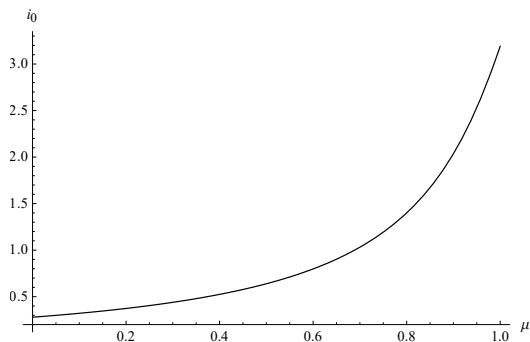
Vremenski profili struje generativnog  $RC$  kola, kao i amplituda i fazni ugao struje, prikazani su na slici 3.10 za različite vrednosti reda frakcionog integrala  $\mu$  i fiksnu vrednost ugaone učestalosti. Slično kao i u slučaju disipativnog  $RC$  kola, vremenski profili struje koji odgovaraju prelaznim i kvazistacionarnim odzivima poklapaju se već i za malo vreme u slučaju malih vrednosti parametra  $\mu$ , dok sa povećanjem vrednosti parametra  $\mu$  raste i vreme potrebno za ulazak generativnog  $RC$  kola u kvazistacionarni režim, kao što se vidi sa slike 3.10a. Ponovo se uočava dobro slaganje između krivih dobijenih analitičkim i numeričkim postupkom. Utvrđeno je da amplituda struje, prikazana na slici 3.10b, monotono raste sa povećanjem parametra  $\mu$ , dok, kao što se može videti sa slike 3.10c, vrednost faznog ugla dostiže maksimum u tački  $(\mu, \phi_i) = (0.75286, 0.579321\pi)$  koja leži na intervalu  $\mu \in [0.299579, 0.979149]$  u kome su vrednosti faznog ugla  $\phi_i$  veće od  $\frac{\pi}{2}$ , što znači da se otpornik i aktivni kondenzator u ovom intervalu parametra  $\mu$  zajedno ponašaju kao generativni element, pošto je  $\cos \phi_i < 0$ .



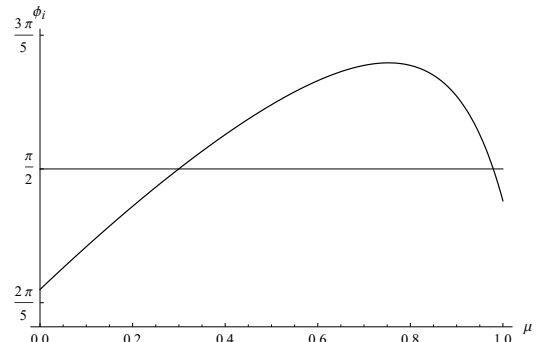
Slika 3.9: Vremenski profili struje disipativnog  $RC$  kola, kao odgovor na elektromotornu silu u obliku kosinusne funkcije amplitude  $\mathcal{E}_0 = 1$  i ugaone učestalosti  $\omega = 0.3$ , dobijeni pomoću analitičkog izraza (3.64) (puna linija) i numerički (tačke) u prelaznom režimu i pomoću analitičkog izraza (3.65) (tanka linija) u kvazistacionarnom režimu za parametre modela:  $R = 1$ ,  $\tau_C = 0.2$  i  $\tau_\alpha = 0.5$ .



(a) Vremenski profili struje dobijeni pomoću analitičkog izraza (3.64) (puna linija) i numerički (tačke) u prelaznom režimu i pomoću analitičkog izraza (3.65) (tanka linija) u kvazistacionarnom režimu.



(b) Amplituda struje u zavisnosti od parametra  $\mu$ .



(c) Fazni ugao struje u zavisnosti od parametra  $\mu$ .

Slika 3.10: Struja generativnog  $RC$  kola, kao odgovor na elektromotornu silu u obliku kosinusne funkcije amplitude  $\mathcal{E}_0 = 1$  i ugaone učestalosti  $\omega = 3.2$ , dobijena za parametre modela:  $R = 1$ ,  $\tau_C = 1$  i  $\tau_\mu = 0.1$ .

### 3.3 Frekvencijske karakteristike frakcionih RC kola

Frekvencijske karakteristike RC kola, koje sadrži ili pasivni ili aktivni kondenzator, analiziraju se korišćenjem funkcije prenosa

$$\hat{g}_R^{(\text{RC-d,RC-g})} = R \hat{g}_i^{(\text{RC-d,RC-g})}, \quad (3.66)$$

koja odgovara naponu na otporniku  $u_R$ , gde su  $\hat{g}_i^{(\text{RC-d,RC-g})}$  funkcije prenosa koje odgovaraju struji RC kola i date su izrazima (3.4) i (3.8), ili tačnije, korišćenjem modula i argumenta funkcije prenosa  $\hat{g}_R^{(\text{RC-d,RC-g})}$ . Kako su navedene funkcije prenosa date u kompleksnom domenu, za određivanje modula i argumenta funkcije prenosa u frekvencijskom domenu, potrebno je izvršiti smenu  $s = j\omega$  u funkcijama prenosa  $\hat{g}_R^{(\text{RC-d,RC-g})}$ . Kako frekvencijske karakteristike zapravo opisuju kolo u kvazistacionarnom režimu, za određivanje modula i argumenta funkcije prenosa koristiće se već izvedeni izrazi, kako za amplitudu struje  $i_0^{(\text{d})}$  i fazni ugao  $\phi_i^{(\text{d})}$  disipativnog RC kola u kvazistacionarnom režimu, određeni relacijama (3.52) i (3.53), tako i izrazi za amplitudu struje  $i_0^{(\text{g})}$  i fazni ugao  $\phi_i^{(\text{g})}$  generativnog RC kola u kvazistacionarnom režimu, određeni relacijama (3.57) i (3.58), koji moduo i argument funkcije prenosa  $\hat{g}_R^{(\text{RC-d,RC-g})}$  daju u obliku

$$\begin{aligned} \left| \hat{g}_R^{(\text{RC-d,RC-g})}(\omega) \right| &= \frac{u_{R0}^{(\text{d,g})}(\omega)}{\mathcal{E}_0} = \frac{R}{\mathcal{E}_0} i_0^{(\text{d,g})}(\omega) \quad \text{i} \\ \arg \hat{g}_R^{(\text{RC-d,RC-g})}(\omega) &= \arg \hat{g}_i^{(\text{RC-d,RC-g})}(\omega) = \phi_i^{(\text{d,g})}(\omega), \end{aligned} \quad (3.67)$$

gde su iskorišćeni izrazi (3.4) i (3.8), kojima je definisana funkcija prenosa, kao i izrazi (3.47) i (3.48) za elektromotornu silu i struju kola u kvazistacionarnom režimu.

Moduo i argument funkcije prenosa  $\hat{g}_R^{(\text{RC-d})}$  disipativnog RC kola, prema relaciji (3.67), uz izraze (3.52) i (3.53), dobijaju se u obliku

$$\begin{aligned} \left| \hat{g}_R^{(\text{RC-d})}(\omega) \right|_{\text{dB}} &= 20 \log \left| \hat{g}_R^{(\text{RC-d})}(\omega) \right| \\ &= 10 \log \left( 1 - \frac{2\tau_\alpha \omega^\alpha \cos \frac{\alpha\pi}{2} + 1}{\tau_C^2 \omega^2 + 2\tau_C \tau_\alpha \omega^{1+\alpha} \sin \frac{\alpha\pi}{2} + \tau_\alpha^2 \omega^{2\alpha} + 2\tau_\alpha \omega^\alpha \cos \frac{\alpha\pi}{2} + 1} \right) \quad \text{i} \end{aligned} \quad (3.68)$$

$$\arg \hat{g}_R^{(\text{RC-d})}(\omega) = \arctan \frac{\tau_C \omega + \tau_\alpha \omega^\alpha \sin \frac{\alpha\pi}{2}}{\tau_C^2 \omega^2 + 2\tau_C \tau_\alpha \omega^{1+\alpha} \sin \frac{\alpha\pi}{2} + \tau_\alpha^2 \omega^{2\alpha} + \tau_\alpha \omega^\alpha \cos \frac{\alpha\pi}{2}}, \quad (3.69)$$

dok su moduo i argument funkcije prenosa  $\hat{g}_R^{(\text{RC-g})}$  generativnog RC kola, prema relaciji (3.67), uz korišćenje (3.57) i (3.58), dati izrazima

$$\begin{aligned} \left| \hat{g}_R^{(\text{RC-g})}(\omega) \right|_{\text{dB}} &= 20 \log \left| \hat{g}_R^{(\text{RC-g})}(\omega) \right| \\ &= -10 \log \left( 1 - 2 \frac{1}{\tau_\mu \omega^{1+\mu}} \sin \frac{\mu\pi}{2} + \frac{1}{\tau_C^2 \omega^2} + 2 \frac{1}{\tau_C \tau_\mu \omega^{2+\mu}} \cos \frac{\mu\pi}{2} + \frac{1}{\tau_\mu^2 \omega^{2+2\mu}} \right) \quad \text{i} \end{aligned} \quad (3.70)$$

$$\arg \hat{g}_R^{(\text{RC-g})}(\omega) = \arctan \frac{\frac{1}{\tau_C \omega} + \frac{1}{\tau_\mu \omega^{1+\mu}} \cos \frac{\mu\pi}{2}}{1 - \frac{1}{\tau_\mu \omega^{1+\mu}} \sin \frac{\mu\pi}{2}} = \arctan \frac{\tau_\mu \omega^\mu + \tau_C \cos \frac{\mu\pi}{2}}{\tau_C \tau_\mu \omega^{1+\mu} - \tau_C \sin \frac{\mu\pi}{2}}. \quad (3.71)$$

U slučaju RL kola, usled analogije između fizičkih veličina RL i RC kola o kojoj se govori u odeljku 3.1, frekvencijske karakteristike funkcija prenosa koje odgovaraju naponu na kalemu  $\hat{g}_L^{(\text{d,g})}$  imaju isti oblik kao frekvencijske karakteristike funkcija prenosa  $\hat{g}_R^{(\text{RC-d,RC-g})}$ , koje su date sa (3.66), dok frekvencijske karakteristike funkcija prenosa koje odgovaraju struji RL kola imaju isti oblik kao frekvencijske karakteristike funkcija prenosa koje odgovaraju naponu na kondenzatoru u RC kolu.

U slučaju disipativnog RC kola, asimptotsko ponašanje modula funkcije prenosa  $\left| \hat{g}_R^{(\text{RC-d})} \right|_{\text{dB}}$  za niske učestalosti je opisano relacijom

$$\left| \hat{g}_R^{(\text{RC-d})}(\omega) \right|_{\text{dB}} \sim 10 \log \begin{cases} \tau_\alpha^2 \omega^{2\alpha} - 2\tau_\alpha^3 \omega^{3\alpha} \cos \frac{\alpha\pi}{2}, & \text{ako } \alpha \in (0, \frac{1}{2}), \\ \tau_\alpha^2 \omega - \sqrt{2}\tau_\alpha \omega^{\frac{3}{2}}(\tau_\alpha^2 - \tau_C), & \text{ako } \alpha = \frac{1}{2}, \\ \tau_\alpha^2 \omega^{2\alpha} + 2\tau_\alpha \tau_C \omega^{1+\alpha} \sin \frac{\alpha\pi}{2}, & \text{ako } \alpha \in (\frac{1}{2}, 1), \end{cases} \quad \text{kada } \omega \rightarrow 0, \quad (3.72)$$

dobijenom iz izraza

$$10 \frac{1}{10} \left| \hat{g}_R^{(\text{RC-d})}(\omega) \right|_{\text{dB}} = 1 - \left( 1 + 2\tau_\alpha \omega^\alpha \cos \frac{\alpha\pi}{2} \right)$$

$$\begin{aligned}
& \times \left( 1 - 2\tau_\alpha \omega^\alpha \cos \frac{\alpha\pi}{2} - \tau_\alpha^2 \omega^{2\alpha} - 2\tau_C \tau_\alpha \omega^{1+\alpha} \sin \frac{\alpha\pi}{2} - \tau_C^2 \omega^2 \right. \\
& \quad \left. + 4\tau_\alpha^2 \omega^{2\alpha} \cos^2 \frac{\alpha\pi}{2} + 4\tau_\alpha^3 \omega^{3\alpha} \cos \frac{\alpha\pi}{2} + \dots - 8\tau_\alpha^3 \omega^{3\alpha} \cos^3 \frac{\alpha\pi}{2} + \dots \right) \\
& \sim \tau_\alpha^2 \omega^{2\alpha} - 2\tau_\alpha^3 \omega^{3\alpha} \cos \frac{\alpha\pi}{2} + 2\tau_C \tau_\alpha \omega^{1+\alpha} \sin \frac{\alpha\pi}{2} \quad \text{kada } \omega \rightarrow 0,
\end{aligned}$$

koji sledi iz izraza (3.68), korišćenjem razvoja u red

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots \quad (3.73)$$

i zanemarivanjem članova višeg reda, dok je asimptotika modula funkcije prenosa  $\left| \hat{g}_R^{(\text{RC-d})} \right|_{\text{dB}}$  u slučaju visokih učestalosti

$$\left| \hat{g}_R^{(\text{RC-d})}(\omega) \right|_{\text{dB}} \sim 10 \log \begin{cases} 1 - \frac{1}{\tau_C^2 \omega^2} (2\tau_\alpha \omega^\alpha \cos \frac{\alpha\pi}{2} + 1), & \text{ako } \alpha \in (0, \frac{1}{2}), \\ 1 - \frac{1}{\tau_C^2 \omega^2} (2\tau_\alpha \omega^\alpha \cos \frac{\alpha\pi}{2} - 2\frac{\tau_\alpha^2}{\tau_C} \omega^{2\alpha-1} \sin(\alpha\pi) + 1), & \text{ako } \alpha \in [\frac{1}{2}, \frac{2}{3}), \\ 1 - \frac{1}{\tau_C^2 \omega^2} (2\tau_\alpha \omega^\alpha \cos \frac{\alpha\pi}{2} - 2\frac{\tau_\alpha^2}{\tau_C} \omega^{2\alpha-1} \sin(\alpha\pi) + 2\frac{\tau_\alpha^3}{\tau_C^2} \omega^{3\alpha-2} \cos \frac{\alpha\pi}{2} (4 \sin^2 \frac{\alpha\pi}{2} - 1) + 1), & \text{ako } \alpha \in [\frac{2}{3}, 1), \end{cases} \quad (3.74)$$

kada  $\omega \rightarrow \infty$ , dobijena na osnovu izraza

$$\begin{aligned}
10^{\frac{1}{10}} \left| \hat{g}_R^{(\text{RC-d})}(\omega) \right|_{\text{dB}} &= 1 - \frac{1}{\tau_C^2 \omega^2} \frac{1 + 2\tau_\alpha \omega^\alpha \cos \frac{\alpha\pi}{2}}{1 + 2\frac{\tau_\alpha}{\tau_C} \omega^{1-\alpha} \sin \frac{\alpha\pi}{2} + \frac{\tau_\alpha^2}{\tau_C^2} \omega^{2(1-\alpha)} + 2\frac{\tau_\alpha}{\tau_C} \omega^{2-\alpha} \cos \frac{\alpha\pi}{2} + \frac{1}{\tau_C^2 \omega^2}} \\
&= 1 - \frac{1}{\tau_C^2 \omega^2} \left( 1 + 2\tau_\alpha \omega^\alpha \cos \frac{\alpha\pi}{2} \right) \\
& \quad \times \left( 1 - 2\frac{\tau_\alpha}{\tau_C} \omega^{1-\alpha} \sin \frac{\alpha\pi}{2} - \frac{\tau_\alpha^2}{\tau_C^2} \omega^{2(1-\alpha)} - 2\frac{\tau_\alpha}{\tau_C} \omega^{2-\alpha} \cos \frac{\alpha\pi}{2} - \frac{1}{\tau_C^2 \omega^2} \right. \\
& \quad \left. + 4\frac{\tau_\alpha^2}{\tau_C^2} \omega^{2(1-\alpha)} \sin^2 \frac{\alpha\pi}{2} + \dots \right) \\
&\sim 1 - \frac{1}{\tau_C^2 \omega^2} \left( 2\tau_\alpha \omega^\alpha \cos \frac{\alpha\pi}{2} - 2\frac{\tau_\alpha^2}{\tau_C} \omega^{2\alpha-1} \sin(\alpha\pi) \right. \\
& \quad \left. + 2\frac{\tau_\alpha^3}{\tau_C^2} \omega^{3\alpha-2} \cos \frac{\alpha\pi}{2} (4 \sin^2 \frac{\alpha\pi}{2} - 1) + 1 \right) \quad \text{kada } \omega \rightarrow \infty, \quad (3.75)
\end{aligned}$$

uz zanemarenje članova u zagradi sa negativnim stepenom, pri čemu je izraz (3.75) izveden upotrebom relacije (3.68) uz korišćenje razvoja u red (3.73) do kvadratnih članova, gde su članovi višeg reda zanemareni.

Asimptotski razvoj izraza za argument funkcije prenosa  $\arg \hat{g}_R^{(\text{RC-d})}$  u slučaju niskih učestalosti

$$\arg \hat{g}_R^{(\text{RC-d})}(\omega) \sim \arctan \begin{cases} \tan \frac{\alpha\pi}{2} \left( 1 - \tau_\alpha \omega^\alpha \frac{1}{\cos \frac{\alpha\pi}{2}} + \tau_\alpha^2 \omega^{2\alpha} \frac{1}{\cos^2 \frac{\alpha\pi}{2}} \right), & \text{ako } \alpha \in (0, \frac{1}{3}), \\ \tan \frac{\alpha\pi}{2} \left( 1 - \tau_\alpha \omega^\alpha \frac{1}{\cos \frac{\alpha\pi}{2}} + \frac{\tau_C}{\tau_\alpha} \omega^{1-\alpha} \frac{1}{\sin \frac{\alpha\pi}{2}} + \tau_\alpha^2 \omega^{2\alpha} \frac{1}{\cos^2 \frac{\alpha\pi}{2}} \right), & \text{ako } \alpha \in [\frac{1}{3}, \frac{1}{2}), \\ \tan \frac{\alpha\pi}{2} \left( 1 + \frac{\tau_C}{\tau_\alpha} \omega^{1-\alpha} \frac{1}{\sin \frac{\alpha\pi}{2}} - \tau_\alpha \omega^\alpha \frac{1}{\cos \frac{\alpha\pi}{2}} \right), & \text{ako } \alpha \in [\frac{1}{2}, 1), \end{cases} \quad \text{kada } \omega \rightarrow 0, \quad (3.76)$$

dobijen je na osnovu izraza

$$\begin{aligned}
\tan \arg \hat{g}_R^{(\text{RC-d})}(\omega) &= \tan \frac{\alpha\pi}{2} \frac{1 + \frac{\tau_C}{\tau_\alpha} \omega^{1-\alpha} \frac{1}{\sin \frac{\alpha\pi}{2}}}{1 + \tau_\alpha \omega^\alpha \frac{1}{\cos \frac{\alpha\pi}{2}} + 2\tau_C \omega \tan \frac{\alpha\pi}{2} + \frac{\tau_C^2}{\tau_\alpha} \omega^{2-\alpha} \frac{1}{\cos \frac{\alpha\pi}{2}}} \\
&= \tan \frac{\alpha\pi}{2} \left( 1 + \frac{\tau_C}{\tau_\alpha} \omega^{1-\alpha} \frac{1}{\sin \frac{\alpha\pi}{2}} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \left( 1 - \tau_\alpha \omega^\alpha \frac{1}{\cos \frac{\alpha\pi}{2}} - 2\tau_C \omega \tan \frac{\alpha\pi}{2} - \frac{\tau_C^2}{\tau_\alpha} \omega^{2-\alpha} \frac{1}{\cos \frac{\alpha\pi}{2}} + \tau_\alpha^2 \omega^{2\alpha} \frac{1}{\cos^2 \frac{\alpha\pi}{2}} + \dots \right) \\ & \sim \tan \frac{\alpha\pi}{2} \left( 1 - \tau_\alpha \omega^\alpha \frac{1}{\cos \frac{\alpha\pi}{2}} + \tau_\alpha^2 \omega^{2\alpha} \frac{1}{\cos^2 \frac{\alpha\pi}{2}} + \frac{\tau_C}{\tau_\alpha} \omega^{1-\alpha} \frac{1}{\sin \frac{\alpha\pi}{2}} \right) \quad \text{kada } \omega \rightarrow 0, \end{aligned}$$

koji sledi iz relacije (3.69) korišćenjem razvoja u red (3.73) do članova drugog reda, zanemarujući članove višeg reda i zadržavanjem članova koji imaju dominantan doprinos, dok se argument funkcije prenosa  $\arg \hat{g}_R^{(\text{RC-d})}$ , dat izrazom (3.69), za visoke učestalosti transformiše u

$$\begin{aligned} \tan \arg \hat{g}_R^{(\text{RC-d})}(\omega) &= \frac{1}{\tau_C \omega} \frac{1 + \frac{\tau_\alpha}{\tau_C} \frac{1}{\omega^{1-\alpha}} \sin \frac{\alpha\pi}{2}}{1 + 2 \frac{\tau_\alpha}{\tau_C} \frac{1}{\omega^{1-\alpha}} \sin \frac{\alpha\pi}{2} + \frac{\tau_C^2}{\tau_\alpha^2} \frac{1}{\omega^{2(1-\alpha)}} + \frac{\tau_C}{\tau_\alpha} \frac{1}{\omega^{2-\alpha}} \cos \frac{\alpha\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{\tau_C \omega} \left( 1 + \frac{\tau_\alpha}{\tau_C} \frac{1}{\omega^{1-\alpha}} \sin \frac{\alpha\pi}{2} \right) \\ & \quad \times \left( 1 - 2 \frac{\tau_\alpha}{\tau_C} \frac{1}{\omega^{1-\alpha}} \sin \frac{\alpha\pi}{2} - \frac{\tau_C^2}{\tau_\alpha^2} \frac{1}{\omega^{2(1-\alpha)}} - \frac{\tau_C}{\tau_\alpha} \frac{1}{\omega^{2-\alpha}} \cos \frac{\alpha\pi}{2} \right) \\ & \sim \frac{1}{\tau_C \omega} \left( 1 - \frac{\tau_\alpha}{\tau_C} \frac{1}{\omega^{1-\alpha}} \sin \frac{\alpha\pi}{2} \right) \quad \text{kada } \omega \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

pri čemu je takođe korišćen izaz za razvoj u red (3.73) do linearnih članova, dok su članovi višeg reda zanemareni, dajući tako asimptotski razvoj argumenta funkcije prenosa

$$\arg \hat{g}_R^{(\text{RC-d})}(\omega) \sim \arctan \left( \frac{1}{\tau_C \omega} \left( 1 - \frac{\tau_\alpha}{\tau_C} \frac{1}{\omega^{1-\alpha}} \sin \frac{\alpha\pi}{2} \right) \right) \quad \text{kada } \omega \rightarrow \infty. \quad (3.77)$$

Očigledno, zadržavajući samo vodeće članove u izrazima (3.72) i (3.74) za asimptotiku modula, kao i izrazima (3.76) i (3.77) za asimptotiku argumenta funkcije prenosa, dobija se

$$\left| \hat{g}_R^{(\text{RC-d})}(\omega) \right|_{\text{dB}} \sim 20\alpha \log \omega + 20 \log \tau_\alpha \quad \text{i} \quad \arg \hat{g}_R^{(\text{RC-d})}(\omega) \sim \frac{\alpha\pi}{2} \quad \text{kada } \omega \rightarrow 0, \quad (3.78)$$

$$\left| \hat{g}_R^{(\text{RC-d})}(\omega) \right|_{\text{dB}} \sim 0 \quad \text{i} \quad \arg \hat{g}_R^{(\text{RC-d})}(\omega) \sim \arctan \frac{1}{\tau_C \omega} \sim \frac{1}{\tau_C \omega} \quad \text{kada } \omega \rightarrow \infty, \quad (3.79)$$

pošto se  $\arctan x \sim x$  za  $x \ll 1$ , odakle sledi da je za niske učestalosti moduo funkcije prenosa linearna funkcija  $\log \omega$ , koja ima nagib proporcionalan redu frakcionog izvoda  $\alpha$  i odsečak srazmeran frakcionoj vremenskoj konstanti  $\tau_\alpha$ , dok je argument funkcije prenosa srazmeran parametru  $\alpha$ . U slučaju visokih učestalosti, argument funkcije prenosa teži nuli kao hiperbolična funkcija sa koeficijentom obrnuto srazmernim klasičnoj vremenskoj konstanti  $\tau_C$ .

Asimptotika modula funkcije prenosa  $\left| \hat{g}_R^{(\text{RC-g})} \right|_{\text{dB}}$  koja odgovara generativnom RC kolu

$$\left| \hat{g}_R^{(\text{RC-g})}(\omega) \right|_{\text{dB}} \sim -10 \log \begin{cases} \frac{1}{\tau_\mu^2 \omega^{2+2\mu}} + 2 \frac{1}{\tau_C \tau_\mu \omega^{2+\mu}} \cos \frac{\mu\pi}{2}, & \text{kada } \omega \rightarrow 0, \\ 1 - 2 \frac{1}{\tau_\mu \omega^{1+\mu}} \sin \frac{\mu\pi}{2}, & \text{kada } \omega \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (3.80)$$

se lako dobija iz (3.70) zadržavanjem dva člana najvišeg stepena za niske učestalosti i dva člana najnižeg stepena za visoke učestalosti, dok se argument funkcije prenosa  $\arg \hat{g}_R^{(\text{RC-g})}$ , dat izrazom (3.71), može zapisati u obliku

$$\arg \hat{g}_R^{(\text{RC-g})}(\omega) \sim \arctan \begin{cases} \tan \frac{(1+\mu)\pi}{2} \left( 1 + \frac{\tau_\mu}{\tau_C} \omega^\mu \frac{1}{\cos \frac{\mu\pi}{2}} \right), & \text{kada } \omega \rightarrow 0, \\ \frac{1}{\tau_C \omega} \left( 1 + \frac{\tau_C}{\tau_\mu} \frac{1}{\omega^\mu} \cos \frac{\mu\pi}{2} \right), & \text{kada } \omega \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (3.81)$$

zanemarivanjem odgovarajućih članova u imeniocu  $\tan \arg \hat{g}_R^{(\text{RC-g})}$ :  $\tau_C \tau_\mu \omega^{1+\mu}$  u slučaju niskih, odnosno člana  $\tau_C \sin \frac{\mu\pi}{2}$  u slučaju visokih učestalosti.

Zadržavanjem vodećih članova u izrazu (3.80) za asimptotiku modula funkcije prenosa i izrazu (3.81) za asimptotiku argumenta funkcije prenosa, dobija se

$$\left| \hat{g}_R^{(\text{RC-g})}(\omega) \right|_{\text{dB}} \sim 20(1+\mu) \log \omega + 20 \log \tau_\mu \quad \text{i} \quad \arg \hat{g}_R^{(\text{RC-g})}(\omega) \sim \frac{(1+\mu)\pi}{2} \quad \text{kada } \omega \rightarrow 0, \quad (3.82)$$

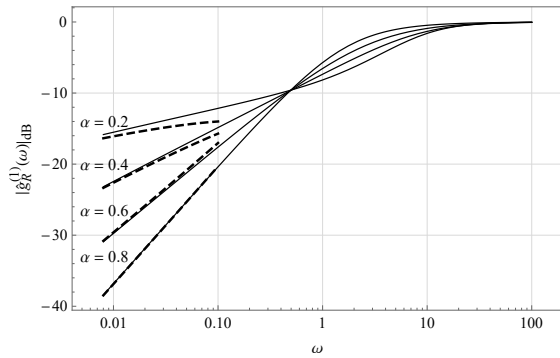
$$\left| \hat{g}_R^{(\text{RC-g})}(\omega) \right|_{\text{dB}} \sim 0 \quad \text{i} \quad \arg \hat{g}_R^{(\text{RC-g})}(\omega) \sim \arctan \frac{1}{\tau_C \omega} \sim \frac{1}{\tau_C \omega} \quad \text{kada } \omega \rightarrow \infty, \quad (3.83)$$

pošto se  $\arctan x \sim x$  kada je  $x \ll 1$ , odakle ponovo sledi da je za niske učestalosti modul funkcije prenosa linearna funkcija  $\log \omega$ , koja ima nagib srazmeran redu frakcionog integrala  $1 + \mu$  i odsečak koji je proporcionalan frakcionoj vremenskoj konstanti  $\tau_\mu$ , dok je argument funkcije prenosa proporcionalan parametru  $\mu$ . U slučaju visokih učestalosti, kao i ranije, argument funkcije prenosa teži nuli kao hiperbolična funkcija sa koeficijentom obrnuto srazmernim klasičnoj vremenskoj konstanti  $\tau_C$ .

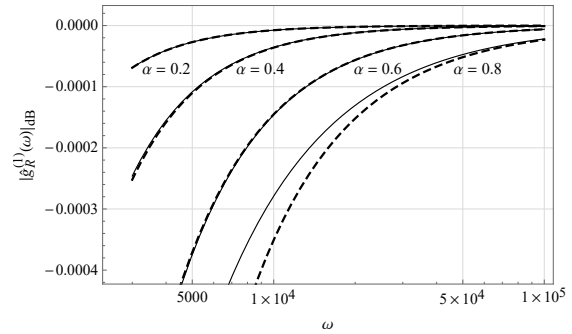
Stoga, bez obzira na činjenicu da li RC kolo sadrži pasivni ili aktivni kondenzator, parametri modela se mogu lako proceniti na osnovu izraza koji opisuju asimptotsko ponašanje modula i argumenta funkcije prenosa.

Bodeovi dijagrami, odnosno frekvencijske karakteristike koje odgovaraju disipativnom RC kolu, zajedno sa asimptotikom, prikazani su na slici 3.11. Kao što se i moglo očekivati na osnovu oblika funkcije prenosa  $\hat{g}_R^{(RC-d)}$ , videti izraze (3.4) i (3.66), njen moduo ima nulu necelog reda u koordinatnom početku, što potvrđuje i frekvencijska karakteristika modula funkcije prenosa, koja linearno opada i teži u minus beskonačnost za niske učestalosti, kao što je i predviđeno asimptotskim razvojem (3.78)<sub>1</sub> i kao što se vidi sa slike 3.11a. Moduo funkcije prenosa sa porastom učestalosti monotono raste i teži nuli za visoke učestalosti u skladu sa asimptotikom (3.74), bez obzira na vrednost reda frakcionog izvoda  $\alpha$ , kao što je očigledno sa slike 3.11b. Iako to nije slučaj, takvo ponašanje frekvencijske karakteristike za visoke učestalosti, može se tumačiti kao da funkcija prenosa ima realni pol istog reda kao i njena nula u koordinatnom početku.

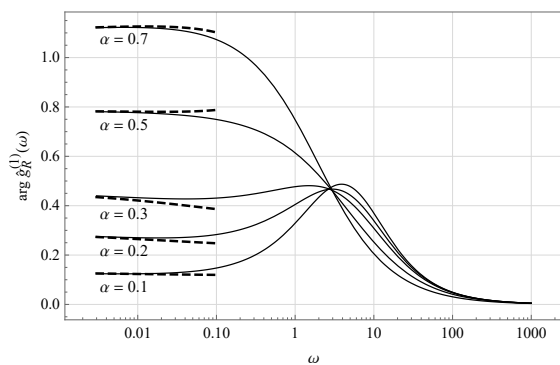
Sa druge strane, frekvencijske karakteristike argumenta funkcije prenosa se sa porastom parametra  $\alpha$  menjaju od nemonotonih funkcija, koje dostižu maksimum, do monotono opadajućih funkcija, videti sliku 3.11c. Asimptotika za niske učestalosti argumenta funkcije prenosa (3.78)<sub>2</sub> pokazuje da frekvencijske karakteristike sa slike 3.11c imaju konstantnu vrednost koja zavisi od parametra  $\alpha$ , potvrđujući zaključak o nulama necelog reda u koordinatnom početku, izveden iz asimptotike modula funkcije prenosa. Slika 3.11d prikazuje argument funkcije prenosa, zajedno sa njegovom asimptotikom, koji teži nuli za visoke učestalosti bez obzira na vrednost parametra  $\alpha$ , što ponovo može navesti na pogrešan zaključak o polovima funkcije prenosa.



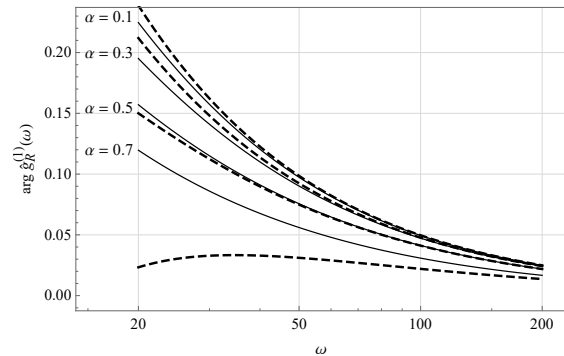
(a) Moduo funkcije prenosa (puna linija) i odgovarajuća asimptotika za niske učestalosti (isprekidana linija).



(b) Uvećan detalj modula funkcije prenosa (puna linija) i odgovarajuća asimptotika (isprekidana linija) za visoke učestalosti.



(c) Argument funkcije prenosa (puna linija) i odgovarajuća asimptotika za niske učestalosti (isprekidana linija).

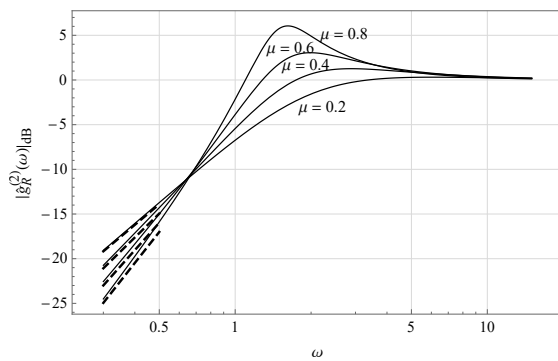


(d) Uvećan detalj argumenta funkcije prenosa (puna linija) i odgovarajuća asimptotika (isprekidana linija) za visoke učestalosti.

