UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA
MATEMATIKU I INFORMATIKU

Zakoni održanja i njihova stohastička aproksimacija

-doktorska disertacija-

Mentor:
prof. dr Marko Nedeljkov

Kandidat:
Branko Marković

Novi Sad, 2022

УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ **ОБРАЗАЦ – 5а**
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА[1]

Врста рада:	Докторска дисертација
Име и презиме аутора:	Бранко Марковић
Ментор (титула, име, презиме, звање, институција)	др Марко Недељков, редовни професор, Природно-математички факултет, Универзитет у Новом Саду
Наслов рада:	Закони одржања и њихова стохастичка апроксимација
Језик публикације (писмо):	Српски (латиница)
Физички опис рада:	Унети број: Страница 172 Поглавља 5 Референци 124 Табела 0 Слика 2 Графикона 21 Прилога 0
Научна област:	Математика
Ужа научна област (научна дисциплина):	Стохастичке парцијалне диференцијалне једначине
Кључне речи / предметна одредница:	закон одржања, регуларизација шумом, мултипликативни шум, стохастичка апроксимација, простори Собољева
Резиме на језику рада:	Математички модели дати помоћу парцијалних диференцијалних једначина данас чине важан приступ моделирању различитих феномена из физике, биологије, механике итд. Као промењливе у моделу раније су се јављале само детерминистичке величине, док се данас оне често користе заједно са стохастичким процесима. Модели су генерално непотпуни описи неких појава и стохастички процеси могу представљати неке ефекте који су присутни у самој појави али недостају у моделу. И примећено је да додавањем адекватних стохастичких величина у детерминистички проблем некада добијамо решења са бољим карактеристикама у односу на решења без стохастичких величина. А постоје и случајеви где детерминистички модели немају решења док их њихове стохастичке апроксимације имају. У овој дисертацији бавимо се 2x2 системима закона одржања и њиховим стохастичким апроксимацијама. Упознајемо се са разним законима одржања из теорије еластичности, хроматографије, електрофорезе, са изентропским и Born-Infeld системом. За сваки од претходних система се

[1] Аутор докторске дисертације потписао је и приложио следеће Обрасце:
5б – Изјава о ауторству;
5в – Изјава о истоветности штампане и електронске верзије и о личним подацима;
5г – Изјава о коришћењу.
Ове Изјаве се чувају на факултету у штампаном и електронском облику и не кориче се са тезом.

	одређују неке њихове важне особине, решавају Риманови проблеми и налазе њихова елементарна решења. Такође, подсећамо се неких основних појмова о стохастичким процесима и правимо стохастичку пертурбацију система закона одржања. Сама стохастичка пертурбација је урађена коришћењем адекватног стохастичког извора, додатним модификацијама почетних услова и симетризацијом система. Као резултат добија се стохастички Кошијев проблем. Њега решавамо применом методе исчезавајуће вискозности на низу нових апроксимативних проблема, а вискозни члан пуштамо у нулу Скороходовом теоремом. Тако добијамо неко решење на новој стохастичкој бази. Враћање на оригиналну стохастичку базу се врши показивањем јединствености по трајекторијама и применом Yamada-Watanabe теореме. Како је стохастичко решење дато на случајном интервалу, његове локалне и глобалне процене постојања решења су дате у вероватноћи. На крају, за конкретни систем из теорије еластичности, чију стохастичку апроксимацију добијамо без примене симетризације, показујемо да стохастичко решење конвергира у неком адекватном смислу ка детерминистичком решењу, кад стохастички шум иде у нулу.
Датум прихватања теме од стране надлежног већа:	21.10.2021.
Датум одбране: (Попуњава одговарајућа служба)	
Чланови комисије: (титула, име, презиме, звање, институција)	Председник: др Дора Селеши, редовни професор, Природно-математички факултет, Универзитет у Новом Саду Ментор: др Марко Недељков, редовни професор, Природно-математички факултет, Универзитет у Новом Саду Члан: др Србољуб Симић, редовни професор, Природно-математички факултет, Универзитет у Новом Саду Члан: др Филип Томић, доцент, Факултет техничких наука, Универзитет у Новом Саду
Напомена:	

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY SCIENCES

KEY WORD DOCUMENTATION[2]

Document type:	Doctoral dissertation
Author:	Branko Marković
Supervisor (title, first name, last name, position, institution)	PhD Marko Nedeljkov, Full Professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad
Thesis title:	Conservation laws and their stochastic approximation
Language of text (script):	Serbian language (latin)
Physical description:	Number of: Pages 172 Chapters 5 References 124 Tables 0 Illustrations 2 Graphs 21 Appendices 0
Scientific field:	Mathematics
Scientific subfield (scientific discipline):	Stochastic partial differential equations
Subject, Key words:	conservation law, regularization by noise, multiplicative noise, stochastic approximation, Sobolev spaces
Abstract in English language:	Mathematical models that use partial differential equations today make an important approach to modeling various phenomena from physics, biology, mechanics, etc. In the past, only deterministic quantities appeared as variables in the model, while today they are often used together with the stochastic processes. Generally, models are incomplete descriptions of some phenomena, and stochastic processes may stand for some effects that are present in the phenomenon itself but missing in the model. And it has been observed that by adding adequate stochastic quantities to a deterministic problem, we sometimes get a solution with better features comparing to the solution without stochastic quantities. And there are cases where deterministic models have no solutions, while their stochastic approximations have them. In this dissertation we deal with 2x2 systems of conservation laws and their stochastic approximations. We get acquainted with the various conservation laws from the theory of elasticity, chromatography, electrophoresis, isentropic and the Born-Infeld system. For each of the previous systems, some important properties are determined, the Riemann problems are solved, and their elementary solutions are found. Also, we get reminded of some basic concepts concerning stochastic processes and make a stochastic perturbation of the

[2] The author of doctoral dissertation has signed the following Statements:
5б – Statement on the authority,
5в – Statement that the printed and e-version of doctoral dissertation are identical and about personal data,
5г – Statement on copyright licenses.
The paper and e-versions of Statements are held at he faculty and are not included into the printed thesis.

	system of conservation law. The stochastic perturbation itself was made by using an adequate stochastic source, additional modifications of the initial conditions and symmetrization of the system. As a result a stochastic Cauchy problem is obtained. We solve it by applying the method of vanishing viscosity to a sequence of new approximate problems, and the viscosity term goes to zero by using the Skorohod's theorem. That is how we get some solution on a new stochastic basis. Returning to the original stochastic basis is done by showing pathwise uniqueness and applying the Yamada-Watanabe theorem. Since the stochastic solution is given on a random interval, its local and global estimates of existence are given in probability. Finally, for a concrete system from the theory of elasticity, whose stochastic approximation we obtain without using symmetrization, we show that the stochastic solution converges in some adequate sense to the deterministic solution, in the zero-noise limit.
Accepted on Scientific Board on:	21.10.2021.
Defended: (Filled by the faculty service)	
Thesis Defend Board: (title, first name, last name, position, institution)	President: PhD Dora Seleši, Full Professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad Superviser: PhD Marko Nedeljkov, Full Professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad Member: PhD Srboljub Simić, Full Professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad Member: PhD Filip Tomić, Assistant Professor, Faculty of Technical Sciences, University of Novi Sad
Note:	

Zahvalnica

Tokom svojih studija imao sam sreću da upoznam više profesora koji su me učinili boljim u raznim oblastima mog života. Posebnu zahvalnost dugujem profesoru Marku Nedeljkovu, mom mentoru, i profesorici Danijeli Rajter-Ćirić, mojoj savetnici tokom doktorskih studija. Oni su verovatno najviše zaslužni za to kakav sam matematičar danas. Savet koji mi je mentor dao jednom prilikom ostao mi je urezan u sećanje: "Možeš grešiti koliko hoćeš. Ipak je ovo matematika, a ne život." Sa nekim gornjim ograničenjem na broj grešaka i dan danas se držim toga.

Zahvaljujem se članovima komisije profesorici Dori Seleši, profesoru Srboljubu Simiću i profesoru Filipu Tomiću na sugestijama i komentarima koji su učinili da ova disertacija bude bolja. A ogromnu zahvalnost dugujem i profesoru Francu Flandoliju čiji saveti i nesebična pomoć su mi omogućili da temu ovog istraživanja vidim iz potpuno drugog ugla.

Veliko hvala mojim roditeljima Božidaru i Živki u kojima sam imao mnogo razumevanja tokom svih ovih godina, i naročito mojoj sestri Branki koja mi je bila zaista velika podrška. I posebno hvala mojoj supruzi Romani, koju poznajem doslovno od momenta kada sam počeo da radim na ovom istraživanju. Videla me je u najboljim i najgorim momentima, i ostala je tu.

Novi Sad, februar 2022 Branko Marković

Sadržaj

Izvod

Matematički modeli dati pomoću parcijalnih diferencijalnih jednačina danas čine važan pristup modeliranju različitih fenomena iz fizike, biologije, mehanike itd. Kao promenljive u modelu ranije su se javljale samo determinističke veličine, dok se danas one često koriste zajedno sa stohastičkim procesima. Modeli su generalno nepotpuni opisi nekih pojava i stohastički procesi mogu predstavljati neke efekte koji su prisutni u samoj pojavi ali nedostaju u modelu. I primećeno je da dodavanjem adekvatnih stohastičkih veličina u deterministički problem nekada dobijamo rešenja sa boljim karakteristikama u odnosu na rešenja bez stohastičkih veličina. A postoje i slučajevi gde deterministički modeli nemaju rešenja dok ih njihove stohastičke aproksimacije imaju.

U ovoj disertaciji bavimo se 2x2 sistemima zakona održanja i njihovim stohastičkim aproksimacijama. Upoznajemo se sa raznim zakonima održanja iz teorije elastičnosti, hromatografije, elektroforeze, sa izentropskim i Born-Infeld sistemom. Za svaki od prethodnih sistema se određuju neke njihove važne osobine, rešavaju Rimanovi problemi i nalaze njihova elementarna rešenja. Takođe, podsećamo se nekih osnovnih pojmova o stohastičkim procesima i pravimo stohastičku perturbaciju sistema zakona održanja. Sama stohastička perturbacija je urađena korišćenjem adekvatnog stohastičkog izvora, dodatnim modifikacijama početnih uslova i simetrizacijom sistema. Kao rezultat dobija se stohastički Košijev problem. Njega rešavamo primenom metode isčezavajuće viskoznosti na nizu novih aproksimativnih problema, a viskozni član puštamo u nulu Skorohodovom teoremom. Tako dobijamo neko rešenje na novoj stohastičkoj bazi. Vraćanje na originalnu stohastičku bazu se vrši pokazivanjem jedinstvenosti po trajektorijama i primenom Yamada-Watanabe teoreme. Kako je stohastičko rešenje dato na slučajnom intervalu, njegove lokalne i globalne procene postojanja su date u verovatnoći. Na kraju, za konkretni sistem iz teorije elastičnosti, čiju stohastičku aproksimaciju dobijamo bez primene simetrizacije, pokazujemo da stohastičko rešenje konvergira u nekom adekvatnom smislu ka determinističkom rešenju, kad stohastički šum ide u nulu.

Abstract

Mathematical models that use partial differential equations today make an important approach to modeling various phenomena from physics, biology, mechanics, etc. In the past, only deterministic quantities appeared as variables in the model, while today they are often used together with the stochastic processes. Generally, models are incomplete descriptions of some phenomena, and stochastic processes may stand for some effects that are present in the phenomenon itself but missing in the model. And it has been observed that by adding adequate stochastic quantities to a deterministic problem, we sometimes get a solution with better features comparing to the solution without stochastic quantities. And there are cases where deterministic models have no solutions, while their stochastic approximations have them.

In this dissertation we deal with 2x2 systems of conservation laws and their stochastic approximations. We get acquainted with the various conservation laws from the theory of elasticity, chromatography, electrophoresis, isentropic and the Born-Infeld system. For each of the previous systems, some important properties are determined, the Riemann problems are solved, and their elementary solutions are found. Also, we get reminded of some basic concepts concerning stochastic processes and make a stochastic perturbation of the system of conservation law. The stochastic perturbation itself was made by using an adequate stochastic source, additional modifications of the initial conditions and symmetrization of the system. As a result a stochastic Cauchy problem is obtained. We solve it by applying the method of vanishing viscosity to a sequence of new approximate problems, and the viscosity term goes to zero by using the Skorohod's theorem. That is how we get some solution on a new stochastic basis. Returning to the original stochastic basis is done by showing pathwise uniqueness and applying the Yamada-Watanabe theorem. Since the stochastic solution is given on a random interval, its local and global estimates of existence are given in probability. Finally, for a concrete system from the theory of elasticity, whose stochastic approximation we obtain without using symmetrization, we show that the stochastic solution converges in some adequate sense to the deterministic solution, in the zero-noise limit.

Predgovor

Ako posmatramo sistem koji se sastoji od velikog broja čestica, primetićemo da je nekada nepraktično ili nemoguće opisati ponašanje svake čestice. Na primer ako se olovna lopta baci sa visokog tornja, na svom putu ka zemlji će se sudariti sa oko 10^{30} molekula vazduha ([110]). Pokušaj da se opiše ponašanje svake čestice iziskuje mnogo posla. Srećom da bi opisali neke sisteme često je samo nekoliko parametara dovoljno i tada govorimo o makroskopskom opisu sistema. U ovom slučaju to su pozicija i brzina olovne lopte. Sa druge strane, da smo umesto olovne lopte uzeli loptu od papira, situacija bi se zakomplikovala. Sada molekuli vazduha imaju veću važnost i mikroskopski efekti dobijaju na značaju. I u model bi trebalo uključiti na primer parametre poput otpora vazduha i relacije koja opisuje viskoelastične osobine vazduha. A šta ako je lopta napravljena od nekog novog inovativnog i jako lakog materijala o kom još uvek ne znamo dovoljno i čije osobine se tek ispituju? Tada mikroskopski efekti postaju jako bitni.

Deterministički modeli dati pomoću parcijalnih diferencijalnih jednačina (PDJ) se jako uspešno primenjuju u ogromnom broju problema. Međutim, u nekim situacijama oni su neadekvatni. Na primer, kada su mikroskopski efekti izraženi, makroskopski modeli možda nisu najbolji izbor. U takvim slučajevima bi bilo poželjno razviti modele koji kombinuju i jedno i drugo. Jedan od načina kako mikroskopske efekte možemo integrisati u modele je pomoću stohastičkih procesa.

Takođe, nedostatak informacija o nečemu u modelu čini sasvim prirodnim da taj nedostatak predstavimo kao stohastičku veličinu (tj. stohastički šum). Modeli su generalno nekompletni opisi nekih pojava i dodatne stohastičke veličine bi mogle predstavljati neke efekte koji su prisutni u samoj pojavi ali nedostaju u modelu. Sa matematičke strane, u najvećoj meri nije bitno da li slučajnost potiče iz stohastičke prirode neke promenljive ili zbog nedostatka informacija o determinističkom ali komplikovanom kvantitetu. Naravno stohastički sistemi PDJ se mogu proučavati i zbog dobijanja informacija o samom determinističkom sistemu PDJ ili razumevanja različitih pojava koje se dešavaju u sistemu ako neko doda šum. A više razloga zbog kojih se šum može javiti u numeričkim simulacijama se može pronaći u [89].

Robert Braun je primetio i potom dokumentovao 1828. godine kretanje čestica polena pod mikroskopom koje su se nalazile u vodi ([24]). Čestice su se kretale nepredvidivo i nepravilno i tada nije bilo načina kako objasniti to kretanje. Gotovo čitav vek kasnije zahvaljujući radovima Ajnštajna, Langevina i drugih, dolazi i do pronalaska adekvatnih matematičkih objašnjenja datog procesa (detaljan istorijski razvoj se može pronaći u [59], [110]). Po Robertu Braunu sam proces je nazvan Braunovo kretanje. Ono što je značajno za temu ove disertacije je da u drugoj polovini XX veka naučnici počinju da proučavaju parcijalne diferencijalne jednačine i Braunovo kretanje zajedno.

Za opšte sisteme PDJ u više dimenzija često je gotovo nemoguće pronaći rešenja. Zato ćemo se u ovoj disertaciji koncentrisati na 2x2 sisteme zakona održanja u jednoj dimenziji jer o njima se zna mnogo više. Pitanje koje se postavlja ovde je šta će se desiti sa rešenjima ako u takve sisteme ubacimo neki stohastički proces. U literaturi se može videti da u nekim situacijama stohastički problem ima rešenje, dok ga deterministički problem nema; ili da ponekad kada dodamo šum u model dobijamo bolje rešenje; nekada i jedinstvenost koja nije postojala bez šuma (videti [4], [26], [50]). Ovakvi slučajevi se u literaturi nazivaju regularizacija šumom. Ovde ćemo istražiti da li nam dodavanje specifičnog šuma koji zavisi od promenljiva sistema tzv. multiplikativnog stohastičkog šuma, omogućava da poboljšamo determinističko rešenje u nekom smislu. Takođe, kada kažemo stohastički šum u ovoj disertaciji uobičajeno mislimo na stohastički izvor.

Naravno, do regularizacije ne dolazi uvek. Danas, iako je veliki broj stohastičkih PDJ problema istražen, postoje slučajevi gde je šum doveo do nekog poboljšanja i gde nije. Ali ima raznih tipova šuma. Tako da je mnogo stvari još uvek ogromna nepoznanica. Opšte tehnike kojim bi se stohastički problemi rešavali ne postoje. Skoro svaki problem je posebna priča za sebe. Analiza problema sa stohastičkim fluksom se razlikuje od analize problema sa stohastičkim izvorom čak iako dati problemi deluju skoro identično.

U poslednjih nekoliko decenija radovi vezani za multiplikativni šum i sisteme zakona održanja su se prvo pojavili u slučaju skalarnih sistema. Oni se na primer mogu pronaći u [9], [28], [37], [47], [63]. Tehnike, prostori i sam oblik multiplikativnog šuma koji se koriste u navedenim radovima su različiti: u [9], [28] i [47] se koristi isčezavajuća viskoznost na prostorima Soboljeva, na L^p i BV prostorima, i na L^2 prostorima, respektivno; u [37] koriste se kinetičke formulacije na L^p prostorima; u [63] koristi se metod razdvajanja operatora[1] na L^1 i BV prostorima. Stohastički sistemi koji sadrže više parcijalnih diferencijalnih jednačina su se pojavili kasnije i manje su istraženi. Istraživanja koja se tiču sistema drugog reda sa multiplikativnim šumom su pretežno koncentrisana na Navije-Stoksov sis-

[1]eng. Operator splitting method.

tem i proučavaju se u [18], [19], [46], [49], [115]. U poređenju sa njima, sistemi prvog reda sa multiplikativnim šumom su raznovrsnije, ali pojedinačno analizirani u manjoj meri: u [10], [21] i [61] su proučavani Ojlerovi sistemi jednačina; u [5] se numerički rešava stohastički sistem plitke vode sa Eksnerovom jednačinom; a rad [72] proučava opšti kvazilinearni simetrični hiperbolički sistem i to je rad čije ćemo rezultate koristiti u ovoj disertaciji. Jedini rad poznat autoru ove disertacije koji se eksplicitno bavi stohastičkim perturbacijama nekog 2x2 sistema zakona održanja je [96]. Za razliku od prethodno navedenih radova, to istraživanje se bavi stohastičkim perturbacijama fluksa i sam sistem je specifičan (prva jednačina sistema zavisi samo od jedne promenljive; sličan sistem se može videti i ovde u Odeljku 2.2.3).

Struktura ove disertacije je data u nastavku. Na početku ćemo se upoznati sa zakonima održanja, Rimanovim problemima i njihovim elementarnim rešenjima, sa nekim osnovama o stohastičkim procesima i važnim prostorima funkcija. U drugoj glavi ćemo istražiti devet determinističkih zakona održanja, odredićemo neke njihove osobine i naći rešenja Rimanovih problema. U trećoj glavi ćemo proučavati stohastički početni problem koji nastaje tako što aproksimiramo početni Rimanov problem vezan za proizvoljni deterministički sistem zakona održanja. Datu aproksimaciju konstruišemo dodavanjem stohastičkog izvora, simetrizacijom sistema i aproksimacijom početnih uslova. U četvrtoj glavi, za konkretni deterministički Rimanov problem i njegovu stohastičku aproksimaciju pokazaćemo dodatnu vezu njihovih rešenja u nekom adekvatnom smislu, kada stohastički šum ide u nulu. Na kraju, sažeto ćemo sumirati zaključke do kojih smo došli.

Napomenimo da se neke oznake za promenljive, parametre i konstante više puta ponavljaju i mogu se menjati od odeljka do odeljka ili od glave do glave. Iz samog konteksta će biti jasno o čemu se radi. Većinu konstanti zapisujemo sa C. One se mogu razlikovati od reda do reda, ili ponekad čak i u istom redu. Samo neke ćemo posebno obeležiti i samo na nekima ćemo naznačiti od čega zavise. Sve slike i numerička izračunavanja na osnovu kojih su neke od njih konstruisane su urađeni pomoću programa Wolfram Mathematica 10.

Glava 1

Uvod

Za zakone održanja se može reći da su fundamentalni zakoni u prirodi. Potpuno prirodno se javljaju u fizici, hemiji, mehanici itd. Danas predstavljaju jedan jako uspešan način modeliranja raznih problema. U nekim slučajevima za opis konkretnog problema dovoljna je samo jedna jednačina. Međutim, mnogi procesi i pojave se ne mogu opisati tako, već se opisuju pomoću sistema međusobno povezanih jednačina. Ako je u sistemu zakona održanja i uopšte proizvoljnoj PDJ, bilo koja promenljiva, parametar ili koeficijent slučajna veličina, tada govorimo o stohastičkom zakonu održanja ili o stohastičkoj PDJ, respektivno. Značaj stohastičkih procesa danas, na interesantan način u različitim realnim primenama je predstavljen u [92].

U ovoj disertaciji, slučajne procese ćemo uključiti u sisteme zakona održanja pomoću stohastičkih izvora. Kada u zakonima održanja dodamo deterministički izvor, o njemu često možemo misliti kao o nekoj spoljašnjoj sili koja deluje na sistem. To je možda najjednostavniji način shvatanja i u slučaju kada je izvor stohastički. Ali kao što smo već spomenuli, stohastički izvor može predstavljati i sve ono što jeste u pojavi koju dati sistem opisuje, ali se ne nalazi u samom modelu. Razna tumačenja stohastičkih izvora zavise i od konkretne pojave koja se istražuje.

Po [28] najvažniji modeli u dinamici fluida su zasnovani na Navije-Stoksovim i Ojlerovim jednačinama. U nekim realnim problemima zasnovanim na njima, primećeno je da mali poremećaji mogu dovesti do drastičnih razlika između onoga što se može utvrditi eksperimentalno i onoga što model predviđa. Kao jedan od načina da se taj jaz smanji, danas se izučavaju njihove stohastičke verzije. Ako o zakonima održanja mislimo kao o jednostavnijim verzijama Navije-Stoksovih i Ojlerovih jednačina, vidimo značaj njihovog proučavanja. Pokazalo se i da njihove stohastičke interpretacije mogu dovesti do poboljšanja samih rešenja. Posebno je zanimljiv uticaj stohastičkih procesa na prekidna rešenja poput udarnih talasa.

U ovoj glavi na početku ćemo definisati zakone održanja i navesti dva početna problema kojima ćemo se baviti u ovoj disertaciji. Zakoni održanja su proučavani na mnogo mesta u literaturi, pa se sa njima može upoznati na primer u [22], [23], [35], [44], [64], [78], [79], [93], [107], [109], [111], [112], [120]. A kako sam naziv ove disertacije pominje i stohastičke procese, potom ćemo navesti neke osnovne pojmove i formule koje se tiču njih i koje su neophodne za razumevanje problema u oblasti stohastičkih PDJ. Za mnogo više detalja o stohastičkim procesima kao i o stohastičkim diferencijalnim i parcijalnim diferencijalnim jednačinama videti na primer [34], [59], [62], [66], [68], [95], [110], [124]. Na kraju ove glave ćemo navesti prostore funkcija koji su vezani za rešenja stohastičkih problema koje proučavamo.

1.1 Zakon održanja

Najjednostavnije rečeno, zakon održanja tvrdi da je promena fizičke veličine koja karakteriše neku supstancu koja se nalazi u nekoj oblasti tokom određenog vremenskog perioda, jednaka njenom fluksu kroz granicu te oblasti tokom istog vremenskog perioda. Odnosno za svako t se može pretpostaviti da važi

$$\frac{d}{dt}\int_E U\,dx = -\int_{\partial E} F(U)\nu dS,$$

gde je U gustina fizičke veličine, F fluks, E posmatrana oblast, a ν spoljašnja normala oblasti E. Kako je

$$\int_{\partial E} F(U)\nu dS = \int_E div\,F(U)dx,$$

odatle sledi

$$\int_E U_t\,dx = -\int_E div\,F(U)dx.$$

Tako dobijamo zakon održanja u *konzervativnom obliku*

$$U_t + div\,F(U) = 0. \tag{1.1}$$

Pod pretpostavkom da je fluks dovoljno glatka funkcija, isti sistem se može zapisati u *kvazilinearnom obliku* sa

$$U_t + DF(U)\,U_x = 0. \tag{1.2}$$

Pri tome je $U : \mathbb{R}^d \times [0,\infty) \to \mathbb{R}^p$, $x = (x_1,...,x_d) \in \mathbb{R}^d$, $t \geq 0$, $F = (F_1,...,F_d)$, $F_j : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$, i DF predstavlja matricu Jakobijana.

Kada uz zakon održanja (1.1) pridružimo početne uslove oblika

$$U(x,0) = U_0, \tag{1.3}$$

govorimo o takozvanom *Košijevom problemu.*

Teorija Košijevih problema za zakone održanja je suočena sa više izazova. Čak i kada počnu iz glatkih početnih uslova, jaka klasična rešenja razvijaju prekide. Pa ne možemo očekivati da definišemo klasična rešenja za svako t. Ali kako je zakon održanja u suštini integralna relacija, on može biti zadovoljen i kada funkcija U nije diferencijabilna, pa čak ni neprekidna. Zato treba definisati opštiji koncept slabih rešenja kod kojih su prekidi dozvoljeni i koja mogu postojati globalno. Standardni način proširenja dopustivog skupa rešenja Košijevog problema u konzervativnom obliku (1.1), (1.3) je da posmatramo rešenja kao distribucije, tj. neprekidne linearne funkcionele na prostoru C_c^∞, beskonačno diferencijabilnih funkcija sa kompaktnim nosačem.[1] Sa druge strane, slaba rešenja nisu jedinstvena. Zato među mnoštvom slabih rešenja treba naći način odabira jedinstvenog rešenja.