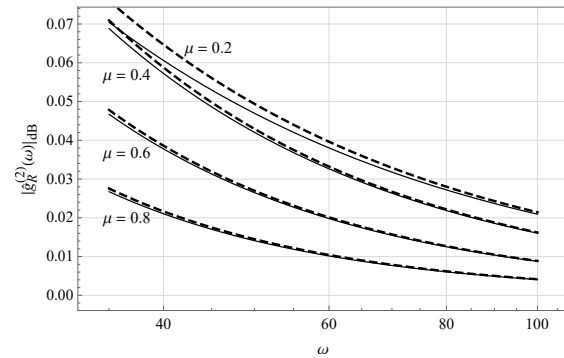
Slika 3.11: Slučaj pasivnog kondenzatora – frekvencijske karakteristike funkcije prenosa  $\hat{g}_R^{(RC-d)}$  dobijene za parametre modela:  $\tau_C = 0.2$  i  $\tau_\alpha = 0.5$ .

U slučaju generativnog  $RC$  kola, frekvensijske karakteristike, uključujući i asimptotiku, prikazane su na slici 3.12. Za razliku od modula funkcije prenosa  $\hat{g}_R^{(RC-d)}$ , moduo funkcije prenosa  $|\hat{g}_R^{(RC-g)}|_{dB}$ , kao što je očigledno sa slike 3.12a, ponaša se kao nemonotona funkcija koja dostiže maksimum, što je posledica činjenice da funkcija prenosa ima par konjugovano kompleksnih polova. Za niske učestalosti, moduo funkcije prenosa raste linearno od minus beskonačnosti, videti asimptotski razvoj (3.82)<sub>1</sub>, odakle sledi da funkcija prenosa  $\hat{g}_R^{(RC-g)}$  ima nulu necelog reda u koordinatnom početku, što se može zaključiti i iz njenog oblika, videti (3.8) i (3.66). Analogno slučaju modula funkcije prenosa  $|\hat{g}_R^{(RC-d)}|_{dB}$ , frekvensijske karakteristike  $|\hat{g}_R^{(RC-g)}|_{dB}$  takođe teže nuli za visoke učestalosti u skladu sa asimptotikom (3.80) bez obzira na vrednost reda frakcionog integrala  $\mu$ , kao što se može videti i na slici 3.12b.

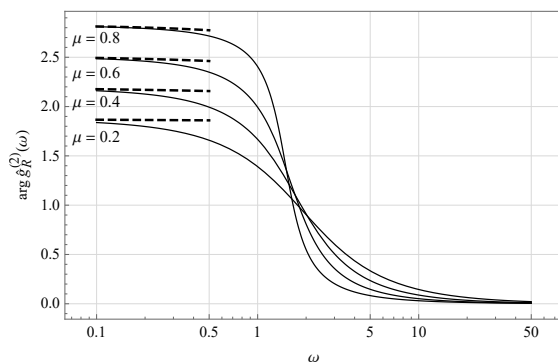
Frekvensijske karakteristike argumenta funkcije prenosa monotonno opadaju sa konstantne vrednosti, koja zavisi od parametra  $\mu$ , kao što je i predviđeno asimptotskim razvojem (3.82)<sub>2</sub>, na nultu vrednost, što je u skladu sa asimptotikom (3.83)<sub>2</sub>, videti slike 3.12c i 3.12d.



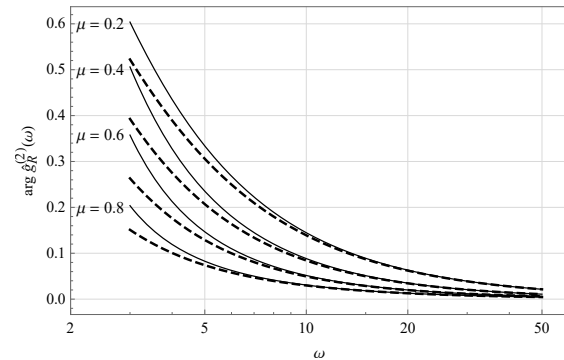
(a) Moduo funkcije prenosa (puna linija) i odgovarajuća asimptotika za niske učestalosti (isprekidana linija).



(b) Uvećani detalj modula funkcije prenosa (puna linija) i odgovarajuća asimptotika (isprekidana linija) za visoke učestalosti.



(c) Argument funkcije prenosa (puna linija) i odgovarajuća asimptotika za niske učestalosti (isprekidana linija).



(d) Uvećani detalj argumenta funkcije prenosa (puna linija) i odgovarajuća asimptotika (isprekidana linija) za visoke učestalosti.

Slika 3.12: Slučaj aktivnog kondenzatora – frekvensijske karakteristike funkcije prenosa  $\hat{g}_R^{(RC-g)}$  dobijene za parametre modelas:  $\tau_C = 5$  i  $\tau_\mu = 0.5$ .

Na osnovu prikazanih frekvensijskih karakteristika modula funkcije prenosa je jasno da se  $RC$  kolo, bez obzira da li sadrži pasivni ili aktivni kondenzator, ponaša kao visokopropusni filter, videti slike 3.11a i 3.12a.





## Glava 4

# *RLC* kola sa frakcionim elementima

Disipativno-disipativno *RLC* kolo, koje je formirano rednom vezom otpornika, pasivnog kondenzatora i pasivnog kalema, analizirano je u tranzijentnom režimu, a takođe je razmatran i prelazak kola u kvazistacionarno stanje. Naime, struja kola kao odziv na elektromotornu silu proizvoljnog oblika, izražena je konvolucijom elektromotorne sile i impulsnog odziva, rešavanjem jednačina kola i korišćena je u izradi ilustrativnih numeričkih primera. Pored modela disipativno-disipativnog *RLC* kola, korišćenog u prethodno pomenutoj analizi, formulisani su i modeli generativno-generativnog, disipativno-generativnog i generativno-disipativnog *RLC* kola, koja su formirana rednom vezom otpornika i preostale tri kombinacije pasivnog/aktivnog kondenzatora i kalema. Elektroenergetski bilans i frekvencijske karakteristike analizirane su za sva navedena kola.

### 4.1 Formulacija modela *RLC* kola

Modeli *RLC* kola sa frakcionim elementima, odnosno obične frakcione diferencijalne jednačine koje povezuju struju  $i$  kao odziv kola sa elektromotornom silom  $\mathcal{E}$  kao pobudom, formulišu se korišćenjem drugog Kirhofovog zakona, koji kombinovan sa Omovim zakonom, glasi

$$\mathcal{E}(t) = Ri(t) + u_L(t) + u_C(t). \quad (4.1)$$

Modeliranje u duhu teorije električnih kola podrazumeva prelazak u kompleksni domen, što se ostvaruje primenom Laplasove transformacije na drugi Kirhofov zakon (4.1), dajući

$$\hat{\mathcal{E}}(s) = R\hat{i}(s) + \hat{u}_L(s) + \hat{u}_C(s), \quad (4.2)$$

te se izražavanjem napona na kalemu  $\hat{u}_L$  i napona na kondenzatoru  $\hat{u}_C$ , korišćenjem kompleksnih impedansi elemenata, drugi Kirhofov zakon u kompleksnom domenu (4.2) transformiše u

$$\hat{\mathcal{E}}(s) = \left( R + \hat{Z}_L(s) + \hat{Z}_C(s) \right) \hat{i}(s). \quad (4.3)$$

Model *RLC* kola u vremenskom domenu se dobija primenom inverzne Laplasove transformacije na model u kompleksnom domenu (4.3).

Model disipativno-disipativnog *RLC* kola, koje je formirano rednom vezom otpornika, pasivnog kalema i pasivnog kondenzatora, kao što je prikazano na slici 4.1, u vremenskom domenu je dat izrazom

$$R \left( \tau_L \tau_C \frac{d^2}{dt^2} + \tau_L \tau_{\alpha 0} D_t^{1+\alpha} + \tau_C \tau_{\beta 0} D_t^{1+\beta} + \tau_{\alpha} \tau_{\beta 0} D_t^{\alpha+\beta} + \tau_C \frac{d}{dt} + \tau_{\alpha 0} D_t^{\alpha} + 1 \right) i(t) = \left( \tau_C \frac{d}{dt} + \tau_{\alpha 0} D_t^{\alpha} \right) \mathcal{E}(t), \quad (4.4)$$

gde su  $\tau_C = RC$  [s] i  $\tau_L = \frac{L}{R}$  [s] klasične vremenske konstante, dok su  $\tau_{\alpha} = RC_{\alpha}$  [s $^{\alpha}$ ] i  $\tau_{\beta} = \frac{L_{\beta}}{R}$  [s $^{\beta}$ ] frakcione vremenske konstante. Kombinacija klasične i frakcione vremenske konstante  $\tau_C$  i  $\tau_{\alpha}$  se može uzeti za vremensku konstantu pražnjenja ili punjenja pasivnog kondenzatora kroz otpornik otpornosti  $R$ , pri čemu se pasivni kondenzator posmatra kao paralelna veza klasičnog i pasivnog frakcionog kondenzatora, videti slike 4.1 i 4.3. Slično, pasivni kalem, koji se može posmatrati kao redna veza klasičnog i pasivnog frakcionog kalema, videti slike 4.1 i 4.4, je okarakterisan vremenskom konstantom, predstavljenom

kombinacijom klasične i frakcione vremenske konstante  $\tau_L$  i  $\tau_\beta$ , koja opisuje proces pražnjenja ili punjenja pasivnog kalema kroz otpornik otpornosti  $R$ . Model (4.4) je dobijen primenom inverzne Laplasove transformacije na jednačinu kola u kompleksnom domenu

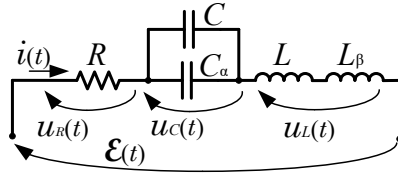
$$R(\tau_L\tau_C s^2 + \tau_L\tau_\alpha s^{1+\alpha} + \tau_C\tau_\beta s^{1+\beta} + \tau_\alpha\tau_\beta s^{\alpha+\beta} + \tau_C s + \tau_\alpha s^\alpha + 1)\hat{i}(s) = (\tau_C s + \tau_\alpha s^\alpha)\hat{\mathcal{E}}(s),$$

dobijene iz funkcije prenosa koja odgovara struji disipativno-disipativnog  $RLC$  kola

$$\hat{g}_i^{(dd)}(s) = \frac{\hat{i}(s)}{\hat{\mathcal{E}}(s)} = \frac{1}{R + \hat{Z}_L^{(d)}(s) + \hat{Z}_C^{(d)}(s)} = \frac{1}{R} \frac{\tau_C s + \tau_\alpha s^\alpha}{\Phi_{dd}(s)}, \quad \text{gde je} \quad (4.5)$$

$$\Phi_{dd}(s) = \tau_L\tau_C s^2 + \tau_L\tau_\alpha s^{1+\alpha} + \tau_C\tau_\beta s^{1+\beta} + \tau_\alpha\tau_\beta s^{\alpha+\beta} + \tau_C s + \tau_\alpha s^\alpha + 1, \quad (4.6)$$

izvedenom iz drugog Kirhofovog zakona u kompleksnom domenu (4.3) korišćenjem kompleksnih impedansi pasivnog kalema (2.16) i pasivnog kondenzatora (2.15).



Slika 4.1: Šema disipativno-disipativnog  $RLC$  kola.

Model generativno-generativnog  $RLC$  kola, koje je formirano rednom vezom otpornika, aktivnog kalema i aktivnog kondenzatora, kao što je prikazano na slici 4.2, u vremenskom domenu je dat izrazom

$$R\left(\tau_\nu {}_0D_t^{1+\nu} + \frac{\tau_\nu}{\tau_L} {}_0D_t^\nu + 1 + \frac{\tau_\nu}{\tau_L\tau_C} {}_0I_t^{1-\nu} + \frac{1}{\tau_C} {}_0I_t + \frac{\tau_\nu}{\tau_L\tau_\mu} {}_0I_t^{1+\mu-\nu} + \frac{1}{\tau_\mu} {}_0I_t^{1+\mu}\right)i(t) = \left(\frac{\tau_\nu}{\tau_L} {}_0D_t^\nu + 1\right)\mathcal{E}(t), \quad (4.7)$$

gde su  $\tau_C = RC$  [s] i  $\tau_L = \frac{L}{R}$  [s] klasične vremenske konstante, dok su  $\tau_\mu = RC_\mu$  [ $s^{1+\mu}$ ] i  $\tau_\nu = \frac{L_\nu}{R}$  [ $s^{1+\nu}$ ] frakcione vremenske konstante. Kombinacija klasične i frakcione vremenske konstante  $\tau_C$  i  $\tau_\mu$  se može uzeti za vremensku konstantu pražnjenja ili punjenja aktivnog kondenzatora kroz otpornik otpornosti  $R$ , pri čemu se aktivni kondenzator posmatra kao redna veza klasičnog i aktivnog frakcionog kondenzatora, videti slike 4.2 i 4.4. Slično, aktivni kalem, koji se može posmatrati kao paralelna veza klasičnog i aktivnog frakcionog kalema, videti slike 4.2 i 4.3, je okarakterisan vremenskom konstantom, predstavljenom kombinacijom klasične i frakcione vremenske konstante  $\tau_L$  i  $\tau_\nu$ , koja opisuje proces pražnjenja ili punjenja aktivnog kalema kroz otpornik otpornosti  $R$ . Model (4.7) je dobijen primenom inverzne Laplasove transformacije na jednačinu kola u kompleksnom domenu

$$R\left(\tau_\nu s^{1+\nu} + \frac{\tau_\nu}{\tau_L} s^\nu + 1 + \frac{\tau_\nu}{\tau_L\tau_C} \frac{1}{s^{1-\nu}} + \frac{1}{\tau_C} \frac{1}{s} + \frac{\tau_\nu}{\tau_L\tau_\mu} \frac{1}{s^{1+\mu-\nu}} + \frac{1}{\tau_\mu} \frac{1}{s^{1+\mu}}\right)\hat{i}(s) = \left(\frac{\tau_\nu}{\tau_L} s^\nu + 1\right)\hat{\mathcal{E}}(s),$$

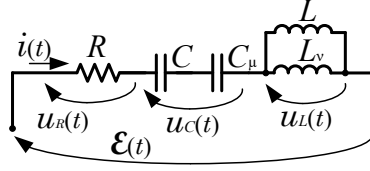
dobijene iz funkcije prenosa koja odgovara struji generativno-generativnog  $RLC$  kola

$$\hat{g}_i^{(gg)}(s) = \frac{\hat{i}(s)}{\hat{\mathcal{E}}(s)} = \frac{1}{R + \hat{Z}_L^{(g)}(s) + \hat{Z}_C^{(g)}(s)} = \frac{1}{R} \frac{\tau_C\tau_\mu s^{1+\mu} \tau_\nu s^\nu + \tau_L}{\Phi_{gg}(s)}, \quad \text{gde je} \quad (4.8)$$

$$\Phi_{gg}(s) = \tau_L\tau_C\tau_\mu\tau_\nu s^{2+\mu+\nu} + \tau_C\tau_\mu\tau_\nu s^{1+\mu+\nu} + \tau_L\tau_C\tau_\mu s^{1+\mu} + \tau_\mu\tau_\nu s^{\mu+\nu} + \tau_L\tau_\mu s^\mu + \tau_C\tau_\nu s^\nu + \tau_L\tau_C,$$

izvedenom iz drugog Kirhofovog zakona u kompleksnom domenu (4.3) korišćenjem kompleksnih impedansi aktivnog kalema (2.30) i aktivnog kondenzatora (2.29).

Modeli disipativno-generativnog i generativno-disipativnog  $RLC$  kola, koja se sastoje od otpornika redno vezanog ili sa aktivnim kalemom i pasivnim kondenzatorom, kao što je prikazano na slici 4.3, ili sa



Slika 4.2: Šema generativno-generativnog RLC kola.

pasivnim kalemom i aktivnim kondenzatorom, kao što je prikazano na slici 4.4, u vremenskom domenu dati su izrazima

$$\begin{aligned}
 & R \left( \tau_C \tau_\nu {}_0D_t^{2+\nu} + \tau_\alpha \tau_\nu {}_0D_t^{1+\alpha+\nu} + \frac{\tau_C \tau_\nu}{\tau_L} {}_0D_t^{1+\nu} \right. \\
 & \quad \left. + \tau_C \frac{d}{dt} + \frac{\tau_\alpha \tau_\nu}{\tau_L} {}_0D_t^{\alpha+\nu} + \tau_\alpha {}_0D_t^\alpha + \frac{\tau_\nu}{\tau_L} {}_0D_t^\nu + 1 \right) i(t) \\
 & = \left( \frac{\tau_C \tau_\nu}{\tau_L} {}_0D_t^{1+\nu} + \tau_C \frac{d}{dt} + \frac{\tau_\alpha \tau_\nu}{\tau_L} {}_0D_t^{\alpha+\nu} + \tau_\alpha {}_0D_t^\alpha \right) \mathcal{E}(t) \quad (4.9)
 \end{aligned}$$

i

$$R \left( \tau_L \frac{d}{dt} + \tau_\beta {}_0D_t^\beta + 1 + \frac{1}{\tau_C} {}_0I_t + \frac{1}{\tau_\mu} {}_0I_t^{1+\mu} \right) i(t) = \mathcal{E}(t), \quad (4.10)$$

respektivno, koji su dobijeni primenom inverzne Laplasove transformacije na jednačine kola u kompleksnom domenu

$$\begin{aligned}
 & R \left( \tau_C \tau_\nu s^{2+\nu} + \tau_\alpha \tau_\nu s^{1+\alpha+\nu} + \frac{\tau_C \tau_\nu}{\tau_L} s^{1+\nu} \right. \\
 & \quad \left. + \tau_C s + \frac{\tau_\alpha \tau_\nu}{\tau_L} s^{\alpha+\nu} + \tau_\alpha s^\alpha + \frac{\tau_\nu}{\tau_L} s^\nu + 1 \right) \hat{i}(s) \\
 & = \left( \frac{\tau_C \tau_\nu}{\tau_L} s^{1+\nu} + \tau_C s + \frac{\tau_\alpha \tau_\nu}{\tau_L} s^{\alpha+\nu} + \tau_\alpha s^\alpha \right) \hat{\mathcal{E}}(s) \quad (4.11)
 \end{aligned}$$

i

$$R \left( \tau_L s + \tau_\beta s^\beta + 1 + \frac{1}{\tau_C} \frac{1}{s} + \frac{1}{\tau_\mu} \frac{1}{s^{1+\mu}} \right) \hat{i}(s) = \hat{\mathcal{E}}(s), \quad (4.12)$$

pri čemu jednačina (4.11) sledi iz funkcije prenosa koja odgovara struji disipativno-generativnog RLC kola

$$\hat{g}_i^{(dg)}(s) = \frac{\hat{i}(s)}{\hat{\mathcal{E}}(s)} = \frac{1}{R + \hat{Z}_L^{(g)}(s) + \hat{Z}_C^{(d)}(s)} = \frac{1}{R} \frac{\tau_C \tau_\nu s^{1+\nu} + \tau_L \tau_C s + \tau_\alpha \tau_\nu s^{\alpha+\nu} + \tau_L \tau_\alpha s^\alpha}{\Phi_{dg}(s)}, \quad \text{gde je} \quad (4.13)$$

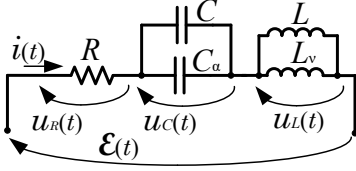
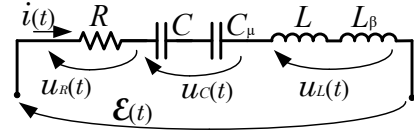
$$\Phi_{dg}(s) = \tau_L \tau_C \tau_\nu s^{2+\nu} + \tau_L \tau_\alpha \tau_\nu s^{1+\alpha+\nu} + \tau_C \tau_\nu s^{1+\nu} + \tau_L \tau_C s + \tau_\alpha \tau_\nu s^{\alpha+\nu} + \tau_L \tau_\alpha s^\alpha + \tau_\nu s^\nu + \tau_L,$$

dok jednačina (4.12) sledi iz funkcije prenosa koja odgovara struji generativno-disipativnog RLC kola

$$\hat{g}_i^{(gd)}(s) = \frac{\hat{i}(s)}{\hat{\mathcal{E}}(s)} = \frac{1}{R + \hat{Z}_L^{(d)}(s) + \hat{Z}_C^{(g)}(s)} = \frac{1}{R} \frac{\tau_C \tau_\mu s^{1+\mu}}{\Phi_{gd}(s)}, \quad \text{gde je} \quad (4.14)$$

$$\Phi_{gd}(s) = \tau_L \tau_C \tau_\mu s^{2+\mu} + \tau_C \tau_\beta \tau_\mu s^{1+\beta+\mu} + \tau_C \tau_\mu s^{1+\mu} + \tau_\mu s^\mu + \tau_C.$$

Funkcije prenosa (4.13) i (4.14) su izvedene iz drugog Kirhofovog zakona u kompleksnom domenu (4.3) korišćenjem kompleksnih impedansi pasivnog kalema (2.16) i aktivnog kondenzatora (2.29), odnosno korišćenjem kompleksnih impedansi aktivnog kalema (2.30) i pasivnog kondenzatora (2.15).

Slika 4.3: Šema disipativno-generativnog  $RLC$  kola.Slika 4.4: Šema generativno-disipativnog  $RLC$  kola.

## 4.2 Tranzijentni odziv disipativno-disipativnog $RLC$ kola

Model disipativno-disipativnog  $RLC$  kola, koji je dat izrazom (4.4), izveden je u odeljku 4.1 u kompleksnom domenu korišćenjem kompleksnih impedansi elemenata i primenom inverzne Laplasove transformacije, čime nisu uvaženi eventualni početni uslovi, koji se mogu uzeti u obzir ukoliko se disipativno-disipativno  $RLC$  kolo modelira sistemom jednačina u vremenskom domenu, koji čine drugi Kirhofov zakon kombinovan sa Omovim zakonom, konstitutivne jednačine pasivnog kondenzatora (2.1) i pasivnog kalema (2.5), kao i definicioni izraz za električnu struju i Faradejev zakon elektromagnetske indukcije:

$$\mathcal{E}(t) = R i(t) + u_L(t) + u_C(t), \quad (4.15)$$

$$q(t) = C u_C(t) + C_\alpha {}_0I_t^{1-\alpha} u_C(t), \quad \alpha \in (0, 1), \quad (4.16)$$

$$\phi(t) = L i(t) + L_\beta {}_0I_t^{1-\beta} i(t), \quad \beta \in (0, 1), \quad (4.17)$$

$$i(t) = \frac{d}{dt} q(t), \quad u_L(t) = \frac{d}{dt} \phi(t), \quad (4.18)$$

pri čemu su nepoznate veličine: struja kola  $i$ , napon na kalemu  $u_L$ , napon na kondenzatoru  $u_C$ , naelektrisanje na oblogama kondenzatora  $q$  i fluks magnetskog polja u kalemu  $\phi$ . Sistem jednačina (4.15) - (4.18) se u kompleksnom domenu dobija u obliku

$$\hat{\mathcal{E}}(s) = R \hat{i}(s) + \hat{u}_L(s) + \hat{u}_C(s), \quad (4.19)$$

$$\hat{q}(s) = C \hat{u}_C(s) + C_\alpha \frac{1}{s^{1-\alpha}} \hat{u}_C(s), \quad (4.20)$$

$$\hat{\phi}(s) = L \hat{i}(s) + L_\beta \frac{1}{s^{1-\beta}} \hat{i}(s), \quad (4.21)$$

$$\hat{i}(s) = s \hat{q}(s) - q_0, \quad \hat{u}_L(s) = s \hat{\phi}(s) - \phi_0, \quad (4.22)$$

primenom Laplasove transformacije, gde je iskorišćena Laplasova transformacija frakcionog integrala (1.27) i gde  $q_0 = q(0)$  i  $\phi_0 = \phi(0)$  predstavljaju naelektrisanje i magnetski fluks u početnom trenutku, respektivno, što jasno ukazuje da se ovim pristupom, pored pobude u vidu elektromotorne sile, u obzir uzima i uticaj nenultih početnih uslova. Rešavanjem sistema jednačina u kompleksnom domenu (4.19) - (4.22) po struji kola  $\hat{i}$ , naponu na kalemu  $\hat{u}_L$  i naponu na kondenzatoru  $\hat{u}_C$ , dobija se

$$\hat{i}(s) = \hat{\mathcal{E}}(s) \hat{g}_i(s) + \phi_0 \hat{g}_i(s) - q_0 \hat{g}_C(s), \quad (4.23)$$

$$\hat{u}_C(s) = \hat{\mathcal{E}}(s) \hat{g}_C(s) + \phi_0 \hat{g}_C(s) + \frac{q_0}{C} \frac{s^{-\alpha}}{s^{1-\alpha} + \frac{\tau_\alpha}{\tau_C}} (1 - \hat{g}_C(s)), \quad (4.24)$$

$$\hat{u}_L(s) = \hat{\mathcal{E}}(s) \hat{g}_L(s) - \phi_0 (1 - \hat{g}_L(s)) + \frac{q_0}{C} \left( \tau_C \hat{g}_C(s) - \frac{s^{-\alpha}}{s^{1-\alpha} + \frac{\tau_\alpha}{\tau_C}} (1 - \hat{g}_C(s)) \right), \quad (4.25)$$

gde su funkcije prenosa  $\hat{g}_i$ ,  $\hat{g}_C$ , i  $\hat{g}_L$  date izrazima

$$\hat{g}_i(s) = \frac{1}{R} \frac{\tau_C s + \tau_\alpha s^\alpha}{\Phi_{dd}(s)}, \quad \hat{g}_C(s) = \frac{1}{\Phi_{dd}(s)}, \quad \hat{g}_L(s) = 1 - \hat{g}_C(s) - R \hat{g}_i(s), \quad \text{pri čemu je} \quad (4.26)$$

$$\Phi_{dd}(s) = \tau_L \tau_C s^2 + \tau_L \tau_\alpha s^{1+\alpha} + \tau_C \tau_\beta s^{1+\beta} + \tau_\alpha \tau_\beta s^{\alpha+\beta} + \tau_C s + \tau_\alpha s^\alpha + 1, \quad (4.27)$$

a  $\tau_C = RC$  [s] i  $\tau_L = \frac{L}{R}$  [s] označavaju klasične vremenske konstante, dok su  $\tau_\alpha = RC_\alpha$  [s $^\alpha$ ],  $\tau_\mu = RC_\mu$  [s $^{1+\mu}$ ],  $\tau_\beta = \frac{L_\beta}{R}$  [s $^\beta$ ] i  $\tau_\nu = \frac{L_\nu}{R}$  [s $^{1+\nu}$ ] frakcione vremenske konstante. Naravno, izrazi (4.26)<sub>1</sub> i (4.27) za funkciju prenosa koja odgovara struji i funkciju  $\Phi_{dd}$  su identični izrazima (4.5) i (4.6).

Struja  $i$  disipativno-disipativnog  $RLC$  kola, kao i naponi na pasivnom kondenzatoru  $u_C$  i pasivnom kalemu  $u_L$ , dobijaju se primenom inverzne Laplasove transformacije na sistem jednačina (4.23) - (4.25) u obliku

$$\begin{aligned} i(t) &= \mathcal{E}(t) * g_i(t) + \phi_0 g_i(t) - q_0 g_C(t), \\ u_C(t) &= \mathcal{E}(t) * g_C(t) + \phi_0 g_C(t) + \frac{q_0}{C} e_{1-\alpha, \frac{\tau\alpha}{\tau C}}(t) * (\delta(t) - g_C(t)), \\ u_L(t) &= \mathcal{E}(t) * g_L(t) - \phi_0(\delta(t) - g_L(t)) + \frac{q_0}{C} \left( \tau_C g_C(t) - e_{1-\alpha, \frac{\tau\alpha}{\tau C}}(t) * (\delta(t) - g_C(t)) \right), \end{aligned} \quad (4.28)$$

gde su  $g_i$ ,  $g_C$  i  $g_L$  impulsni odzivi struje, napona na kondenzatoru i napona na kalemu respektivno dati izrazima (4.30), (4.36) i inverznom Laplasovom transformacijom izraza (4.26)<sub>3</sub>, koji daje

$$g_L(t) = \delta(t) - g_C(t) - R g_i(t),$$

pri čemu je korišćena Laplasova transformacija Mittag-Lefflerove funkcije  $\mathcal{L}[e_{\eta, \lambda}(t)](s) = \frac{s^{\eta-1}}{s^{\eta} + \lambda}$ . U slučaju nultih početnih uslova, prethodni izrazi se svode na

$$i(t) = g_i(t) * \mathcal{E}(t), \quad u_C(t) = g_C(t) * \mathcal{E}(t) \quad \text{i} \quad u_L(t) = g_L(t) * \mathcal{E}(t). \quad (4.29)$$

Impulsni odziv struje  $g_i$  je dobijen primenom inverzne Laplasove transformacije na funkciju prenosa  $\hat{g}_i$ , datu izrazom (4.26)<sub>1</sub>, u obliku

$$g_i(t) = \frac{1}{\pi R} \int_0^{\infty} \frac{K_i(\rho)}{|\Phi_{\text{dd}}(\rho e^{j\pi})|^2} e^{-\rho t} d\rho + \begin{cases} 0, & \text{u I slučaju,} \\ -\frac{1}{R} \frac{P_i(\rho^*)}{|P(\rho^* e^{j\pi})|^2} \rho^* e^{-\rho^* t}, & \text{u II slučaju,} \\ \frac{2}{R} \operatorname{Re} \left( \frac{\tau_C s_0 + \tau_\alpha s_0^\alpha}{\frac{d}{ds} \Phi_{\text{dd}}(s)} \Big|_{s=s_0} e^{jt \operatorname{Im} s_0} \right) e^{-|\operatorname{Re} s_0| t}, & \text{u III slučaju,} \end{cases} \quad (4.30)$$

gde je  $R$  otpornost otpornika,  $\Phi_{\text{dd}}$  funkcija data sa (4.27), dok su funkcije  $K_i$ ,  $P$  i  $P_i$  date izrazima

$$K_i(\rho) = \tau_\alpha \rho^\alpha \sin(\alpha\pi) \left( \tau_\alpha \tau_\beta \rho^{\alpha+\beta} \frac{\sin(\beta\pi)}{\sin(\alpha\pi)} \left| \frac{\tau_C}{\tau_\alpha} \rho^{1-\alpha} e^{-j\alpha\pi} - 1 \right|^2 - 1 \right), \quad (4.31)$$

$$\begin{aligned} P(\rho^* e^{j\pi}) &= 2\tau_L \tau_C (\rho^*)^2 - (1+\alpha)\tau_L \tau_\alpha (\rho^*)^{1+\alpha} e^{j\alpha\pi} - (1+\beta)\tau_C \tau_\beta (\rho^*)^{1+\beta} e^{j\beta\pi} \\ &\quad + (\alpha+\beta)\tau_\alpha \tau_\beta (\rho^*)^{\alpha+\beta} e^{j(\alpha+\beta)\pi} - \tau_C \rho^* + \alpha \tau_\alpha (\rho^*)^\alpha e^{j\alpha\pi}, \end{aligned} \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned} P_i(\rho^*) &= -2\tau_L \tau_C^2 (\rho^*)^3 + (3+\alpha)\tau_L \tau_C \tau_\alpha (\rho^*)^{2+\alpha} \cos(\alpha\pi) + (1+\beta)\tau_C^2 \tau_\beta (\rho^*)^{2+\beta} \cos(\beta\pi) + \tau_C^2 (\rho^*)^2 \\ &\quad - ((1+\beta)\cos((\alpha-\beta)\pi) + (\alpha+\beta)\cos((\alpha+\beta)\pi))\tau_C \tau_\alpha \tau_\beta (\rho^*)^{1+\alpha+\beta} - (1+\alpha)\tau_L \tau_\alpha^2 (\rho^*)^{1+2\alpha} \\ &\quad - (1+\alpha)\tau_C \tau_\alpha (\rho^*)^{1+\alpha} \cos(\alpha\pi) + (\alpha+\beta)\tau_\alpha^2 \tau_\beta (\rho^*)^{2\alpha+\beta} \cos(\beta\pi) + \alpha \tau_\alpha^2 (\rho^*)^{2\alpha}, \end{aligned}$$

respektivno, pri čemu je  $\rho^*$  određeno kao rešenje jednačine  $\operatorname{Im} \Phi_{\text{dd}}(\rho e^{j\pi}) = 0$ , gde su slučajevi u (4.30) navedeni u tabeli 4.1.

Tabela 4.1: Priroda nula funkcije  $\Phi_{\text{dd}}$ .

I slučaj:	ukoliko je $\operatorname{Re} \Phi_{\text{dd}}(-\rho^*) < 0$ ,	tada $\Phi_{\text{dd}}$ nema nula u kompleksnoj ravni.
II slučaj:	ukoliko je $\operatorname{Re} \Phi_{\text{dd}}(-\rho^*) = 0$ ,	tada $\Phi_{\text{dd}}$ ima jednu negativnu realnu nulu $s_0 = -\rho^*$ .
III slučaj:	ukoliko je $\operatorname{Re} \Phi_{\text{dd}}(-\rho^*) > 0$ ,	tada $\Phi_{\text{dd}}$ ima par konjugovano kompleksnih nula $s_0$ i $\bar{s}_0$ sa negativnim realnim delom.

U I slučaju, impulsni odziv struje kola  $g_i$ , određen izrazom (4.30), može imati nemonotono ponašanje, pošto funkcija  $K_i$ , data sa (4.31), nije nužno pozitivna, dok u II slučaju u izrazu za impulsni odziv struje postoji dodatni član koji eksponencijalno teži nuli sa vremenskom konstantom  $\rho^*$ , određenom kao negativnom realnom nulom funkcije  $\Phi_{\text{dd}}$ , date izrazom (4.27). Ponašanje impulsnog odziva nije oscilatorno ni u I ni u II slučaju, dok je u III slučaju, usled postojanja konjugovano kompleksnih polova  $s_0$  i  $\bar{s}_0$  funkcije  $\Phi_{\text{dd}}$ , date sa (4.27), impulsni odziv prigušenog oscilatornog karaktera, sa frekvencijom određenom imaginarnim delom pola  $s_0$  i faktorom prigušenja određenim realnim delom pola  $s_0$ , pri čemu je opadanje impulsnog odziva za veliko vreme, određeno prvim članom u (4.30), sporije od eksponencijalnog.