Ako su početni uslovi (1.3) dati u specijalnom obliku

$$U(x,0) = \begin{cases} U_l, x < 0, \\ U_r, x > 0, \end{cases} \tag{1.4}$$

tada govorimo o *Rimanovom problemu.* Ovde su U_l i U_r konstante, pa u (1.4) imamo po delovima konstantne početne uslove sa prekidom u tački nula. Značaj Rimanovog problema se ogleda u tome što se on često koristi za rešavanje opštijeg Košijevog problema. Tretiranje problema sa po delovima konstantnim početnim uslovima je jedan način prilaska problemu sa proizvoljnim početnim uslovima i to je tehnika mnogih numeričkih šema.

U ovoj disertaciji ćemo u drugoj glavi proučavati Rimanove probleme za determinističke zakone održanja i njihova elementarna rešenja koja se, u zavisnosti od konkretnog sistema, sastoje iz kontaktnih diskontinuiteta, razređujućih i udarnih talasa. A u trećoj glavi proučavaćemo Košijeve probleme koji nastaju kao stohastičke perturbacije Rimanovih problema. Kao što smo već spomenuli, kako se o zakonima održanja koji su proizvoljne veličine u više dimenzija ne zna mnogo, ovde ćemo se fokusirati na sisteme 2x2 u jednoj dimenziji, tj. kada je $p = 2$, $d = 1$ u (1.1) i (1.2).

[1] Ako posmatramo Košijev problem (1.2), (1.3), koji je dat u kvazilinearnom obliku, i koji se ne može transformisati u konzervativni oblik, za definisanje slabih rešenja ne možemo koristiti teoriju distribucija. Više detalja o nekonzervativnim problemima ovog oblika može se pronaći u [13], [35], [51], [52].

1.2 Stohastički procesi

Stohastički procesi su matematički objekti koji se koriste u modeliranju sistema u kojima neki delovi datog sistema nisu nepromenljivi i deterministički već variraju na neki slučajan način. Samim tim imaju primenu o oblastima kao što su biologija, fizika, hemija, finansije, kriptografija, telekomunikacije i druge. I za modeliranje različitih sistema se koriste različiti stohastički procesi. Među najpoznatijima su Braunovo kretanje, Levijev i Poasonov proces itd. Takođe u velikom broju problema stohastički procesi imaju vrednosti u skupu realnih brojeva. Umesto sa njima ovde ćemo se baviti njihovom generalizacijom na stohastičke procese sa vrednostima u Hilbertovim prostorima. Ispod navodimo neke osnovne pojmove i formule vezane za njih. Za više detalja konsultovati [34].

Prostor sa merom je par $(\Omega, \mathcal{F})$, gde je Ω neki skup, a $\mathcal{F}$ σ-algebra. To znači da familija $\mathcal{F}$ sadrži skup Ω i da su svi komplementi i prebrojive unije njenih elemenata takođe u $\mathcal{F}$. Ako su $(\Omega, \mathcal{F})$ i $(\Gamma, \mathcal{G})$ dva prostora sa merom, onda se preslikavanje $X : \Omega \to \Gamma$ naziva *slučajna promenljiva* ili *merljivo preslikavanje* iz $(\Omega, \mathcal{F})$ u $(\Gamma, \mathcal{G})$ ako važi

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\} := X^{-1}(A) \in \mathcal{F}, \text{ za proizvoljno } A \in \mathcal{G}.$$

Čest izbor za $\mathcal{G}$ je $\mathcal{B}(\Gamma)$, gde je $\mathcal{B}(\Gamma)$ *Borelova σ-algebra* na Γ, tj. najmanja σ-algebra koja sadrži sve otvorene podskupove od Γ. Ako u definiciji slučajne promenljive prostor sa merom $(\Gamma, \mathcal{G})$ nije naveden, uobičajeno se pretpostavlja da je reč o $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Neka je $\mathcal{K}$ kolekcija podskupova od Ω. Najmanja σ-algebra na Ω koja sadrzi $\mathcal{K}$ se naziva *σ-algebra generisana sa $\mathcal{K}$* i obeležava se sa $\sigma(\mathcal{K})$.

Mera verovatnoće P na prostoru sa merom $(\Omega, \mathcal{F})$ je σ-aditivna funkcija koja preslikava $\mathcal{F}$ u $[0,1]$ takva da je $P(\Omega) = 1$. Pri tome *σ-aditivne* funkcije definišemo za međusobno disjunktne $A_i \in \mathcal{F}, i = 1,2,3,...$ sa

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Uređena trojka $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ se naziva *prostor verovatnoća*. Ako prostor verovatnoća posmatramo iz ugla nekog eksperimenta, on se sastoji iz: skupa Ω koji predstavlja skup svih ishoda nekog eksperimenta, σ-algebre $\mathcal{F}$ koja nam govori kakvi se sve skupovi mogu meriti, i funkcije verovatnoće P koja definiše verovatnoće podskupova koji čine σ-algebru $\mathcal{F}$.

Ako je X slučajna promenljiva iz $(\Omega, \mathcal{F})$ u $(\Gamma, \mathcal{G})$ i P mera verovatnoće na $(\Omega, \mathcal{F})$, onda ćemo sa $\mathcal{L}(X)$ označavati *zakon raspodele* za X i definisati ga sa

$$\mathcal{L}(A) = P(\omega \in \Omega : X(\omega) \in A), \forall A \in \mathcal{G}.$$

Neka je Γ Banahov prostor i $\mathcal{B}(\Gamma)$ Borelova σ-algebra na Γ. Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ prostor verovatnoća i $[0,T] \subset \mathbb{R}$. *Stohastički proces* $\{X(t)\}_{t\in[0,T]}$ predstavlja familiju slučajnih promenljivih sa vrednostima u Γ. Drugim rečima o njemu možemo misliti kao o kolekciji slučajnih promeljivih indeksiranih vremenom $t \in [0,T]$. Najčešće se obeležava sa $X(t,\omega), X_t(\omega), X(t)(\omega)$ ili najkraće sa $X(t)$. Kada fiksiramo $t \in [0,T]$, $X(t,\cdot)$ je slučajna promenljiva. A kada fiksiramo $\omega \in \Omega$, proces $X(\cdot,\omega)$ nazivamo *trajektorija*.

Rastući niz sigma algebri na prostoru verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ nazivamo *filtracija* i obeležavamo sa $\{\mathcal{F}_t\}$ za $t \in [0,T]$. Uređena četvorka $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P)$ se naziva *stohastička baza*. Ako bi se vratili na eksperiment koji smo spomenuli malopre, filtracija bi predstavljala skup dostupnih informacija do trenutka t.

U literaturi se za $X(t,\cdot) \in \mathcal{F}_t$ često kaže i da je $X(t,\cdot)$ $\mathcal{F}_t$-*merljivo* preslikavanje ili da je $X(t,\cdot)$ $\mathcal{F}_t$-*merljiva* slučajna promenljiva. Kada $X(t,\cdot) \in \mathcal{F}_t$ za svako $t \in [0,T]$, kažemo da je stohastički proces X *adaptiran* filtraciji $\{\mathcal{F}_t\}$. Proces X je *progresivno merljiv* u odnosu na filtraciju $\{\mathcal{F}_t\}$ ako je za svako $t \in [0,T]$, preslikavanje $[0,t] \times \Omega \to \Gamma$ dato sa $(s,\omega) \to X(s,\omega)$, $\mathcal{B}[0,t] \otimes \mathcal{F}_t$-merljivo. Napomenimo da u opštem slučaju funkcija $X(\cdot,\cdot)$ ne mora biti $\mathcal{B}[0,t] \otimes \mathcal{F}_t$-merljiva. Zbog toga se progresivna merljivost često pretpostavlja u samim definicijama rešenja stohastičkih parcijalnih diferencijalnih jednačina (SPDJ).

Nenegativna slučajna promenljiva τ definisana na $(\Omega, \mathcal{F})$ se naziva $\mathcal{F}_t$-*vreme zaustavljanja* ako za svako $t \geq 0$ važi

$$\{\omega \in \Omega : \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Neka je dat stohastički proces X sa vrednostima u Banahovom prostoru Γ i neka je $\|\cdot\|$ norma tog prostora. Ako je $E[\| X(t) \|] < \infty$ ili $E[\| X(t) \|^2] < \infty$ za svako t, onda kažemo da je proces X *integrabilan* ili *kvadratno integrabilan*, respektivno, gde je E oznaka za očekivanje. A proces $X(t), t \in [0,T]$ sa vrednostima u Γ, koji je integrabilan i adaptiran filtraciji $\{\mathcal{F}_t\}$, naziva se *martingal* ako je za proizvoljne $t,s \in [0,T]$, $t \geq s$ zadovoljeno

$$E[X(t)|\mathcal{F}_s] = X(s).$$

Standardno Braunovo kretanje $B(t)$ je stohastički proces koji ima neprekidne trajektorije i nezavisne priraštaje, $B(0) = 0$ i za $t \geq s \geq 0$ važi

$$\mathcal{L}(B(t) - B(s)) = \mathcal{N}(0, t-s).$$

Lako se može proveriti da je proces koji zadovoljava ove osobine martingal. Sa svojim mnogobrojnim modifikacijama poput belog šuma, Braunovog mosta, cilindričnog Braunovog kretanja itd., Braunovo kretanje je verovatno najvažniji stohastički proces do sada otkriven. Treba napomenuti da se u delu literature ovaj proces naziva *Vinerov proces* što bi bilo tehnički ispravnije. Braunovo kretanje se vezuje za proces koji je otkrio Robert Braun, dok se Vinerov proces odnosi na proces koji ga modelira. Ali kako se u literaturi vezanoj za ovu disertaciju češće koristi naziv Braunovo kretanje, to ćemo i mi ovde raditi.

Braunovo kretanje je posebno značajno u ovoj disertaciji jer se pomoću njega konstruišu Itovi stohastički integrali[2] oblika $\int_0^t \Phi(s)dB(s)$. Generalno, stohastički procesi koji imaju vrednosti u nekim Hilbertovim prostorima H i koji su rešenja stohastičkih problema koje ćemo istražiti ovde su procesi dati u sledećem obliku

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \phi(s)ds + \int_0^t \Phi(s)dB(s),\, t \in [0,T].$$

U dokazima teorema da bi dobili neke neophodne procene vezane za ovakve procese, često će nam trebati njihove određene transformacije. Umesto računanja stohastičkih integrala po definiciji, da bi dobili tražene transformacije koristićemo *Itovu formulu* koju sada navodimo. Neka $\langle \cdot,\cdot \rangle$ predstavlja skalarni proizvod u Hilbertovom prostoru H, neka je data funkcija $F : [0,T] \times H \to \mathbb{R}$ takva da su njeni parcijalni izvodi F_t, F_x, F_{xx} uniformno neprekidne funkcije na ograničenim podskupovima od $[0,T] \times H$. Za proces $X(t)$, za svako $t \in [0,T]$ važi

$$\begin{aligned} F(t,X(t)) &= F(0,X(0)) + \int_0^t \langle F_x(s,X(s)), \Phi(s) \rangle dB(s) \\ &+ \int_0^t \Big[F_t(s,X(s)) + \langle F_x(s,X(s)), \phi(s) \rangle + \frac{1}{2} F_{xx}(s,X(s)) \Phi^2(s) \Big] ds. \end{aligned}$$

Kod problema vezanih za determinističke PDJ možemo govoriti o rešenjima u *jakom* i *slabom PDJ smislu*, tj. rešenja su definisana u svakoj tački ili su data nekom integralnom relacijom, respektivno. Za razliku od njih kada proučavamo SPDJ, rešenja možemo posmatrati takođe i u probabilističkom smislu kao jaka i slaba. Ako unapred definišemo stohastičku bazu i Braunovo kretanje na osnovu kog izračunavamo stohastičke integrale, onda govorimo o *probabilistički jakim* rešenjima. Ako stohastičku bazu i Braunovo kretanje ne definišemo unapred, već oni budu dati kao deo rešenja, onda govorimo o *probabilistički slabim* rešenjima. Često se u literaturi probabilistički jaka i slaba rešenja označavaju kao *rešenja po trajektorijama* i *martingalna rešenja*, respektivno. Pa tako kada se na primer proučavaju jaka martingalna rešenja, misli se na jaka rešenja u PDJ smislu koja su slaba u probabilističkom smislu.

Napomena 1.2.1 *U ovoj disertaciji za izvode funkcija ekvivalentno ćemo koristiti oznake u_x, $\partial_x u$ i $\frac{\partial u}{\partial x}$, dok ćemo za Braunovo kretanje u trenutku t u nastavku umesto $B(t)$ koristiti oznaku B_t. A oznaka $\frac{dB}{dt}$ će biti vezana za beli šum.*

[2] Pored Itovih integrala $\int_0^t \Phi(s)dB(s)$ treba napomenuti da postoje i Stratonovičevi integrali $\int_0^t \Phi(s) \circ dB(s)$ kojima se ovde nećemo baviti, ali koji se takođe koriste u literaturi o SPDJ.

1.3 Prostori funkcija

Ovde ćemo definisati prostore funkcija koji su relevantni za stohastička rešenja data u Glavi 3 i Glavi 4. Za više informacija o Soboljevim i Bohnerovim prostorima koji su dati ovde konsultovati [1], [29], [86].

Za $m \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq \infty$, $G \subset \mathbb{R}$, *prostore Soboljeva* definišemo sa

$$W^{m,p}(G) := \{f \in L^p(G) \,|\, \partial_x^\alpha \in L^p(G),\, |\alpha| \leq m\}.$$

Normu prostora $W^{m,p}(G)$ definišemo sa

$$\|f\|_{m,p} = \left(\sum_{\alpha \leq m} \|\partial_x^\alpha f\|_{L^p}^p \right)^{1/p},$$

gde $\|\cdot\|_{L^p}$ označava normu prostora $L^p(G)$. Kada je $p = 2$, prostore $W^{m,2}(G)$ označavamo sa $H^m(G)$, a njihovu normu i skalarni proizvod sa $\|\cdot\|_m$ i $\langle\cdot,\cdot\rangle_m$, respektivno. Pri tome je skalarni proizvod dat sa

$$\langle f, g\rangle_m = \sum_{\alpha \leq m} \langle \partial_x^\alpha f, \partial_x^\alpha g\rangle_0 = \int_G \partial_x^\alpha f(x) \cdot \partial_x^\alpha g(x) dx,$$

gde je $\langle\cdot,\cdot\rangle_0$ skalarni proizvod u prostoru $H^0(G) = L^2(G)$.

Pretpostavimo da posmatramo neku realnu funkciju $v(x,t) : G \times [0,T] \to \mathbb{R}$, gde je $G \subset \mathbb{R}$. O realnoj funkciji $v(x,t)$ možemo razmišljati i na drugi način. Za $v(x,t)$ preslikavanje $v(t) : x \mapsto v(x,t)$ je element nekog prostora funkcija, a funkcija $t \mapsto v(t)$ preslikava interval $[0,T]$ u taj prostor funkcija. Kompozicijom ove dve funkcije, realnu funkciju $v(x,t)$ možemo posmatrati kao funkciju sa vrednostima u nekom prostoru funkcija. Ideja je shvatati funkciju vremena i prostora kao kolekciju funkcija prostora parametrizovanu vremenom. Tako umesto funkcije $v(x,t)$ imamo funkciju $v(t)(x)$. Prostori funkcija koji preslikavaju interval $[0,T]$ u neki Banahov prostor se nazivaju *Bohnerovi prostori*. Najvažniji Bohnerovi prostori su:

1. *Prostor* $L^p(0,T;X)$ predstavlja prostor svih merljivih funkcija $u : [0,T] \to X$ za koje važi

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt \right)^{1/p} < \infty,\ 1 \leq p < \infty,$$

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;X)} = \operatorname*{ess\,sup}_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_X < \infty.$$

2. *Prostor* $C([0,T];X)$ predstavlja prostor funkcija koje su jako neprekidne, tj. funkcija $u:[0,T]\to X$ za koje važi

$$\lim_{t\to t_0}\|u(t)-u(t_0)\|_X=0.$$

   Norma ovog prostora je

$$\|u\|_{C([0,T];X)}=\sup_{0\le t\le T}\|u(t)\|_X.$$

3. *Prostor* $C_w([0,T];X)$ predstavlja prostor funkcija $u:[0,T]\to X$ koje su slabo neprekidne, tj. funkcija kod kojih je za svako $f\in X^*$, skalarna funkcija

$$[0,T]\ni t\mapsto\langle f,u(t)\rangle_{X^*\times X},$$

   neprekidna na $[0,T]$, gde X^* predstavlja dual prostora X. Ovi prostori se često spominju i kao prostori $C([0,T];X)$ sa slabom topologijom.

4. *Prostor* $W^{\alpha,p}(0,T;X)$, $\alpha\in(0,1)$, $1\le p<\infty$ se definiše kao prostor funkcija $u\in L^p(0,T;X)$ za koje važi

$$\|u\|_{W^{\alpha,p}(0,T;X)}=\|u\|_{L^p(0,T;X)}+\int_0^T\int_0^T\frac{\|\,u(t)-u(s)\,\|_X^p}{|t-s|^{1+p\alpha}}dtds<\infty.$$

U stohastičkim PDJ koriste se stohastička uopštenja Bohnerovih prostora, pa tako nailazimo na prostore poput $L^k(\Omega;C([0,T];X))$ ili $L^k(\Omega;L^p(0,T;X))$. Njihove opšte definicije su

$$u\in L^k(\Omega;C([0,T];X))\ \Leftrightarrow\ E(\|u\|^k_{C([0,T];X)})<\infty\Leftrightarrow E(\sup_{0\le t\le T}\|u\|_X^k)<\infty,$$

$$u\in L^k(\Omega;L^p(0,T;X))\Leftrightarrow E(\|U\|^k_{L^p(0,T;X)})<\infty.$$

Napomenimo da su dve prethodno navedene funkcije merljive u odnosu na Borelovu σ-algebru generisanu topologijom prostora $C([0,T];X)$ i $L^p(0,T;X)$, respektivno.

U ovoj disertaciji u Glavi 3 umesto $u(x,t,\omega)$ posmatramo $u(t,\omega)(x)$, a neke detaljnije raspisane definicije prostora vezanih za Glavu 3 su:

$$\begin{aligned}(s_0,r_0)\in L^4(\Omega;H^m)&\Leftrightarrow E\left(\|(s_0,r_0)\|_m^4\right)<\infty\\ &\Leftrightarrow E\left(\left(\sum_{\alpha\le m}\int_{\mathbb{R}}\|\partial_x^\alpha s_0\|_{L^2}^2+\|\partial_x^\alpha r_0\|_{L^2}^2\,dx\right)^2\right)<\infty,\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&(s,r) \in L^4(\Omega; C([0,T]; H^m)) \\
&\qquad \Leftrightarrow E\left(\left\|(s,r)\right\|^4_{C([0,T];H^m)}\right) < \infty \\
&\qquad \Leftrightarrow E\left(\sup_{0\le t\le T} \left\|(s,r)\right\|^4_m\right) < \infty \\
&\qquad \Leftrightarrow E\left(\sup_{0\le t\le T}\left(\sum_{\alpha\le m}\int_{\mathbb{R}} \|\partial_x^\alpha s\|^2_{L^2} + \|\partial_x^\alpha r\|^2_{L^2}\,dx\right)^2\right) < \infty, \\
&(s,r) \in L^4(\Omega; L^2(0,T; H^{m+1})) \\
&\qquad \Leftrightarrow E\left(\left\|(s,r)\right\|^4_{L^2(0,T;H^{m+1})}\right) < \infty \\
&\qquad \Leftrightarrow E\left(\left(\int_0^T \left\|(s,r)\right\|^2_{m+1} dt\right)^2\right) < \infty \\
&\Leftrightarrow E\left(\left(\int_0^T\left(\sum_{\alpha\le m+1}\int_{\mathbb{R}} \|\partial_x^\alpha s\|^2_{L^2} + \|\partial_x^\alpha r\|^2_{L^2}\,dx\right)^2 dt\right)^2\right) < \infty.
\end{aligned}
$$

Glava 2

Deterministički sistemi

U literaturi postoji malo knjiga koje sadrže veliki broj različitih PDJ na jednom mestu. Verovatno najpoznatija knjiga koja sadrži nekoliko hiljada nelinearnih PDJ je [101]. Ako svoju pažnju usmerimo samo ka zakonima održanja, knjiga u kojoj se nalaze najraznovrsniji zakoni održanja je [35]. A ova disertacija verovatno sadrži najveći skup 2x2 sistema zakona održanja u jednoj dimenziji na jednom mestu, za koje su određene razne osobine i elementarna rešenja početnih Rimanovih problema. Za svaki od sistema pronađeni su karakteristični koreni i karakteristični vektori, Rimanove invarijante, provereno je da li su familije zaista nelinearne ili linearno degenerisane, i određene su krive udarnih talasa, razređujućih talasa i kontaktnih diskontinuiteta, sve u zavisnosti od konkretnog sistema. Svi sistemi su dati u Ojlerovim koordinatama. Pošto se u teoriji vezanoj za postojanje i jedinstvenost nelinearnih hiperboličkih sistema zakona održanja često sreću zahtevi striktne hiperboličnosti i da je svaka familija ili zaista nelinearna ili linearno degenerisana (videti na primer [12], [22], [23]), i ovde se bavimo samo takvim sistemima. Kada hiperboličnost više nije striktna, slični rezultati su dostupni samo za specijalne sisteme. Svi sistemi predstavljeni u ovoj glavi su striktno hiperbolični pod određenim uslovima. I imamo primere gde su obe familije zaista nelinearne, primere gde je jedna familija zaista nelinearna i jedna linearno degenerisana, i primer gde su obe familije linearno degenerisane. Na osnovu toga će se razlikovati i tip elementarnih rešenja.

Sistemi kojima ćemo se baviti ovde su obeleženi rimskim brojevima od (I) do (IX) i dati su u ostatku ove glave. Pošto će sistem (I) biti proučavan više od ostalih u ovoj disertaciji, njega smo izdvojili posebno u prvom odeljku ove glave. Takođe, redosled upoznavanja sa svim spomenutim sistemima je napravljen na osnovu strukture elementarnih rešenja njihovih početnih Rimanovih problema. Prvo ćemo se upoznati sa šest sistema koji imaju jednu zaista nelinearnu familiju i jednu linearno degenerisanu familiju (sistemi (I), (II), (III), (IV), (V), (VI)). Rešenja ovih Rimanovih problema se sastoje iz kombinacije udarnog ili razređujućeg talasa, i kontaktnog diskontinuiteta. Potom dolaze na red dva sistema koji imaju obe zaista nelinearne familije (sistemi (VII), $(VIII)$) čija rešenja ne sadrže kontaktne diskontinuitete. Na kraju pominjemo sistem (IX) koji ima obe linearno degenerisane familije. Rimanov problem za sistem (IX) je primer problema čija rešenja čine samo kontaktni diskontinuiteti.

Po [35] najvažniji zakoni održanja su zakoni održanja mase, količine kretanja, momenta količine kretanja, energije i entropije.[1] Sistemi (III)-(VI) iz hromatografije i elektroforeze se sastoje iz dva zakona održanja mase; sistem (VII) iz teorije izentropne gasne dinamike čine jednačina mase i jednačina količine kretanja; za sisteme (I), (II), $(VIII)$ iz teorije elastičnosti, i sistem (IX) iz teorije elektrodinamike to nije eksplicitno navedeno u literaturi koju ovde koristimo. U ovoj disertaciji proučavaćemo nelinearne 2x2 sisteme zakona održanja u jednoj dimenziji koji su u konzervativnom obliku dati sa

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} F_{11}(u,v) \\ F_{12}(u,v) \end{bmatrix}_x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{2.1}$$

Pri tome su $u(x,t)$, $v(x,t)$ promenljive sistema, $x \in \mathbb{R}$, $t \in [0,T]$ i $F = (F_{11}, F_{12})^T$ predstavlja fluks, gde $F_{1i} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $i = 1,2$. Isti sistem u kvazilinearnom obliku se zapisuje sa

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}_t + A(u,v) \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}_x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{2.2}$$

Matricu $A(u,v) := DF(u,v)$ nazivaćemo *matrica sistema*. Primetimo da se svaki sistem dat u konzervativnom obliku (2.1) može zapisati u kvazilinearnom obliku (2.2), ali da obrnuto ne važi (pod uslovom da se matrica sistema može odrediti). Pored ova dva oblika sistema, zbog primena u narednoj glavi, značajan nam je i *dijagonalni oblik* sistema zakona održanja dat sa

$$\begin{bmatrix} s \\ r \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} \lambda_1(s,r) & 0 \\ 0 & \lambda_2(s,r) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ r \end{bmatrix}_x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{2.3}$$

Ovde će s, r predstavljati Rimanove invarijante, λ_1, λ_2 karakteristične korene sistema date preko Rimanovih invarijanti, a dijagonalnu simetričnu matricu ovog sistema ćemo kasnije ponovo obeležavati sa A.

Sada ćemo se bez ulaska u detalje podsetiti nekih pojmova poput karakterističnih korena, karakterističnih vektora, Rimanovih invarijanti i osnovnih pojmova koji se tiču elementarnih rešenja Rimanovih problema. Pojmovi koji nisu dati ovde biće dati za svaki od sistema (I)-(IX) konkretno u Odeljcima 2.1-2.2 kasnije.

[1] eng. Conservation laws of mass, linear momentum, angular momentum, energy and entropy. Napomenimo i da u opštem slučaju za entropiju ne važi zakon održanja već zakon balansa.

• Karakteristične korene dobijamo rešavajući jednačinu $|\lambda I - A| = 0$ po λ, gde I predstavlja jediničnu matricu. Ako su karakteristični koreni realni, kažemo da je sistem zakona održanja *hiperboličan*. Kada je matrica sistema simetrična, njeni karakteristični koreni su realni, pa je takav sistem uvek hiperboličan. Ako su karakteristični koreni realni i različiti, kažemo da je sistem zakona održanja *striktno hiperboličan*. U tom slučaju običaj je uzimati $\lambda_1 < \lambda_2$.

• Desne karakteristične vektore dobijamo rešavajući sistem $(\lambda I - A)\, z = 0$, gde $z = (z_1, z_2)^T$ predstavlja komponente karakterističnog vektora. Leve karakteristične vektore dobijamo rešavajući $(\lambda I - A^T)\, z = 0$.