Polazeći od izraza (4.26)<sub>1</sub> za funkciju prenosa koja odgovara struji disipativno-disipativnog  $RLC$  kola  $\hat{g}_i$ , čija je asimptotika data izrazom

$$\begin{aligned}\hat{g}_i(s) &= \frac{1}{R\tau_L} \frac{1}{s} \frac{1 + \frac{\tau_\alpha}{\tau_C} \frac{1}{s^{1-\alpha}}}{1 + \frac{\tau_\alpha}{\tau_C} \frac{1}{s^{1-\alpha}} + \frac{\tau_\beta}{\tau_L} \frac{1}{s^{1-\beta}} + \frac{\tau_\alpha\tau_\beta}{\tau_L\tau_C} \frac{1}{s^{2-\alpha-\beta}} + \frac{1}{\tau_L} \frac{1}{s} + \frac{\tau_\alpha}{\tau_L\tau_C} \frac{1}{s^{2-\alpha}} + \frac{1}{\tau_L\tau_C} \frac{1}{s^2}} \\ &= \frac{1}{R\tau_L} \frac{1}{s} \left( 1 + \frac{\tau_\alpha}{\tau_C} \frac{1}{s^{1-\alpha}} \right) \\ &\quad \times \left( 1 - \frac{\tau_\alpha}{\tau_C} \frac{1}{s^{1-\alpha}} - \frac{\tau_\beta}{\tau_L} \frac{1}{s^{1-\beta}} - \frac{\tau_\alpha\tau_\beta}{\tau_L\tau_C} \frac{1}{s^{2-\alpha-\beta}} - \dots + \frac{\tau_\alpha^2}{\tau_C^2} \frac{1}{s^{2-2\alpha}} + 2 \frac{\tau_\alpha\tau_\beta}{\tau_L\tau_C} \frac{1}{s^{2-\alpha-\beta}} + \dots \right) \\ &\sim \frac{1}{R\tau_L} \frac{1}{s} \left( 1 - \frac{\tau_\beta}{\tau_L} \frac{1}{s^{1-\beta}} \right) \quad \text{kada } s \rightarrow \infty,\end{aligned}\tag{4.33}$$

gde je iskorišćena aproksimacija  $(1+x)^\alpha \sim 1+\alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2$  za  $|x| \ll 1$ , dobija se asimptotsko ponašanje impulsnog odziva za kratka vremena u obliku

$$g_i(t) \sim \frac{1}{R\tau_L} \left( 1 - \frac{\tau_\beta}{\tau_L} \frac{t^{1-\beta}}{\Gamma(2-\beta)} \right) \rightarrow \frac{1}{R\tau_L} \quad \text{kada } t \rightarrow 0.\tag{4.34}$$

U cilju dobijanja asimptotskog ponašanja impulsnog odziva za kratka vremena u obliku (4.34), primenjeno je svojstvo Laplasove transformacije da ako  $\hat{f}(s) \sim \hat{g}(s)$  kada  $s \rightarrow \infty$  ( $s \rightarrow 0$ ), tada  $f(t) \sim g(t)$  kada  $t \rightarrow 0$  ( $t \rightarrow \infty$ ), gde je  $\hat{f} = \mathcal{L}[f]$  i  $\hat{g} = \mathcal{L}[g]$ , odnosno, da ako funkcija  $\hat{g}$  predstavlja asimptotski razvoj Laplasove slike  $\hat{f}$ , tada njena inverzna Laplasova transformacija  $g$  predstavlja asimptotski razvoj originala  $f$ . Sa druge strane, za dovoljno velika vremena, prema Tauberovoj teoremi primenjenoj na funkciju prenosa  $\hat{g}_i$ , datu izrazom (4.26)<sub>1</sub>, impulсни odziv struje kola iščezava, odnosno

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g_i(t) = \lim_{s \rightarrow 0} (s\hat{g}_i(s)) = 0.\tag{4.35}$$

Kvalitativno, bez obzira na razlike između slučajeva u izrazu (4.30) za impulсни odziv struje  $g_i$  disipativno-disipativnog  $RLC$  kola, impulсни odziv struje u početnim trenucima, prema izrazu (4.34), opada sa vrednosti  $g_i(0^+) = \frac{1}{R\tau_L}$  kao stepena funkcija, sa dominantnim uticajem reda frakcionog izvoda  $\beta$ , koji odgovara pasivnom kalemu, dok impulсни odziv struje, prema (4.35), asimptotski teži nuli za velika vremena. Iako se brzina opadanja impulsnog odziva za veliko vreme ne može ispitati istim metodom kao i za malo vreme, na osnovu asimptotike (4.57) za veliko vreme struje kola kao odziva na pobudu u obliku Hevisajdove jedinične funkcije, koja je dobijena u obliku stepene funkcije, može se zaključiti da je brzina opadanja vrednosti struje kola sporija od brzine opadanja eksponencijalne funkcije.

Impulсни odziv napona na pasivnom kondenzatoru  $g_C$  je dobijen u odeljku 4.2.1 primenom inverzne Laplasove transformacije na funkciju prenosa  $\hat{g}_C$ , datu izrazom (4.26)<sub>2</sub>, u obliku

$$g_C(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{K_C(\rho)}{|\Phi_{dd}(\rho e^{j\pi})|^2} e^{-\rho t} d\rho + \begin{cases} 0, & \text{u I slučaju,} \\ -\frac{\operatorname{Re}P(\rho^* e^{j\pi})}{|P(\rho^* e^{j\pi})|^2} \rho^* e^{-\rho^* t}, & \text{u II slučaju,} \\ 2 \operatorname{Re} \left( \frac{1}{\frac{d}{ds} \Phi_{dd}(s)} \Big|_{s=s_0} e^{jt \operatorname{Im}s_0} \right) e^{-|\operatorname{Re}s_0|t}, & \text{u III slučaju,} \end{cases}\tag{4.36}$$

gde su funkcije  $\Phi_{dd}$  i  $P$  date izrazima (4.27) i (4.32), dok je funkcija  $K_C$  data

$$\begin{aligned}K_C(\rho) &= -\tau_L\tau_\alpha \rho^{1+\alpha} \sin(\alpha\pi) - \tau_C\tau_\beta \rho^{1+\beta} \sin(\beta\pi) \\ &\quad + \tau_\alpha\tau_\beta \rho^{\alpha+\beta} \sin((\alpha+\beta)\pi) + \tau_\alpha \rho^\alpha \sin(\alpha\pi),\end{aligned}\tag{4.37}$$

dok se slučajevi u (4.36) razlikuju prema prirodi nula funkcije  $\Phi_{dd}$  i sažeti su u tabeli 4.1.

Prelazni režim frakcionih rednih i paralelnih  $RL_\beta C_\alpha$  kola analiziran je u [28, 29], gde je pored kondenzatora, kalem uopšten rednom vezom otpornika i frakcionog kalema. Frakcione diferencijalne jednačine koje opisuju ovako uopštena električna kola rešavane su pomoću različitih numeričkih alata u [9, 58, 59].

#### 4.2.1 Priroda polova funkcije prenosa $\hat{g}_C$ i određivanje impulsnog odziva $g_C$

Impulсни odziv napona na pasivnom kondenzatoru  $g_C$ , dat izrazom (4.36), određen je primenom Laplasove inverzione formule (1.21) na funkciju prenosa  $\hat{g}_C$ , datu sa (4.26)<sub>2</sub>, odnosno integracijom funkcije

$\hat{g}_C(s)e^{st}$  duž odgovarajuće konture  $\Gamma$  koja sadrži Bromvičovu putanju  $\Gamma_{Br}$  i primenjujući bilo Košijevu integralnu formulu bilo Košijevu teoremu o reziduumima. Impulсни odziv struje kola  $g_i$  se dobija na analogan način u obliku (4.30) inverzijom funkcije prenosa  $\hat{g}_i$ , date izrazom (4.26)<sub>1</sub>.

Priroda polova funkcije prenosa  $\hat{g}_C$ , odnosno položaj i broj nula funkcije  $\Phi_{dd}$ , date sa (4.27), određuje slučajeve date u tabeli 4.1, kao i da li će se inverzna Laplasova transformacija određivati korišćenjem Košijeve integralne formule (1.22) ili Košijeve teoreme o reziduumima (1.23), pošto je  $s = 0$  jedina tačka grananja funkcije prenosa  $\hat{g}_C$ .

### Priroda polova funkcije prenosa $\hat{g}_C$

Kako bi se odredio položaj i broj polova funkcije prenosa  $\hat{g}_C$ , date sa (4.26)<sub>2</sub>, ispituju se nule funkcije  $\Phi_{dd}$ , date izrazom (4.27), koja se transformiše u funkciju

$$\Psi(s) = \frac{1}{\tau_L \tau_C} \Phi_{dd}(s) = s^2 + as^{1+\alpha} + bs^{1+\beta} + cs^{\alpha+\beta} + ds + es^\alpha + f, \quad (4.38)$$

gde je  $a = \frac{\tau_\alpha}{\tau_C}$ ,  $b = \frac{\tau_\beta}{\tau_L}$ ,  $c = \frac{\tau_\alpha \tau_\beta}{\tau_L \tau_C}$ ,  $d = \frac{1}{\tau_L}$ ,  $e = \frac{\tau_\alpha}{\tau_L \tau_C}$ , i  $f = \frac{1}{\tau_L \tau_C}$ . Uvrštavanjem  $s = \rho e^{j\varphi}$  u izraz za funkciju  $\Psi$  (4.38) i razdvajanjem realnog i imaginarnog dela funkcije, dobija se

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\Psi(\rho, \varphi) &= \rho^2 \cos(2\varphi) + a\rho^{1+\alpha} \cos((1+\alpha)\varphi) + b\rho^{1+\beta} \cos((1+\beta)\varphi) \\ &\quad + c\rho^{\alpha+\beta} \cos((\alpha+\beta)\varphi) + d\rho \cos \varphi + e\rho^\alpha \cos(\alpha\varphi) + f, \end{aligned} \quad (4.39)$$

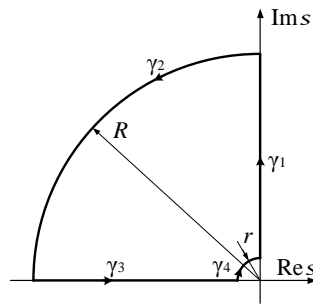
$$\begin{aligned} \operatorname{Im}\Psi(\rho, \varphi) &= \rho^2 \sin(2\varphi) + a\rho^{1+\alpha} \sin((1+\alpha)\varphi) + b\rho^{1+\beta} \sin((1+\beta)\varphi) \\ &\quad + c\rho^{\alpha+\beta} \sin((\alpha+\beta)\varphi) + d\rho \sin \varphi + e\rho^\alpha \sin(\alpha\varphi). \end{aligned} \quad (4.40)$$

Svojstva realnog i imaginarnog dela funkcije  $\Psi$

$$\operatorname{Re}\Psi(\rho, -\varphi) = \operatorname{Re}\Psi(\rho, \varphi) \quad \text{i} \quad \operatorname{Im}\Psi(\rho, -\varphi) = -\operatorname{Im}\Psi(\rho, \varphi),$$

impliciraju da je funkcija  $\Psi$  simetrična u odnosu na realnu osu, iz čega se zaključuje da ako funkcija  $\Psi$  ima nulu  $s_0$  u gornjoj kompleksnoj poluravni, tada takođe ima i kompleksno konjugovanu nulu  $\bar{s}_0$ , tako da je dovoljno tražiti nule samo u gornjoj kompleksnoj poluravni. Štaviše, funkcija  $\Psi$  nema nule u gornjem desnom kvadrantu kompleksne ravni (samim tim ni u donjem desnom kvadrantu kompleksne ravni), pošto je za  $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2}]$ , prema (4.40),  $\operatorname{Im}\Psi(\rho, \varphi) > 0$ , dok za  $\varphi = 0$  važi da je  $\operatorname{Im}\Psi(\rho, \varphi) = 0$ , ali prema (4.39) važi da je  $\operatorname{Re}\Psi(\rho, \varphi) > 0$ . Dakle, ako funkcija  $\Psi$  ima nule, one leže u gornjem levom kvadrantu kompleksne ravni, a njihove konjugovane kompleksne vrednosti u donjem levom kvadrantu.

Princip argumenta i kontura  $\gamma$  sa slike 4.5 su korišćeni u cilju utvrđivanja broja nula funkcije  $\Psi$  u gornjem levom kvadrantu.



Slika 4.5: Kontura  $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$ .

Duž konture  $\gamma_1$ , parametrizovane sa  $s = \rho e^{j\frac{\pi}{2}}$ , pri čemu  $\rho \in (0, \infty)$ , prema (4.40), imaginarni deo funkcije  $\Psi$  je

$$\operatorname{Im}\Psi\left(\rho, \frac{\pi}{2}\right) = a\rho^{1+\alpha} \cos \frac{\alpha\pi}{2} + b\rho^{1+\beta} \cos \frac{\beta\pi}{2} + c\rho^{\alpha+\beta} \sin \frac{(\alpha+\beta)\pi}{2} + d\rho + e\rho^\alpha \sin \frac{\alpha\pi}{2} > 0,$$

pošto  $\alpha, \beta \in (0, 1)$ , dok je u graničnim slučajevima

$$\operatorname{Re}\Psi\left(\rho, \frac{\pi}{2}\right) \sim f \quad \text{i} \quad \operatorname{Im}\Psi\left(\rho, \frac{\pi}{2}\right) \sim e\rho^\alpha \sin \frac{\alpha\pi}{2} \rightarrow 0 \quad \text{kada} \quad \rho \rightarrow 0,$$



$$\operatorname{Re}\Psi\left(\rho, \frac{\pi}{2}\right) \sim -\rho^2 \rightarrow -\infty \quad \text{i} \quad \operatorname{Im}\Psi\left(\rho, \frac{\pi}{2}\right) \sim \begin{cases} a\rho^{1+\alpha} \cos\frac{\alpha\pi}{2}, & \text{ako je } \alpha > \beta \\ b\rho^{1+\beta} \cos\frac{\beta\pi}{2}, & \text{ako je } \alpha < \beta \end{cases} \rightarrow \infty \quad \text{kada } \rho \rightarrow \infty.$$

Duž konture  $\gamma_2$ , parametrizovane sa  $s = Re^{j\varphi}$ , pri čemu  $\varphi \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$  i  $R \rightarrow \infty$ , prema izrazima (4.39) i (4.40) važi da se

$$\operatorname{Re}\Psi(R, \varphi) \sim R^2 \cos(2\varphi) \quad \text{i} \quad \operatorname{Im}\Psi(R, \varphi) \sim R^2 \sin(2\varphi) + \begin{cases} aR^{1+\alpha} \sin((1+\alpha)\varphi), & \text{ako je } \alpha > \beta, \\ bR^{1+\beta} \sin((1+\beta)\varphi), & \text{ako je } \alpha < \beta, \end{cases}$$

odakle sledi da je

$$\operatorname{Im}\Psi(R, \varphi) < 0 \quad \text{za } \varphi \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right),$$

dok za  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  i  $\varphi = \pi$  važi da se

$$\operatorname{Re}\Psi\left(R, \frac{\pi}{2}\right) \sim -R^2 \rightarrow -\infty \quad \text{i} \quad \operatorname{Im}\Psi\left(R, \frac{\pi}{2}\right) \sim \begin{cases} aR^{1+\alpha} \cos\frac{\alpha\pi}{2}, & \text{ako je } \alpha > \beta \\ bR^{1+\beta} \cos\frac{\beta\pi}{2}, & \text{ako je } \alpha < \beta \end{cases} \rightarrow \infty$$

$$\operatorname{Re}\Psi(R, \pi) \sim R^2 \rightarrow \infty \quad \text{i} \quad \operatorname{Im}\Psi(R, \pi) \sim \begin{cases} -aR^{1+\alpha} \sin(\alpha\pi), & \text{ako je } \alpha > \beta \\ -bR^{1+\beta} \sin(\beta\pi), & \text{ako je } \alpha < \beta \end{cases} \rightarrow -\infty.$$

Duž konture  $\gamma_3$ , parametrizovane sa  $s = \rho e^{j\pi}$ , pri čemu  $\rho \in (0, \infty)$ , realni i imaginarni deo funkcije  $\Psi$ , prema (4.39) i (4.40), glase

$$\operatorname{Re}\Psi(\rho, \pi) = \rho^2 - a\rho^{1+\alpha} \cos(\alpha\pi) - b\rho^{1+\beta} \cos(\beta\pi) + c\rho^{\alpha+\beta} \cos((\alpha+\beta)\pi) - d\rho + e\rho^\alpha \cos(\alpha\pi) + f, \quad (4.41)$$

$$\operatorname{Im}\Psi(\rho, \pi) = -a\rho^{1+\alpha} \sin(\alpha\pi) - b\rho^{1+\beta} \sin(\beta\pi) + c\rho^{\alpha+\beta} \sin((\alpha+\beta)\pi) + e\rho^\alpha \sin(\alpha\pi), \quad (4.42)$$

i očigledno je da oba mogu menjati znak za  $\rho \in (0, \infty)$ . Asimptotsko ponašanje

$$\operatorname{Re}\Psi(\rho, \pi) \sim f \quad \text{i} \quad \operatorname{Im}\Psi(\rho, \pi) \sim e\rho^\alpha \sin(\alpha\pi) \rightarrow 0^+ \quad \text{kada } \rho \rightarrow 0,$$

$$\operatorname{Re}\Psi(\rho, \pi) \sim \rho^2 \rightarrow \infty \quad \text{i} \quad \operatorname{Im}\Psi(\rho, \pi) \sim \begin{cases} -a\rho^{1+\alpha} \sin(\alpha\pi), & \text{ako je } \alpha > \beta \\ -b\rho^{1+\beta} \sin(\beta\pi), & \text{ako je } \alpha < \beta \end{cases} \rightarrow -\infty \quad \text{kada } \rho \rightarrow \infty,$$

realnog i imaginarnog dela funkcije  $\Psi$ , datih sa (4.41) i (4.42), implicira da imaginarni deo funkcije  $\Psi$  duž  $\gamma_3$  menja svoj znak iz negativnog u pozitivan i stoga pri određenoj vrednosti  $\rho^*$  postaje jednak nuli, odnosno,

$$\operatorname{Im}\Psi(\rho^*, \pi) = 0 \quad \text{implicira}$$

$$a(\rho^*)^{1+\alpha} \sin(\alpha\pi) + b(\rho^*)^{1+\beta} \sin(\beta\pi) = c(\rho^*)^{\alpha+\beta} \sin((\alpha+\beta)\pi) + e(\rho^*)^\alpha \sin(\alpha\pi), \quad (4.43)$$

ako je  $\alpha + \beta \in (0, 1)$ . Pošto su svi članovi na levoj strani jednakosti u (4.43) stepene funkcije čiji je red veći od jedan (i manji od dva), dok su funkcije na desnoj strani jednakosti u (4.43) stepene funkcije čiji je red manji od jedinice (i veći od nule), jednačina (4.43) ima, pored  $\rho = 0$ , još jednu nulu  $\rho^*$ . Ista argumentacija važi i ako je  $\alpha + \beta \in (1, 2)$ . Prema tome, vrednost realnog dela funkcije  $\Psi$ , izračunata u tački  $\rho^*$ , određuje da li kontura koja odgovara funkciji  $\Psi(s)$  obuhvata koordinatni početak kada se  $s$  menja duž konture  $\gamma_3$ , tako da:

$$\begin{aligned} \text{ako je } \operatorname{Re}\Psi(\rho^*, \pi) < 0, & \quad \text{tada kontura ne obuhvata koordinatni početak,} \\ \text{ako je } \operatorname{Re}\Psi(\rho^*, \pi) = 0, & \quad \text{tada kontura prolazi kroz koordinatni početak,} \\ \text{ako je } \operatorname{Re}\Psi(\rho^*, \pi) > 0, & \quad \text{tada kontura obuhvata koordinatni početak.} \end{aligned}$$

Duž konture  $\gamma_4$ , parametrizovane sa  $s = re^{j\varphi}$ , pri čemu  $\varphi \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$  i  $r \rightarrow 0$ , prema (4.39) i (4.40), važi da je

$$\operatorname{Re}\Psi(r, \varphi) = f \quad \text{i} \quad \operatorname{Im}\Psi(r, \varphi) \sim er^\alpha \sin(\alpha\varphi) \rightarrow 0^+.$$

Prethodna analiza implicira da promena argumenta funkcije  $\Psi(s)$  kada se  $s$  menja duž konture  $\gamma$  zavisi od znaka  $\operatorname{Re}\Psi(\rho^*, \pi)$ , pri čemu je  $\rho^*$  dobijeno kao rešenje jednačine (4.43), odnosno, ako je  $\operatorname{Re}\Psi(\rho^*, \pi) < 0$ , tada je  $\Delta \arg \Psi(s) = 0$ , dok ukoliko je  $\operatorname{Re}\Psi(\rho^*, \pi) > 0$ , tada je  $\Delta \arg \Psi(s) = 2\pi$ , te, prema principu argumenta, ako je  $\operatorname{Re}\Psi(\rho^*, \pi) < 0$ , ( $\operatorname{Re}\Psi(\rho^*, \pi) > 0$ ) tada funkcija  $\Psi$  nema nule (ima jednu nulu) u gornjem levom kvadrantu kompleksne ravni i stoga nema nule (ima par kompleksno konjugovanih nula sa negativnim realnim delom) u čitavoj kompleksnoj ravni. Ako je  $\operatorname{Re}\Psi(\rho^*, \pi) = 0$ , gde je  $\rho^*$  takvo da je  $\operatorname{Im}\Psi(\rho^*, \pi) = 0$ , tada je  $-\rho^*$  negativna realna nula funkcije  $\Psi$ . Klasifikacija nula funkcije  $\Psi$ , a samim tim i funkcije  $\Phi_{\text{dd}}$ , data je u tabeli 4.1.

### Određivanje impulsnog odziva $g_C$ u I slučaju

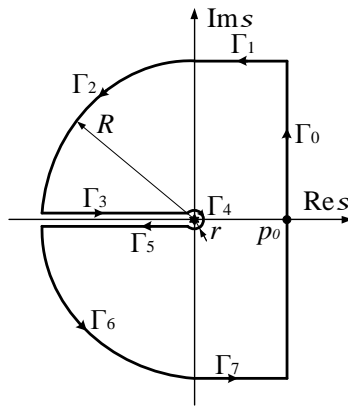
Impulсни odziv napona na pasivnom kondenzatoru  $g_C$  u I slučaju navedenom u izrazu (4.36), određuje se primenom inverzne Laplasove transformacije na funkciju prenosa  $\hat{g}_C$ , datu sa (4.26)<sub>2</sub>, odnosno korišćenjem Laplasove inverzione formule (1.21) u obliku

$$g_C(t) = \mathcal{L}^{-1}[\hat{g}_C(s)](t) = \frac{1}{2\pi j} \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ r \rightarrow 0}} \int_{\Gamma_0} \hat{g}_C(s) e^{st} ds, \quad (4.44)$$

kada se primeni na funkciju prenosa  $\hat{g}_C$ , kao i Košijeve integralne formule

$$\oint_{\Gamma} \hat{g}_C(s) e^{st} ds = 0, \quad (4.45)$$

gde je putanja  $\Gamma$  izabrana kao na slici 4.6, pošto funkcija prenosa  $\hat{g}_C$  u I slučaju nema ni polova, videti tabelu 4.1, ni drugih tačaka grananja osim  $s = 0$ .



Slika 4.6: Kontura  $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4 \cup \Gamma_5 \cup \Gamma_6 \cup \Gamma_7$ .

Integracija duž kontura  $\Gamma_3$  i  $\Gamma_5$ , parametrizovanih sa  $s = \rho e^{j\pi}$  i  $s = \rho e^{-j\pi}$ , pri čemu  $\rho \in (0, \infty)$ , respektivno daje

$$I_{\Gamma_3} = \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ r \rightarrow 0}} \int_{\Gamma_3} \hat{g}_C(s) e^{st} ds = \int_{\infty}^0 \frac{1}{\Phi_{dd}(\rho e^{j\pi})} e^{\rho t e^{j\pi}} e^{j\pi} d\rho = \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Re}\Phi_{dd}(\rho e^{j\pi}) - j\operatorname{Im}\Phi_{dd}(\rho e^{j\pi})}{|\Phi_{dd}(\rho e^{j\pi})|^2} e^{-\rho t} d\rho, \quad (4.46)$$

$$I_{\Gamma_5} = \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ r \rightarrow 0}} \int_{\Gamma_5} \hat{g}_C(s) e^{st} ds = \int_0^{\infty} \frac{1}{\Phi_{dd}(\rho e^{-j\pi})} e^{\rho t e^{-j\pi}} e^{-j\pi} d\rho = - \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Re}\Phi_{dd}(\rho e^{j\pi}) + j\operatorname{Im}\Phi_{dd}(\rho e^{j\pi})}{|\Phi_{dd}(\rho e^{j\pi})|^2} e^{-\rho t} d\rho, \quad (4.47)$$

pošto je  $\Phi_{dd}(\rho e^{-j\pi}) = \bar{\Phi}_{dd}(\rho e^{j\pi})$ , gde linija iznad  $\Phi_{dd}$  označava kompleksnu konjugaciju, tako da se na osnovu Košijeve integralne formule (4.45) i izraza (4.44), (4.46) i (4.47) dobija

$$g_C(t) = -\frac{1}{2\pi j} (I_{\Gamma_3} + I_{\Gamma_5}) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Im}\Phi_{dd}(\rho e^{j\pi})}{|\Phi_{dd}(\rho e^{j\pi})|^2} e^{-\rho t} d\rho = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{K_C(\rho)}{|\Phi_{dd}(\rho e^{j\pi})|^2} e^{-\rho t} d\rho, \quad (4.48)$$

budući da integrali duž svih ostalih kontura sa slike 4.6 teže nuli kada  $R \rightarrow \infty$  i  $r \rightarrow 0$ , pri čemu su funkcije  $\Phi_{dd}$  i  $K_C$  respektivno date sa (4.27) i (4.37).

Integral duž konture  $\Gamma_1$ , parametrizovane sa  $s = p + jR$ , pri čemu  $p \in (0, p_0)$ , kada  $R \rightarrow \infty$  daje

$$I_{\Gamma_1} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_1} \hat{g}_C(s) e^{st} ds = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{p_0}^0 \frac{1}{\Phi_{dd}(p + jR)} e^{(p+jR)t} dp,$$

odakle sledi da je

$$|I_{\Gamma_1}| \leq \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{p_0} \frac{1}{|\Phi_{dd}(p + jR)|} e^{pt} dp \leq \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{p_0} \frac{1}{\tau_L \tau_C R^2} e^{pt} dp \rightarrow 0 \quad \text{kada } R \rightarrow \infty,$$

pošto za  $|s| = \sqrt{p^2 + R^2} \sim R$  i  $\arg s = \arctan \frac{R}{p} \sim \frac{\pi}{2}$ , prema (4.27) važi da se  $|\Phi_{\text{dd}}(Re^{j\frac{\pi}{2}})| \sim \tau_L \tau_C R^2$  kada  $R \rightarrow \infty$ , stoga  $I_{\Gamma_1} \rightarrow 0$  kada  $R \rightarrow \infty$ . Slična argumentacija daje da  $I_{\Gamma_7} \rightarrow 0$  kada  $R \rightarrow \infty$ .

Integral duž konture  $\Gamma_2$ , parametrizovane sa  $s = Re^{j\varphi}$ , pri čemu  $\varphi \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ , kada  $R \rightarrow \infty$  daje

$$I_{\Gamma_2} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_2} \hat{g}_C(s) e^{st} ds = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{\Phi_{\text{dd}}(Re^{j\varphi})} e^{Rte^{j\varphi}} jRe^{j\varphi} d\varphi,$$

odakle sledi da je

$$|I_{\Gamma_2}| \leq \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{R}{|\Phi_{\text{dd}}(Re^{j\varphi})|} e^{Rt \cos \varphi} d\varphi \leq \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{\tau_L \tau_C R} e^{Rt \cos \varphi} d\varphi \rightarrow 0 \quad \text{kada } R \rightarrow \infty,$$

pošto je  $\cos \varphi < 0$  kada  $\varphi \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$  i prema (4.27) važi da se  $|\Phi_{\text{dd}}(Re^{j\varphi})| \sim \tau_L \tau_C R^2$  kada  $R \rightarrow \infty$  i stoga  $I_{\Gamma_2} \rightarrow 0$  kada  $R \rightarrow \infty$ . Slična argumentacija daje da  $I_{\Gamma_6} \rightarrow 0$  kada  $R \rightarrow \infty$ .

Integral duž konture  $\Gamma_4$ , parametrizovane sa  $s = re^{j\varphi}$ , pri čemu  $\varphi \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ , kada  $r \rightarrow 0$  daje

$$I_{\Gamma_4} = \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\Gamma_4} \hat{g}_C(s) e^{st} ds = \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\pi}^{-\pi} \frac{1}{\Phi_{\text{dd}}(re^{j\varphi})} e^{rte^{j\varphi}} jre^{j\varphi} d\varphi,$$

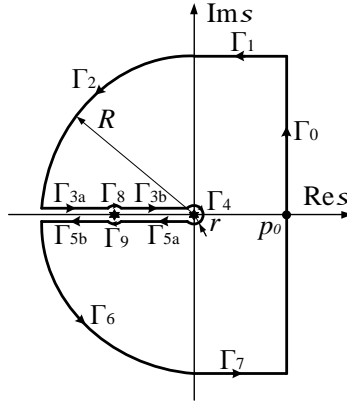
odakle sledi da je

$$|I_{\Gamma_4}| \leq \lim_{r \rightarrow 0} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{r}{|\Phi_{\text{dd}}(re^{j\varphi})|} e^{rt \cos \varphi} d\varphi \leq \lim_{r \rightarrow 0} \int_{-\pi}^{\pi} r d\varphi \rightarrow 0 \quad \text{kada } r \rightarrow 0,$$

pošto prema (4.27) važi da se  $|\Phi_{\text{dd}}(re^{j\varphi})| \sim 1$  kada  $r \rightarrow 0$ , odakle se zaključuje da i  $I_{\Gamma_4} \rightarrow 0$  kada  $r \rightarrow 0$ .

### Određivanje impulsnog odziva $g_C$ u II slučaju

Impulсни odziv  $g_C$  u II slučaju navedenom u (4.36), određuje se primenom inverzne Laplasove transformacije na funkciju prenosa  $\hat{g}_C$ , datu sa (4.26)<sub>2</sub>, koristeći se definicijom inverzne Laplasove transformacije (4.44) i Košijevom integralnom formulom (4.45), gde je kontura  $\Gamma$  odabrana kao što je prikazano na slici 4.7, pošto u II slučaju funkcija  $\hat{g}_C$  ima negativni realni pol  $s_0 = -\rho^*$ , videti tabelu 4.1, kao i tačku grananja  $s = 0$ .



Slika 4.7: Kontura  $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_{3a} \cup \Gamma_{3b} \cup \Gamma_4 \cup \Gamma_{5a} \cup \Gamma_{5b} \cup \Gamma_6 \cup \Gamma_7 \cup \Gamma_8 \cup \Gamma_9$ .

Integracija duž kontura  $\Gamma_{3a} \cup \Gamma_{3b}$  i  $\Gamma_{5a} \cup \Gamma_{5b}$  daje integrale (4.46) i (4.47), koji, kombinovani na sličan način kao u (4.48), impliciraju

$$I_{\Gamma_{3a} \cup \Gamma_{3b}} + I_{\Gamma_{5a} \cup \Gamma_{5b}} = -2j \int_0^{\infty} \frac{K_C(\rho)}{|\Phi_{\text{dd}}(\rho e^{j\pi})|^2} e^{-\rho t} d\rho, \quad (4.49)$$

dok integracija duž kontura  $\Gamma_8$  i  $\Gamma_9$ , respektivno parametrizovanih sa  $s = \rho^* e^{j\pi} + re^{j\varphi}$  pri čemu  $\varphi \in (0, \pi)$  i  $s = \rho^* e^{-j\pi} + re^{j\varphi}$  pri čemu  $\varphi \in (-\pi, 0)$ , kada  $r \rightarrow 0$  daje

$$I_{\Gamma_8} = \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\Gamma_8} \hat{g}_C(s) e^{st} ds = \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\pi}^0 \frac{1}{\Phi_{\text{dd}}(\rho^* e^{j\pi} + re^{j\varphi})} e^{(\rho^* e^{j\pi} + re^{j\varphi})t} j re^{j\varphi} d\varphi$$

$$= -j e^{-\rho^* t} \int_0^\pi \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r e^{j\varphi}}{\Phi_{dd}(\rho^* e^{j\pi} + r e^{j\varphi})} d\varphi = j\pi \frac{\rho^*}{P(\rho^* e^{j\pi})} e^{-\rho^* t}, \quad (4.50)$$

$$\begin{aligned} I_{\Gamma_9} &= \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\Gamma_9} \hat{g}_C(s) e^{st} ds = \lim_{r \rightarrow 0} \int_0^{-\pi} \frac{1}{\Phi_{dd}(\rho^* e^{-j\pi} + r e^{j\varphi})} e^{(\rho^* e^{-j\pi} + r e^{j\varphi})t} j r e^{j\varphi} d\varphi \\ &= -j e^{-\rho^* t} \int_{-\pi}^0 \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r e^{j\varphi}}{\Phi_{dd}(\rho^* e^{-j\pi} + r e^{j\varphi})} d\varphi = j\pi \frac{\rho^*}{\bar{P}(\rho^* e^{j\pi})} e^{-\rho^* t}, \end{aligned} \quad (4.51)$$

pošto, kao što će biti pokazano u nastavku, važi da je

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{r e^{j\varphi}}{\Phi_{dd}(\rho^* e^{j\pi} + r e^{j\varphi})} = -\frac{\rho^*}{P(\rho^* e^{j\pi})} \quad \text{i} \quad \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r e^{j\varphi}}{\Phi_{dd}(\rho^* e^{-j\pi} + r e^{j\varphi})} = -\frac{\rho^*}{\bar{P}(\rho^* e^{j\pi})}, \quad (4.52)$$

gde je  $P$  dato sa (4.32), odnosno u obliku

$$\begin{aligned} P(\rho^* e^{j\pi}) &= 2\tau_L \tau_C (\rho^*)^2 - (1 + \alpha) \tau_L \tau_\alpha (\rho^*)^{1+\alpha} e^{j\alpha\pi} - (1 + \beta) \tau_C \tau_\beta (\rho^*)^{1+\beta} e^{j\beta\pi} \\ &\quad + (\alpha + \beta) \tau_\alpha \tau_\beta (\rho^*)^{\alpha+\beta} e^{j(\alpha+\beta)\pi} - \tau_C \rho^* + \alpha \tau_\alpha (\rho^*)^\alpha e^{j\alpha\pi}, \end{aligned}$$

tako da se kombinovanjem izraza (4.50) i (4.51) dobija

$$I_{\Gamma_8} + I_{\Gamma_9} = j\pi \left( \frac{1}{P(\rho^* e^{j\pi})} + \frac{1}{\bar{P}(\rho^* e^{j\pi})} \right) \rho^* e^{-\rho^* t} = 2\pi j \frac{\operatorname{Re} P(\rho^* e^{j\pi})}{|P(\rho^* e^{j\pi})|^2} \rho^* e^{-\rho^* t}. \quad (4.53)$$

Iz Košijevе integralne formule (4.45), prema (4.49) i (4.53), sledi

$$g_C(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{K_C(\rho)}{|\Phi_{dd}(\rho e^{j\pi})|^2} e^{-\rho t} d\rho - \frac{\operatorname{Re} P(\rho^* e^{j\pi})}{|P(\rho^* e^{j\pi})|^2} \rho^* e^{-\rho^* t},$$

pošto integrali duž svih ostalih kontura na slici 4.7 teže nuli kada  $R \rightarrow \infty$  i  $r \rightarrow 0$ , kao što je već pokazano u prethodnom odeljku.

Važenje relacije (4.52)<sub>1</sub> se dokazuje zapisivanjem funkcije  $\Phi_{dd}(\rho^* e^{j\pi} + r e^{j\varphi})$  kada  $r \rightarrow 0$  u obliku

$$\Phi_{dd}(\rho^* e^{j\pi} + r e^{j\varphi})$$

$$\begin{aligned} &= \tau_L \tau_C (\rho^* e^{j\pi})^2 \left( 1 - \frac{r e^{j\varphi}}{\rho^*} \right)^2 + \tau_L \tau_\alpha (\rho^* e^{j\pi})^{1+\alpha} \left( 1 - \frac{r e^{j\varphi}}{\rho^*} \right)^{1+\alpha} + \tau_C \tau_\beta (\rho^* e^{j\pi})^{1+\beta} \left( 1 - \frac{r e^{j\varphi}}{\rho^*} \right)^{1+\beta} \\ &\quad + \tau_\alpha \tau_\beta (\rho^* e^{j\pi})^{\alpha+\beta} \left( 1 - \frac{r e^{j\varphi}}{\rho^*} \right)^{\alpha+\beta} + \tau_C \rho^* e^{j\pi} \left( 1 - \frac{r e^{j\varphi}}{\rho^*} \right) + \tau_\alpha (\rho^* e^{j\pi})^\alpha \left( 1 - \frac{r e^{j\varphi}}{\rho^*} \right)^\alpha + 1 \\ &\sim \tau_L \tau_C (\rho^*)^2 \left( 1 - 2 \frac{r e^{j\varphi}}{\rho^*} \right) + \tau_L \tau_\alpha (\rho^* e^{j\pi})^{1+\alpha} \left( 1 - (1 + \alpha) \frac{r e^{j\varphi}}{\rho^*} \right) \\ &\quad + \tau_C \tau_\beta (\rho^* e^{j\pi})^{1+\beta} \left( 1 - (1 + \beta) \frac{r e^{j\varphi}}{\rho^*} \right) + \tau_\alpha \tau_\beta (\rho^* e^{j\pi})^{\alpha+\beta} \left( 1 - (\alpha + \beta) \frac{r e^{j\varphi}}{\rho^*} \right) \\ &\quad - \tau_C \rho^* \left( 1 - \frac{r e^{j\varphi}}{\rho^*} \right) + \tau_\alpha (\rho^* e^{j\pi})^\alpha \left( 1 - \alpha \frac{r e^{j\varphi}}{\rho^*} \right) + 1 \\ &\sim \Phi_{dd}(\rho^* e^{j\pi}) - \frac{r e^{j\varphi}}{\rho^*} \left( 2\tau_L \tau_C (\rho^*)^2 + (1 + \alpha) \tau_L \tau_\alpha (\rho^* e^{j\pi})^{1+\alpha} + (1 + \beta) \tau_C \tau_\beta (\rho^* e^{j\pi})^{1+\beta} \right. \\ &\quad \left. + (\alpha + \beta) \tau_\alpha \tau_\beta (\rho^* e^{j\pi})^{\alpha+\beta} - \tau_C \rho^* + \alpha \tau_\alpha (\rho^* e^{j\pi})^\alpha \right), \end{aligned}$$

odakle, pošto je  $\Phi_{dd}(\rho^* e^{j\pi}) = 0$ , sledi relacija (4.52)<sub>1</sub>. Slično se dokazuje i izraz (4.52)<sub>2</sub>.

### Određivanje impulsnog odziva $g_C$ u III slučaju

Impulsni odziv  $g_C$  u III slučaju navedenom u (4.36), određuje se primenom inverzne Laplasove transformacije na funkciju prenosa  $\hat{g}_C$ , datu sa (4.26)<sub>2</sub>, koristeći se definicijom inverzne Laplasove transformacije (4.44) i Košijevom teoremom o reziduumima (1.23) u obliku

$$\oint_{\Gamma} \hat{g}_C(s) e^{st} ds = 2\pi j \left( \operatorname{Res}(\hat{g}_C(s) e^{st}, s_0) + \operatorname{Res}(\hat{g}_C(s) e^{st}, \bar{s}_0) \right), \quad (4.54)$$

kada se primeni na funkciju prenosa  $\hat{g}_C$ , gde je kontura integracije  $\Gamma$  odabrana kao na slici 4.6, pošto funkcija  $\hat{g}_C$  u III slučaju ima par kompleksno konjugovanih polova  $s_0$  i  $\bar{s}_0$  sa negativnim realnim delom, videti tabelu 4.1, kao i tačku grananja  $s = 0$ .

Leva strana Košijevе teoreme o reziduuumima (4.54) je već izračunata u odeljku posvećenom I slučaju u obliku (4.48), tako da se (4.54) transformiše u

$$g_C(t) - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{K_C(\rho)}{|\Phi_{dd}(\rho e^{j\pi})|^2} e^{-\rho t} d\rho = \text{Res}(\hat{g}_C(s) e^{st}, s_0) + \text{Res}(\hat{g}_C(s) e^{st}, \bar{s}_0), \quad (4.55)$$

gde su reziduuumi:

$$\begin{aligned} \text{Res}(\hat{g}_C(s) e^{st}, s_0) &= \left. \frac{e^{st}}{\frac{d}{ds} \Phi_{dd}(s)} \right|_{s=s_0} = \frac{e^{jt \text{Im} s_0}}{\frac{d}{ds} \Phi_{dd}(s)} \Big|_{s=s_0} e^{-|\text{Re} s_0| t}, \\ \text{Res}(\hat{g}_C(s) e^{st}, \bar{s}_0) &= \left. \frac{e^{st}}{\frac{d}{ds} \Phi_{dd}(s)} \right|_{s=\bar{s}_0} = \frac{e^{-jt \text{Im} s_0}}{\frac{d}{ds} \Phi_{dd}(s)} \Big|_{s=\bar{s}_0} e^{-|\text{Re} s_0| t}, \end{aligned}$$

tako da je

$$\text{Res}(\hat{g}_C(s) e^{st}, s_0) + \text{Res}(\hat{g}_C(s) e^{st}, \bar{s}_0) = 2 \text{Re} \left( \frac{e^{jt \text{Im} s_0}}{\frac{d}{ds} \Phi_{dd}(s)} \Big|_{s=s_0} \right) e^{-|\text{Re} s_0| t},$$

pošto je  $\frac{d}{ds} \Phi_{dd}(s) \Big|_{s=\bar{s}_0} = \overline{\frac{d}{ds} \Phi_{dd}(s) \Big|_{s=s_0}}$ , odakle, prema (4.55) sledi da je

$$g_C(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{K_C(\rho)}{|\Phi_{dd}(\rho e^{j\pi})|^2} e^{-\rho t} d\rho + 2 \text{Re} \left( \frac{e^{jt \text{Im} s_0}}{\frac{d}{ds} \Phi_{dd}(s)} \Big|_{s=s_0} \right) e^{-|\text{Re} s_0| t}.$$

## 4.2.2 Numerički primeri

Struja disipativno-disipativnog *RLC* kola, kao odziv na elektromotornu silu oblika Hevisajdove funkcije  $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 H(t)$ , gde je  $\mathcal{E}_0$  intenzitet elektromotorne sile, dobijena je korišćenjem izraza za struju kola (4.29)<sub>1</sub> u obliku

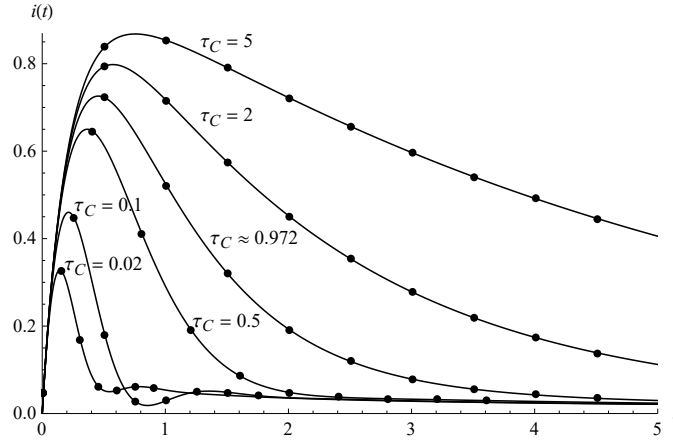
$$i(t) = \mathcal{E}_0 (g_i(t) * H(t)) = \mathcal{E}_0 \int_0^t g_i(t') dt',$$

gde je impulsni odziv struje  $g_i$  uzet u obliku (4.30).

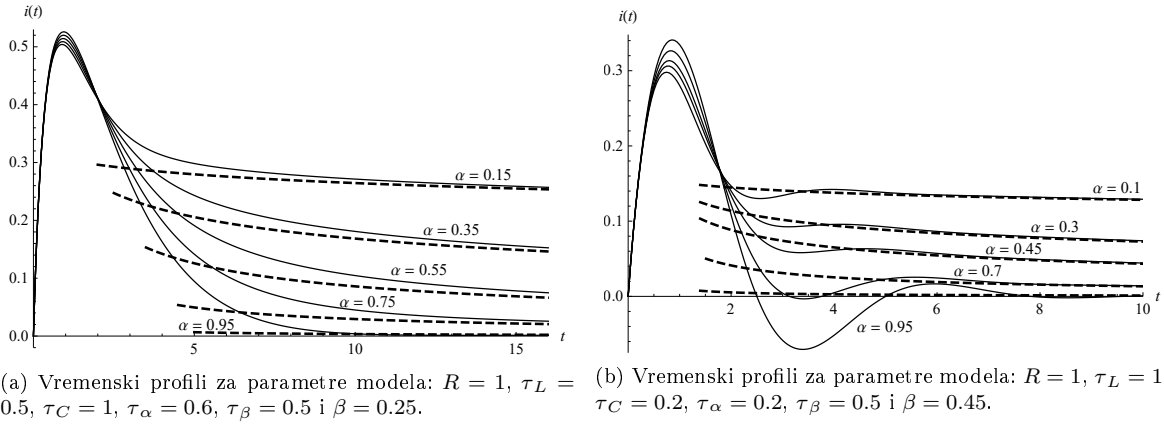
Slika 4.8 ilustruje kvalitativno različite tipove vremenskih profila struje kola, koji se kreću u rasponu od aperiodičnog, dobijenog za  $\tau_C > \tau_C^{\text{cr}} = 0.972\dots$ , a koji odgovara I slučaju u izrazu za impulsni odziv struje (4.30), preko kritično aperiodičnog, dobijenog za  $\tau_C = \tau_C^{\text{cr}}$  i koji odgovara II slučaju iz (4.30), do prigušeno oscilatornog, dobijenog za  $\tau_C < \tau_C^{\text{cr}}$ , koji odgovara III slučaju iz (4.30). Oscilatorno ponašanje struje kola može biti prigušeno do te mere da oscilacije uopšte nisu vidljive, kao u slučaju krive koja odgovara  $\tau_C = 0.5$ . Takođe, moguće je primetiti savršeno poklapanje krivih dobijenih korišćenjem analitičkih izraza i onih koje su računane pomoću Talbotovog algoritma za numeričku inverziju Laplasove transformacije, koji su razvili J. Abate i P. P. Valkó u [1] i čija je implementacija u programskom paketu *Mathematica* dostupna na: <http://library.wolfram.com/infocenter/MathSource/4738/>.

Uticao promene reda frakcionog izvoda  $\alpha$ , koji se javlja u konstitutivnoj jednačini pasivnog kondenzatora (2.9), na vremenske profile struje kola je prikazan na slici 4.9. Iako su vremenski profili struje na slici 4.9a naizgled aperiodični, navedeno svojstvo važi samo za krive koje odgovaraju vrednostima parametra  $\alpha = 0.55$  i  $\alpha = 0.75$ , dok krive, dobijene za  $\alpha = 0.15, 0.35, 0.95$ , imaju oscilatorni karakter koji je prigušen do te mere da su oscilacije neprimetne. Svi vremenski profili na slici 4.9b imaju oscilatorni karakter bez obzira na red frakcionog izvoda  $\alpha$ , međutim oscilacije su izraženije za veće vrednosti  $\alpha$ . Slike 4.9a i 4.9b ilustruju činjenicu da kriva koja odgovara najvećoj vrednosti parametra  $\alpha$  dostiže najveću maksimalnu vrednost, a zatim opada najvećom brzinom.

Bez obzira na red frakcionog izvoda  $\alpha$ , sve krive sa slike 4.9 se poklapaju za malo vreme, kao što je predviđeno asimptotikom struje kola (4.56), koja je data u nastavku i prema kojoj struja raste tokom vremena kao kombinacija linearne i stepene funkcije sa eksponentom koji zavisi od reda frakcionog izvoda  $\beta$ , koji se pojavljuje u konstitutivnoj jednačini pasivnog kalemata (2.10). Struja kola za veliko vreme opada kao funkcija stepenog tipa, pri čemu stepen dominantno zavisi od reda frakcionog izvoda  $\alpha$ , koji odgovara pasivnom kondenzatoru, a u pojedinim članovima višeg reda i od parametra  $\beta$ , videti asimptotiku struje



Slika 4.8: Vremenski profili struje  $RLC$  kola kao odgovor na elektromotornu silu u vidu Hevisajdove funkcije intenziteta  $\mathcal{E}_0 = 1$ , dobijeni analitički (pune linije) i numerički (tačke) za parametre modela:  $R = 1$ ,  $\tau_L = 0.2$ ,  $\tau_\alpha = 0.1$ ,  $\tau_\beta = 0.05$ ,  $\alpha = 0.55$ , i  $\beta = 0.55$ .



(a) Vremenski profili za parametre modela:  $R = 1$ ,  $\tau_L = 0.5$ ,  $\tau_C = 1$ ,  $\tau_\alpha = 0.6$ ,  $\tau_\beta = 0.5$  i  $\beta = 0.25$ .

(b) Vremenski profili za parametre modela:  $R = 1$ ,  $\tau_L = 1$ ,  $\tau_C = 0.2$ ,  $\tau_\alpha = 0.2$ ,  $\tau_\beta = 0.5$  i  $\beta = 0.45$ .

Slika 4.9: Vremenski profili struje  $RLC$  kola kao odgovor na elektromotornu silu u vidu Hevisajdove funkcije intenziteta  $\mathcal{E}_0 = 1$  (pune linije) u poređenju sa izrazima dobijenim asimptotskom analizom (isprekidane linije).

kola (4.57). Vremenski profili se veoma dobro slažu sa asimptotikom za veliko vreme, kao što je vidljivo i sa slika 4.9a i 4.9b.

Asimptotika struje kola, kao odziva na pobudu u obliku Hevisajdove funkcije, za malo vreme data sa

$$i(t) \sim \frac{\mathcal{E}_0}{R} \left( \frac{1}{\tau_L} t - \frac{\tau_\beta}{\tau_L^2} \frac{t^{2-\beta}}{\Gamma(3-\beta)} \right) \text{ kada } t \rightarrow 0, \quad (4.56)$$

dobija se primenom inverzne Laplasove transformacije na izraz

$$\hat{i}(s) \sim \frac{\mathcal{E}_0}{R} \frac{1}{\tau_L} \frac{1}{s^2} \left( 1 - \frac{\tau_\beta}{\tau_L} \frac{1}{s^{1-\beta}} \right) \text{ kada } s \rightarrow \infty,$$

koji sledi iz asimptotike funkcije prenosa  $\hat{g}_i$ , date sa (4.33) i Laplasove transformacije elektromotorne sile  $\hat{\mathcal{E}}(s) = \mathcal{E}_0 \frac{1}{s}$ . Sa druge strane, asimptotsko ponašanje struje za veliko vreme

$$i(t) \sim \frac{\mathcal{E}_0}{R} \left( \tau_C \delta(t) + \tau_\alpha \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \right)$$

$$+ \frac{\mathcal{E}_0}{R} \begin{cases} -\tau_\alpha^2 \frac{t^{-2\alpha}}{\Gamma(1-2\alpha)} - \tau_\alpha^2 \tau_\beta \frac{t^{-2\alpha-\beta}}{\Gamma(1-2\alpha-\beta)} + \tau_\alpha^3 \frac{t^{-3\alpha}}{\Gamma(1-3\alpha)}, & \text{if } 0 < \alpha < \frac{1-\beta}{2} < \frac{1}{3}, \\ -\tau_\alpha^2 \frac{t^{-2\alpha}}{\Gamma(1-2\alpha)} + \tau_\alpha^3 \frac{t^{-3\alpha}}{\Gamma(1-3\alpha)}, & \text{if } 0 < \frac{1-\beta}{2} < \alpha < \frac{1}{3}, \\ -\tau_\alpha^2 \frac{t^{-2\alpha}}{\Gamma(1-2\alpha)} - \tau_\alpha^2 \tau_\beta \frac{t^{-2\alpha-\beta}}{\Gamma(1-2\alpha-\beta)}, & \text{if } 0 < \frac{1}{3} < \alpha < \frac{1-\beta}{2} < \frac{1}{2}, \\ -\tau_\alpha^2 \frac{t^{-2\alpha}}{\Gamma(1-2\alpha)}, & \text{if } 0 < \frac{1-\beta}{2} < \frac{1}{3} < \alpha < \frac{1}{2}, \\ 0, & \text{if } \frac{1}{2} < \alpha < 1, \end{cases} \quad \text{kada } t \rightarrow \infty, \quad (4.57)$$

dobija se primenom inverzne Laplasove transformacije na izraz

$$\begin{aligned} \hat{i}(s) &= \frac{\mathcal{E}_0}{R} \left( \tau_C + \tau_\alpha \frac{1}{s^{1-\alpha}} \right) (1 - \tau_\alpha s^\alpha - \tau_\alpha \tau_\beta s^{\alpha+\beta} - \dots + \tau_\alpha^2 s^{2\alpha} + \dots) \\ &\sim \frac{\mathcal{E}_0}{R} \left( \tau_C + \tau_\alpha \frac{1}{s^{1-\alpha}} \right) \\ &+ \frac{\mathcal{E}_0}{R} \begin{cases} -\tau_\alpha^2 \frac{1}{s^{1-2\alpha}} - \tau_\alpha^2 \tau_\beta \frac{1}{s^{1-2\alpha-\beta}} + \tau_\alpha^3 \frac{1}{s^{1-3\alpha}}, & \text{if } 0 < \alpha < \frac{1-\beta}{2} < \frac{1}{3}, \\ -\tau_\alpha^2 \frac{1}{s^{1-2\alpha}} + \tau_\alpha^3 \frac{1}{s^{1-3\alpha}}, & \text{if } 0 < \frac{1-\beta}{2} < \alpha < \frac{1}{3}, \\ -\tau_\alpha^2 \frac{1}{s^{1-2\alpha}} - \tau_\alpha^2 \tau_\beta \frac{1}{s^{1-2\alpha-\beta}}, & \text{if } 0 < \frac{1}{3} < \alpha < \frac{1-\beta}{2} < \frac{1}{2}, \\ -\tau_\alpha^2 \frac{1}{s^{1-2\alpha}}, & \text{if } 0 < \frac{1-\beta}{2} < \frac{1}{3} < \alpha < \frac{1}{2}, \\ 0, & \text{if } \frac{1}{2} < \alpha < 1, \end{cases} \quad \text{kada } s \rightarrow 0, \end{aligned}$$

koji je izveden uvrštavanjem Laplasove transformacije elektromotorne sile  $\hat{\mathcal{E}}(s) = \mathcal{E}_0 \frac{1}{s}$  u funkciju prenosa  $\hat{g}_i$ , datu sa (4.26)<sub>1</sub>, te razvojem u red i korišćenjem aproksimacije  $(1+x)^\alpha \sim 1+\alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2$  za  $|x| \ll 1$ .

Pretpostavljajući elektromotornu silu u obliku harmonijske funkcije

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t) \quad (4.58)$$

i pretpostavljajući različite vrednosti reda frakcionog izvoda  $\beta$  u konstitutivnoj jednačini pasivnog kabela (2.10), prikazivanjem vremenskih profila struje disipativno-disipativnog RLC kola, na slici 4.10 je ilustrovan prelazak kola iz tranzijentnog u kvazistacionarni režim.

Odziv kola u tranzijentnom režimu je određen izrazom

$$i(t) = \mathcal{E}_0 (g_i(t) * \cos(\omega t)) = \mathcal{E}_0 \int_0^t g_i(t-t') \cos(\omega t') dt', \quad (4.59)$$

korišćenjem izraza za struju kola (4.29)<sub>1</sub>, gde je impulsni odziv struje uzet u obliku (4.30), dok se struja kao odziv kola u kvazistacionarnom stanju dobija uzimanjem realnog dela izraza

$$\underline{i}(t) = i_0 e^{j(\omega t + \phi_i)}, \quad \text{odnosno} \quad i(t) = i_0 \cos(\omega t + \phi_i), \quad (4.60)$$

gde su amplituda i fazni stav struje dati sa

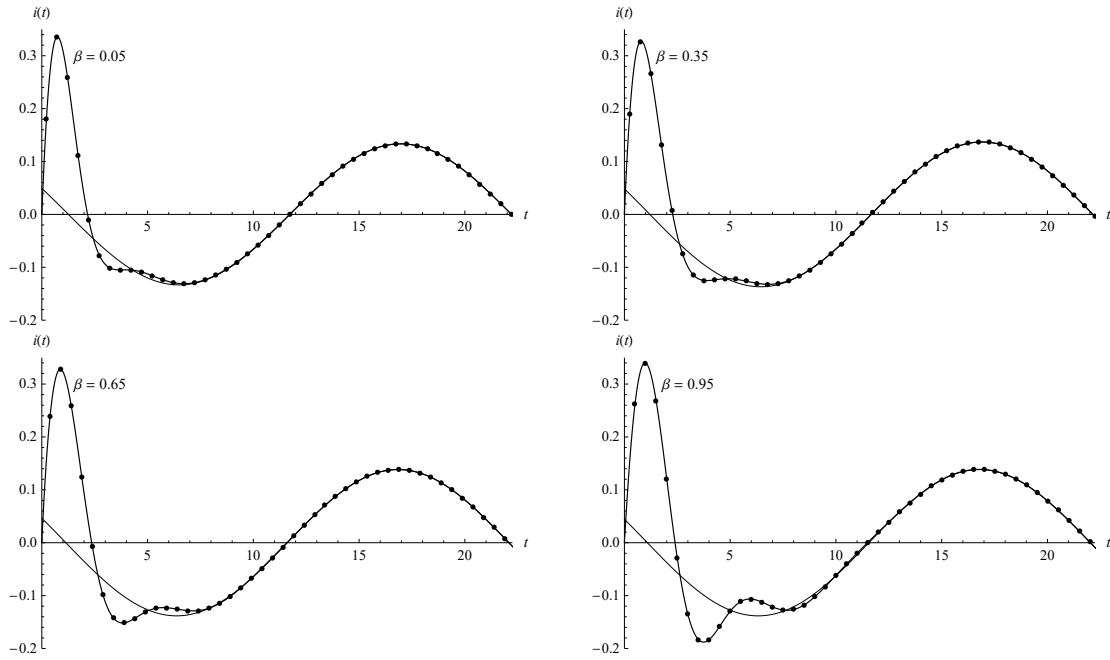
$$i_0(\omega) = \frac{\mathcal{E}_0}{|Z_e^{(dd)}(\omega)|} = \frac{\mathcal{E}_0}{\left| R + \frac{1}{Y_C^{(d)}(\omega)} + Z_L^{(d)}(\omega) \right|}, \quad (4.61)$$

$$\phi_i(\omega) = \arctan \frac{\sin \phi_i^{(dd)}(\omega)}{\cos \phi_i^{(dd)}(\omega)}, \quad (4.62)$$

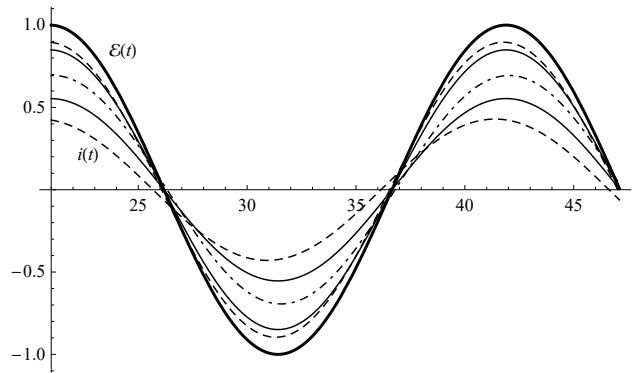
respektivno, videti izvođenje sa početka odeljka 4.3, pri čemu su impedanse disipativnog kondenzatora  $\frac{1}{Y_C^{(d)}}$  i kabela  $Z_L^{(d)}$  određene izrazima (2.20) i (2.21), dok su  $\sin \phi_i^{(dd)}$  i  $\cos \phi_i^{(dd)}$  dati sa (4.70) i (4.69).

Struja kola, određena konvolucijom impulsnog odziva i elektromotorne sile u obliku (4.29)<sub>1</sub> za proizvoljnu pobudu, pa tako i za pobudu u obliku harmonijske funkcije (4.58), opisuje prelazni režim i važi za bilo koji trenutak vremena. Međutim, impulsni odziv struje  $g_i$ , dat izrazom (4.30), je opadajuća funkcija, te za veliko vreme, prema Tauberovoj teoremi primenjenoj na funkciju prenosa  $\hat{g}_i$ , datu sa (4.26)<sub>1</sub>, dostiže nultu vrednost, odnosno

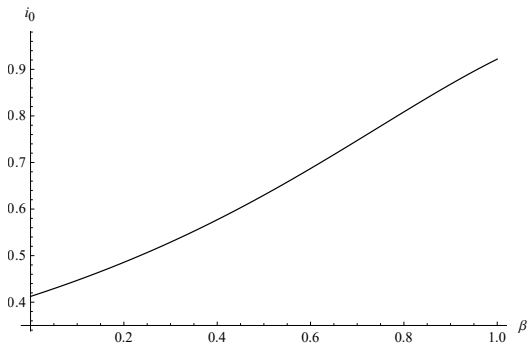
$$\lim_{t \rightarrow \infty} g_i(t) = \lim_{s \rightarrow 0} (s \hat{g}_i(s)) = 0,$$



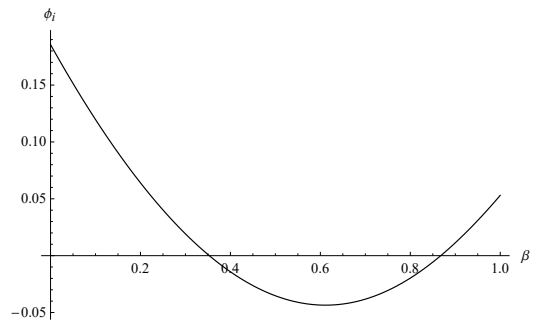
Slika 4.10: Vremenski profili struje  $RLC$  kola kao odgovor na elektromotornu silu u obliku kosinusne funkcije amplitude  $\mathcal{E}_0 = 1$  i ugaone učestalosti  $\omega = 0.3$ , dobijeni analitički (4.59) (pune linije) i numerički (tačke) za tranzijentni režim i krive dobijene analitički (4.60) (tanka puna linija) za kvazistacionarno stanje za parametre modela:  $R = 1$ ,  $\tau_L = 1$ ,  $\tau_C = 0.2$ ,  $\tau_\alpha = 0.2$ ,  $\tau_\beta = 0.5$  i  $\alpha = 0.8$ .



(a) Vremenski profili struje prikazani punim linijama za  $\beta = 0.353\dots$  i  $\beta = 0.868\dots$ , isprekidanim linijama za  $\beta = 0.05$  i  $\beta = 0.95$  i tačkasto isprekidanim linijama za  $\beta = 0.611\dots$  u poređenju sa vremenskim profilom elektromotorne sile.



(b) Amplituda struje u zavisnosti od parametra  $\beta$ .



(c) Fazni ugao struje u zavisnosti od parametra  $\beta$ .

Slika 4.11: Struja  $RLC$  kola kao odgovor na elektromotornu silu u obliku kosinusne funkcije amplitude  $\mathcal{E}_0 = 1$  i ugaone učestalosti  $\omega = 0.3$ , dobijen za parametre modela:  $R = 0.65$ ,  $\tau_L = 0.5$ ,  $\tau_C = 0.5$ ,  $\tau_\alpha = 1.5$ ,  $\tau_\beta = 2$  and  $\alpha = 0.5$ .



tako da harmonijska pobuda preovlađuje za veliko vreme, odnosno uvodi i upravlja odzivom  $RLC$  kola u kvazistacionarnom stanju.

Sa slike 4.10 je očigledno da povećanje vrednosti parametra  $\beta$  utiče na izraženiji oscilatorni karakter vremenskih profila struje  $RLC$  kola u prelaznom režimu, a takođe i da utiče na produženje vremena trajanja prelaznog režima, odnosno na odlaganje ulaska kola u kvazistacionarno stanje. Savršeno poklapanje krivih koje odgovaraju prelaznom režimu i koje su dobijene korišćenjem analitičkog izraza (4.59) i numeričkom inverzijom Laplasove transformacije, kao i slaganje ovih krivih sa krivom koja odgovara kvazistacionarnom režimu, dobijenom korišćenjem izraza (4.60), takođe je očigledno sa slike 4.10.

Uticao promene parametra  $\beta$  na vremenske profile struje kola u kvazistacionarnom režimu, kao i na amplitudu i fazni stav struje, analiziran je na slici 4.11 za fiksiranu vrednost ugaone učestalosti. Sa slike 4.11c je očigledno da odziv frakcionog  $RLC$  kola menja karakter od pretežno kapacitivnog, dobijenog za vrednosti parametra  $\beta \in (0, 0.353...) \cup (0.868..., 1)$ , pošto je fazni stav struje pozitivan, odnosno veći od faznog stava elektromotorne sile koji je jednak nuli, preko čisto rezistivnog za  $\beta = 0.353...$  i  $\beta = 0.868...$ , pošto je za ove vrednosti parametra  $\beta$  fazni stav struje jednak nuli, što se poklapa sa vrednošću faznog stava elektromotorne sile, do pretežno induktivnog, dobijenog za  $\beta \in (0.353..., 0.868...)$ , pošto je fazni stav struje negativan, odnosno manji od nultog faznog stava elektromotorne sile. Vremenski profili sa slike 4.11a, koji odgovaraju pretežno kapacitivnom karakteru frakcionog  $RLC$  kola, prikazani su isprekidanim linijama, pune linije odgovaraju kolu sa čisto rezistivnim karakterom, dok tačkasto isprekidana linija odgovara slučaju u kojem kolo ima najizraženiji induktivni karakter, pošto je za vrednost parametra  $\beta = 0.611...$  fazni ugao struje minimalan. Slika 4.11b pokazuje da, za izabrane vrednosti parametara modela, amplituda struje monotono raste sa porastom vrednosti parametra  $\beta$ .

### 4.3 Energetski bilans $RLC$ kola u kvazistacionarnom režimu

Frakciona  $RLC$  kola koja sadrže disipativne i/ili generativne elemente analiziraju se sa aspekta potrošnje, odnosno proizvodnje energije razmatranjem kola u kvazistacionarnom režimu, tako što se elektromotorna sila, struja kola i naponi na frakcionom kondenzatoru i kalemu pretpostavljaju u obliku harmonijskih funkcija

$$\underline{\mathcal{E}}(t) = \mathcal{E}_0 e^{j\omega t}, \quad \underline{i}(t) = i_0 e^{j(\omega t + \phi_i)}, \quad \underline{u}_C(t) = u_{C0} e^{j(\omega t + \phi_C)} \quad \text{i} \quad \underline{u}_L(t) = u_{L0} e^{j(\omega t + \phi_L)}, \quad (4.63)$$

ugaone učestalosti  $\omega$ , amplituda  $\mathcal{E}_0$ ,  $i_0$ ,  $u_{C0}$  i  $u_{L0}$  i faznih stavova  $\phi_i$ ,  $\phi_C$  i  $\phi_L$ . Energija koju frakciono  $RLC$  kolo potroši, odnosno proizvede tokom jedne periode  $T$  harmonijskih funkcija (4.63), određena je izrazom

$$W = \int_{nT}^{(n+1)T} \mathcal{E}(t) i(t) dt = \mathcal{E}_0 i_0 \int_{nT}^{(n+1)T} \cos(\omega t) \cos(\omega t + \phi_i) dt = \frac{1}{2} \mathcal{E}_0 i_0 T \cos \phi_i, \quad (4.64)$$

gde su

$$\mathcal{E} = \text{Re } \underline{\mathcal{E}} \quad \text{i} \quad i = \text{Re } \underline{i},$$

te je jasno da znak kosinusa faznog ugla struje određuje da li kolo disipira ili generiše energiju, dok znak sinusa faznog ugla određuje da li je karakter kola kapacitivan ili induktivan. Naime, ukoliko je  $\cos \phi_i > 0$ , kolo disipira energiju, a ukoliko je  $\cos \phi_i < 0$ , kolo generiše energiju, dok za  $\sin \phi_i > 0$  kolo ima kapacitivan karakter, pošto struja prednjači elektromotornoj sili, a za  $\sin \phi_i < 0$  kolo ima induktivni karakter, jer struja kasni za elektromotornom silom.