• Da bi od početnog sistema u konzervativnom obliku (2.1) došli do sistema u dijagonalnom obliku (2.3) treba odrediti karakterističnu formu sistema. Ona je u suštini međukorak do dijagonalnog sistema datog preko Rimanovih invarijanti koji ćemo želeti dobiti. Korišćenjem osobine karakterističnih korena $A\, z = \lambda\, z$ i množenjem kvazilinearnog oblika sistema (2.2) sa levim karakterističnim vektorima, dolazimo do *karakteristične forme* sistema. Više detalja o njoj se može pronaći u [107].

• Ako su R_1, R_2 desni karakteristični vektori i $D = (\partial_u, \partial_v)$, *Rimanove invarijante* se dobijaju rešavajući

$$Dr\, R_1 = 0, \text{ za prvu Rimanovu invarijantu,}$$

$$Ds\, R_2 = 0, \text{ za drugu Rimanovu invarijantu.}$$

• Kažemo da je i-ta familija sistema *zaista nelinearna* ako za svako (u, v) važi

$$D\lambda_i\, R_i \neq 0,$$

i *linearno degenerisana* kada za svako (u, v) važi

$$D\lambda_i\, R_i = 0.$$

Kao što smo ranije spominjali, u ovoj glavi ćemo rešavati Rimanov problem koji se sastoji iz početnog sistema u konzervativnom obliku (2.1) i početnih uslova

$$(u, v)(x, 0) = \begin{cases} (u_l, v_l), x < 0, \\ (u_r, v_r), x > 0. \end{cases} \tag{2.4}$$

Početni Rimanovi i Košijevi problemi za 2x2 sisteme pod raznim pretpostavkama su detaljnije proučavani u [39], [40], [116], [117], [118], [119]. Takođe, [120] se temeljno bavi Rimanovim problemima i numeričkim tehnikama njihovog rešavanja.

Kako početni problemi za zakone održanja nemaju jaka rešenja, treba definisati slaba rešenja. Ovde to radimo pomoću teorije distribucija, dok se ista mogu posmatrati i kao mere (videti na primer [38], [45]).

• Funkcija (u,v) je *slabo rešenje* zakona održanja (2.1) ako za sve funkcije $\varphi, \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}\times[0,T])$ važi

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \Big(u\varphi_t + F_1(u,v)\varphi_x \Big)\, dx\, dt = 0,$$
$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \Big(v\phi_t + F_2(u,v)\phi_x \Big)\, dx\, dt = 0.$$

• Funkcija (u,v) je *slabo rešenje* početnog problema (2.1) sa početnim uslovima (u_0,v_0) ako za sve $\varphi, \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}\times[0,T])$ važi

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \Big(u\varphi_t + F_1(u,v)\varphi_x \Big)\, dx\, dt + \int_{\mathbb{R}} u_0\varphi(x,0)\, dx = 0,$$
$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \Big(v\phi_t + F_2(u,v)\phi_x \Big)\, dx\, dt + \int_{\mathbb{R}} v_0\phi(x,0)\, dx = 0.$$

Slaba rešenja Rimanovog problema (2.1), (2.4) kojima se bavimo u ovoj disertaciji čine *kontaktni diskontinuiteti, udarni* i *razređujući talasi* i zajedno ćemo ih nazivati *elementarna rešenja*. Ostalim rešenjima koja se mogu sresti u zakonima održanja se nećemo baviti ovde.

Pri tome su kontaktni diskontinuiteti dati sa

$$(u,v)(x,t) = \begin{cases} (u_l,v_l), x < \lambda t, \\ (u_r,v_r), x > \lambda t, \end{cases} \tag{2.5}$$

udarni talasi sa

$$(u,v)(x,t) = \begin{cases} (u_l,v_l), x < \zeta t, \\ (u_r,v_r), x > \zeta t, \end{cases} \tag{2.6}$$

i razređujući talasi sa

$$(u,v)(x,t) = \begin{cases} (u_l,v_l), & x \le \varsigma((u_l,v_l))t, \\ h(\frac{x}{t}), & \varsigma((u_l,v_l))t \le x \le \varsigma((u_r,v_r))t, \\ (u_r,v_r), & x \ge \varsigma((u_r,v_r))t. \end{cases} \tag{2.7}$$

Iznad λ, ζ i ς predstavljaju brzine kretanja ovih talasa, h neku funkciju koja zavisi od x/t, a u_l, v_l, u_r, v_r su konstante iz početnih uslova (2.4). Napomenimo da je λ karakteristična brzina, tj. karakteristični koren odgovarajuće familije, dok ζ to ne mora biti. Za razliku od brzina kontaktnog diskontinuiteta i udarnog talasa, brzina razređujućih talasa se kao pojam ređe sreće u literaturi (videti na primer [64], [83]).

Kako ovde proučavamo Rimanove probleme za 2x2 sisteme, rešenja sa kojima ćemo se susresti sastojaće se ili od kombinacije dva talasa (u zavisnosti od zaista nelinearnosti i linearne degenerisanosti konkretnih familija) ili od jednog talasa u slučaju specijalno izabranih vrednosti za početne uslove (2.4). Ako je i-ta familija sistema zaista nelinearna, onda će i-ti talasi biti udarni talasi oblika (2.6) ili razređujući talasi oblika (2.7). Ako je i-ta familija sistema linearno degenerisana, i-ti talasi će biti kontaktni diskontinuiteti oblika (2.5).

Da bi odredili elementarna rešenja Rimanovog problema (2.1), (2.4) treba odrediti *krive* kontaktnih diskontinuiteta, udarnih i razređujućih talasa. Pri tome ćemo za odbacivanje delova kriva udarnih talasa koristiti Laksov kriterijum. A kada znamo ove krive, njihovom zamenom u (2.5), (2.6), (2.7) dolazimo do elementarnih rešenja Rimanovih problema.

Ako krive kontaktnih diskontinuiteta, udarnih i razređujućih talasa predstavimo u (u,v) ravni, dobijamo takozvanu *faznu ravan* koja je specifična samo za 2x2 probleme. U njoj vidimo od kakvih se rešenja sastoji Rimanov problem u konkretnim oblastima. A zato što će nam Rimanove invarijante (r,s) biti neophodne u Glavi 3, crtaćemo i "fazne ravni" date pomoću (r,s), na kojima se još lakše vidi iz čega se rešenje konkretnog problema sastoji. U toj ravni krive razređujućih talasa će biti paralelne sa koordinatnim osama.

2.1 Sistem is teorije elastičnosti: (I)

Kada govorimo o sistemima iz teorije elastičnosti u ovoj disertaciji, mislimo na sisteme date u obliku:

$$u_t + (\phi(u,v)\,u)_x = 0, \tag{2.8}$$

$$v_t + (\phi(u,v)\,v)_x = 0. \tag{2.9}$$

Ovakvi sistemi se u teoriji elastičnosti koriste prilikom modeliranja prostiranja longitudinalnih i transverzalnih talasa duž istegnute elastične žice koja se kreće u ravni. Više detalja se može pronaći u [70], gde je u potpunosti rešen Rimanov problem za ovakve sisteme.

Specijalni slučaj sistema (2.8)-(2.9) kojim se bavimo u ovom odeljku može se pronaći u [35], [81], [84], [85]. Pored teorije elastičnosti, sam sistem se danas najčešće pojavljuje u oblasti magnetne hidrodinamike,[2] gde služi za modeliranje interakcije između udarnih i Alfvenovih talasa.[3] A njegovo prvo pominjanje je bilo u [31], gde je korišćen za ispitivanje nekih osobina solarnih vetrova. U ovoj disertaciji ćemo ga označavati sa *sistem* (I).

Sistem (I) u konzervativnom obliku je dat sa

$$u_t + \left((u^2+v^2)\,u\right)_x = 0, \tag{2.10}$$

$$v_t + \left((u^2+v^2)\,v\right)_x = 0. \tag{2.11}$$

Ovaj oblik dobijamo kada u opšti sistem (2.8)-(2.9) zamenimo $\phi(u,v) = u^2+v^2$. Različite stvari vezane za sistem (2.10)-(2.11) i neka njegova uopštenja su istraženi u [53], [54], [55], [56], [57], [58], [83], [99], [104].

Sistem (I) u kvazilinearnom obliku je dat sa

$$u_t + (3u^2+v^2)\,u_x + 2uvv_x = 0, \tag{2.12}$$

$$v_t + 2uvu_x + (3v^2+u^2)\,v_x = 0. \tag{2.13}$$

Napomena 2.1.1 *U slučaju kada u Rimanovom problemu uzimamo $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, pored elementarnih može doći do pojave drugih rešenja poput prekompresibilnih udarnih talasa ili rešenja koja ne zadovoljavaju Laksov kriterijum (videti detaljnije [53], [54], [84]).*

Napomena 2.1.2 *U teoriji elastičnosti vrednost $(u,v) = (0,0)$ je nedopustiva, dok je u oblasti magnetne hidrodinamike dopustiva (videti [57]).*

[2] Disciplina koja proučava magnetne osobine i ponašanje fluida koji provode struju.

[3] Alfvenov talas se javlja u fizici plazme kao rezultat interakcije između magnetnog polja i električnih struja, što uzrokuje oscilacije jona.

Da bi izbegli nepotrebne komplikacije koje nisu od značaja za ovu disertaciju, ovde pretpostavljamo da su $u \geq 0$, $v \geq 0$, $(u,v) \neq (0,0)$.

Zapisom kvazilinearnog oblika sistema (I) u matričnoj formi (2.2) vidimo da je matrica sistema data sa

$$A = \begin{bmatrix} 3u^2+v^2 & 2uv \\ 2uv & u^2+3v^2 \end{bmatrix}.$$

Primetimo da je ova matrica simetrična. Zapravo, pored sistema (IX) ovo je jedini sistem u ovoj disertaciji koji u kvazilinearnom obliku, preko početnih promenljivih (u,v), ima matricu sistema koja je simetrična. Sada ćemo odrediti brojne veličine važne za sistem (I) i rešiti početni problem (2.10), (2.11) sa Rimanovim početnim uslovima (2.4).

- **Karakteristični koreni**

Karakteristični koreni se dobijaju rešavajući kvadratnu jednačinu po λ:

$$|\lambda I - A| = (\lambda - 3u^2 - v^2)\,(\lambda - 3v^2 - u^2) - 4u^2v^2 = 0,$$

odnosno

$$\lambda^2 - 4\lambda(v^2+u^2) + 3(u^2+v^2)^2 = 0.$$

Odatle sledi da su karakteristični koreni dati sa

$$\lambda_1 = u^2+v^2,\ \lambda_2 = 3(u^2+v^2).$$

I vidimo da je sistem (I) uvek striktno hiperboličan za $u \geq 0$, $v \geq 0$, $(u,v) \neq (0,0)$. U slučaju da $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ ovaj sistem nije striktno hiperboličan u tački $(0,0)$.

- **Desni karakteristični vektori**

Desni karakteristični vektor koji odgovara karakterističnom korenu λ_1 se dobija iz

$$(\lambda I - A)\,z = 0,$$

zamenom $\lambda = \lambda_1$ i $z = (z_1, z_2)^T$. Tako dolazimo do

$$\begin{bmatrix} u^2+v^2-3u^2-v^2 & -2uv \\ -2uv & u^2+v^2-3v^2-u^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Odatle dobijamo da je $z_1 = -\frac{v}{u} z_2$, pa je tako desni karakteristični vektor koji odgovara karakterističnom korenu λ_1 dat sa

$$R_1 = \begin{bmatrix} v \\ -u \end{bmatrix}.$$

Desni karakteristični vektor koji odgovara karakterističnom korenu λ_2 se dobija na isti način. Tako dolazimo do

$$\begin{bmatrix} 3u^2+3v^2-3u^2-v^2 & -2uv \\ -2uv & 3u^2+3v^2-3v^2-u^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Odatle dobijamo da je $z_1 = \frac{u}{v} z_2$, pa je tako desni karakteristični vektor koji odgovara karakterističnom korenu λ_2 dat sa

$$R_2 = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}.$$

• **Levi karakteristični vektori**

Matrica sistema A je simetrična, pa su levi karakteristični vektori identični desnim karakterističnim vektorima, tj.

$$L_1 = R_1, L_2 = R_2.$$

• **Karakteristična forma sistema**

Množenjem kvazilinearnog oblika (2.12)-(2.13) pomoću levih karakterističnih vektora i korišćenjem jednakosti koja povezuje karakteristične korene i karakteristične vektore dobijamo

$$\begin{bmatrix} v \\ -u \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}_t + \lambda_1 \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}_x \right) = 0,$$

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}_t + \lambda_2 \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}_x \right) = 0.$$

Daljim sređivanjem dolazimo do

$$v\,u_t - u\,v_t + \lambda_1\,(v\,u_x - u\,v_x) = 0, \tag{2.14}$$

$$u\,u_t + v\,v_t + \lambda_2\,(u\,u_x + v\,v_x) = 0. \tag{2.15}$$

• **Rimanove invarijante**

Prvu Rimanovu invarijantu dobijamo iz $Dr\,R_1 = 0$, odnosno

$$udu = -vdv,$$

iz čega sledi da je

$$r = \frac{u^2+v^2}{2}.$$

Drugu Rimanovu invarijantu dobijamo iz $Ds\,R_2 = 0$, odnosno

$$\frac{du}{u} = \frac{dv}{v},$$

iz čega sledi da je

$$s = \frac{u}{v}.$$

Izgled karakterističnih korena preko Rimanovih invarijanti: $\lambda_1 = 2r$, $\lambda_2 = 6r$.