Izrazi za kosinus i sinus faznog stava struje  $\phi_i$ , izraženi preko odnosa amplituda struje i elektromotorne sile  $\frac{i_0}{\mathcal{E}_0}$ , mogu se izvesti uvrštavanjem izraza (4.63)<sub>1,2</sub> za elektromotornu silu i struju u jednačine frakcionih  $RLC$  kola (4.4), (4.7), (4.9) i (4.10). Isti rezultat bi se postigao uvrštavanjem  $s = j\omega$  u izraze (4.5), (4.8), (4.13) i (4.14) za funkcije prenosa koje odgovaraju struji, te razdvajanjem realnog i imaginarnog dela u tako dobijenim izrazima, uz pretpostavku da je  $\hat{i}(j\omega) = i_0 e^{j(\omega t + \phi_i)}$  i  $\hat{\mathcal{E}}(j\omega) = \mathcal{E}_0 e^{j\omega t}$ .

Međutim, u cilju određivanja za sinus i kosinus faznog stava struje, umesto pomenutih pristupa, koristi se pristup u duhu teorije električnih kola, te se drugi Kirhofov zakon za  $RLC$  kolo u kvazistacionarnom režimu, kombinovan sa Omovim zakonom, zapisuje u obliku

$$\underline{\mathcal{E}}(t) = R \underline{i}(t) + \underline{u}_L(t) + \underline{u}_C(t), \quad (4.65)$$

te se korišćenjem izraza (2.20) i (2.21) za impedanse pasivnog kondenzatora i kalema, kao i izraza (2.31) i (2.32) za impedanse aktivnog kondenzatora i kalema, drugi Kirhofov zakon (4.65) transformiše u

$$\underline{\mathcal{E}}(t) = (R + Z_C + Z_L) \underline{i}(t), \quad \text{odnosno} \quad \underline{\mathcal{E}}(t) = Z_e \underline{i}(t), \quad (4.66)$$

pri čemu je  $Z_e = R + Z_C + Z_L$  ekvivalentna impedansa frakcionog  $RLC$  kola. Uvrštavanjem izraza (4.63)<sub>1,2</sub> za elektromotornu silu i struju kola u drugi Kirhofov zakon (4.66) se dobija

$$Z_e = \frac{\mathcal{E}_0}{i_0} e^{-j\phi_i}, \quad \text{odakle sledi} \quad \cos \phi_i = \frac{\operatorname{Re} Z_e}{|Z_e|} \quad \text{i} \quad \sin \phi_i = -\frac{\operatorname{Im} Z_e}{|Z_e|}. \quad (4.67)$$

U slučaju disipativno-disipativnog  $RLC$  kola, na osnovu izraza za ekvivalentnu impedansu

$$Z_e^{(dd)}(\omega) = R + \frac{1}{Y_C^{(d)}(\omega)} + Z_L^{(d)}(\omega), \quad (4.68)$$

dobija se

$$\cos \phi_i^{(dd)}(\omega) = \frac{1}{|Z_e^{(dd)}(\omega)|} \left( R + \frac{C_\alpha \omega^\alpha \cos \frac{\alpha\pi}{2}}{C^2 \omega^2 + 2CC_\alpha \omega^{1+\alpha} \sin \frac{\alpha\pi}{2} + C_\alpha^2 \omega^{2\alpha}} + L_\beta \omega^\beta \cos \frac{\beta\pi}{2} \right), \quad (4.69)$$

$$\sin \phi_i^{(dd)}(\omega) = \frac{1}{|Z_e^{(dd)}(\omega)|} \left( \frac{C\omega + C_\alpha \omega^\alpha \sin \frac{\alpha\pi}{2}}{C^2 \omega^2 + 2CC_\alpha \omega^{1+\alpha} \sin \frac{\alpha\pi}{2} + C_\alpha^2 \omega^{2\alpha}} - L\omega - L_\beta \omega^\beta \sin \frac{\beta\pi}{2} \right), \quad (4.70)$$

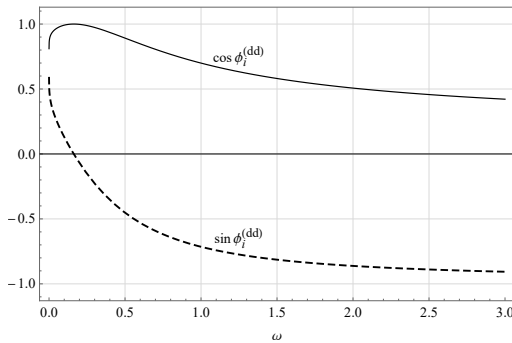
korišćenjem impedansi pasivnog kondenzatora i kalema (2.20) i (2.21) i izraza (4.67). Na osnovu izraza za kosinus faznog stava struje (4.69) je očigledno da je kolo disipativno za sve frekvencije  $\omega$ , pošto je  $\cos \phi_i(\omega) > 0$ , dok asimptotika

$$\cos \phi_i^{(dd)}(\omega) \sim \cos \frac{\alpha\pi}{2} \quad \text{kada} \quad \omega \rightarrow 0 \quad \text{i} \quad \cos \phi_i^{(dd)}(\omega) \sim \frac{L_\beta}{L} \frac{1}{\omega^{1-\beta}} \cos \frac{\beta\pi}{2} \rightarrow 0^+ \quad \text{kada} \quad \omega \rightarrow \infty, \quad (4.71)$$

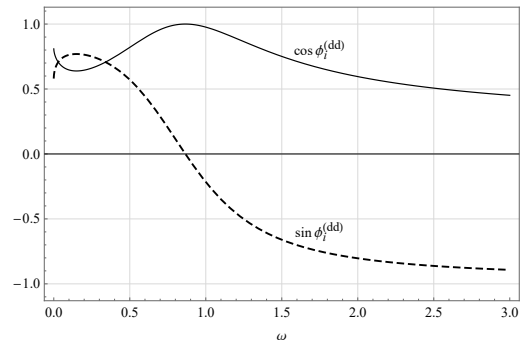
implicira da je za niske učestalosti disipacija energije određena parametrom  $\alpha$ , koji karakteriše pasivni kondenzator, dok je disipacija energije za visoke učestalosti zanemarljiva. Karakter kola se menja od kapacitivnog za niske učestalosti do induktivnog za visoke učestalosti, što se može videti iz izraza za asimptotiku sinusa faznog ugla

$$\sin \phi_i^{(dd)}(\omega) \sim \sin \frac{\alpha\pi}{2} > 0 \quad \text{kada} \quad \omega \rightarrow 0 \quad \text{i} \quad \sin \phi_i^{(dd)}(\omega) \sim -1 \quad \text{kada} \quad \omega \rightarrow \infty. \quad (4.72)$$

Kosinus i sinus faznog ugla struje u funkciji ugaone učestalosti, dobijeni korišćenjem izraza (4.69) i (4.70), prikazani na slici 4.12, jasno ilustruju da disipativno-disipativno  $RLC$  kolo troši energiju za sve učestalosti, uz mogućnost da kosinus faznog ugla ima i minimum, uporediti slike 4.12a i 4.12b, pri čemu kosinus faznog ugla u oba slučaja teži ka nuli sa gornje strane, kao što je i predviđeno asimptotikom (4.71), dok se vrednost sinusa faznog ugla, monotonno ili nemonotonno, menja od pozitivne do negativne, što govori o promeni karaktera kola sa kapacitivnog na induktivni, kako je i predviđeno asimptotikom (4.72).



(a) Krive dobijene za navedene parametre i  $\tau_\alpha = 3$ .



(b) Krive dobijene za navedene parametre i  $\tau_\alpha = 0.2$ .

Slika 4.12: Energetski bilans i karakter disipativno-disipativnog  $RLC$  kola:  $\cos \phi_i^{(dd)}$  i  $\sin \phi_i^{(dd)}$  kao funkcije ugaone učestalosti  $\omega$ , dobijeni za parametre modela:  $\alpha = 0.4$ ,  $\beta = 0.8$ ,  $\tau_C = 0.5$ ,  $\tau_L = 0.5$ , i  $\tau_\beta = 1.5$ .

Korišćenjem ekvivalentne impedanse generativno-generativnog  $RLC$  kola

$$Z_e^{(gg)}(\omega) = R + Z_C^{(g)}(\omega) + \frac{1}{Y_L^{(g)}(\omega)}, \quad (4.73)$$

gde su impedanse aktivnog kondenzatora i kalemata uzete u obliku (2.31) i (2.32), izraz (4.67) za kosinus i sinus faznog stava struje daje

$$\cos \phi_i^{(gg)}(\omega) = \frac{1}{|Z_e^{(gg)}(\omega)|} \left( R - \frac{\sin \frac{\mu\pi}{2}}{C_\mu \omega^{1+\mu}} - LL_\nu \omega^{1+\nu} \frac{L \sin \frac{\nu\pi}{2}}{L_\nu^2 \omega^{2\nu} + 2LL_\nu \omega^\nu \cos \frac{\nu\pi}{2} + L^2} \right), \quad (4.74)$$

$$\sin \phi_i^{(gg)}(\omega) = \frac{1}{|Z_e^{(gg)}(\omega)|} \left( \frac{1}{C\omega} + \frac{\cos \frac{\mu\pi}{2}}{C_\mu \omega^{1+\mu}} - LL_\nu \omega^{1+\nu} \frac{L_\nu \omega^\nu + L \cos \frac{\nu\pi}{2}}{L_\nu^2 \omega^{2\nu} + 2LL_\nu \omega^\nu \cos \frac{\nu\pi}{2} + L^2} \right). \quad (4.75)$$

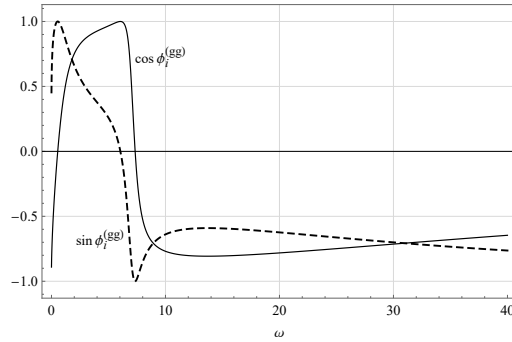
Asimptotika kosinusa faznog stava struje

$$\cos \phi_i^{(gg)}(\omega) \sim -\sin \frac{\mu\pi}{2} < 0 \quad \text{kada } \omega \rightarrow 0 \quad \text{i} \quad \cos \phi_i^{(gg)}(\omega) \sim -\frac{L}{L_\nu \omega^\nu} \sin \frac{\nu\pi}{2} \rightarrow 0^- \quad \text{kada } \omega \rightarrow \infty \quad (4.76)$$

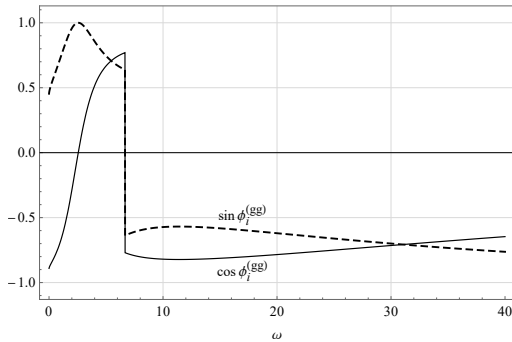
implicira da je kolo generativno kako za niske, tako i za visoke učestalosti, a da može biti disipativno za učestalosti srednjeg opsega, dok asimptotika sinusa faznog stava struje

$$\sin \phi_i^{(gg)}(\omega) \sim \cos \frac{\mu\pi}{2} > 0 \quad \text{kada } \omega \rightarrow 0 \quad \text{i} \quad \sin \phi_i^{(gg)}(\omega) \sim -1 \quad \text{kada } \omega \rightarrow \infty, \quad (4.77)$$

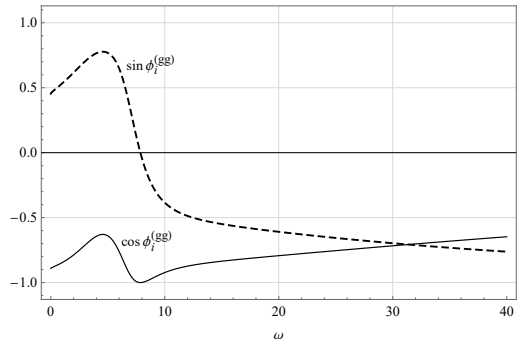
implicira da je kapacitivni karakter kola dominantan za niske, dok je kolo induktivno za visoke učestalosti, kao i u slučaju disipativno-disipativnog *RLC* kola.



(a) Krive dobijene za navedene parametre i  $\tau_\mu = 2.5$ .



(b) Krive dobijene za navedene parametre i  $\tau_\mu = 0.20980$ .



(c) Krive dobijene za navedene parametre i  $\tau_\mu = 0.055$ .

Slika 4.13: Energetski bilans i karakter generativno-generativnog *RLC* kola:  $\cos \phi_i^{(gg)}$  i  $\sin \phi_i^{(gg)}$  kao funkcije ugaone učestalosti  $\omega$ , dobijeni za parametre modela:  $\mu = 0.7$ ,  $\nu = 0.9$ ,  $\tau_C = 0.75$ ,  $\tau_L = 0.75$  i  $\tau_\nu = 0.025$ .

Slika 4.13 prikazuje kosinus i sinus faznog stava struje generativno-generativnog *RLC* kola, dobijenih prema izrazima (4.74) i (4.75), u zavisnosti od ugaone učestalosti. U slučaju parametara modela korišćenih za dobijanje dijagrama sa slike 4.13c, kolo generiše energiju za sve učestalosti, dok u slučajevima sa slike 4.13a i 4.13b, kolo generiše energiju i za niske i za visoke učestalosti, što je u skladu sa asimptotikom (4.76), dok kolo disipira energiju za srednje učestalosti, sa mogućnošću nagle promene u karakteru energetskog bilansa, što je ilustrovano na slici 4.13b. Promena dominantnog karaktera kola od kapacitivnog, koji kolo pokazuje za niske učestalosti, do induktivnog, koji kolo pokazuje za visoke učestalosti, što je u skladu

sa asimptotikom (4.77), je nemonotona pri porastu učestalosti za sve prikazane slučajeve parametara modela, a takođe je moguća i nagla promena karaktera kola.

Ekvivalentne impedanse koje odgovaraju disipativno-generativnom i generativno-disipativnom  $RLC$  kolu su date izrazima

$$Z_e^{(dg)}(\omega) = R + \frac{1}{Y_C^{(d)}(\omega)} + \frac{1}{Y_L^{(g)}(\omega)} \quad \text{i} \quad Z_e^{(gd)}(\omega) = R + Z_C^{(g)}(\omega) + Z_L^{(d)}(\omega). \quad (4.78)$$

Ekvivalentna impedansa disipativno-generativnog  $RLC$  kola  $Z_e^{(dg)}$ , data sa (4.78)<sub>1</sub>, korišćenjem impedansi pasivnog kondenzatora i aktivnog kalema, datih sa (2.20) i (2.32), prema izrazu za kosinus i sinus faznog stava struje (4.67) daje

$$\begin{aligned} \cos \phi_i^{(dg)}(\omega) &= \frac{1}{|Z_e^{(dg)}(\omega)|} \\ &\times \left( R + \frac{C_\alpha \omega^\alpha \cos \frac{\alpha\pi}{2}}{C^2 \omega^2 + 2CC_\alpha \omega^{1+\alpha} \sin \frac{\alpha\pi}{2} + C_\alpha^2 \omega^{2\alpha}} - LL_\nu \omega^{1+\nu} \frac{L \sin \frac{\nu\pi}{2}}{L_\nu^2 \omega^{2\nu} + 2LL_\nu \omega^\nu \cos \frac{\nu\pi}{2} + L^2} \right), \end{aligned} \quad (4.79)$$

$$\begin{aligned} \sin \phi_i^{(dg)}(\omega) &= \frac{1}{|Z_e^{(dg)}(\omega)|} \\ &\times \left( \frac{C\omega + C_\alpha \omega^\alpha \sin \frac{\alpha\pi}{2}}{C^2 \omega^2 + 2CC_\alpha \omega^{1+\alpha} \sin \frac{\alpha\pi}{2} + C_\alpha^2 \omega^{2\alpha}} - LL_\nu \omega^{1+\nu} \frac{L_\nu \omega^\nu + L \cos \frac{\nu\pi}{2}}{L_\nu^2 \omega^{2\nu} + 2LL_\nu \omega^\nu \cos \frac{\nu\pi}{2} + L^2} \right), \end{aligned} \quad (4.80)$$

što implicira asimptotike

$$\cos \phi_i^{(dg)}(\omega) \sim \cos \frac{\alpha\pi}{2} > 0 \quad \text{kada} \quad \omega \rightarrow 0 \quad \text{i} \quad \cos \phi_i^{(dg)}(\omega) \sim -\frac{L}{L_\nu \omega^\nu} \sin \frac{\nu\pi}{2} \rightarrow 0^- \quad \text{kada} \quad \omega \rightarrow \infty, \quad (4.81)$$

$$\sin \phi_i^{(dg)}(\omega) \sim \sin \frac{\alpha\pi}{2} > 0 \quad \text{kada} \quad \omega \rightarrow 0 \quad \text{i} \quad \sin \phi_i^{(dg)}(\omega) \sim -1 \quad \text{kada} \quad \omega \rightarrow \infty. \quad (4.82)$$

Sa druge strane, ekvivalentna impedansa  $Z_e^{(gd)}$  generativno-disipativnog  $RLC$  kola, videti (4.78)<sub>2</sub>, korišćenjem impedansi aktivnog kondenzatora (2.21) i pasivnog kalema (2.31), prema izrazu za kosinus i sinus faznog stava struje (4.67) daje

$$\cos \phi_i^{(gd)}(\omega) = \frac{1}{|Z_e^{(gd)}(\omega)|} \left( R - \frac{\sin \frac{\mu\pi}{2}}{C_\mu \omega^{1+\mu}} + L_\beta \omega^\beta \cos \frac{\beta\pi}{2} \right), \quad (4.83)$$

$$\sin \phi_i^{(gd)}(\omega) = \frac{1}{|Z_e^{(gd)}(\omega)|} \left( \frac{1}{C\omega} + \frac{\cos \frac{\mu\pi}{2}}{C_\mu \omega^{1+\mu}} - L\omega - L_\beta \omega^\beta \sin \frac{\beta\pi}{2} \right), \quad (4.84)$$

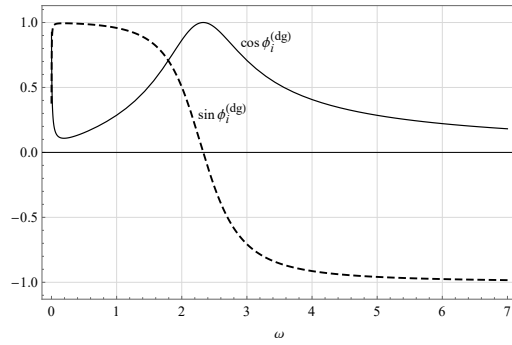
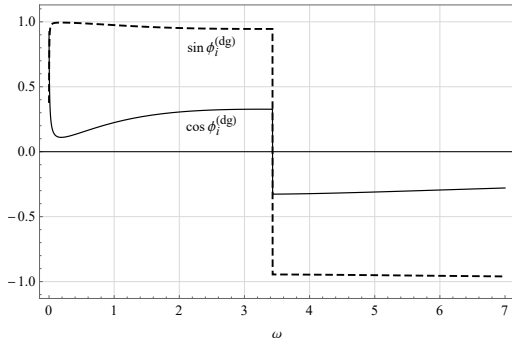
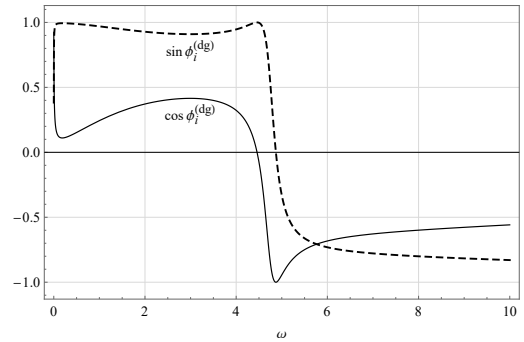
što implicira asimptotike

$$\cos \phi_i^{(gd)}(\omega) \sim -\sin \frac{\mu\pi}{2} < 0 \quad \text{kada} \quad \omega \rightarrow 0 \quad \text{i} \quad \cos \phi_i^{(gd)}(\omega) \sim \frac{L_\beta}{L} \frac{1}{\omega^{1-\beta}} \cos \frac{\beta\pi}{2} \rightarrow 0^+ \quad \text{kada} \quad \omega \rightarrow \infty, \quad (4.85)$$

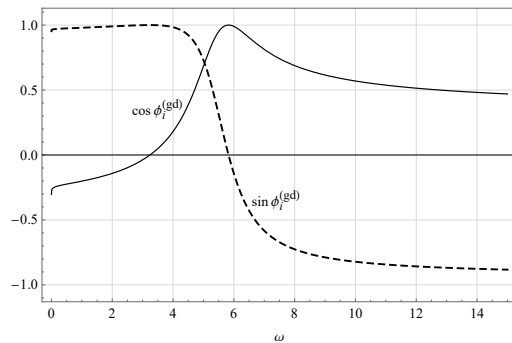
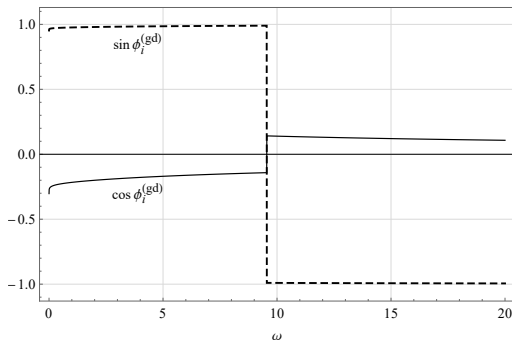
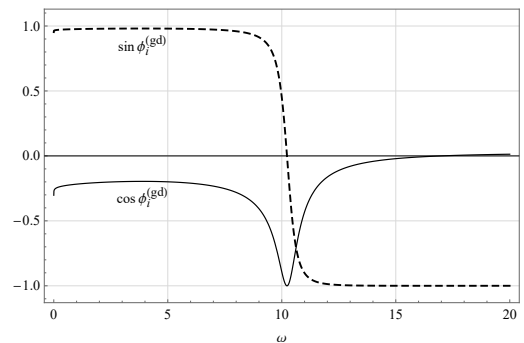
$$\sin \phi_i^{(gd)}(\omega) \sim \cos \frac{\mu\pi}{2} > 0 \quad \text{kada} \quad \omega \rightarrow 0 \quad \text{i} \quad \sin \phi_i^{(gd)}(\omega) \sim -1 \quad \text{kada} \quad \omega \rightarrow \infty. \quad (4.86)$$

Sa aspekta energetskog bilansa, zaključuje se da disipativno-generativno  $RLC$  kolo rasipa energiju za niske učestalosti, a generiše je za visoke učestalosti, videti (4.81), dok se generativno-disipativno kolo ponaša potpuno suprotno, videti (4.85). Kapacitivni i induktivni karakter oba kola je isti kao i u svim prethodnim slučajevima, uporediti (4.82) i (4.86) sa (4.72) i (4.77).

Dijagrami kosinusa i sinusa faznog ugla u funkciji ugaone učestalosti, prikazani na slikama 4.14 i 4.15, dobijaju se prema izrazima (4.79) i (4.80) za disipativno-generativno, odnosno prema izrazima (4.83) i (4.84) za generativno-disipativno  $RLC$  kolo. Slike 4.14a i 4.15c ilustruju činjenicu da kolo disipira, odnosno generiše energiju za prilično širok opseg učestalosti, dok se energetski bilans menja za visoke učestalosti u skladu sa asimptotskim izrazima (4.81) i (4.85), respektivno. Na slici 4.14a se primećuje da kolo menja karakter iz kapacitivnog (kondenzator je disipativni element) u induktivni (kalem je generativni element) pri čemu i dalje troši energiju, suprotno slučaju prikazanom na slici 4.14c, gde je kolo počelo da proizvodi

(a) Krive dobijene za navedene parametre i  $\tau_\nu = 5$ .(b) Krive dobijene za navedene parametre i  $\tau_\nu = 0.23329$ .(c) Krive dobijene za navedene parametre i  $\tau_\nu = 0.09$ .

Slika 4.14: Energetski bilans i karakter disipativno-generativnog *RLC* kola:  $\cos \phi_i^{(dg)}$  i  $\sin \phi_i^{(dg)}$  kao funkcije učestalosti  $\omega$ , dobijeni za parametre modela:  $\alpha = 0.25$ ,  $\nu = 0.85$ ,  $\tau_C = 0.25$ ,  $\tau_\alpha = 0.005$  i  $\tau_L = 0.75$ .

(a) Krive dobijene za navedene parametre i  $\tau_\beta = 5.5$ .(b) Krive dobijene za navedene parametre i  $\tau_\beta = 0.46607$ .(c) Krive dobijene za navedene parametre i  $\tau_\beta = 0.01$ .

Slika 4.15: Energetski bilans i karakter generativno-disipativnog *RLC* kola:  $\cos \phi_i^{(gd)}$  i  $\sin \phi_i^{(gd)}$  kao funkcije učestalosti  $\omega$ , dobijeni za parametre modela:  $\mu = 0.2$ ,  $\beta = 0.6$ ,  $\tau_C = 0.025$ ,  $\tau_\mu = 0.01$  i  $\tau_L = 0.95$ .

energiju dok je još uvek bilo pretežno kapacitivnog (disipativnog) karaktera. Slike 4.15a i 4.15c takođe ilustruju slično ponašanje generativno-disipativnog  $RLC$  kola, pošto je kolo počelo da troši energiju dok je i dalje bilo pretežno kapacitivnog karaktera (kondenzator je generativni element), videti sliku 4.15a, za razliku od slučaja prikazanog na slici 4.15c, gde je kolo promenilo svoj karakter u pretežno induktivni (kalem je disipativni element), dok i dalje proizvodi energiju. Mogućnost nagle promene u potrošnji, odnosno proizvodnji energije i karakteru oba  $RLC$  kola je ilustrovana na slikama 4.14b i 4.15b.

Analizom energetskog bilansa frakcionih  $RLC$  kola, zaključuje se da ukoliko kolo sadrži pasivni kondenzator i kalem, tada kolo troši energiju na celom opsegu učestalosti, videti sliku 4.12, a ukoliko su kondenzator i kalem aktivni, tada kolo može da proizvodi energiju na celom opsegu učestalosti uprkos činjenici da sadrži otpornik, koji predstavlja idealni disipativni element, videti sliku 4.13c. U svim ostalim slučajevima, usled postojanja i aktivnih i pasivnih elemenata kola, energetski bilans kola se menja, tako da se u slučaju generativno-generativnog kola, energija proizvodi i za niske i za visoke učestalosti, a troši na srednjem opsegu učestalosti, videti slike 4.13a i 4.13b, dok se u slučajevima disipativno-generativnog i generativno-disipativnog kola, energija troši, odnosno proizvodi, za niske učestalosti, a proizvodi, odnosno troši, za visoke učestalosti, videti slike 4.14 i 4.15, što je posledica dominantnog kapacitivnog karaktera kola na niskim učestalostima, odnosno induktivnog karaktera kola na visokim učestalostima. Nijedno frakciono  $RLC$  kolo niti proizvodi niti troši energiju, ni za nultu, ni za beskonačnu vrednost učestalosti, jer amplituda struje kola ima nultu vrednost, iako kosinus faznog stava struje može imati nenultu vrednost. Promena energetskog bilansa kola se može odigrati i pri fiksiranoj vrednosti ugaone učestalosti, zavisne od vrednosti parametara modela, videti slike 4.13b, 4.14b i 4.15b.

## 4.4 Frekvencijske karakteristike frakcionih $RLC$ kola

Frekvencijske karakteristike modula i argumenta funkcije prenosa koja odgovara struji frakcionog  $RLC$  kola se tradicionalno dobijaju uvrštavanjem  $s = j\omega$  u funkciju prenosa  $\hat{g}_i(s)$ , nakon čega se određuje njen moduo i argument, pri čemu su funkcije prenosa za disipativno-disipativno, generativno-generativno, disipativno-generativno i generativno-disipativno  $RLC$  kolo date izrazima (4.5), (4.8), (4.13) i (4.14), respektivno.

Međutim, u cilju određivanja modula i argumenta funkcije prenosa koja odgovara struji, umesto pomenutog pristupa, koristi se pristup u duhu teorije električnih kola, te se funkcija prenosa definiše korišćenjem drugog Kirhofovog zakona za frakciono  $RLC$  kolo u kvazistacionarnom režimu (4.66) na sledeći, ekvivalentni, način

$$\hat{g} = R \frac{\underline{i}(t)}{\underline{\mathcal{E}}(t)}, \quad \text{odakle sledi} \quad \hat{g} = \frac{R}{Z_e} = \frac{R}{|Z_e|^2} (\text{Re } Z_e - j \text{Im } Z_e), \quad (4.87)$$

iz čega se vidi da funkcija prenosa  $\hat{g}$  odgovara ekvivalentnoj admitansi  $RLC$  kola pomnoženoj sa otpornošću otpornika  $R$ . Moduo i argument funkcije prenosa se određuju korišćenjem izraza (4.87) u obliku

$$|\hat{g}(\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log |\hat{g}(\omega)| = -10 \log \left( \text{Re}^2 \frac{Z_e(\omega)}{R} + \text{Im}^2 \frac{Z_e(\omega)}{R} \right) \quad \text{i} \quad \arg \hat{g}(\omega) = \text{arccot} \frac{\text{Re } Z_e(\omega)}{-\text{Im } Z_e(\omega)}, \quad (4.88)$$

gde je ekvivalentna impedansa kola  $Z_e$  data izrazom (4.68) u slučaju disipativno-disipativnog  $RLC$  kola, odnosno sa (4.73) za generativno-generativno kolo, kao i sa (4.78) za disipativno-generativno i generativno-disipativno kolo. Definicija funkcije prenosa (4.87), uz korišćenje struje kola i elektromotorne sile, koje su zadate u obliku harmonijskih funkcija, odnosno veličina  $\underline{i}$  i  $\underline{\mathcal{E}}$  datih sa (4.63), takođe implicira

$$\hat{g} = R \frac{i_0}{\mathcal{E}_0} e^{j\phi_i} \quad \text{odakle sledi} \quad |\hat{g}|_{\text{dB}} = 20 \log |\hat{g}| = 20 \log \frac{R i_0}{\mathcal{E}_0} \quad \text{i} \quad \arg \hat{g} = \phi_i.$$

Optimizacija parametara frakcionog  $RL_\beta C_\alpha$  kola, koje se u frekvencijskom domenu ponaša kao propusnik opsega, razmatrana je u [51]. Filteri necelog reda, uključujući analizu frakcionog Kalmanovog filtera, kao i njegova realizacija korišćenjem klasičnih električnih komponenta proučavani su u [43, 63]. Rezonantne pojave u frakcionim električnim kolima razmatrane su u [50, 68], dok se [16, 54] bave različitim frakcionim uopštenjima oscilatora sa Vinovim mostom. Teorijski rezultati povezani sa sistemom linearnih frakcionih diferencijalnih jednačina, zapisanim u matričnom obliku, primenjuju se na kola koja sadrže frakcione elemente u [33].

### 4.4.1 Disipativno-disipativno RLC kolo

Razmatrajući disipativno-disipativno RLC kolo u kvazistacionarnom režimu i zapisujući realni i imaginarni deo ekvivalentne impedanse kola (4.68) preko klasičnih i frakcionih vremenskih konstanti, dobija se

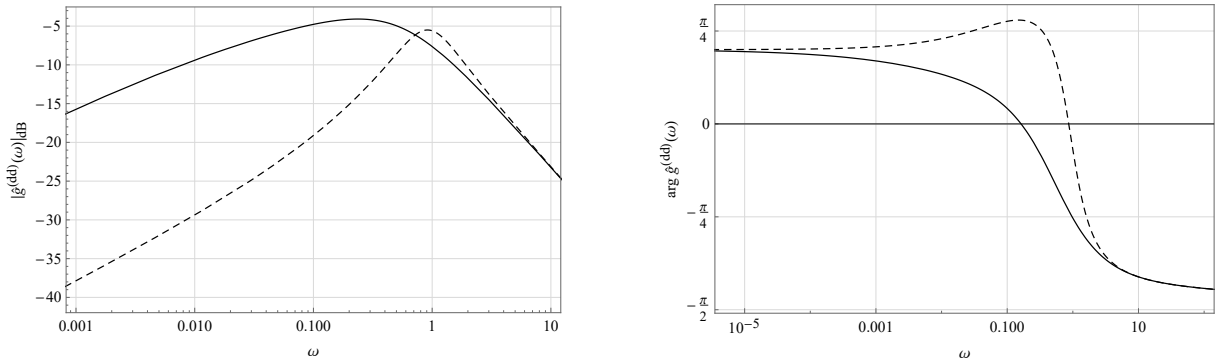
$$\operatorname{Re} Z_e^{(\text{dd})}(\omega) = R \left( 1 + \frac{\tau_\alpha \omega^\alpha \cos \frac{\alpha\pi}{2}}{\tau_C^2 \omega^2 + 2\tau_C \tau_\alpha \omega^{1+\alpha} \sin \frac{\alpha\pi}{2} + \tau_\alpha^2 \omega^{2\alpha}} + \tau_\beta \omega^\beta \cos \frac{\beta\pi}{2} \right), \quad (4.89)$$

$$\operatorname{Im} Z_e^{(\text{dd})}(\omega) = -R \left( \frac{\tau_C \omega + \tau_\alpha \omega^\alpha \sin \frac{\alpha\pi}{2}}{\tau_C^2 \omega^2 + 2\tau_C \tau_\alpha \omega^{1+\alpha} \sin \frac{\alpha\pi}{2} + \tau_\alpha^2 \omega^{2\alpha}} - \tau_L \omega - \tau_\beta \omega^\beta \sin \frac{\beta\pi}{2} \right), \quad (4.90)$$

odakle moduo i argument funkcije prenosa sledi iz (4.88).

Slika 4.16 prikazuje frekvencijske karakteristike modula i argumenta funkcije prenosa za ista dva skupa parametara modela kao u slučaju dijagrama sa slike 4.12. Moduo funkcije prenosa, prikazan na slici 4.16a, je nemonotona funkcija ugaone učestalosti, koja teži minus beskonačnosti za niske učestalosti, što implicira da funkcija prenosa ima nulu necelog reda u koordinatnom početku, što je očigledno i iz izraza (4.5) za funkciju prenosa  $\hat{g}^{(\text{dd})}$ . Moduo funkcije prenosa dostiže maksimum i teži minus beskonačnosti za visoke učestalosti, što sugeriše da funkcija prenosa  $\hat{g}^{(\text{dd})}$  ima par konjugovano kompleksnih polova, što i jeste slučaj za parametre modela korišćene za dobijanje dijagrama prikazanog isprekidanom linijom, dok u slučaju parametara korišćenih za dobijanje pune linije funkcija prenosa nema polova. Oblik modula funkcije prenosa sugeriše da se disipativno-disipativno RLC kolo ponaša kao propusnik opsega sa različitim širinama opsega.

Argument funkcije prenosa, kao i njegov sinus, menja se, monotono ili nemonotono, od pozitivnih do negativnih vrednosti sa povećanjem ugaone učestalosti, kao što je i očigledno sa slike 4.16b, što implicira promenu karaktera kola od pretežno kapacitivnog do pretežno induktivnog, sa rasponom argumenta između  $-\frac{\pi}{2}$  i  $\frac{\pi}{2}$ , što dalje implicira da je kolo disipativno na celom opsegu učestalosti, budući da je kosinus argumenta pozitivan.



(a) Moduo funkcije prenosa  $\hat{g}^{(\text{dd})}$ .

(b) Argument funkcije prenosa  $\hat{g}^{(\text{dd})}$ .

Slika 4.16: Frekvencijske karakteristike modula i argumenta funkcije prenosa za disipativno-disipativno RLC kolo, dobijene za parametre modela:  $\alpha = 0.4$ ,  $\beta = 0.8$ ,  $\tau_C = 0.5$ ,  $\tau_L = 0.5$ ,  $\tau_\beta = 1.5$ , i  $\tau_\alpha = 3$  - puna linija i  $\tau_\alpha = 0.2$  - isprekidana linija.

Kapacitivni karakter frakcionog RLC kola preovlađuje za niske učestalosti, kao što je već pomenuto u odeljku 4.3, stoga asimptotika izraza  $\operatorname{Re} Z_e^{(\text{dd})}$  i  $\operatorname{Im} Z_e^{(\text{dd})}$ , datih sa (4.89) i (4.90), ima sledeći oblik

$$\operatorname{Re} Z_e^{(\text{dd})}(\omega) = R \frac{\cos \frac{\alpha\pi}{2}}{\tau_\alpha \omega^\alpha} \begin{cases} 1 + \frac{\tau_\alpha \omega^\alpha}{\cos \frac{\alpha\pi}{2}} + O(\omega^{1-\alpha}), & \text{ako } \alpha \in (0, \frac{1}{2}), \\ 1 + O(\omega^{1-\alpha}), & \text{ako } \alpha \in [\frac{1}{2}, 1), \end{cases} \quad \text{kada } \omega \rightarrow 0, \quad (4.91)$$

$$\operatorname{Im} Z_e^{(\text{dd})}(\omega) = -R \frac{\sin \frac{\alpha\pi}{2}}{\tau_\alpha \omega^\alpha} (1 + O(\omega^{1-\alpha})), \quad \text{kada } \omega \rightarrow 0, \quad (4.92)$$

gde se u obzir uzimaju samo vodeći članovi realnog i imaginarnog dela impedanse pasivnog kondenzatora  $\frac{1}{Y_C^{(d)}}$ , date sa (2.20), pošto su reda  $-\alpha$ , koji je sigurno manji od reda  $\beta > 0$  vodećih članova impedanse pasivnog kabela  $\operatorname{Re} Z_L^{(d)}$  i  $\operatorname{Im} Z_L^{(d)}$ , videti (2.21), tako da se, prema (4.88)<sub>1</sub>, (4.91) i (4.92), za moduo

funkcije prenosa dobija

$$\left| \hat{g}^{(dd)}(\omega) \right|_{\text{dB}} = 20 \log(\tau_\alpha \omega^\alpha) - 10 \log \begin{cases} 1 + 2\tau_\alpha \omega^\alpha \cos \frac{\alpha\pi}{2} + \tau_\alpha^2 \omega^{2\alpha} + O(\omega^{1-\alpha}), & \text{ako } \alpha \in (0, \frac{1}{3}), \\ 1 + 2\tau_\alpha \omega^\alpha \cos \frac{\alpha\pi}{2} + O(\omega^{1-\alpha}), & \text{ako } \alpha \in [\frac{1}{3}, \frac{1}{2}), \\ 1 + O(\omega^{1-\alpha}), & \text{ako } \alpha \in [\frac{1}{2}, 1), \end{cases} \quad (4.93)$$

kada  $\omega \rightarrow 0$ , dok je argument funkcije prenosa, prema (4.88)<sub>2</sub>, (4.91) i (4.92)

$$\cot \arg \hat{g}^{(dd)}(\omega) = \cot \frac{\alpha\pi}{2} \begin{cases} 1 + \frac{\tau_\alpha \omega^\alpha}{\cos \frac{\alpha\pi}{2}} + O(\omega^{1-\alpha}), & \text{if } \alpha \in (0, \frac{1}{2}), \\ 1 + O(\omega^{1-\alpha}), & \text{if } \alpha \in [\frac{1}{2}, 1), \end{cases} \quad \text{kada } \omega \rightarrow 0. \quad (4.94)$$

Sa druge strane, induktivni karakter frakcionog *RLC* kola postaje dominantan za visoke učestalosti, stoga je asimptotika izraza  $\text{Re } Z_e^{(dd)}$  i  $\text{Im } Z_e^{(dd)}$ , datih sa (4.89) i (4.90), sledećeg oblika

$$\text{Re } Z_e^{(dd)}(\omega) = R \tau_\beta \omega^\beta \cos \frac{\beta\pi}{2} \left( 1 + \frac{\omega^{-\beta}}{\tau_\beta \cos \frac{\beta\pi}{2}} + O(\omega^{-1-\beta}) \right), \quad \text{kada } \omega \rightarrow \infty, \quad (4.95)$$

$$\text{Im } Z_e^{(dd)}(\omega) = R \tau_L \omega \left( 1 + \frac{\tau_\beta \omega^{-1+\beta}}{\tau_L} \sin \frac{\beta\pi}{2} + O(\omega^{-2}) \right), \quad \text{kada } \omega \rightarrow \infty, \quad (4.96)$$

što je posledica razvoja u red i zadržavanja vodećih članova u impedansi pasivnog kondenzatora (2.20), tj.

$$\text{Re } \frac{1}{Y_C^{(d)}} \sim R \frac{\tau_\alpha}{\tau_C^2} \omega^{-2+\alpha} \cos \frac{\alpha\pi}{2} \quad \text{i} \quad \text{Im } \frac{1}{Y_C^{(d)}} \sim -R \frac{1}{\tau_C} \omega^{-1}, \quad \text{kada } \omega \rightarrow \infty, \quad (4.97)$$

tako da se na osnovu (4.95) i (4.96), a prema (4.88), za asimptotiku modula i argumenta funkcije prenosa za visoke učestalosti, odnosno kada  $\omega \rightarrow \infty$ , dobija

$$\left| \hat{g}^{(dd)}(\omega) \right|_{\text{dB}} = -20 \log(\tau_L \omega) - 10 \log \left( 1 + 2 \frac{\tau_\beta}{\tau_L} \omega^{-1+\beta} \sin \frac{\beta\pi}{2} + \frac{\tau_\beta^2}{\tau_L^2} \omega^{-2+2\beta} + 2 \frac{\tau_\beta}{\tau_L^2} \omega^{-2+\beta} \cos \frac{\beta\pi}{2} + O(\omega^{-2}) \right), \quad (4.98)$$

$$\cot \arg \hat{g}^{(dd)}(\omega) = -\frac{\tau_\beta}{\tau_L} \omega^{-1+\beta} \cos \frac{\beta\pi}{2} \left( 1 - \frac{\tau_\beta}{\tau_L} \omega^{-1+\beta} \sin \frac{\beta\pi}{2} + \begin{cases} \frac{\omega^{-\beta}}{\tau_\beta \cos \frac{\beta\pi}{2}} - \frac{1}{\tau_L} \omega^{-1} \tan \frac{\beta\pi}{2} + O(\omega^{-1-\beta}), & \text{ako } \beta \in (0, \frac{1}{3}), \\ \frac{\omega^{-\beta}}{\tau_\beta \cos \frac{\beta\pi}{2}} - \frac{1}{\tau_L} \omega^{-1} \tan \frac{\beta\pi}{2} + \frac{\tau_\beta^2}{\tau_L^2} \omega^{-2+2\beta} \sin^2 \frac{\beta\pi}{2} + O(\omega^{-1-\beta}), & \text{ako } \beta \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}), \\ \frac{\omega^{-\beta}}{\tau_\beta \cos \frac{\beta\pi}{2}} + \frac{\tau_\beta^2}{\tau_L^2} \omega^{-2+2\beta} \sin^2 \frac{\beta\pi}{2} - \frac{1}{\tau_L} \omega^{-1} \tan \frac{\beta\pi}{2} + O(\omega^{-3+3\beta}), & \text{ako } \beta \in (\frac{1}{2}, \frac{2}{3}), \\ \frac{\tau_\beta^2}{\tau_L^2} \omega^{-2+2\beta} \sin^2 \frac{\beta\pi}{2} + \frac{\omega^{-\beta}}{\tau_\beta \cos \frac{\beta\pi}{2}} + O(\omega^{-3+3\beta}), & \text{ako } \beta \in [\frac{2}{3}, \frac{3}{4}), \\ \frac{\tau_\beta^2}{\tau_L^2} \omega^{-2+2\beta} \sin^2 \frac{\beta\pi}{2} + O(\omega^{-3+3\beta}), & \text{ako } \beta \in [\frac{3}{4}, 1), \end{cases} \right) \quad (4.99)$$

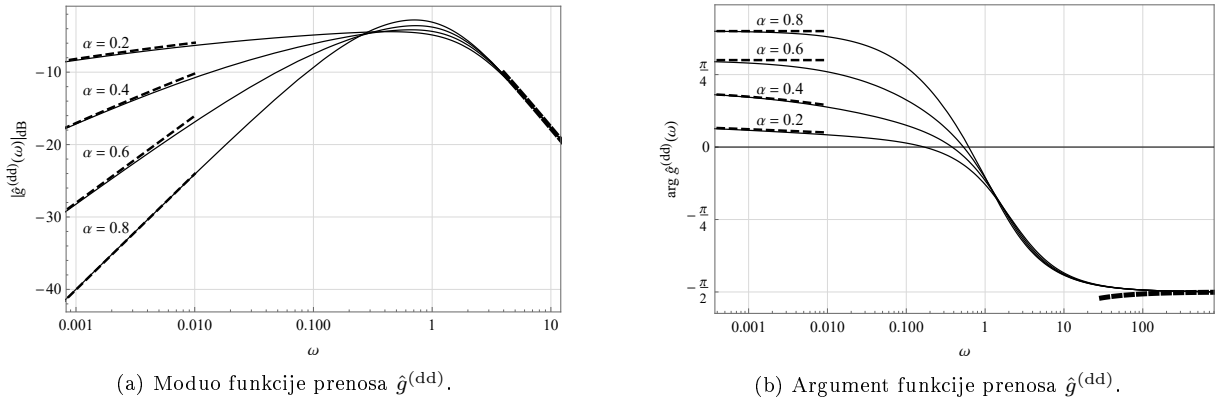
pošto se, kada se (4.95) i (4.96) uvrste u (4.88)<sub>2</sub>, dobija

$$\cot \arg \hat{g}^{(dd)}(\omega) = -\frac{\tau_\beta}{\tau_L} \omega^{-1+\beta} \cos \frac{\beta\pi}{2} \left( 1 + \frac{\omega^{-\beta}}{\tau_\beta \cos \frac{\beta\pi}{2}} + O(\omega^{-1-\beta}) \right) \times \left( 1 - \frac{\tau_\beta}{\tau_L} \omega^{-1+\beta} \sin \frac{\beta\pi}{2} + \frac{\tau_\beta^2}{\tau_L^2} \omega^{-2+2\beta} \sin^2 \frac{\beta\pi}{2} + \begin{cases} O(\omega^{-2}), & \text{if } \beta \in (0, \frac{1}{3}), \\ O(\omega^{-3+3\beta}), & \text{if } \beta \in (\frac{1}{3}, 1), \end{cases} \right)$$

kada  $\omega \rightarrow \infty$ , pri čemu je korišten razvoj u red funkcije  $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + O(x^3)$  kada  $x \rightarrow 0$ .

Na slici 4.17 su prikazani moduo i argument funkcije prenosa u zavisnosti od ugaone učestalosti za različite vrednosti necelog reda izvoda disipativnog kondenzatora, zajedno sa asimptotikom. Moduo funkcije prenosa, videti sliku 4.17a, je linearna funkcija  $\log \omega$ , kako za niske, tako i za visoke učestalosti, sa





Slika 4.17: Poređenje frekvencijskih karakteristika modula i argumenta funkcije prenosa (pune linije) sa asimptotikom (isprekidane linije) za disipativno-disipativno  $RLC$  kolo, dobijenih za parametre modela:  $\beta = 0.2$ ,  $\tau_C = 0.1$ ,  $\tau_\alpha = 2.5$ ,  $\tau_L = 0.75$ , i  $\tau_\beta = 0.25$ .

nagibom određenim redom izvoda  $\alpha$  za niske učestalosti, odnosno jediničnim nagibom za visoke učestalosti, kao što je i predviđeno asimptotikom (4.93) i (4.98). Argument funkcije prenosa, prikazan na slici 4.17b, veoma se dobro slaže sa asimptotikom za niske i visoke učestalosti (4.94) i (4.99).

Može se primetiti da vodeći član u asimptotici modula funkcije prenosa za niske učestalosti (4.93) omogućava određivanje parametara modela  $\alpha$  i  $\tau_\alpha$ , pošto oni respektivno predstavljaju nagib i odsečak funkcije linearne po  $\log \omega$ , dok vodeći član u asimptotici za visoke učestalosti (4.98) daje  $\tau_L$  kao odsečak linearne funkcije po  $\log \omega$ . Na osnovu logaritma apsolutne vrednosti kotangensa argumenta funkcije prenosa, videti prvi član u asimptotici za visoke učestalosti (4.99), određuju se preostali parametri modela  $\beta$  i  $\tau_\beta$ , pošto je

$$\log \left| \cot \arg \hat{g}^{(dd)}(\omega) \right| \sim (-1 + \beta) \log \omega + \log \left( \frac{\tau_\beta}{\tau_L} \cos \frac{\beta\pi}{2} \right), \quad \text{kada } \omega \rightarrow \infty.$$

#### 4.4.2 Generativno-generativno $RLC$ kolo

Realni i imaginarni deo ekvivalentne impedanse  $Z_e^{(gg)}$ , date sa (4.73), koja odgovara generativno-generativnom frakcionom  $RLC$  kolu, zapisani su preko klasičnih i frakcionih vremenskih konstanti u obliku

$$\operatorname{Re} Z_e^{(gg)}(\omega) = R \left( 1 - \frac{\sin \frac{\mu\pi}{2}}{\tau_\mu \omega^{1+\mu}} - \tau_L \tau_\nu \omega^{1+\nu} \frac{\tau_L \sin \frac{\nu\pi}{2}}{\tau_\nu^2 \omega^{2\nu} + 2\tau_L \tau_\nu \omega^\nu \cos \frac{\nu\pi}{2} + \tau_L^2} \right), \quad (4.100)$$

$$\operatorname{Im} Z_e^{(gg)}(\omega) = -R \left( \frac{1}{\tau_C \omega} + \frac{\cos \frac{\mu\pi}{2}}{\tau_\mu \omega^{1+\mu}} - \tau_L \tau_\nu \omega^{1+\nu} \frac{\tau_\nu \omega^\nu + \tau_L \cos \frac{\nu\pi}{2}}{\tau_\nu^2 \omega^{2\nu} + 2\tau_L \tau_\nu \omega^\nu \cos \frac{\nu\pi}{2} + \tau_L^2} \right), \quad (4.101)$$

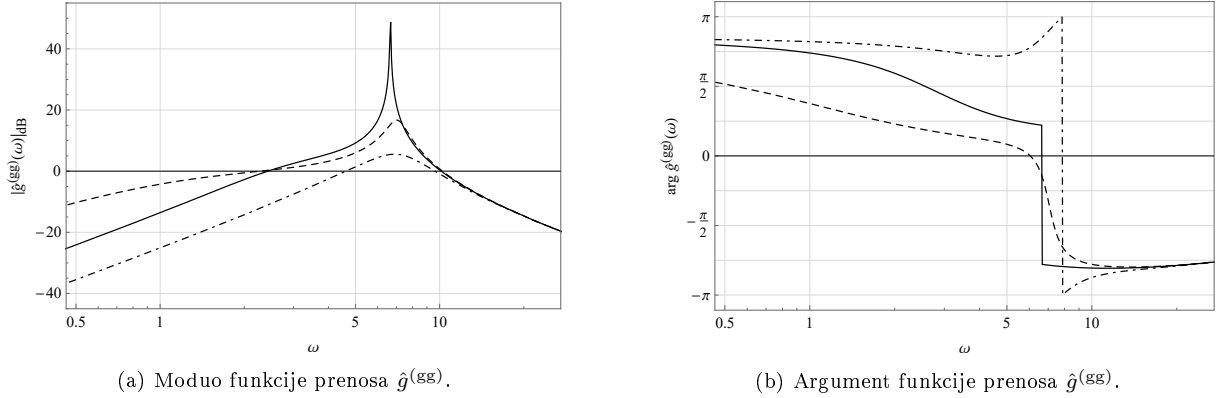
te daju izraze za moduo i argument funkcije prenosa kada se uvrste u (4.88).

Frekvencijske karakteristike modula i argumenta funkcije prenosa, prikazane na slici 4.18 i dobijene za iste parametre modela kao i u slučaju dijagrama sa slike 4.13, ilustruju mogućnost da moduo funkcije prenosa ima vertikalnu asimptotu, dok se argument naglo menja za  $\pi$ , videti pune linije sa slika 4.18a i 4.18b, što je svojstvo funkcije prenosa koja ima čisto imaginarne polove, što upravo i jeste slučaj za izabrani skup parametara modela. Pored nula necelobrojnog reda funkcije prenosa - njen moduo teži minus beskonačnosti kako učestalost teži nuli, videti oblik funkcije prenosa  $\hat{g}^{(gg)}$ , date sa (4.8) - pojava maksimuma, praćena tendencijom modula ka minus beskonačnosti za visoke učestalosti, videti dijagrame iscrtane isprekidanom linijom i isprekidanom linijom sa tačkama sa slike 4.18a, posledica je postojanja kompleksno konjugovanih polova funkcije prenosa, što i jeste slučaj za odabrane skupove parametara modela.

Argument funkcije prenosa, predstavljen isprekidanom linijom sa slike 4.18b je opadajuća funkcija, što naglašava sličnost sa karakteristikama klasičnog  $RLC$  kola, pošto kompleksno konjugovani polovi za izabrane parametre modela imaju negativni realni deo, nasuprot argumentu funkcije prenosa, predstavljenog isprekidanom linijom sa tačkama, čija se vrednost zapravo povećava preko  $\pi$ , iako na slici 4.18b

opada za  $2\pi$  zbog kodomena  $(-\pi, \pi]$  funkcije arkus tangens, ponovo naglašavajući sličnost sa karakteristikama klasičnog  $RLC$  kola, pošto kompleksno konjugovani polovi za ovaj skup parametara modela imaju pozitivan realni deo.

Argument funkcije prenosa sa slike 4.18b ilustruje promenu karaktera kola sa kapacitivnog na induktivni sa povećanjem ugaone učestalosti, kao i energetski bilans kola. Naime, za vrednosti parametara modela, koji odgovaraju dijagramima iscrtanim punom i isprekidanom linijom, kolo je generativno, kako za niske, tako i za visoke učestalosti, pošto je argument funkcije prenosa veći od  $\frac{\pi}{2}$ , odnosno manji od  $-\frac{\pi}{2}$ , a disipativno je za srednji opseg učestalosti, pošto je argument funkcije prenosa u intervalu  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ , dok je kolo generativno za čitav opseg učestalosti u slučaju dijagrama iscrtanog isprekidanom linijom sa tačkama, pošto argument funkcije prenosa ima vrednosti ili veće od  $\frac{\pi}{2}$ , ili manje od  $-\frac{\pi}{2}$  na celom opsegu učestalosti.



Slika 4.18: Frekvencijske karakteristike modula i argumenta funkcije prenosa za generativno-generativno  $RLC$  kolo, dobijene za parametre modela:  $\mu = 0.7$ ,  $\nu = 0.9$ ,  $\tau_C = 0.75$ ,  $\tau_L = 0.75$ ,  $\tau_\nu = 0.025$ , i  $\tau_\mu = 2.5$  - isprekidana linija,  $\tau_\mu = 0.20980 \dots$  - puna linija i  $\tau_\mu = 0.055$  - linija oblika crta tačka.

Slično disipativno-disipativnom  $RLC$  kolu, kapacitivni karakter generativno-generativnog  $RLC$  kola je dominantan za niske učestalosti, tako da asimptotika izraza (4.100) i (4.101) za  $\text{Re } Z_e^{(gg)}$  i  $\text{Im } Z_e^{(gg)}$  poprima sledeće oblike

$$\text{Re } Z_e^{(gg)}(\omega) = -R \frac{\sin \frac{\mu\pi}{2}}{\tau_\mu \omega^{1+\mu}} \left( 1 - \frac{\tau_\mu \omega^{1+\mu}}{\sin \frac{\mu\pi}{2}} + O(\omega^{2+\mu}) \right), \quad \text{kada } \omega \rightarrow 0, \quad (4.102)$$

$$\text{Im } Z_e^{(gg)}(\omega) = -R \frac{\cos \frac{\mu\pi}{2}}{\tau_\mu \omega^{1+\mu}} \left( 1 + \frac{\tau_\mu \omega^\mu}{\tau_C \cos \frac{\mu\pi}{2}} + O(\omega^{2+\mu}) \right), \quad \text{kada } \omega \rightarrow 0, \quad (4.103)$$

pošto su vodeći članovi realnog i imaginarnog dela impedanse aktivnog kalema  $\frac{1}{Y_L^{(g)}}$ , date sa (2.32), određeni izrazima

$$\text{Re } \frac{1}{Y_L^{(g)}} \sim -R \tau_\nu \omega^{1+\nu} \sin \frac{\nu\pi}{2} \quad \text{i} \quad \text{Im } \frac{1}{Y_L^{(g)}} \sim R \tau_\nu \omega^{1+\nu} \cos \frac{\nu\pi}{2}, \quad \text{kada } \omega \rightarrow 0, \quad (4.104)$$

tako da asimptotika modula funkcije prenosa za niske učestalosti, odnosno kada  $\omega \rightarrow 0$ , prema (4.88)<sub>1</sub>, (4.102) i (4.103), glasi

$$\left| \hat{g}^{(gg)}(\omega) \right|_{\text{dB}} = 20 \log(\tau_\mu \omega^{1+\mu}) - 10 \log \left( 1 + 2 \frac{\tau_\mu}{\tau_C} \omega^\mu \cos \frac{\mu\pi}{2} + \frac{\tau_\mu^2}{\tau_C^2} \omega^{2\mu} - 2\tau_\mu \omega^{1+\mu} \sin \frac{\mu\pi}{2} + O(\omega^{2+\mu}) \right), \quad (4.105)$$

dok se za argument funkcije prenosa, prema (4.88)<sub>2</sub>, (4.102) i (4.103), dobija

$$\cot \arg \hat{g}^{(gg)}(\omega) = -\tan \frac{\mu\pi}{2} \left( 1 - \frac{\tau_\mu \omega^\mu}{\tau_C \cos \frac{\mu\pi}{2}} + \frac{\tau_\mu^2 \omega^{2\mu}}{\tau_C^2 \cos^2 \frac{\mu\pi}{2}} - \frac{\tau_\mu^3 \omega^{3\mu}}{\tau_C^3 \cos^3 \frac{\mu\pi}{2}} \right)$$

$$+ \begin{pmatrix} O(\omega^{4\mu}), & \text{ako } \mu \in (0, \frac{1}{3}], \\ -\frac{\tau_\mu \omega^{1+\mu}}{\sin \frac{\mu\pi}{2}} + O(\omega^{4\mu}), & \text{ako } \mu \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}], \\ -\frac{\tau_\mu \omega^{1+\mu}}{\sin \frac{\mu\pi}{2}} + \frac{\tau_\mu^2 \omega^{1+2\mu}}{\tau_C \sin \frac{\mu\pi}{2} \cos \frac{\mu\pi}{2}} + O(\omega^{4\mu}), & \text{ako } \mu \in (\frac{1}{2}, \frac{2}{3}], \\ -\frac{\tau_\mu \omega^{1+\mu}}{\sin \frac{\mu\pi}{2}} + \frac{\tau_\mu^2 \omega^{1+2\mu}}{\tau_C \sin \frac{\mu\pi}{2} \cos \frac{\mu\pi}{2}} + O(\omega^{2+\mu}), & \text{ako } \mu \in (\frac{2}{3}, 1), \end{pmatrix} \quad (4.106)$$

kada  $\omega \rightarrow 0$ , pošto je

$$\begin{aligned} \cot \arg \hat{g}^{(gg)}(\omega) &= -\tan \frac{\mu\pi}{2} \left( 1 - \frac{\tau_\mu \omega^{1+\mu}}{\sin \frac{\mu\pi}{2}} + O(\omega^{2+\mu}) \right) \\ &\times \left( 1 - \frac{\tau_\mu \omega^\mu}{\tau_C \cos \frac{\mu\pi}{2}} + \frac{\tau_\mu^2 \omega^{2\mu}}{\tau_C^2 \cos^2 \frac{\mu\pi}{2}} - \frac{\tau_\mu^3 \omega^{3\mu}}{\tau_C^3 \cos^3 \frac{\mu\pi}{2}} + \begin{cases} O(\omega^{4\mu}), & \text{ako } \mu \in (0, \frac{2}{3}], \\ O(\omega^{2+\mu}), & \text{ako } \mu \in (\frac{2}{3}, 1), \end{cases} \right) \end{aligned}$$

prema razvoju u red funkcije  $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + O(x^4)$  kada  $x \rightarrow 0$ .

Kao što je već pomenuto, generativno-generativno frakciono RLC kolo pokazuje induktivni karakter za visoke učestalosti, videti (4.76)<sub>2</sub> i (4.77)<sub>2</sub>, te je asimptotika  $\operatorname{Re} Z_e^{(gg)}$  i  $\operatorname{Im} Z_e^{(gg)}$ , datih sa (4.100) i (4.101), određena sa

$$\operatorname{Re} Z_e^{(gg)}(\omega) = -R \frac{\tau_L^2}{\tau_\nu} \omega^{1-\nu} \sin \frac{\nu\pi}{2} \left( 1 - 2 \frac{\tau_L}{\tau_\nu} \omega^{-\nu} \cos \frac{\nu\pi}{2} + \begin{cases} O(\omega^{-2\nu}), & \text{ako } \nu \in (0, \frac{1}{3}], \\ -\frac{\tau_L \omega^{-1+\nu}}{\tau_L^2 \sin \frac{\nu\pi}{2}} + O(\omega^{-2\nu}), & \text{ako } \nu \in (\frac{1}{3}, 1), \end{cases} \right) \quad (4.107)$$

$$\operatorname{Im} Z_e^{(gg)}(\omega) = R \tau_L \omega \left( 1 - \frac{\tau_L}{\tau_\nu} \omega^{-\nu} \cos \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\tau_L^2}{\tau_\nu^2} \omega^{-2\nu} \left( 1 - 2 \cos^2 \frac{\nu\pi}{2} \right) + O(\omega^{-3\nu}) \right), \quad (4.108)$$

kada  $\omega \rightarrow \infty$ , pošto u slučaju aktivnog kalema, prema (2.32), asimptotika za visoke učestalosti  $\operatorname{Re} \frac{1}{Y_L^{(g)}}$  poprima sledeći oblik

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \frac{1}{Y_L^{(g)}}(\omega) &= -R \frac{\tau_L^2}{\tau_\nu} \omega^{1-\nu} \sin \frac{\nu\pi}{2} \frac{1}{1 + 2 \frac{\tau_L}{\tau_\nu} \omega^{-\nu} \cos \frac{\nu\pi}{2} + \frac{\tau_L^2}{\tau_\nu^2} \omega^{-2\nu}} \\ &= -R \frac{\tau_L^2}{\tau_\nu} \omega^{1-\nu} \sin \frac{\nu\pi}{2} \left( 1 - 2 \frac{\tau_L}{\tau_\nu} \omega^{-\nu} \cos \frac{\nu\pi}{2} + O(\omega^{-2\nu}) \right), \end{aligned} \quad (4.109)$$

prema razvoju u red funkcije  $\frac{1}{1+x} = 1 - x + O(x^2)$ , koji važi kada  $x \rightarrow 0$ , dok prema (2.32), asimptotika za visoke učestalosti  $\operatorname{Im} \frac{1}{Y_L^{(g)}}$  glasi

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \frac{1}{Y_L^{(g)}}(\omega) &= R \tau_L \omega \frac{1 + \frac{\tau_L}{\tau_\nu} \omega^{-\nu} \cos \frac{\nu\pi}{2}}{1 + 2 \frac{\tau_L}{\tau_\nu} \omega^{-\nu} \cos \frac{\nu\pi}{2} + \frac{\tau_L^2}{\tau_\nu^2} \omega^{-2\nu}} \\ &= R \tau_L \omega \left( 1 + \frac{\tau_L}{\tau_\nu} \omega^{-\nu} \cos \frac{\nu\pi}{2} \right) \left( 1 - 2 \frac{\tau_L}{\tau_\nu} \omega^{-\nu} \cos \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\tau_L^2}{\tau_\nu^2} \omega^{-2\nu} \left( 1 - 4 \cos^2 \frac{\nu\pi}{2} \right) + O(\omega^{-3\nu}) \right) \\ &= R \tau_L \omega \left( 1 - \frac{\tau_L}{\tau_\nu} \omega^{-\nu} \cos \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\tau_L^2}{\tau_\nu^2} \omega^{-2\nu} \left( 1 - 2 \cos^2 \frac{\nu\pi}{2} \right) + O(\omega^{-3\nu}) \right), \end{aligned} \quad (4.110)$$

prema razvoju u red funkcije  $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + O(x^3)$  kada  $x \rightarrow 0$ , uzimajući u obzir da su vodeći članovi impedanse generativnog kondenzatora (2.31) određeni sa

$$\operatorname{Re} Z_C^{(g)} \sim -R \frac{1}{\tau_\mu} \omega^{-1-\mu} \sin \frac{\mu\pi}{2} \quad \text{i} \quad \operatorname{Im} Z_C^{(g)} \sim -R \frac{1}{\tau_C} \omega^{-1}, \quad \text{kada } \omega \rightarrow \infty, \quad (4.111)$$

tako da izrazi (4.107) i (4.108), prema (4.88), daju asimptotiku modula i argumenta funkcije prenosa za visoke učestalosti, odnosno kada  $\omega \rightarrow \infty$ , u sledećem obliku

$$\left| \hat{g}^{(gg)}(\omega) \right|_{\text{dB}} = -20 \log(\tau_L \omega) - 10 \log \left( 1 - 2 \frac{\tau_L}{\tau_\nu} \omega^{-\nu} \cos \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\tau_L^2}{\tau_\nu^2} \omega^{-2\nu} \left( 1 - 4 \cos^2 \frac{\nu\pi}{2} \right) \right)$$

$$+ \begin{cases} O(\omega^{-3\nu}), & \text{ako } \nu \in (0, \frac{1}{2}], \\ -2\frac{1}{\tau_\nu}\omega^{-1-\nu} \sin \frac{\nu\pi}{2} + O(\omega^{-3\nu}), & \text{ako } \nu \in (\frac{1}{2}, \frac{2}{3}], \\ -2\frac{1}{\tau_\nu}\omega^{-1-\nu} \sin \frac{\nu\pi}{2} + \frac{1}{\tau_L^2}\omega^{-2} + O(\omega^{-3\nu}), & \text{ako } \nu \in (\frac{2}{3}, 1), \end{cases} \quad (4.112)$$

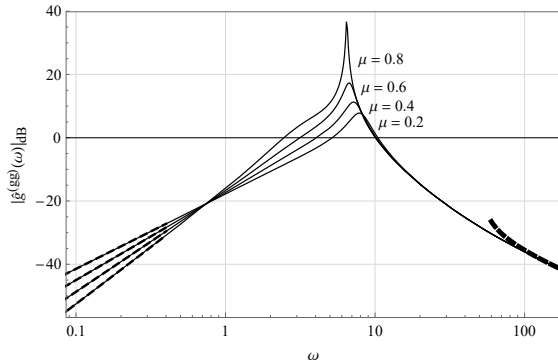
$$\cot \arg \hat{g}^{(gg)}(\omega) = \frac{\tau_L}{\tau_\nu}\omega^{-\nu} \sin \frac{\nu\pi}{2} \left( 1 - \frac{\tau_L}{\tau_\nu}\omega^{-\nu} \cos \frac{\nu\pi}{2} + \begin{cases} O(\omega^{-2\nu}), & \text{ako } \nu \in (0, \frac{1}{3}], \\ -\frac{\omega^{-1+\nu}}{\tau_\nu \sin \frac{\nu\pi}{2}} + O(\omega^{-2\nu}), & \text{ako } \nu \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}], \\ -\frac{\omega^{-1+\nu}}{\tau_\nu \sin \frac{\nu\pi}{2}} - \frac{1}{\tau_L}\omega^{-1} \cot \frac{\nu\pi}{2} + O(\omega^{-2\nu}), & \text{ako } \nu \in (\frac{1}{2}, 1), \end{cases} \right) \quad (4.113)$$

pošto se, kada se (4.107) i (4.108) uvrste u (4.88)<sub>2</sub>, dobija

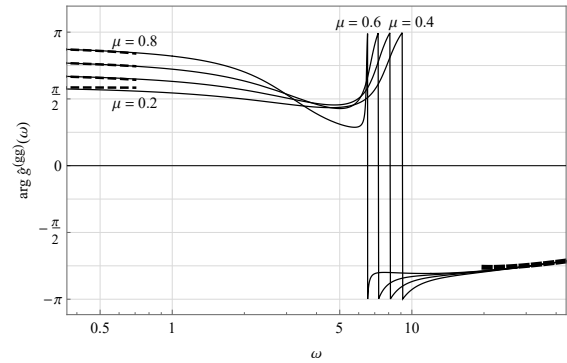
$$\cot \arg \hat{g}^{(gg)}(\omega) = \frac{\tau_L}{\tau_\nu}\omega^{-\nu} \sin \frac{\nu\pi}{2} \left( 1 - 2\frac{\tau_L}{\tau_\nu}\omega^{-\nu} \cos \frac{\nu\pi}{2} + \begin{cases} O(\omega^{-2\nu}), & \text{if } \nu \in (0, \frac{1}{3}], \\ -\frac{\tau_\nu\omega^{-1+\nu}}{\tau_L^2 \sin \frac{\nu\pi}{2}} + O(\omega^{-2\nu}), & \text{if } \nu \in (\frac{1}{3}, 1), \end{cases} \right) \\ \times \left( 1 + \frac{\tau_L}{\tau_\nu}\omega^{-\nu} \cos \frac{\nu\pi}{2} + \frac{\tau_L^2}{\tau_\nu^2}\omega^{-2\nu} \sin^2 \frac{\nu\pi}{2} + O(\omega^{-3\nu}) \right),$$

kada  $\omega \rightarrow \infty$ , prema razvoju u red funkcije  $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + O(x^3)$ , koji važi za  $x \rightarrow 0$ .