Množenjem (2.14) sa $\frac{1}{v^2}$ i (2.15) sa 1, dolazimo do dijagonalnog sistema (2.3) datog preko Rimanovih invarijanti. Napomenimo da se izrazi kojima množimo karakterističnu formu sistema, ovde $\frac{1}{v^2}$ i 1, u nekim knjigama nazivaju *integracioni faktori*.

• **Zaista nelinearnost**

Kako je $D\lambda_1\, R_1 = 0$, prva familija je linearno degenerisana.

Sa druge strane, $D\lambda_2\, R_2 = 6u^2 + 6v^2 \neq 0$, pa je druga familija zaista nelinearna.

• **Određivanje elementarnih rešenja**

Kako je prva familija linearno degenerisana, prvi talasi će biti kontaktni diskontinuiteti. Krivu kontaktnog diskontinuiteta odredićemo iz

$$\lambda_1((u_l, v_l)) = \lambda_1((u_r, v_r)).$$

Korišćenjem zapisa[4] $(u, v) := (u_r, v_r)$, dobijamo da je kriva kontaktnog diskontinuiteta za prvu familiju data sa

$$CD_1 : v = \sqrt{u_l^2 + v_l^2 - u^2}, \text{ pod uslovom da je } u_l^2 + v_l^2 \geq u^2.$$

Druga familija je zaista nelinearna, pa će ovde elementarna rešenja činiti udarni i razređujući talasi. Opšta kriva iz koje ćemo odrediti krivu razređujućeg talasa druge familije se dobija iz druge Rimanove invarijante s

$$\frac{u}{v} = \frac{u_l}{v_l},$$

i data je sa

$$v = \frac{v_l}{u_l} u. \tag{2.16}$$

[4] Ovo ćemo raditi i u narednim odeljcima.

Opšta kriva iz koje ćemo odrediti krivu udarnog talasa druge familije se dobija iz Rankin-Igonoovih uslova koji su ovde dati sa

$$\zeta\,(u_l - u) = (u_l^2 + v_l^2)\,u_l - (u^2 + v^2)\,u,$$

$$\zeta\,(v_l - v) = (u_l^2 + v_l^2)\,v_l - (u^2 + v^2)\,v,$$

gde je ζ *brzina* udarnog talasa. Odatle sledi da je

$$v = \frac{v_l}{u_l}u. \tag{2.17}$$

Kao što možemo primetiti, opšte krive (2.16) razređujućih talasa se poklapaju sa opštim krivama (2.17) udarnih talasa u faznoj ravni. Sistemi koji imaju ovu osobinu se nazivaju *sistemi klase Temple*.[5] Da bi dobili krive razređujućih i udarnih talasa, ostaje još uraditi odbacivanja delova kriva (2.16) i (2.17).

Za razređujući talas druge familije treba da važi

$$\lambda_2((u_l, v_l)) < \lambda_2((u_r, v_r)),$$

pa je kriva razređujućeg talasa druge familije data sa

$$RW_2 :\ v = \frac{v_l}{u_l}u,\ u \geq u_l.$$

Za udarni talas druge familije treba da važi Laksov kriterijum koji je ovde

$$\lambda_1((u_l, v_l)) < \zeta < \lambda_2((u_l, v_l)),\ \lambda_1((u_r, v_r)) < \lambda_2((u_r, v_r)) < \zeta,$$

pa je kriva udarnog talasa druge familije data sa

$$SW_2 :\ v = \frac{v_l}{u_l}u,\ u \leq u_l.$$

Preko Rimanovih invarijanti krive CD_1, SW_2, RW_2 deluju nešto jednostavnije. Date su sa

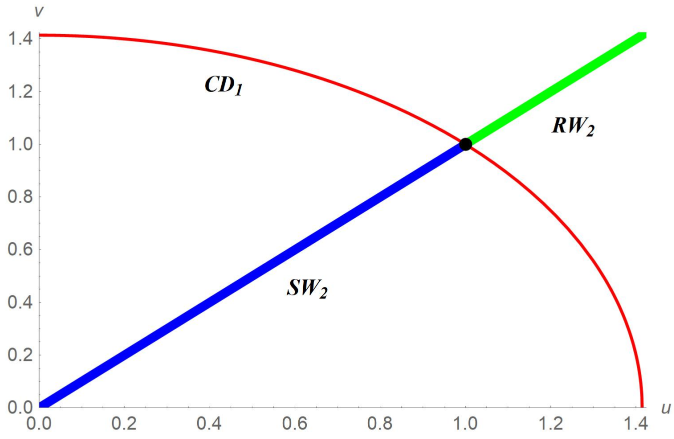
$$CD_1 : r = r_l,$$

$$SW_2 : s = s_l,\ r \leq r_l,$$

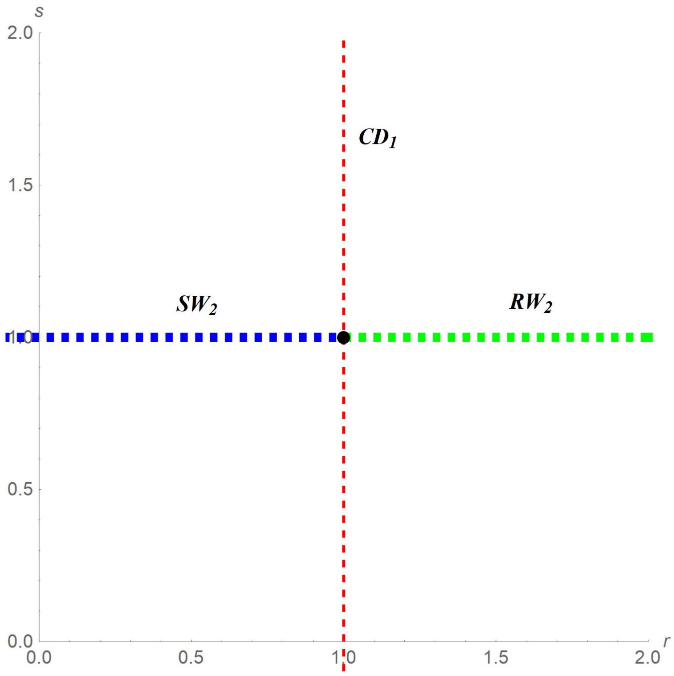
$$RW_2 : s = s_l,\ r \geq r_l.$$

Krive CD_1, SW_2, RW_2 preko početnih promenljivih (u, v) i preko Rimanovih invarijanti (r, s) su date na Slikama 2.1 i 2.2, respektivno.

[5] Blake Temple je američki matematičar po kom nose ime.



Slika 2.1: Fazna ravan (u, v)



Slika 2.2: Fazna ravan (r, s)

2.2 Sistemi (II)-(IX)

U ovom odeljku navodimo ostale sisteme zakona održanja. Na svaki od njih može se primeniti stohastička aproksimacija data u Glavi 3. Međutim, dodatna veza stohastičkih i determinističkih rešenja će biti data samo za sistem (I), dok će način dobijanja slične veze za sisteme (II)-(IX) biti samo naveden u Odeljku 4.2.

2.2.1 Sistem is teorije elastičnosti: (II)

Poput sistema (I) iz Odeljka 2.1, sistem dat u ovom odeljku potiče iz teorije elastičnosti i njegova opštija verzija se može pronaći u [70]. Specijalna verzija data ovde se nalazi u [64]. Sistem dat ispod ćemo označavati sa *sistem* (II).

Sistem (II) u konzervativnom obliku je dat sa

$$u_t + \left(v\,u^2\right)_x = 0, \tag{2.18}$$

$$v_t + \left(u\,v^2\right)_x = 0. \tag{2.19}$$

I pretpostavljaćemo da su $u > 0$, $v > 0$. Primetimo da ovaj sistem dobijamo kada u opšti slučaj (2.8)-(2.9) zamenimo $\phi(u,v) = u\,v$.

Sistem (II) u kvazilinearnom obliku je dat sa

$$u_t + 2uv\,u_x + u^2\,v_x = 0, \tag{2.20}$$

$$v_t + v^2\,u_x + 2uv\,v_x = 0. \tag{2.21}$$

Zapisom kvazilinearnog oblika u matričnoj formi (2.2) vidimo da je matrica sistema data sa

$$A = \begin{bmatrix} 2uv & u^2 \\ v^2 & 2uv \end{bmatrix}.$$

Za razliku od sistema (I), primetimo da matrica sistema (II) nije simetrična. Kao i u prethodnom odeljku u nastavku ćemo odrediti brojne osobine sistema (II) i elementarna rešenja Rimanovog problema (2.18), (2.19), (2.4).

- **Karakteristični koreni**

Karakteristične korene dobijamo rešavajući kvadratnu jednačinu po λ:

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2uv & -u^2 \\ -v^2 & \lambda - 2uv \end{vmatrix} = (\lambda - 2uv)^2 - u^2v^2 = 0,$$

odnosno

$$\lambda^2 - 4uv\,\lambda + 3u^2v^2 = 0.$$

Odatle sledi da su karakteristični koreni

$$\lambda_1 = uv,\ \lambda_2 = 3uv,$$

iz čega vidimo da je sistem (II) uvek striktno hiperboličan za $u > 0$, $v > 0$.

• **Desni karakteristični vektori**

Desni karakteristični vektor koji odgovara karakterističnom korenu λ_1 se dobija iz

$$\begin{bmatrix} -uv & -u^2 \\ -v^2 & -uv \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

odakle dobijamo da je $z_1 = -\frac{u}{v} z_2$. Dakle, desni karakteristični vektor koji odgovara karakterističnom korenu λ_1 je

$$R_1 = \begin{bmatrix} -\frac{u}{v} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Desni karakteristični vektor koji odgovara karakterističnom korenu λ_2 se dobija iz

$$\begin{bmatrix} uv & -u^2 \\ -v^2 & uv \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

odakle dobijamo da je $z_1 = \frac{u}{v} z_2$. Dakle, desni karakteristični vektor koji odgovara karakterističnom korenu λ_2 je

$$R_2 = \begin{bmatrix} \frac{u}{v} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

• **Levi karakteristični vektori**

Levi karakteristični vektor koji odgovara karakterističnom korenu λ_1 dobijamo pomoću

$$\begin{bmatrix} -uv & -v^2 \\ -u^2 & -uv \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Tako dolazimo do $z_1 = -\frac{v}{u} z_2$, pa je tako levi karakteristični vektor koji odgovara karakterističnom korenu λ_1 dat sa

$$L_1 = \begin{bmatrix} -\frac{v}{u} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Levi karakteristični vektor koji odgovara karakterističnom korenu λ_2 dobijamo pomoću

$$\begin{bmatrix} uv & -v^2 \\ -u^2 & uv \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Tako dolazimo do $z_1 = \frac{v}{u} z_2$, pa je tako levi karakteristični vektor koji odgovara karakterističnom korenu λ_2 dat sa

$$L_2 = \begin{bmatrix} \frac{v}{u} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

• **Karakteristična forma sistema**

Na isti način kao u prethodnom odeljku, množenjem kvazilinearnog oblika sistema (2.20)-(2.21) pomoću levih karakterističnih vektora i korišćenjem osobine karakterističnih korena i karakterističnih vektora dobijamo

$$\begin{bmatrix} -\frac{v}{u} \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}_t + \lambda_1 \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}_x \right) = 0,$$

$$\begin{bmatrix} \frac{v}{u} \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}_t + \lambda_2 \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}_x \right) = 0.$$

Daljim sređivanjem dolazimo do

$$-\frac{v}{u} u_t + v_t + \lambda_1 \left(-\frac{v}{u} u_x + v_x\right) = 0, \tag{2.22}$$

$$\frac{v}{u} u_t + v_t + \lambda_2 \left(\frac{v}{u} u_x + v_x\right) = 0. \tag{2.23}$$

• **Rimanove invarijante**

Prvu Rimanovu invarijantu dobijamo iz $Dr R_1 = 0$, odnosno

$$-\frac{du}{u} = \frac{dv}{v},$$

iz čega sledi da je

$$r = uv.$$

Drugu Rimanovu invarijantu dobijamo iz $Ds R_2 = 0$, odnosno

$$\frac{du}{u} = \frac{dv}{v},$$

iz čega sledi da je

$$s = \frac{u}{v}.$$

Izgled karakterističnih korena preko Rimanovih invarijanti: $\lambda_1 = r$, $\lambda_2 = 3r$.

Množenjem (2.22) sa $-\frac{u}{v^2}$ i (2.23) sa u, dolazimo do dijagonalnog sistema (2.3) datog preko Rimanovih invarijanti.

• Zaista nelinearnost

Kako je $D\lambda_1\, R_1 = 0$, prva familija je linearno degenerisana.

Sa druge strane, $D\lambda_2\, R_2 = 6u \neq 0$, pa je druga familija zaista nelinearna.