Na slici 4.19 su prikazani moduo i argument funkcije prenosa u zavisnosti od ugaone učestalosti za različite vrednosti reda frakcionog izvoda generativnog kondenzatora, zajedno sa asimptotikom. Prema asimptotici za niske učestalosti (4.105), moduo funkcije prenosa je linearna funkcija  $\log \omega$ , sa nagibom i odsečkom respektivno određenim parametrima modela  $\mu$  i  $\tau_\mu$ , videti sliku 4.19a, dok asimptotika argumenta funkcije prenosa za niske učestalosti (4.106) ukazuje na očiglednu zavisnost od parametra  $\mu$ , pogledati sliku 4.19b. Sa druge strane, asimptotika modula funkcije prenosa za visoke učestalosti (4.112) daje  $\tau_L$  kao odsečak funkcije koja je linearno zavisna od  $\log \omega$ , videti sliku 4.19a, dok se preostali parametri modela  $\nu$  i  $\tau_\nu$  mogu odrediti na osnovu logaritma apsolutne vrednosti kotangensa argumenta funkcije prenosa za visoke učestalosti, videti asimptotiku (4.113) i slaganje krivih koje opisuju asimptotsko ponašanje sa frekvencijskim karakteristikama na slici 4.19b.



(a) Moduo funkcije prenosa  $\hat{g}^{(gg)}$ .



(b) Argument funkcije prenosa  $\hat{g}^{(gg)}$ .

Slika 4.19: Poređenje frekvencijskih karakteristika modula i argumenta funkcije prenosa (pune linije) sa asimptotikom (isprekidane linije) za generativno-generativno RLC kolo, dobijenih za parametre modela:  $\nu = 0.9$ ,  $\tau_C = 0.75$ ,  $\tau_\mu = 0.15$ ,  $\tau_L = 0.75$ , i  $\tau_\nu = 0.025$ .

### 4.4.3 Disipativno-generativno RLC kolo

Zapisom realnog i imaginarnog dela ekvivalentne impedanse  $Z_e^{(dg)}$  disipativno-generativnog RLC kola, date sa (4.78)<sub>1</sub> i korišćenjem klasičnih i frakcionih vremenskih konstanti, dobija se

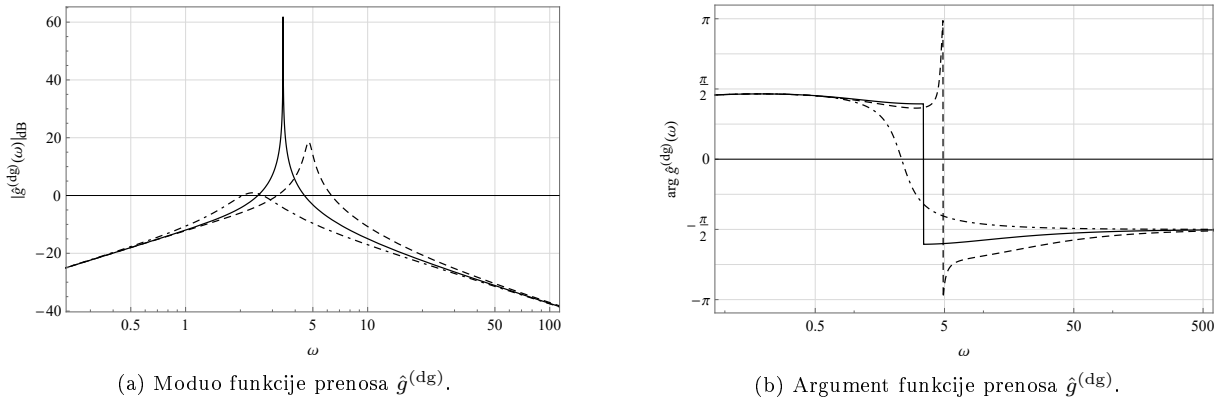
$$\operatorname{Re} Z_e^{(dg)}(\omega) = R \left( 1 + \frac{\tau_\alpha \omega^\alpha \cos \frac{\alpha\pi}{2}}{\tau_C^2 \omega^2 + 2\tau_C \tau_\alpha \omega^{1+\alpha} \sin \frac{\alpha\pi}{2} + \tau_\alpha^2 \omega^{2\alpha}} - \tau_L \tau_\nu \omega^{1+\nu} \frac{\tau_L \sin \frac{\nu\pi}{2}}{\tau_\nu^2 \omega^{2\nu} + 2\tau_L \tau_\nu \omega^\nu \cos \frac{\nu\pi}{2} + \tau_L^2} \right), \quad (4.114)$$

$$\operatorname{Im} Z_e^{(\text{dg})}(\omega) = -R \left( \frac{\tau_C \omega + \tau_\alpha \omega^\alpha \sin \frac{\alpha\pi}{2}}{\tau_C^2 \omega^2 + 2\tau_C \tau_\alpha \omega^{1+\alpha} \sin \frac{\alpha\pi}{2} + \tau_\alpha^2 \omega^{2\alpha}} - \tau_L \tau_\nu \omega^{1+\nu} \frac{\tau_\nu \omega^\nu + \tau_L \cos \frac{\nu\pi}{2}}{\tau_\nu^2 \omega^{2\nu} + 2\tau_L \tau_\nu \omega^\nu \cos \frac{\nu\pi}{2} + \tau_L^2} \right), \quad (4.115)$$

te moduo i argument funkcije prenosa slede iz izraza (4.88).

Na slici 4.20 su prikazani Bodeovi dijagrami modula i argumenta funkcije prenosa, koji odgovaraju propusniku opsega i koji su dobijeni za isti skup parametara modela kao i dijagrami sa slike 4.14. Funkcija prenosa  $\hat{g}^{(\text{dg})}$ , data sa (4.13), ima nulu necelog reda u koordinatnom početku, što se vidi i iz dijagrama modula funkcije prenosa predstavljenih na slici 4.20a, kao i kompleksno konjugovane polove, bilo sa realnim delom različitim od nule, koji odgovaraju dijagramima modula funkcije prenosa prikazanim isprekidanom linijom i isprekidanom linijom sa tačkama, bilo čisto imaginarnu, kojima odgovaraju dijagrami iscrtani punom linijom. Grafici argumenta funkcije prenosa, u zavisnosti od ugaone učestalosti, se ponašaju kao što je i očekivano s obzirom na tip polova funkcije prenosa i znak njihovog realnog dela: ukoliko polovi imaju realni deo različit od nule, tada argument funkcije prenosa opada ako su realni delovi polova negativni, dok argument funkcije prenosa raste preko  $\pi$  ukoliko su realni delovi polova pozitivni, a u slučaju čisto imaginarnih polova vrednost argumenta funkcije prenosa opadne za  $\pi$  za fiksiranu vrednost učestalosti.

Disipativno-generativno *RLC* kolo je očigledno disipativno za relativno niske učestalosti, pošto vrednosti argumenta funkcije prenosa pripadaju intervalu  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ , dok za više učestalosti, pošto argument pada ispod  $-\frac{\pi}{2}$ , kolo postaje generativno: naglo za parametre modela koji odgovaraju punoj liniji, pri čemu i karakter kola istovremeno postaje induktivan, odnosno postepeno, ili za srednji opseg učestalosti u slučaju isprekidane, ili za visoke učestalosti u slučaju isprekidane linije sa tačkama.



Slika 4.20: Frekvencijske karakteristike modula i argumenta funkcije prenosa za disipativno-generativno *RLC* kolo, dobijene za parametre modela:  $\alpha = 0.25$ ,  $\nu = 0.85$ ,  $\tau_C = 0.25$ ,  $\tau_\alpha = 0.005$ ,  $\tau_L = 0.75$ , i  $\tau_\nu = 5$  - isprekidana linija sa tačkama,  $\tau_\nu = 0.23329 \dots$  - puna linija, i  $\tau_\nu = 0.09$  - isprekidana linija.

Iako disipativno-generativno *RLC* kolo sadrži pasivni kondenzator, kao i disipativno-disipativno kolo, zbog različitih redova vodećih članova u asimptotici impedanse generativnog i disipativnog kabela za niske učestalosti, uporediti izraz (4.104) sa izrazom (2.21), umesto uzimanja u obzir samo vodećih članova u asimptotici realnog i imaginarnog dela impedanse pasivnog kondenzatora  $\frac{1}{Y_C^{(d)}}$ , date sa (2.20), koristi se asimptotika realnog i imaginarnog dela impedanse pasivnog kondenzatora  $\operatorname{Re} \frac{1}{Y_C^{(d)}}$  i  $\operatorname{Im} \frac{1}{Y_C^{(d)}}$ , koja za niske učestalosti, prema (2.20), ima sledeći oblik

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \frac{1}{Y_C^{(d)}}(\omega) &= R \frac{\cos \frac{\alpha\pi}{2}}{\tau_\alpha \omega^\alpha} \frac{1}{1 + 2\frac{\tau_C}{\tau_\alpha} \omega^{1-\alpha} \sin \frac{\alpha\pi}{2} + \frac{\tau_C^2}{\tau_\alpha^2} \omega^{2-2\alpha}} \\ &= R \frac{\cos \frac{\alpha\pi}{2}}{\tau_\alpha \omega^\alpha} \left( 1 - 2\frac{\tau_C}{\tau_\alpha} \omega^{1-\alpha} \sin \frac{\alpha\pi}{2} + O(\omega^{2-2\alpha}) \right), \quad \text{kada } \omega \rightarrow 0, \\ \operatorname{Im} \frac{1}{Y_C^{(d)}}(\omega) &= -R \frac{\sin \frac{\alpha\pi}{2}}{\tau_\alpha \omega^\alpha} \frac{1 + \frac{\tau_C}{\tau_\alpha} \omega^{1-\alpha} \frac{1}{\sin \frac{\alpha\pi}{2}}}{1 + 2\frac{\tau_C}{\tau_\alpha} \omega^{1-\alpha} \sin \frac{\alpha\pi}{2} + \frac{\tau_C^2}{\tau_\alpha^2} \omega^{2-2\alpha}} \\ &= -R \frac{\sin \frac{\alpha\pi}{2}}{\tau_\alpha \omega^\alpha} \left( 1 - 2\frac{\tau_C}{\tau_\alpha} \omega^{1-\alpha} \sin \frac{\alpha\pi}{2} \left( 1 - \frac{1}{2 \sin^2 \frac{\alpha\pi}{2}} \right) + O(\omega^{2-2\alpha}) \right), \quad \text{kada } \omega \rightarrow 0, \end{aligned}$$

prema razvoju u red funkcije  $\frac{1}{1+x} = 1 - x + O(x^2)$ , koji važi za  $x \rightarrow 0$ , transformišući oblik realnog i imaginarnog dela ekvivalentne impedanse kola  $\operatorname{Re} Z_e^{(\text{dg})}$  i  $\operatorname{Im} Z_e^{(\text{dg})}$ , datih sa (4.114) i (4.115), u

$$\operatorname{Re} Z_e^{(\text{dg})}(\omega) = R \frac{\cos \frac{\alpha\pi}{2}}{\tau_\alpha \omega^\alpha} \left( 1 - 2 \frac{\tau_C}{\tau_\alpha} \omega^{1-\alpha} \sin \frac{\alpha\pi}{2} + \begin{cases} \frac{\tau_\alpha \omega^\alpha}{\cos \frac{\alpha\pi}{2}} + O(\omega^{2-2\alpha}), & \text{ako } \alpha \in (0, \frac{2}{3}), \\ O(\omega^{2-2\alpha}), & \text{ako } \alpha \in [\frac{2}{3}, 1), \end{cases} \right) \quad (4.116)$$

$$\operatorname{Im} Z_e^{(\text{dg})}(\omega) = -R \frac{\sin \frac{\alpha\pi}{2}}{\tau_\alpha \omega^\alpha} \left( 1 - 2 \frac{\tau_C}{\tau_\alpha} \omega^{1-\alpha} \sin \frac{\alpha\pi}{2} \left( 1 - \frac{1}{2 \sin^2 \frac{\alpha\pi}{2}} \right) + O(\omega^{2-2\alpha}) \right), \quad (4.117)$$

kada  $\omega \rightarrow 0$ , tako da se, prema (4.88)<sub>1</sub>, (4.116) i (4.117), za moduo funkcije prenosa dobija

$$\left| \hat{g}^{(\text{dg})}(\omega) \right|_{\text{dB}} = 20 \log(\tau_\alpha \omega^\alpha) - 10 \log \left( 1 - 2 \frac{\tau_C}{\tau_\alpha} \omega^{1-\alpha} \sin \frac{\alpha\pi}{2} + \begin{cases} 2\tau_\alpha \omega^\alpha \cos \frac{\alpha\pi}{2} + \tau_\alpha^2 \omega^{2\alpha} - 4\tau_C \omega \sin \frac{\alpha\pi}{2} \cos \frac{\alpha\pi}{2} + O(\omega^{2-2\alpha}), & \text{ako } \alpha \in (0, \frac{1}{2}), \\ 2\tau_\alpha \omega^\alpha \cos \frac{\alpha\pi}{2} + O(\omega^{2-2\alpha}), & \text{ako } \alpha \in [\frac{1}{2}, \frac{2}{3}), \\ O(\omega^{2-2\alpha}), & \text{ako } \alpha \in [\frac{2}{3}, 1), \end{cases} \right) \quad (4.118)$$

kada  $\omega \rightarrow 0$ , dok argument funkcije prenosa, prema (4.88)<sub>2</sub>, (4.116) i (4.117), ima sledeći oblik

$$\cot \arg \hat{g}^{(\text{dg})}(\omega) = \cot \frac{\alpha\pi}{2} \left( 1 - \frac{\tau_C}{\tau_\alpha} \omega^{1-\alpha} \frac{1}{\sin \frac{\alpha\pi}{2}} + \begin{cases} \frac{\tau_\alpha \omega^\alpha}{\cos \frac{\alpha\pi}{2}} + 2\tau_C \omega \tan \frac{\alpha\pi}{2} \left( 1 - \frac{1}{2 \sin^2 \frac{\alpha\pi}{2}} \right) + O(\omega^{2-2\alpha}), & \text{ako } \alpha \in (0, \frac{1}{2}), \\ \frac{\tau_\alpha \omega^\alpha}{\cos \frac{\alpha\pi}{2}} + O(\omega^{2-2\alpha}), & \text{ako } \alpha \in [\frac{1}{2}, \frac{2}{3}), \\ O(\omega^{2-2\alpha}), & \text{ako } \alpha \in [\frac{2}{3}, 1), \end{cases} \right) \quad (4.119)$$

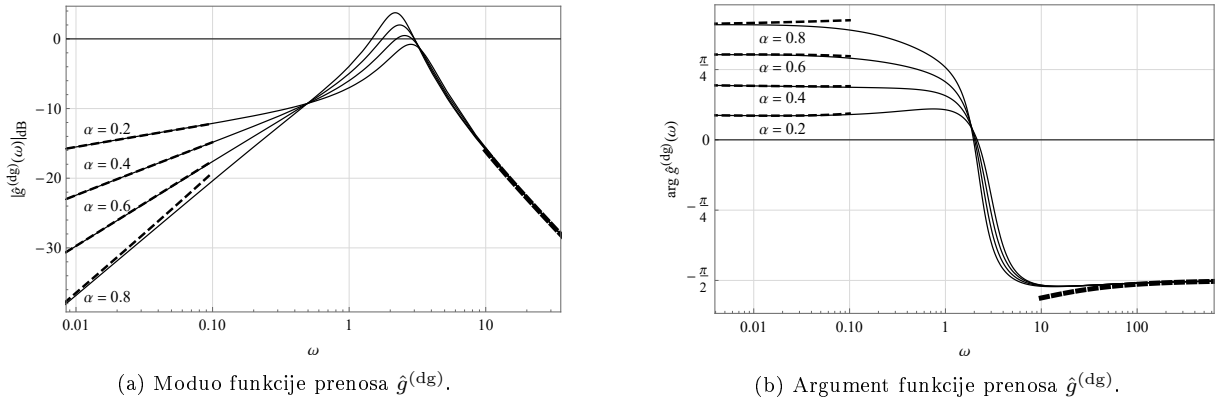
kada  $\omega \rightarrow 0$ , pošto je

$$\cot \arg \hat{g}^{(\text{dg})}(\omega) = \cot \frac{\alpha\pi}{2} \left( 1 - 2 \frac{\tau_C}{\tau_\alpha} \omega^{1-\alpha} \sin \frac{\alpha\pi}{2} + \begin{cases} \frac{\tau_\alpha \omega^\alpha}{\cos \frac{\alpha\pi}{2}} + O(\omega^{2-2\alpha}), & \text{ako } \alpha \in (0, \frac{2}{3}), \\ O(\omega^{2-2\alpha}), & \text{ako } \alpha \in [\frac{2}{3}, 1), \end{cases} \right) \times \left( 1 + 2 \frac{\tau_C}{\tau_\alpha} \omega^{1-\alpha} \sin \frac{\alpha\pi}{2} \left( 1 - \frac{1}{2 \sin^2 \frac{\alpha\pi}{2}} \right) + O(\omega^{2-2\alpha}) \right), \quad \text{kada } \omega \rightarrow 0,$$

prema razvoju u red funkcije  $\frac{1}{1+x} = 1 - x + O(x^2)$ , koji važi kada  $x \rightarrow 0$ .

U slučaju disipativno-generativnog *RLC* kola, kao i za sva prethodno razmatrana kola, induktivna svojstva su dominantna za visoke učestalosti i stoga je moguće koristiti već određene izraze (4.109) i (4.110) za asimptotiku realnog i imaginarnog dela impedanse aktivnog kabela  $\frac{1}{Y_L^{(g)}}$ , date sa (2.32), pošto su maksimalne vrednosti redova vodećih članova impedanse jednake za disipativni i generativni kondenzator, uporediti izraz (4.97) sa (4.111), što implicira da su asimptotike realnog i imaginarnog dela ekvivalentne impedanse kola  $\operatorname{Re} Z_e^{(\text{dg})}$  i  $\operatorname{Im} Z_e^{(\text{dg})}$  za visoke učestalosti iste kao i u slučaju generativno-generativnog kola, odnosno da je  $\operatorname{Re} Z_e^{(\text{dg})} = \operatorname{Re} Z_e^{(\text{gg})}$  i  $\operatorname{Im} Z_e^{(\text{dg})} = \operatorname{Im} Z_e^{(\text{gg})}$  kada  $\omega \rightarrow \infty$ , te su date izrazima (4.107) i (4.108), odakle sledi da moduo i argument funkcije prenosa imaju isti oblik kao za generativno-generativno kolo i dati su izrazom (4.112) za moduo funkcije prenosa i izrazom (4.113) za argument funkcije prenosa.

Frekvencijske karakteristike modula i argumenta funkcije prenosa, zajedno sa pripadajućom asimptotikom, prikazane su na slici 4.21. Diskusija o asimptotskom ponašanju disipativno-generativnog *RLC* kola za niske učestalosti je ista kao i za disipativno-disipativno *RLC* kolo, pošto preovlađuje kapacitivni karakter kola, uporediti i vodeće članove u asimptotici modula i argumenta funkcije prenosa za niske učestalosti (4.93) sa (4.118), kao i (4.94) sa (4.119), respektivno. Sa druge strane, diskusija o asimptotskom ponašanju disipativno-generativnog kola za visoke učestalosti je ista kao za generativno-generativno kolo, pošto je dominantan induktivni karakter kola, pogledati vodeće članove u asimptotikama modula i argumenta funkcije prenosa za visoke učestalosti (4.112) i (4.113).



Slika 4.21: Poređenje frekvencijskih karakteristika modula i argumenta funkcije prenosa (puna linija) sa asimptotikom (isprekidana linija) za disipativno-generativno  $RLC$  kolo, dobijenih za parametre modela:  $\nu = 0.75$ ,  $\tau_C = 0.2$ ,  $\tau_\alpha = 0.5$ ,  $\tau_L = 0.75$  i  $\tau_\nu = 0.5$ .

#### 4.4.4 Generativno-disipativno $RLC$ kolo

Ekvivalentna impedansa  $Z_e^{(\text{gd})}$  generativno-disipativnog frakcionog  $RLC$  kola, data sa (4.78)<sub>2</sub>, implicira

$$\text{Re } Z_e^{(\text{gd})}(\omega) = R \left( 1 - \frac{\sin \frac{\mu\pi}{2}}{\tau_\mu \omega^{1+\mu}} + \tau_\beta \omega^\beta \cos \frac{\beta\pi}{2} \right), \quad (4.120)$$

$$\text{Im } Z_e^{(\text{gd})}(\omega) = -R \left( \frac{1}{\tau_C \omega} + \frac{\cos \frac{\mu\pi}{2}}{\tau_\mu \omega^{1+\mu}} - \tau_L \omega - \tau_\beta \omega^\beta \sin \frac{\beta\pi}{2} \right), \quad (4.121)$$

kada se realni i imaginarni deo impedanse zapišu preko klasičnih i frakcionih vremenskih konstanti, te se moduo i argument funkcije prenosa dobijaju prema (4.88).

Frekvencijske karakteristike modula i argumenta funkcije prenosa koje odgovaraju generativno-disipativnom  $RLC$  kolu, predstavljene na slici 4.22 i dobijene za isti skup parametara modela kao i dijagrami sa slike 4.15, istog su oblika kao i frekvencijske karakteristike koje odgovaraju disipativno-generativnom kolu, vidite sliku 4.20, pošto funkcija prenosa  $\hat{g}^{(\text{gd})}$ , data sa (4.14), za odabrane skupove parametara modela takođe ima ili kompleksno konjugovane polove sa pozitivnim ili negativnim realnim delom, ili čisto imaginarne polove.

Iako su dijagrami argumenta funkcije prenosa sa slike 4.22b kvalitativno isti kao i dijagrami sa slike 4.20b, oni kvantitativno odgovaraju generativnom kolu za relativno niske učestalosti, pošto su vrednosti argumenta funkcije prenosa veće od  $\frac{\pi}{2}$ , dok kolo za više učestalosti, pošto vrednosti argumenta funkcije prenosa pripadaju intervalu  $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ , postaje disipativno: naglo za parametre modela koji odgovaraju punoj liniji, pri čemu i karakter kola istovremeno postaje induktivan, odnosno postepeno, ili za srednji opseg učestalosti u slučaju isprekidane, ili za visoke učestalosti u slučaju isprekidane linije sa tačkama.

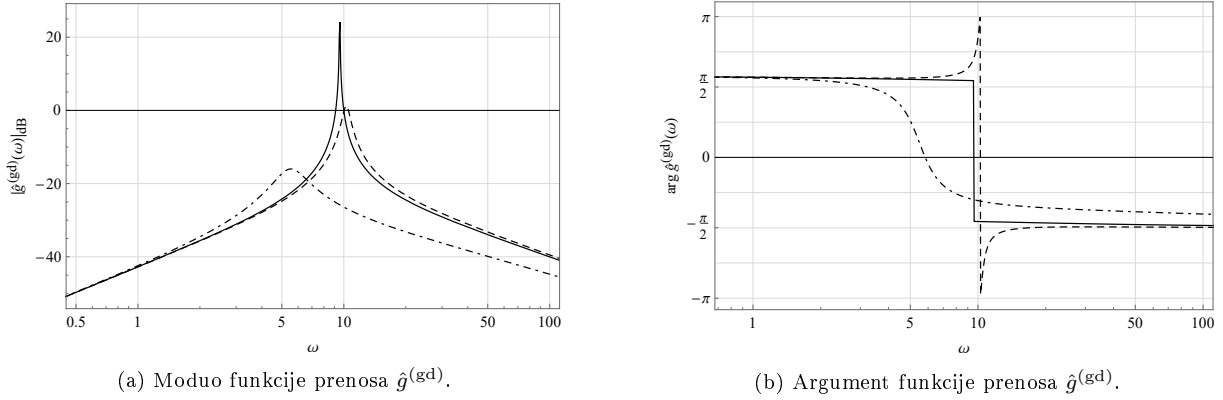
Za niske učestalosti, impedansa  $Z_C^{(\text{g})}$  pasivnog kondenzatora, data sa (2.31), preovlađuje u ekvivalentnoj impedansi i stoga izrazi (4.120) i (4.121) dobijaju sledeći oblik

$$\text{Re } Z_e^{(\text{gd})}(\omega) = -R \frac{\sin \frac{\mu\pi}{2}}{\tau_\mu \omega^{1+\mu}} \left( 1 - \frac{\tau_\mu \omega^{1+\mu}}{\sin \frac{\mu\pi}{2}} + O(\omega^{1+\mu+\delta}) \right), \quad \text{kada } \omega \rightarrow 0, \quad (4.122)$$

$$\text{Im } Z_e^{(\text{gd})}(\omega) = -R \frac{\cos \frac{\mu\pi}{2}}{\tau_\mu \omega^{1+\mu}} \left( 1 + \frac{\tau_\mu \omega^\mu}{\tau_C \cos \frac{\mu\pi}{2}} + O(\omega^{1+\mu+\delta}) \right), \quad \text{kada } \omega \rightarrow 0, \quad (4.123)$$

gde je  $\delta$  odabrano tako da bude manje od  $\beta$ , odnosno manje od reda vodećih članova realnog i imaginarnog dela impedanse pasivnog kabela  $\text{Re } Z_L^{(\text{d})}$  i  $\text{Im } Z_L^{(\text{d})}$ , videti (2.21), odakle, prema (4.88)<sub>1</sub>, (4.122) i (4.123), sledi asimptotika modula funkcije prenosa za niske učestalosti, odnosno kada  $\omega \rightarrow 0$ , u obliku

$$\left| \hat{g}^{(\text{gd})}(\omega) \right|_{\text{dB}} = 20 \log(\tau_\mu \omega^{1+\mu}) - 10 \log \left( 1 + 2 \frac{\tau_\mu}{\tau_C} \omega^\mu \cos \frac{\mu\pi}{2} + \frac{\tau_\mu^2}{\tau_C^2} \omega^{2\mu} - 2 \tau_\mu \omega^{1+\mu} \sin \frac{\mu\pi}{2} + O(\omega^{1+\mu+\delta}) \right), \quad (4.124)$$



Slika 4.22: Frekvencijske karakteristike modula i argumenta funkcije prenosa za generativno-disipativno *RLC* kolo, dobijene za parametre modela:  $\mu = 0.2$ ,  $\beta = 0.6$ ,  $\tau_C = 0.025$ ,  $\tau_\mu = 0.01$ ,  $\tau_L = 0.95$  i  $\tau_\beta = 5.5$  - isprekidana linija sa tačkama,  $\tau_\beta = 0.46607\dots$  - puna linija i  $\tau_\beta = 0.01$  - isprekidana linija.

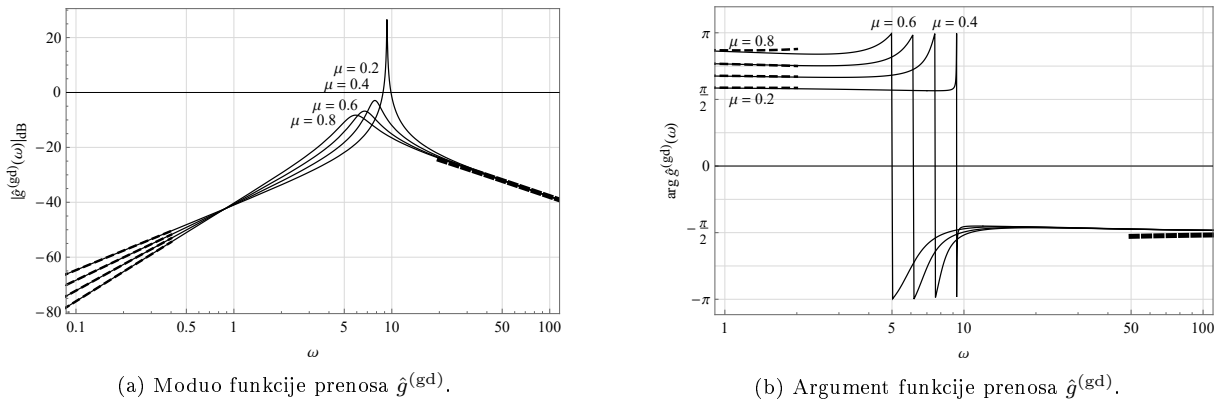
dok izraz za argument funkcije prenosa, prema (4.88)<sub>2</sub>, (4.122) i (4.123), dobija sledeći oblik

$$\cot \arg \hat{g}^{(gd)}(\omega) = -\tan \frac{\mu\pi}{2} \left( 1 - \frac{\tau_\mu \omega^\mu}{\tau_C \cos \frac{\mu\pi}{2}} + \frac{\tau_\mu^2 \omega^{2\mu}}{\tau_C^2 \cos^2 \frac{\mu\pi}{2}} \right) + \begin{cases} O(\omega^{3\mu}), & \text{ako } \mu \in (0, \frac{1}{2}], \\ -\frac{\tau_\mu \omega^{1+\mu}}{\sin \frac{\mu\pi}{2}} + O(\omega^{3\mu}), & \text{ako } \mu \in (\frac{1}{2}, \frac{1+\delta}{2}], \\ -\frac{\tau_\mu \omega^{1+\mu}}{\sin \frac{\mu\pi}{2}} + O(\omega^{1+\mu+\delta}), & \text{ako } \mu \in (\frac{1+\delta}{2}, 1), \end{cases} \quad (4.125)$$

kada  $\omega \rightarrow 0$ , pošto je

$$\cot \arg \hat{g}^{(gd)}(\omega) = -\tan \frac{\mu\pi}{2} \left( 1 - \frac{\tau_\mu \omega^{1+\mu}}{\sin \frac{\mu\pi}{2}} + O(\omega^{1+\mu+\delta}) \right) \times \left( 1 - \frac{\tau_\mu \omega^\mu}{\tau_C \cos \frac{\mu\pi}{2}} + \frac{\tau_\mu^2 \omega^{2\mu}}{\tau_C^2 \cos^2 \frac{\mu\pi}{2}} + \begin{cases} O(\omega^{3\mu}), & \text{ako } \mu \in (0, \frac{1+\delta}{2}], \\ O(\omega^{1+\mu+\delta}), & \text{ako } \mu \in (\frac{1+\delta}{2}, 1). \end{cases} \right)$$

U slučaju generativno-disipativnog *RLC* kola, kao i za sva prethodno razmatrana kola, induktivna svojstva su dominantna za visoke učestalosti i pošto su maksimalne vrednosti redova vodećih članova impedanse aktivnog i pasivnog kondenzatora jednake, uporediti izraz (4.111) sa (4.97), asimptotika realnog i imaginarnog dela ekvivalentne impedanse kola  $\text{Re } Z_e^{(gd)}$  i  $\text{Im } Z_e^{(gd)}$  za visoke učestalosti je ista kao i u



Slika 4.23: Poređenje frekvencijskih karakteristika modula i argumenta funkcije prenosa (puna linija) sa asimptotikom (isprekidana linija) za generativno-disipativno *RLC* kolo, dobijenih za parametre modela:  $\beta = 0.5$ ,  $\tau_C = 0.07$ ,  $\tau_\mu = 0.01$ ,  $\tau_L = 0.75$  i  $\tau_\beta = 0.5$ .



slučaju disipativno-disipativnog kola, odnosno  $\operatorname{Re} Z_e^{(\text{gd})} = \operatorname{Re} Z_e^{(\text{dd})}$  i  $\operatorname{Im} Z_e^{(\text{gd})} = \operatorname{Im} Z_e^{(\text{dd})}$  kada  $\omega \rightarrow \infty$ , te je data izrazima (4.95) i (4.96), odakle sledi da moduo i argument funkcije prenosa imaju isti oblik kao za disipativno-disipativno kolo i dati su izrazom (4.98) za moduo funkcije prenosa i izrazom (4.99) za argument funkcije prenosa.

Frekvencijske karakteristike modula i argumenta funkcije prenosa, zajedno sa pripadajućom asimptotikom, prikazane su na slici 4.23. Diskusija o asimptotskom ponašanju generativno-disipativnog *RLC* kola za niske učestalosti je ista kao i za generativno-generativno *RLC* kolo, pošto preovlađuje kapacitivni karakter kola, uporediti vodeće članove u asimptotici modula i argumenta funkcije prenosa za niske učestalosti (4.105) sa (4.124) i (4.106) sa (4.125), respektivno. Sa druge strane, diskusija o asimptotskom ponašanju generativno-disipativnog kola za visoke učestalosti je ista kao za disipativno-disipativno kolo, pošto je za ove učestalosti dominantan induktivni karakter kola, pogledati vodeće članove u asimptotici modula i argumenta funkcije prenosa za visoke učestalosti (4.98) i (4.99).