• Određivanje elementarnih rešenja

Kako je prva familija linearno degenerisana, prvi talasi će biti kontaktni diskontinuiteti. Krive kontaktnih diskontinuiteta odredićemo iz

$$\lambda_1((u_l, v_l)) = \lambda_1((u_r, v_r)),$$

gde ćemo kao i u prethodnom odeljku prilikom zapisa koristiti $(u,v) := (u_r, v_r)$. Tako dobijamo da je kriva kontaktnog diskontinuiteta za prvu familiju data sa

$$CD_1 : \; v = \frac{u_l\, v_l}{u}.$$

Druga familija je zaista nelinearna, pa će ovde elementarna rešenja činiti udarni i razređujući talasi. Opšta kriva iz koje ćemo odrediti krivu razređujućeg talasa druge familije se dobija iz druge Rimanove invarijante s

$$\frac{u}{v} = \frac{u_l}{v_l},$$

i data je sa

$$v = \frac{v_l}{u_l} u. \tag{2.24}$$

Opšta kriva iz koje ćemo odrediti krivu udarnog talasa druge familije se dobija iz Rankin-Igonoovih uslova koji su ovde dati sa

$$\zeta\,(u_l - u) = v_l u_l^2 - v u^2,$$

$$\zeta\,(v_l - v) = u_l v_l^2 - u v^2.$$

Odatle sledi da je

$$v = \frac{v_l}{u_l} u. \tag{2.25}$$

Ovo je ponovo sistem klase Temple, tj. opšte krive razređujućih talasa se poklapaju sa opštim krivama udarnih talasa. Sada treba uraditi odbacivanje delova kriva (2.24) i (2.25).

Za razređujući talas druge familije treba da važi

$$\lambda_2((u_l,v_l)) < \lambda_2((u_r,v_r)),$$

pa je ovde kriva razređujućeg talasa druge familije data sa

$$RW_2 : \; v = \frac{v_l}{u_l}u, \; u \geq u_l.$$

Sa druge strane, za krivu (2.25) treba da važi Laksov kriterijum koji je ovde

$$\lambda_1((u_l,v_l)) < \zeta < \lambda_2((u_l,v_l)), \; \lambda_1((u_r,v_r)) < \lambda_2((u_r,v_r)) < \zeta.$$

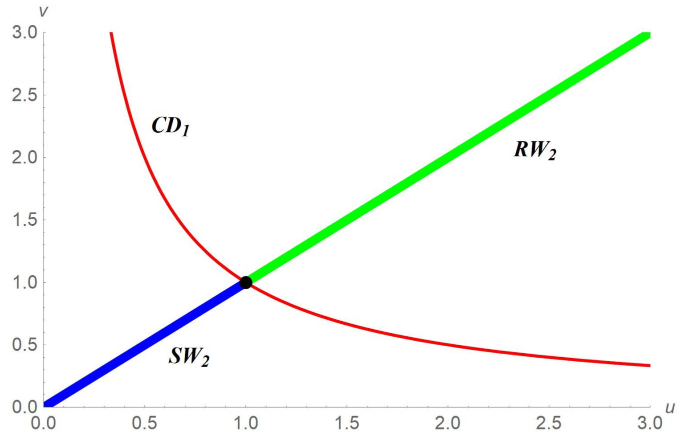
Na osnovu njega kriva udarnog talasa druge familije je data sa

$$SW_2 : \; v = \frac{v_l}{u_l}u, \; u \leq u_l.$$

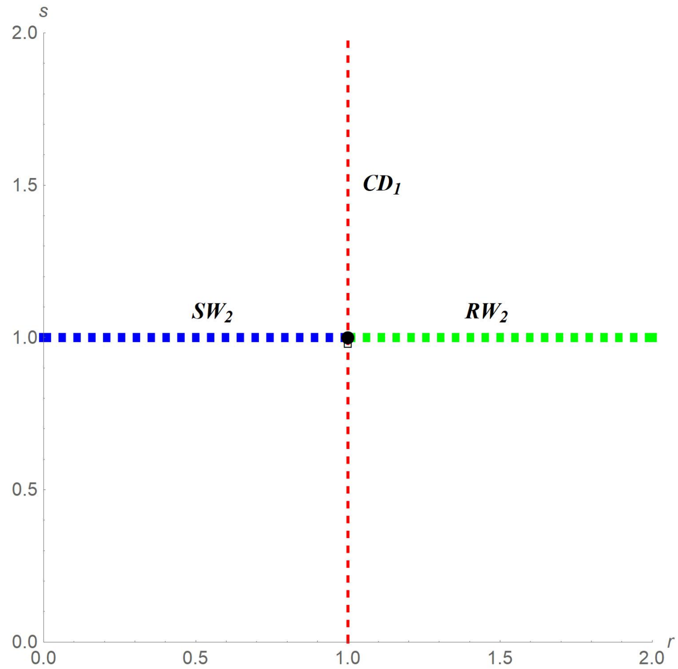
Preko Rimanovih invarijanti krive kontaktnih diskontinuiteta, razređujućih i udarnih talasa CD_1, RW_2, SW_2 su date sa

$$CD_1 : r = r_l,$$
$$RW_2 : s = s_l, \; r \geq r_l,$$
$$SW_2 : s = s_l, \; r \leq r_l.$$

Krive CD_1, RW_2, SW_2 preko početnih promenljivih (u,v) i preko Rimanovih invarijanti (r,s) su date na Slikama 2.3 i 2.4, respektivno.



Slika 2.3: Fazna ravan (u, v)



Slika 2.4: Fazna ravan (r, s)

2.2.2 Sistem iz teorije hromatografije: (*III*)

Hromatografija je hemijski proces koji za cilj ima razdvajanje mešavine na njene hemijske komponente. Samim tim ima primene u raznim oblastima poput biohemije, forenzičkih nauka, naftne industrije, prehrambene industrije itd. Generalno, sastoji se iz dve faze: stacionarne faze i mobilne faze. U ravnoteži vrednosti koncentracija mobilne faze se mogu izraziti preko vrednosti koncentracija stacionarne faze koristeći funkcije koje se nazivaju izotermi. Zamenom izoterma u zakone održanja se dobijaju nelinearni sistemi parcijalnih diferencijalnih jednačina kakvi nas interesuju ovde (detaljniji postupak kako se dobijaju ovi sistemi se može pronaći u [103], [122]). Takođe, lista raznih sistema iz hromatografije sa različitim izotermima se nalazi u [101].

U ovom i u naredna dva odeljka bavićemo se 2x2 sistemima koji se sastoje iz dve hemijske komponente. Sistem dat ovde potiče iz [3]. Kroz celu ovu disertaciju ćemo ga obeležavati sa *sistem* (*III*).

Sistem (*III*) u konzervativnom obliku je dat sa

$$u_t + \left(\frac{u}{1+u+v}\right)_x = 0, \tag{2.26}$$

$$v_t + \left(\frac{v}{1+u+v}\right)_x = 0. \tag{2.27}$$

Ovde ćemo pretpostavljati da su $u > 0$, $v > 0$. Napomenimo da u originalnim sistemima iz hromatografije promenljive x i t u izvodima zamene mesta. Ali u matematičkim radovima koji rade evolutivne sisteme se uobičajeno radi sa oblikom kakav smo naveli iznad.

Sistem (*III*) u kvazilinearnom obliku je dat sa

$$u_t + \frac{1+v}{(1+u+v)^2}u_x - \frac{u}{(1+u+v)^2}v_x = 0, \tag{2.28}$$

$$v_t - \frac{v}{(1+u+v)^2}u_x + \frac{1+u}{(1+u+v)^2}v_x = 0. \tag{2.29}$$

Zapisom kvazilinearnog oblika u matričnoj formi (2.2) vidimo da matrica sistema A nije simetrična

$$A = \frac{1}{(1+u+v)^2}\begin{bmatrix} 1+v & -u \\ -v & 1+u \end{bmatrix}.$$

Kao i u prethodnim odeljcima, sada ćemo odrediti osobine sistema (*III*) i elementarna rešenja Rimanovog problema (2.26), (2.27), (2.4).

- **Karakteristični koreni**

Karakteristične korene dobijamo rešavajući kvadratnu jednačinu po λ:

$$|\lambda I - A| = \frac{1}{(1+u+v)^2}\begin{vmatrix} \lambda - 1 - v & u \\ v & \lambda - 1 - u \end{vmatrix} = 0.$$

Njenim sređivanjem dolazimo do

$$\lambda^2 - \frac{2+u+v}{(1+u+v)^2}\lambda + \frac{1}{(1+u+v)^3} = 0.$$

Nalaženjem rešenja date jednačine dobijamo da su karakteristični koreni

$$\lambda_1 = \frac{1}{(1+u+v)^2},\ \lambda_2 = \frac{1}{1+u+v}.$$

Iz ovoga vidimo da je sistem (III) uvek striktno hiperboličan za $u > 0$, $v > 0$.

- **Desni karakteristični vektori**

Desni karakteristični vektor koji odgovara karakterističnom korenu λ_1 se dobija iz

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{(1+u+v)^2} - \frac{1+v}{(1+u+v)^2} & \frac{u}{(1+u+v)^2} \\ \frac{v}{(1+u+v)^2} & \frac{1}{(1+u+v)^2} - \frac{1+u}{(1+u+v)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Odatle sledi da je $z_1 = \frac{u}{v} z_2$, pa je tako desni karakteristični vektor koji odgovara karakterističnom korenu λ_1 dat sa

$$R_1 = \begin{bmatrix} \frac{u}{v} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Desni karakteristični vektor koji odgovara karakterističnom korenu λ_2 se dobija iz

$$\begin{bmatrix} \frac{1+u+v}{(1+u+v)^2} - \frac{1+v}{(1+u+v)^2} & \frac{u}{(1+u+v)^2} \\ \frac{v}{(1+u+v)^2} & \frac{1+u+v}{(1+u+v)^2} - \frac{1+u}{(1+u+v)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Odatle sledi da je $z_1 = -z_2$, pa je tako desni karakteristični vektor koji odgovara karakterističnom korenu λ_2 dat sa

$$R_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

• Levi karakteristični vektori

Levi karakteristični vektor koji odgovara karakterističnom korenu λ_1 se dobija pomoću

$$\begin{bmatrix} \frac{-v}{(1+u+v)^2} & \frac{v}{(1+u+v)^2} \\ \frac{u}{(1+u+v)^2} & \frac{-u}{(1+u+v)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

iz čega dobijamo da je $z_1 = z_2$. Dakle, levi karakteristični vektor koji odgovara karakterističnom korenu λ_1 je dat sa

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Levi karakteristični vektor koji odgovara karakterističnom korenu λ_2 se dobija pomoću

$$\begin{bmatrix} \frac{u}{(1+u+v)^2} & \frac{v}{(1+u+v)^2} \\ \frac{u}{(1+u+v)^2} & \frac{v}{(1+u+v)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

iz čega dobijamo da je $z_1 = -\frac{v}{u} z_2$. Dakle, levi karakteristični vektor koji odgovara karakterističnom korenu λ_2 je dat sa

$$L_2 = \begin{bmatrix} -\frac{v}{u} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

• Karakteristična forma sistema

Na isti način kao i ranije karakterističnu formu sistema (III) dobijamo pomoću njegovog kvazilinearnog oblika (2.28)-(2.29) i tako stižemo do

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}_t + \lambda_1 \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}_x \right) = 0,$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{v}{u} \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}_t + \lambda_2 \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}_x \right) = 0.$$

Daljim sređivanjem dolazimo do

$$u_t + v_t + \lambda_1 (u_x + v_x) = 0, \tag{2.30}$$

$$v_t - \frac{v}{u} u_t + \lambda_2 (v_x - \frac{v}{u} u_x) = 0. \tag{2.31}$$

• Rimanove invarijante

Prvu Rimanovu invarijantu dobijamo iz $Dr R_1 = 0$, odnosno

$$\frac{du}{u} = \frac{dv}{v},$$

iz čega sledi da je
$$r = \frac{u}{v}.$$

Drugu Rimanovu invarijantu dobijamo iz $Ds\, R_2 = 0$, odnosno
$$-du = dv,$$

iz čega sledi da je
$$s = u + v.$$

Karakteristični koreni preko Rimanovih invarijanti: $\lambda_1 = \frac{1}{(1+s)^2}$, $\lambda_2 = \frac{1}{1+s}$.

Množenjem (2.30) sa 1 i (2.31) sa $-\frac{u}{v^2}$, dolazimo do dijagonalnog sistema (2.3) datog preko Rimanovih invarijanti.

• **Zaista nelinearnost**

Kako je $D\lambda_1\, R_1 = -\frac{2(u+v)}{v(1+u+v)^3} \neq 0$, prva familija je zaista nelinearna.

Sa druge strane, $D\lambda_2\, R_2 = 0$, pa je druga familija linearno degenerisana.

• **Određivanje elementarnih rešenja**

Prva familija je zaista nelinearna, pa će ovde elementarna rešenja činiti udarni i razređujući talasi. Opšta kriva iz koje ćemo odrediti krivu razređujućeg talasa prve familije se dobija pomoću prve Rimanove invarijante r
$$\frac{u}{v} = \frac{u_l}{v_l}.$$

Odatle sledi da je
$$v = \frac{v_l}{u_l} u. \tag{2.32}$$

Opšta kriva iz koje ćemo odrediti krivu udarnog talasa prve familije se dobija iz Rankin-Igonoovih uslova koji su ovde dati sa
$$\zeta\,(u_l - u) = \frac{u_l}{1 + u_l + v_l} - \frac{u}{1 + u + v},$$
$$\zeta\,(v_l - v) = \frac{v_l}{1 + u_l + v_l} - \frac{v}{1 + u + v}.$$

Posle mnogo sređivanja dolazimo do
$$v = \frac{v_l}{u_l} u. \tag{2.33}$$

Ovo je sistem klase Temple, tj. opšte krive razređujućih talasa se poklapaju sa opštim krivama udarnih talasa. Sada treba uraditi odbacivanje delova kriva (2.32) i (2.33).