# Zaključak

Klasične konstitutivne relacije, koje opisuju ponašanje kalema i kondenzatora kao osnovnih elemenata električnih kola, uopštene su tako da uključuju kako trenutni doprinos odgovarajuće fizičke veličine, tako i istoriju njene promene, pri čemu su memorijski efekti modelirani korišćenjem memorijskog jezgra u obliku funkcije stepenog tipa, odnosno korišćenjem frakcionog integrala, čime su dobijene su dve vrste konstitutivnih jednačina za svaki od elemenata. Analiza energetskog bilansa elemenata implicira da konstitutivne relacije (2.1) i (2.5) odgovaraju pasivnom kondenzatoru i kalemu, kao elementima koji troše energiju, dok modeli (2.2) i (2.6) opisuju aktivni kondenzator i kalem, odnosno elemente koji generišu energiju. Utvrđeno je da su pasivni kondenzator i aktivni kalem elementi predstavljeni paralelnom vezom klasičnog i frakcionog pasivnog kondenzatora, odnosno klasičnog i frakcionog aktivnog kalema, dok su aktivni kondenzator i pasivni kalem elementi predstavljeni rednom vezom klasičnog i frakcionog aktivnog kondenzatora, odnosno klasičnog i frakcionog pasivnog kalema. Takođe je utvrđeno da se ekvivalentni modeli uopštenog električnog elementa mogu dobiti promenom topologije, a samim tim i njegovog memorijskog jezgra. Konstitutivne relacije disipativnih i generativnih elemenata, izražene preko napona i struja, korišćene su kako u kompleksnom, tako i u frekvencijskom domenu u cilju definisanja odgovarajućih impedansi i admitansi elemenata.

Impedanse elemenata u kompleksnom domenu se koriste za izvođenje jednačina kola: (3.7) i (3.9) u slučaju pasivnog i aktivnog  $RC$  kola, kao i (3.20) i (3.22) u slučaju pasivnog i aktivnog  $RL$  kola, čijim je rešenjima određen odziv rednih  $RC$  i  $RL$  kola u prelaznom režimu na zadatu elektromotornu silu i koje impliciraju različito kvalitativno ponašanje odgovarajućih impulsnih odziva. Naime, impulsni odziv (3.30), koji odgovara naponu na pasivnom kondenzatoru, modeliranom konstitutivnom relacijom (2.1), je pozitivna monotono opadajuća konveksna funkcija, dok je impulsni odziv (3.31), koji odgovara naponu na aktivnom kondenzatoru, modeliranom relacijom (2.2), oscilatorna funkcija sa eksponencijalno opadajućom amplitudom, sa mogućnošću tako intenzivnog prigušenja da nema vidljivih oscilacija. Impulsni odzivi (3.30) i (3.31) su analitički određeni primenom Laplasove transformacije na jednačine kola, kao jezgra rešenja koja su dobijena u obliku konvolucije impulsnog odziva i elektromotorne sile.

Razlike u kvalitativnom ponašanju odziva disipativnog i generativnog  $RC$  kola su ilustrovane numeričkim primerima, koji pokazuju vremenske profile struje kola kao odziva na pobudu u obliku Hevisajdove funkcije. U slučaju kada je kolo pobuđeno elektromotornom silom u obliku prostoperiodične funkcije, numerički primeri koji prikazuju poređenje struje dobijene prema izrazu (3.64) za prelaznim režim i struje dobijene prema izrazu (3.65) za kvazistacionarni režim, pokazuju savršeno poklapanje između odgovarajućih krivih posle dovoljno dugog vremena.

Analiza frekvencijskih karakteristika funkcija prenosa  $RC$  kola potkrepila je zaključke o redu i prirodi polova i nula funkcija prenosa, a takođe je pokazala da se  $RC$  kolo ponaša kao visokopropusni filter bez obzira na tip uopštenog kondenzatora. Numerički primeri pokazuju dobro poklapanje frekvencijskih karakteristika modula i argumenta funkcije prenosa i asimptotskih krivih za visoke i niske učestalosti.

Izrazi (3.78)<sub>1</sub> i (3.79)<sub>2</sub>, koji redom opisuju asimptotsko ponašanja modula funkcije prenosa za niske učestalosti i argumenta funkcije prenosa za visoke učestalosti, pružaju mogućnost procene parametara disipativnog  $RC$  kola, jer je moduo funkcije prenosa za niske učestalosti linearna funkcija  $\log \omega$ , koja ima nagib proporcionalan redu frakcionog izvoda  $\alpha$  i odsečak srazmeran frakcionoj vremenskoj konstanti  $\tau_\alpha$ , dok argument funkcije prenosa, u slučaju visokih učestalosti, teži nuli kao hiperbolična funkcija sa koeficijentom obrnuto srazmernim klasičnoj vremenskoj konstanti  $\tau_C$ . Slično, za generativno  $RC$  kolo, moduo funkcije prenosa za niske učestalosti (3.82)<sub>1</sub>, koji je linearna funkcija  $\log \omega$  sa nagibom srazmernim redu frakcionog integrala  $1 + \mu$  i odsečkom proporcionalnim frakcionoj vremenskoj konstanti  $\tau_\mu$ , pruža mogućnost određivanja parametara modela kola  $\mu$  i  $\tau_\mu$ , dok je argument funkcije prenosa za visoke učestalosti (3.83)<sub>2</sub> hiperbolična funkcija sa koeficijentom obrnuto srazmernim klasičnoj vremenskoj konstanti  $\tau_C$ . Stoga, bez obzira na činjenicu da li  $RC$  kolo sadrži pasivni ili aktivni kondenzator, parametri modela se mogu lako proceniti na osnovu izraza koji opisuju asimptotsko ponašanje modula i argumenta funkcije

prenosa.

Impedanse disipativnog i generativnog kondenzatora, (2.15) i (2.29), zajedno sa impedansama (2.16) i (2.30), koje odgovaraju disipativnom i generativnom kalemu, koriste se za modeliranje: rednog disipativno-disipativnog  $RLC$  kola, koje se sastoji od disipativnih električnih elemenata, korišćenjem jednačine kola (4.4); generativno-generativnog kola, koje se sastoji od generativnih elemenata, korišćenjem jednačine kola (4.7); kao i za modeliranje disipativno-generativnog i generativno-disipativnog kola, koja se sastoje od pasivnog kondenzatora i aktivnog kalema, odnosno aktivnog kondenzatora i pasivnog kalema, korišćenjem jednačina kola (4.9) i (4.10).

Kako jednačina disipativno-disipativno  $RLC$  kola (4.4) ne uzima u obzir početne uslove, kolo je modelirano sistemom jednačina (4.15) - (4.18), koji se sastoji od drugog Kirhofovog zakona kombinovanog sa Omovim zakonom, konstitutivnih relacija pasivnog kondenzatora i kalema, definicionog izraza za struju i Faradejevog zakona elektromagnetske indukcije, što daje rešenje (4.28), izraženo superpozicijom konvolucije impulsnog odziva i elektromotorne sile i članova koji sadrže naelektrisanje na oblogama kondenzatora i magnetski fluks kalema kao početne uslove.

Impulсни odziv struje disipativno-disipativnog  $RLC$  kola (4.30), u zavisnosti od broja i prirode polova funkcije prenosa koja odgovara struji, pokazuje tri različita tipa ponašanja: aperioidično, kritično aperioidično i prigušeno oscilatorno. Impulсни odziv struje kola (4.30) ima skok u početnom trenutku bez obrzira na kasniji tip ponašanja i za malo vreme opada kao stepena funkcija, sa stepenom, koji, prema izrazu (4.34), zavisi od reda fracionog izvoda pasivnog kalema, dok za veliko vreme, prema izrazu (4.35), impulсни odziv asimptotski teži nuli. Ostala kvalitativna svojstva disipativno-disipativnog  $RLC$  kola se ispituju kako za pobudu u obliku Hevisajdove funkcije, tako i za harmonijsku pobudu. U slučaju elektromotorne sile zadate u obliku Hevisajdove funkcije, analitički izrazi (4.56) i (4.57), kao i numerički primeri impliciraju da je struja kola, za malo vreme, data kao razlika linearne i stepene funkcije sa eksponentom koji zavisi od reda fracionog izvoda u konstitutivnoj relaciji pasivnog kalema, dok za veliko vreme struja opada kao stepena funkcija sa eksponentom koji odgovara redu fracionog izvoda u modelu pasivnog kondenzatora. Ukoliko je kolo pobuđeno harmonijskom elektromotornom silom (4.58), tada kolo posle dovoljno dugog vremena ulazi u kvazistacionarni režim rada, te je struja kola takođe harmonijska funkcija i data je izrazom (4.60)<sub>2</sub>, sa amplitudom i faznim stavom datim izrazima (4.61) i (4.62). Numerički primeri ilustruju prelazak kola iz tranzijentnog u kvazistacionarni režim, pri čemu je struja u tranzijentnom režimu određena izrazom (4.59), koji predstavlja konvoluciju impulsnog odziva struje i harmonijske elektromotorne sile. Činjenica da promena reda fracionog izvoda u konstitutivnoj relaciji pasivnog kalema može uticati na promenu dominantnog karaktera kola u kvazistacionarnom režimu u rasponu od pretežno kapacitivnog, preko čisto aktivnog, do pretežno induktivnog, takođe je ilustrovana numeričkim primerom.

Posmatrajući disipativno-disipativno, generativno-generativno, disipativno-generativno i generativno-disipativno  $RLC$  kolo i koristeći fazni ugao struje kola, analiziran je energetska bilans  $RLC$  kola i određen je njegov dominantni karakter, videti jednačine (4.64) i (4.67). Zaključeno je da kod svih  $RLC$  kola prevladuje kapacitivni karakter za niske učestalosti, dok su induktivna svojstva dominantna za visoke učestalosti, videti izraze (4.72), (4.77), (4.82) i (4.86). Što se tiče energetskog bilansa fracionih  $RLC$  kola, zaključeno je da disipativno-disipativno kolo troši energiju za sve učestalosti, videti izraz (4.69) i sliku 4.12, pošto je sastavljeno od isključivo disipativnih elemenata, dok ostala  $RLC$  kola, u zavisnosti od učestalosti, mogu i trošiti i generisati energiju, videti slike 4.13, 4.14 i 4.15. Pošto su kapacitivna (induktivna) svojstva dominantna za niske (visoke) učestalosti, termodinamičke osobine kola za niske (visoke) učestalosti određene su termodinamičkim osobinama kondenzatora (kalema).

Ekvivalentna impedansa fracionih  $RLC$  kola je takođe korišćena za određivanje izraza za moduo i argument funkcija prenosa, videti (4.88), na osnovu kojih je sprovedena analiza frekvencijskih karakteristika. Bodeovi dijagrami, predstavljeni na slikama 4.16, 4.18, 4.20 i 4.22, naglašavaju sličnosti funkcija prenosa koje odgovaraju fracionim  $RLC$  kolima i funkcija prenosa koje odgovaraju klasičnim  $RLC$  kolima. Naime, pomenute slike ilustruju činjenicu da ukoliko funkcija prenosa ima kompleksno konjugovane polove, tada frekvencijske karakteristike njenog modula dostižu maksimum i zatim teže negativnoj beskonačnosti kako učestalost teži beskonačnosti, dok pojava čisto imaginarnih polova implicira pojavu vertikalne asimptote na frekvencijskoj karakteristici koja odgovara modulu. Frekvencijske karakteristike funkcije modula prenosa takođe ilustruju činjenicu da funkcije prenosa imaju nulu necelog reda u koordinatnom početku i ukazuju da se sva razmatrana  $RLC$  kola ponašaju kao propusnik opsega. Znak realnog dela kompleksno konjugovanih polova funkcija prenosa određuje da li frekvencijske karakteristike argumenta funkcije prenosa rastu ili opadaju sa porastom učestalosti, dok u slučaju čisto imaginarnih polova, karakteristike argumenta pokazuju nagli pad za  $\pi$ . Frekvencijske karakteristike argumenta funkcije prenosa su iskorišćene i u svrhu komentaranja dominantnog karaktera fracionih  $RLC$  kola, kao i njihovog energetskog bilansa.

Vodeći članovi u asimptotici modula i argumenta funkcije prenosa za niske i visoke učestalosti su korisni za određivanje parametara modela, pošto je za niske učestalosti moduo funkcije prenosa linearna funkcija  $\log \omega$ , sa nagibom  $\alpha$  i odsečkom  $\tau_\alpha$  u slučaju disipativno-disipativnog i disipativno-generativnog *RLC* kola, videti (4.93) i (4.118), dok su u slučaju generativno-generativnog i generativno-disipativnog *RLC* kola, nagib i odsečak redom određeni sa  $1 + \mu$  i  $\tau_\mu$ , videti (4.105) i (4.124). Za visoke učestalosti, moduo funkcije prenosa je linearna funkcija  $\log \omega$ , sa odsečkom  $\tau_L$  za sva frakciona *RLC* kola, dok je  $\log |\cot \arg \hat{g}(\omega)|$  takođe linearna funkcija  $\log \omega$ , sa nagibom  $-1 + \beta$  i odsečkom proporcionalnim vremenskoj konstanti  $\tau_\beta$  u slučaju disipativno-disipativnog i generativno-disipativnog *RLC* kola, videti izraz (4.99), odnosno nagibom  $-\nu$  i odsečkom proporcionalnim vremenskoj konstanti  $\tau_\nu$  u slučaju disipativno-generativnog i generativno-generativnog *RLC* kola, videti izraz (4.113). Slike 4.17, 4.19, 4.21 i 4.23 jasno ilustruju prethodne tvrdnje.



# Bibliografija

- [1] J. Abate and P. P. Valkó. Multi-precision Laplace transform inversion. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 60:979–993, 2004.
- [2] A. Allagui, A. S. Elwakil, M. E. Fouda, and A. G. Radwan. Capacitive behavior and stored energy in supercapacitors at power line frequencies. *Journal of Power Sources*, 390:142–147, 2018.
- [3] A. Allagui, T. J. Freeborn, A. S. Elwakil, M. E. Fouda, B. J. Maundy, A. G. Radwan, Z. Said, and M. A. Abdelkareema. Review of fractional-order electrical characterization of supercapacitors. *Journal of Power Sources*, 400:457–467, 2018.
- [4] A. Allagui, D. Zhang, and A. S. Elwakil. Short-term memory in electric double-layer capacitors. *Applied Physics Letters*, 113:253901–1–5, 2018.
- [5] J. Bak and D. J. Newman. *Complex Analysis*. Springer, New York, 1997.
- [6] M. C. Bošković, T. B. Šekara, B. Lutovac, M. Daković, P. D. Mandić, and M. P. Lazarević. Analysis of electrical circuits including fractional order elements. In *6th Mediterranean Conference on Embedded Computing (MECO)*, Bar, Montenegro, 2017.
- [7] A. Buscarino, R. Caponetto, S. Graziani, and E. Murgano. Realization of fractional order circuits by a constant phase element. *European Journal of Control*, 54:64–72, 2020.
- [8] R. Caponetto, S. Graziani, and E. Murgano. Realization of a fractional-order RLC circuit via constant phase element. *International Journal of Dynamics and Control*, 9:1589–1599, 2021.
- [9] X. Chen, Y. Chen, B. Zhang, and D. Qiu. A modeling and analysis method for fractional-order DC-DC converters. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 32:7034–7044, 2017.
- [10] S. M. Cvetičanin. *Frakciono i topološko uopštenje jednačine telegrafičara kao model električnog voda*. PhD thesis, Fakultet tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu, 2017.
- [11] S. M. Cvetičanin, M. R. Rapačić, and D. Zorica. Frequency analysis of generalized time-fractional telegrapher’s equation. In *European Conference on Circuit Theory and Design (ECCTD)*, Catania, Italy, 2017.
- [12] S. M. Cvetičanin, D. Zorica, and M. R. Rapačić. Generalized time-fractional telegrapher’s equation in transmission line modeling. *Nonlinear Dynamics*, 88:1453–1472, 2017.
- [13] S. M. Cvetičanin, D. Zorica, and M. R. Rapačić. Frequency characteristics of two topologies representing fractional order transmission line model. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, 39:456–473, 2020.
- [14] S. M. Cvetičanin, D. Zorica, and M. R. Rapačić. Non-local telegrapher’s equation as a transmission line model. *Applied Mathematics and Computation*, 390:125602–1–18, 2021.
- [15] A. Dzieliński, G. Sarwas, and D. Sierociuk. Comparison and validation of integer and fractional order ultracapacitor models. *Advances in Difference Equations*, 2011:11:1–15, 2011.
- [16] O. Elwy, L. A. Said, A. H. Madian, and A. G. Radwan. All possible topologies of the fractional-order Wien oscillator family using different approximation techniques. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, 38:3931–3951, 2019.

- [17] K. Elyaalaoui, M. Labbadi, M. Ouassaid, and M. Cherkaoui. Optimal fractional order based on fuzzy control scheme for wind farm voltage control with reactive power compensation. *Mathematical Problems in Engineering*, 2021:5559242–1–12, 2021.
- [18] M. E. Fouda, A. Allagui, A. S. Elwakil, S. Das, C. Psychalinos, and A. G. Radwan. Nonlinear charge-voltage relationship in constant phase element. *International Journal of Electronics and Communications (AEÜ)*, 117:153104–1–4, 2020.
- [19] R. Garrappa, E. Kaslik, and M. Popolizio. Evaluation of fractional integrals and derivatives of elementary functions: Overview and tutorial. *Mathematics*, 7:407–1–21, 2019.
- [20] F. Gómez, J. Rosales, and M. Guía.  $RLC$  electrical circuit of non-integer order. *Central European Journal of Physics*, 11:1361–1365, 2013.
- [21] R. Gorenflo and F. Mainardi. *Fractional Calculus: Integral and Differential Equations of Fractional Order*. In: *Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics* (eds A. Carpinteri, F. Mainardi), volume 378 of *CISM Courses and Lecture Notes*. Springer Verlag, Wien and New York, 1997.
- [22] M. Guía, J. Rosales, and F. Gómez. Analysis on the time and frequency domain for the  $RC$  electric circuit of fractional order. *Central European Journal of Physics*, 11:1366–1371, 2013.
- [23] K. Haška, S. M. Cvetičanin, and D. Zorica. Dissipative and generative fractional electric elements in modeling  $RC$  and  $RL$  circuits. *Nonlinear Dynamics*, 105:3451–3474, 2021.
- [24] K. Haška, D. Zorica, and S. M. Cvetičanin. Fractional  $RLC$  circuit in transient and steady state regimes. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 96:105670–1–17, 2021.
- [25] K. Haška, D. Zorica, and S. M. Cvetičanin. Frequency characteristics of dissipative and generative fractional  $RLC$  circuits. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, 2022.
- [26] K. Haška, D. Zorica, and booktitle = Proceedings of the International Conference on Fractional Differentiation and its Applications ICFDA address = year = 2022 S. M. Cvetičanin, title = Transient Regime of Fractional  $RLC$  Circuit.
- [27] A. Jakubowska and J. Walczak. Analysis of the transient state in a circuit with supercapacitor. *Poznan University of Technology Academic Journals. Electrical Engineering*, 81:71–77, 2015.
- [28] A. Jakubowska and J. Walczak. Analysis of the transient state in a series circuit of the class  $RL_{\beta}C_{\alpha}$ . *Circuits, Systems, and Signal Processing*, 35:1831–1853, 2016.
- [29] A. Jakubowska-Ciszek and J. Walczak. Analysis of the transient state in a parallel circuit of the class  $RL_{\beta}C_{\alpha}$ . *Applied Mathematics and Computation*, 319:287–300, 2018.
- [30] I. S. Jesus and J. A. T. Machado. Development of fractional order capacitors based on electrolyte processes. *Nonlinear Dynamics*, 56:45–55, 2009.
- [31] Y. Jiang, B. Zhang, X. Shu, and Z. Wei. Fractional-order autonomous circuits with order larger than one. *Journal of Advanced Research*, 25:217–225, 2020.
- [32] D. A. John and K. Biswas. Electrical equivalent circuit modelling of solid state fractional capacitor. *International Journal of Electronics and Communications (AEÜ)*, 78:258–264, 2017.
- [33] T. Kaczorek. Positive linear systems consisting of subsystems with different fractional orders. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 58:1203–1210, 2011.
- [34] A. Kartci, A. Agambayev, N. Herencsar, and K. N. Salama. Series-, parallel-, and inter-connection of solid-state arbitrary fractional-order capacitors: Theoretical study and experimental verification. *IEEE Access*, 6:10933–10943, 2018.
- [35] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, and J. J. Trujillo. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. Elsevier B.V., Amsterdam, 2006.
- [36] M. S. Krishna, S. Das, K. Biswas, and B. Goswami. Fabrication of a fractional order capacitor with desired specifications: A study on process identification and characterization. *IEEE Transactions on Electron Devices*, 58:4067–4073, 2011.

- [37] J. A. T. Machado and A. M. S. F. Galhano. Fractional order inductive phenomena based on the skin effect. *Nonlinear Dynamics*, 68:107–115, 2012.
- [38] V. Martynyuk and M. Ortigueira. Fractional model of an electrochemical capacitor. *Signal Processing*, 107:355–360, 2015.
- [39] V. Martynyuk, M. Ortigueira, M. Fedula, and O. Savenko. Methodology of electrochemical capacitor quality control with fractional order model. *International Journal of Electronics and Communications (AEÜ)*, 91:118–124, 2018.
- [40] K. S. Miller and B. Ross. *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*. John Wiley and Sons, New York, 1993.
- [41] D. Mondal and K. Biswas. Packaging of single-component fractional order element. *IEEE Transactions on Device and Materials Reliability*, 13:73–80, 2013.
- [42] M. A. Moreles and R. Lainez. Mathematical modelling of fractional order circuit elements and bioimpedance applications. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 46:81–88, 2017.
- [43] K. Nosrati and M. Shafiee. On the convergence and stability of fractional singular Kalman filter and Riccati equation. *Journal of the Franklin Institute: Engineering and Applied Mathematics*, 357:7188–7210, 2020.
- [44] A. V. Oppenheim, A. S. Willsky, and S. H. Nawab. *Signals and systems*. Prentice-Hall signal processing series. Prentice-Hall, New Jersey, 1997.
- [45] M. D. Ortigueira and Duarte Valério. *Fractional Signals and Systems*, volume 7 of *Fractional Calculus in Applied Sciences and Engineering*. de Gruyter, Berlin/Boston, 2020.
- [46] I. Podlubny. *Fractional Differential Equations*. Academic Press, San Diego, 1999.
- [47] R. Prasad, K. Kothari, and U. Mehta. Flexible fractional supercapacitor model analyzed in time domain. *IEEE Access*, 7:122626–122633, 2019.
- [48] R. Prasad, U. Mehta, and K. Kothari. Various analytical models for supercapacitors: a mathematical study. *Resource-Efficient Technologies*, 1:1–15, 2020.
- [49] J. J. Quintana, A. Ramos, and I. Nuez. Modeling of an EDLC with fractional transfer functions using Mittag-Leffler equations. *Mathematical Problems in Engineering*, 2013:807034–1–7, 2013.
- [50] A. G. Radwan. Resonance and quality factor of the  $RL_\alpha C_\alpha$  fractional circuit. *IEEE Journal on Emerging and Selected Topics in Circuits and Systems*, 3:377–385, 2013.
- [51] A. G. Radwan and M. E. Fouda. Optimization of fractional-order  $RLC$  filters. *Circuits, Systems and Signal Processing*, 32:2097–2118, 2013.
- [52] A. G. Radwan and K. N. Salama. Passive and active elements using fractional  $L_\beta C_\alpha$  circuit. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 58:2388–2397, 2011.
- [53] A. G. Radwan and K. N. Salama. Fractional-order  $RC$  and  $RL$  circuits. *Circuits, Systems and Signal Processing*, 31:1901–1915, 2012.
- [54] A. G. Radwan, A. M. Soliman, and A. S. Elwakil. Design equations for fractional-order sinusoidal oscillators: Four practical circuit examples. *International Journal of Circuit Theory and Applications*, 36:473–492, 2008.
- [55] M. S. Sarafraz and M. S. Tavazoei. Realizability of fractional-order impedances by passive electrical networks composed of a fractional capacitor and  $RLC$  components. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 62:2829–2835, 2015.
- [56] I. Schäfer and K. Krüger. Modelling of coils using fractional derivatives. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 307:91–98, 2006.



- [57] Z. M. Shah, M. Y. Kathjoo, F. A. Khanday, K. Biswas, and C. Psychalinos. A survey of single and multi-component fractional-order elements (FOEs) and their applications. *Microelectronics Journal*, 84:9–25, 2019.
- [58] M. Sowa. A subinterval-based method for circuits with fractional order elements. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences Technical Sciences*, 62:449–454, 2014.
- [59] M. Sowa. "gcdAlpha" – a semi-analytical method for solving fractional state equations. *Poznan University of Technology Academic Journals. Electrical Engineering*, 96:231–242, 2018.
- [60] T. P. Stefański and J. Gulowski. Electromagnetic-based derivation of fractional-order circuit theory. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 79:104897–1–13, 2019.
- [61] T. P. Stefański and J. Gulowski. Signal propagation in electromagnetic media described by fractional-order models. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 82:105029–1–16, 2020.
- [62] R. Süße, A. Domhardt, and M. Reinhard. Calculation of electrical circuits with fractional characteristics of construction elements. *Forsch Ingenieurwes*, 69:230–235, 2005.
- [63] M. S. Tavazoei. Passively realizable approximations of non-realizable fractional order impedance functions. *Journal of the Franklin Institute: Engineering and Applied Mathematics*, 357:7037–7053, 2020.
- [64] V. V. Uchaikin, A. S. Ambrozevich, R. T. Sibatov, S. A. Ambrozevich, and E. V. Morozova. Memory and nonlinear transport effects in charging-discharging of a supercapacitor. *Technical Physics*, 61:250–259, 2016.
- [65] J. Č. Mikulović and T. B. Šekara. Power definitions for fractional order elements and non-active power compensation. In *14th Symposium on Neural Networks and Applications (NEUREL)*, Belgrade, Serbia, 2018.
- [66] T. B. Šekara and M. S. Stanković. Analiza jedne klase frakcionih sistema primjenom  $\alpha$ -transformacije. In *XLI konferencija za ETRAN*, Zlatibor, Srbija, 1997.
- [67] T. B. Šekara and M. S. Stanković. Analiza linearnih frakcionih sistema. In *XLII konferencija za ETRAN*, Vrnjačka Banja, Srbija, 1998.
- [68] J. Walczak and A. Jakubowska. Resonance in series fractional order  $RL_{\beta}C_{\alpha}$  circuit. *Przeгляд Elektrotechniczny*, 90:210–213, 2014.
- [69] S. Westerlund and L. Ekstam. Capacitor theory. *IEEE Transactions on Dielectrics and Electrical Insulation*, 1:826–839, 1994.
- [70] B. Zhang and X. Shu. *Fractional-Order Electrical Circuit Theory*. CPSS Power Electronics Series. Springer, Singapore, 2022.
- [71] L. Zhou, Z. Tan, and Q. Zhang. A fractional-order multifunctional  $n$ -step honeycomb  $RLC$  circuit network. *Frontiers of Information Technology and Electronic Engineering*, 18:1186–1196, 2017.

*Ovaj Obrazac čini sastavni deo doktorske disertacije, odnosno dokorskog umetničkog projekta koji se brani na Univerzitetu u Novom Sadu. Popunjen Obrazac ukoričiti iza teksta doktorske disertacije, odnosno dokorskog umetničkog projekta.*

## Plan tretmana podataka

<b>Naziv projekta/istraživanja</b>
Analiza prelaznih procesa, energetskog bilansa i frekvencijskih karakteristika električnih kola sa frakcionim elementima
<b>Naziv institucije/institucija u okviru kojih se sprovodi istraživanje</b>
Fakultet tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu
<b>Naziv programa u okviru kog se realizuje istraživanje</b>
<b>1. Opis podataka</b>
<p><i>1.1 Vrsta studije</i></p> <p><i>Ukratko opisati tip studije u okviru koje se podaci prikupljaju</i></p> <p>U ovoj studiji nisu prikupljeni podaci</p> <p><i>1.2 Vrste podataka</i></p> <p>a) kvantitativni</p> <p>b) kvalitativni</p> <p><i>1.3. Način prikupljanja podataka</i></p> <p>a) ankete, upitnici, testovi</p> <p>b) kliničke procene, medicinski zapisi, elektronski zdravstveni zapisi</p> <p>v) genotipovi: navesti vrstu _____</p> <p>g) administrativni podaci: navesti vrstu _____</p> <p>d) uzorci tkiva: navesti vrstu _____</p> <p>đ) snimci, fotografije: navesti vrstu _____</p>

e) tekst, navesti vrstu \_\_\_\_\_

ž) mapa, navesti vrstu \_\_\_\_\_

z) ostalo: opisati \_\_\_\_\_

### 1.3 Format podataka, upotrebene skale, količina podataka

#### 1.3.1 Upotrebljeni softver i format datoteke:

a) Excel fajl, datoteka \_\_\_\_\_

b) SPSS fajl, datoteka \_\_\_\_\_

c) PDF fajl, datoteka \_\_\_\_\_

d) Tekst fajl, datoteka \_\_\_\_\_

e) JPG fajl, datoteka \_\_\_\_\_

f) Ostalo, datoteka \_\_\_\_\_

#### 1.3.2. Broj zapisa (kod kvantitativnih podataka)

a) broj varijabli \_\_\_\_\_

b) broj merenja (ispitanika, procena, snimaka i sl.) \_\_\_\_\_

#### 1.3.3. Ponovljena merenja

a) da

b) ne

Ukoliko je odgovor da, odgovoriti na sledeća pitanja:

a) vremenski razmak između ponovljenih mera je \_\_\_\_\_

b) varijable koje se više puta mere odnose se na \_\_\_\_\_

v) nove verzije fajlova koji sadrže ponovljena merenja su imenovane kao \_\_\_\_\_

Napomene: \_\_\_\_\_

*Da li formati i softver omogućavaju deljenje i dugoročnu validnost podataka?*

a) *Da*

b) *Ne*

Ako je odgovor ne, obrazložiti \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

## 2. Prikupljanje podataka

### 2.1 Metodologija za prikupljanje/generisanje podataka

#### 2.1.1. U okviru kog istraživačkog nacrta su podaci prikupljeni?

a) eksperiment, navesti tip \_\_\_\_\_

b) korelaciono istraživanje, navesti tip \_\_\_\_\_

c) analiza teksta, navesti tip \_\_\_\_\_

d) ostalo, navesti šta \_\_\_\_\_

*2.1.2 Navesti vrste mernih instrumenata ili standarde podataka specifičnih za određenu naučnu disciplinu (ako postoje).*

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

### 2.2 Kvalitet podataka i standardi

#### 2.2.1. Tretman nedostajućih podataka

a) Da li matrica sadrži nedostajuće podatke? Da Ne

Ako je odgovor da, odgovoriti na sledeća pitanja:

a) Koliki je broj nedostajućih podataka? \_\_\_\_\_

b) Da li se korisniku matrice preporučuje zamena nedostajućih podataka? Da Ne

v) Ako je odgovor da, navesti sugestije za tretman zamene nedostajućih podataka

\_\_\_\_\_

#### 2.2.2. Na koji način je kontrolisan kvalitet podataka? Opisati

\_\_\_\_\_

---

2.2.3. Na koji način je izvršena kontrola unosa podataka u matricu?

---

---

### 3. Tretman podataka i prateća dokumentacija

3.1. Tretman i čuvanje podataka

3.1.1. Podaci će biti deponovani u \_\_\_\_\_ repozitorijum.

3.1.2. URL adresa \_\_\_\_\_

3.1.3. DOI \_\_\_\_\_

3.1.4. Da li će podaci biti u otvorenom pristupu?

- a) *Da*
- b) *Da, ali posle embarga koji će trajati do \_\_\_\_\_*
- v) *Ne*

Ako je odgovor ne, navesti razlog \_\_\_\_\_

3.1.5. Podaci neće biti deponovani u repozitorijum, ali će biti čuvani.

*Obrazloženje*

---

---

3.2 Metapodaci i dokumentacija podataka

3.2.1. Koji standard za metapodatke će biti primenjen? \_\_\_\_\_

3.2.1. Navesti metapodatke na osnovu kojih su podaci deponovani u repozitorijum.

---

---

*Ako je potrebno, navesti metode koje se koriste za preuzimanje podataka, analitičke i proceduralne informacije, njihovo kodiranje, detaljne opise varijabli, zapisa itd.*

---

---

---

---

### 3.3 Strategija i standardi za čuvanje podataka

3.3.1. Do kog perioda će podaci biti čuvani u repozitorijumu? \_\_\_\_\_

3.3.2. Da li će podaci biti deponovani pod šifrom? Da Ne

3.3.3. Da li će šifra biti dostupna određenom krugu istraživača? Da Ne

3.3.4. Da li se podaci moraju ukloniti iz otvorenog pristupa posle izvesnog vremena?

Da Ne

Obrazložiti

---

---

## 4. Bezbednost podataka i zaštita poverljivih informacija

Ovaj odeljak MORA biti popunjen ako vaši podaci uključuju lične podatke koji se odnose na učesnike u istraživanju. Za druga istraživanja treba takođe razmotriti zaštitu i sigurnost podataka.

### 4.1 Formalni standardi za sigurnost informacija/podataka

Istraživači koji sprovode ispitivanja s ljudima moraju da se pridržavaju Zakona o zaštiti podataka o ličnosti ([https://www.paragraf.rs/propisi/zakon\\_o\\_zastiti\\_podataka\\_o\\_licnosti.html](https://www.paragraf.rs/propisi/zakon_o_zastiti_podataka_o_licnosti.html)) i odgovarajućeg institucionalnog kodeksa o akademskom integritetu.

4.1.2. Da li je istraživanje odobreno od strane etičke komisije? Da Ne

Ako je odgovor Da, navesti datum i naziv etičke komisije koja je odobrila istraživanje

---

4.1.2. Da li podaci uključuju lične podatke učesnika u istraživanju? Da Ne

Ako je odgovor da, navedite na koji način ste osigurali poverljivost i sigurnost informacija vezanih za ispitanike:

- a) Podaci nisu u otvorenom pristupu
- b) Podaci su anonimizirani
- c) Ostalo, navesti šta

---

---

## 5. Dostupnost podataka

5.1. Podaci će biti

- a) javno dostupni
- b) dostupni samo uskom krugu istraživača u određenoj naučnoj oblasti
- c) zatvoreni

Ako su podaci dostupni samo uskom krugu istraživača, navesti pod kojim uslovima mogu da ih koriste:

---

---

Ako su podaci dostupni samo uskom krugu istraživača, navesti na koji način mogu pristupiti podacima:

---

---

5.4. Navesti licencu pod kojom će prikupljeni podaci biti arhivirani.

---

## 6. Uloge i odgovornost

*6.1. Navesti ime i prezime i mejl adresu vlasnika (autora) podataka*

---

*6.2. Navesti ime i prezime i mejl adresu osobe koja održava matricu s podacima*

---

*6.3. Navesti ime i prezime i mejl adresu osobe koja omogućuje pristup podacima drugim istraživačima*

---