Za razređujući talas prve familije treba da važi

$$\lambda_1((u_l, v_l)) < \lambda_1((u_r, v_r)),$$

pa je kriva razređujućeg talasa prve familije data sa

$$RW_1 : \ v = \frac{v_l}{u_l}u, \ u \leq u_l.$$

Za udarne talase prve familije treba da važi Laksov kriterijum koji je ovde

$$\zeta < \lambda_1((u_l, v_l)) < \lambda_2((u_l, v_l)), \ \lambda_1((u_r, v_r)) < \zeta < \lambda_2((u_r, v_r)),$$

pa je kriva udarnog talasa prve familije data sa

$$SW_1 : \ v = \frac{v_l}{u_l}u, \ u \geq u_l.$$

Pošto je druga familija linearno degenerisana, drugi talasi će biti kontaktni diskontinuiteti. Njih određujemo iz

$$\lambda_2((u_l, v_l)) = \lambda_2((u_r, v_r)).$$

Odatle sledi da je kriva kontaktnog diskontinuiteta za drugu familiju data sa

$$CD_2 : \ v = u_l + v_l - u.$$

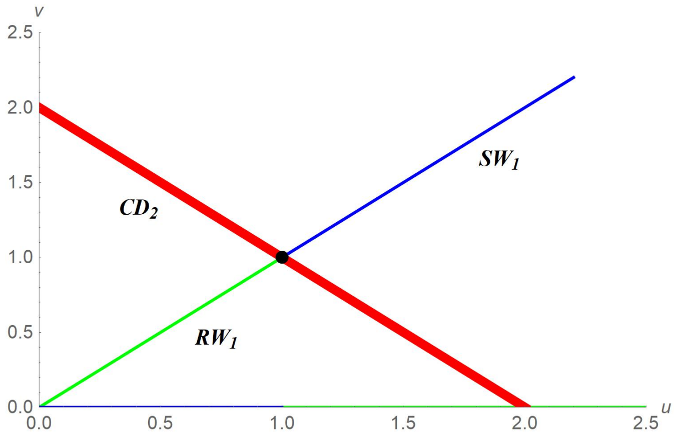
Preko Rimanovih invarijanti krive SW_1, RW_1, CD_2 su date sa

$$SW_1 : r = r_l, \ s \geq s_l,$$

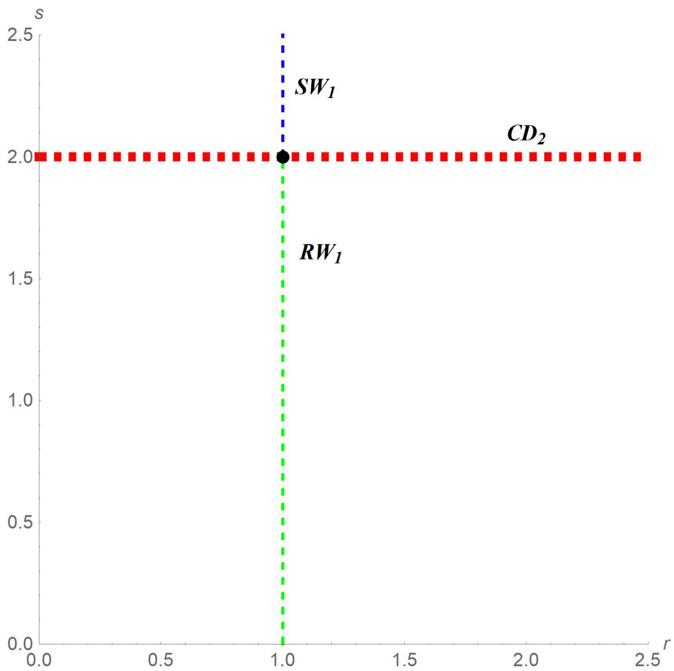
$$RW_1 : r = r_l, \ s \leq s_l,$$

$$CD_2 : s = s_l.$$

Krive SW_1, RW_1, CD_2 preko početnih promenljivih (u, v) i preko Rimanovih invarijanti (r, s) su date na Slikama 2.5 i 2.6, respektivno.



Slika 2.5: Fazna ravan (u, v)



Slika 2.6: Fazna ravan (r, s)

2.2.3 Sistem iz teorije hromatografije: (IV)

Sistem dat u ovom odeljku takođe potiče iz [3]. U ovoj disertaciji ćemo ga obeležavati sa *sistem* (IV). Dobijamo ga tako što u sistemu (III) iz Odeljka 2.2.2 uradimo smenu $v := u+v$, $w := u-v$ i sredimo dobijeno. Tako dolazimo do sistema (IV) koji je u konzervativnom obliku dat sa

$$v_t + \left(\frac{v}{1+v}\right)_x = 0, \tag{2.34}$$

$$w_t + \left(\frac{w}{1+v}\right)_x = 0. \tag{2.35}$$

Kao i u Odeljku 2.2.2, uzimaćemo da su $v > 0$, $w > 0$. Prednost sistema (IV) u odnosu na sistem (III) je što u prvoj jednačini imamo samo jednu promenljivu v.

Sistem (IV) u kvazilinearnom obliku je dat sa

$$v_t + \frac{1}{(1+v)^2} v_x = 0, \tag{2.36}$$

$$w_t - \frac{w}{(1+v)^2} v_x + \frac{1+v}{(1+v)^2} w_x = 0. \tag{2.37}$$

Zapisom kvazilinearnog oblika u matričnoj formi (2.2) vidimo da matrica sistema A data sa

$$A = \frac{1}{(1+v)^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -w & 1+v \end{bmatrix}$$

nije simetrična. Kao i u prethodnim odeljcima sada ćemo odrediti osobine sistema (IV) i elementarna rešenja problema (2.34), (2.35), uz početne uslove (2.4).

• **Karakteristični koreni**

Karakteristične korene dobijamo rešavajući kvadratnu jednačinu po λ:

$$|\lambda I - A| = (\lambda - \frac{1}{(1+v)^2})\,(\lambda - \frac{1}{1+v}) = 0.$$

Dakle, karakteristični koreni su dati sa

$$\lambda_1 = \frac{1}{(1+v)^2},\, \lambda_2 = \frac{1}{1+v}.$$

Iz ovoga vidimo da je sistem (IV) uvek striktno hiperboličan za $v > 0$.

• **Desni karakteristični vektori**

Desni karakteristični vektor koji odgovara karakterističnom korenu λ_1 se dobija iz

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{w}{(1+v)^2} & \frac{-v}{(1+v)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Odatle sledi da je $z_1 = \frac{v}{w} z_2$, pa je tako desni karakteristični vektor koji odgovara karakterističnom korenu λ_1 dat sa

$$R_1 = \begin{bmatrix} \frac{v}{w} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Desni karakteristični vektor koji odgovara karakterističnom korenu λ_2 se dobija iz

$$\begin{bmatrix} \frac{v}{(1+v)^2} & 0 \\ \frac{w}{(1+v)^2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Odatle sledi da je $z_1 = 0$, pa je tako desni karakteristični vektor koji odgovara karakterističnom korenu λ_2 dat sa

$$R_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

• **Levi karakteristični vektori**

Levi karakteristični vektor koji odgovara karakterističnom korenu λ_1 se dobija pomoću

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{w}{(1+v)^2} \\ 0 & \frac{-v}{(1+v)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Odatle dobijamo da je $z_2 = 0$, pa je tako levi karakteristični vektor koji odgovara karakterističnom korenu λ_1 dat sa

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Levi karakteristični vektor koji odgovara karakterističnom korenu λ_2 se dobija pomoću

$$\begin{bmatrix} \frac{v}{(1+v)^2} & \frac{w}{(1+v)^2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Odatle dobijamo da je $z_1 = -\frac{w}{v} z_2$, pa je tako levi karakteristični vektor koji odgovara karakterističnom korenu λ_2 dat sa

$$L_2 = \begin{bmatrix} -\frac{w}{v} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

• Karakteristična forma sistema

Pomoću kvazilinearnog oblika sistema (IV) datog u (2.36)-(2.37), na isti način kao i ranije, karakterističnu formu sistema (IV) dobijamo iz

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix}_t + \lambda_1 \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix}_x \right) = 0,$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{w}{v} \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix}_t + \lambda_2 \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix}_x \right) = 0.$$

Daljim sređivanjem dolazimo do

$$v_t + \lambda_1 v_x = 0, \tag{2.38}$$

$$w_t - \frac{w}{v} v_t + \lambda_2 (w_x - \frac{w}{v} v_x) = 0. \tag{2.39}$$

• Rimanove invarijante

Prvu Rimanovu invarijantu dobijamo iz $Dr\,R_1 = 0$, odnosno

$$\frac{dv}{v} = \frac{dw}{w}.$$

Odatle sledi da je

$$r = \frac{w}{v}.$$

Drugu Rimanovu invarijantu dobijamo iz $Ds\,R_2 = 0$, odnosno

$$dv = 0.$$

Odatle sledi da je

$$s = v.$$

Karakteristični koreni preko Rimanovih invarijanti: $\lambda_1 = \frac{1}{(1+s)^2}$, $\lambda_2 = \frac{1}{1+s}$.

Množenjem (2.38) sa 1 i (2.39) sa $\frac{1}{v}$, dolazimo do dijagonalnog sistema (2.3) datog preko Rimanovih invarijanti.

• Zaista nelinearnost

Kako je $D\lambda_1\,R_1 = -\frac{2v}{w(1+v)^3} \neq 0$, prva familija je zaista nelinearna.

Sa druge strane, $D\lambda_2\,R_2 = 0$, pa je druga familija linearno degenerisana.

• Određivanje elementarnih rešenja

Prva familija je zaista nelinearna, pa će ovde elementarna rešenja činiti udarni i razređujući talasi. Opšta kriva iz koje ćemo odrediti krivu razređujućeg talasa prve familije se dobija pomoću prve Rimanove invarijante r

$$\frac{w}{v} = \frac{w_l}{v_l}.$$

Odatle sledi da je

$$v = \frac{v_l}{w_l} w. \tag{2.40}$$

Opšta kriva iz koje se dobija kriva udarnog talasa prve familije se određuje iz Rankin-Igonoovih uslova koji su ovde dati sa

$$\zeta\,(v_l - v) = \frac{v_l}{1+v_l} - \frac{v}{1+v},$$

$$\zeta\,(w_l - w) = \frac{w_l}{1+v_l} - \frac{w}{1+v}.$$

Posle mnogo sređivanja dobija se:

$$v = \frac{v_l}{w_l} w. \tag{2.41}$$

Kao sto vidimo ovo je opet sistem klase Temple. Ostaje još uraditi odbacivanje delova kriva (2.40) i (2.41).

Za razređujući talas prve familije treba da važi

$$\lambda_1((v_l, w_l)) < \lambda_1((v_r, w_r)),$$

pa je kriva razređujućeg talasa prve familije data sa

$$RW_1 : v = \frac{v_l}{w_l} w,\; v \leq v_l.$$

Za udarne talase treba da važi Laksov kriterijum koji je ovde dat sa

$$\zeta < \lambda_1((v_l, w_l)) < \lambda_2((v_l, w_l)),\; \lambda_1((v_r, w_r)) < \zeta < \lambda_2((v_r, w_r)).$$

Na osnovu njega kriva udarnog talasa prve familije je data sa

$$SW_1 : v = \frac{v_l}{w_l} w,\; v \geq v_l.$$

Druga familija je linearno degenerisana, pa će drugi talasi biti kontaktni diskontinuiteti. Krivu kontaktnog diskontinuiteta odredićemo iz

$$\lambda_2((u_l, v_l)) = \lambda_2((u_r, v_r)).$$

Tako dobijamo da je kriva kontaktnih diskontinuiteta za drugu familiju data sa

$$CD_2 : \; v = v_l.$$

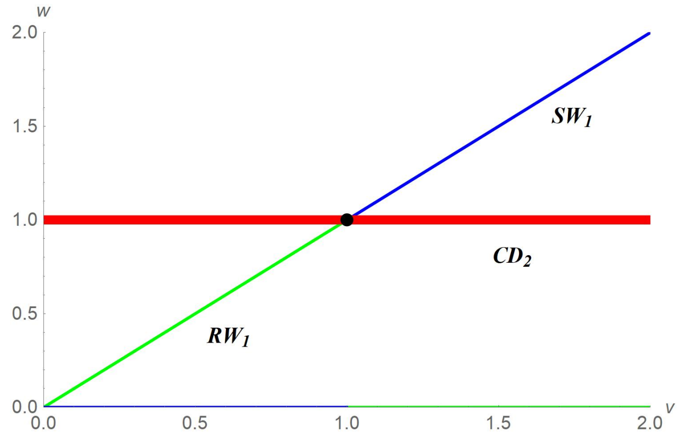
Krive udarnih i razređujućih talasa prve familije i krive kontaktnih diskontinuiteta druge familije SW_1, RW_1 i CD_2, preko Rimanovih invarijanti su date sa

$$SW_1 : r = r_l, \, s \geq s_l,$$

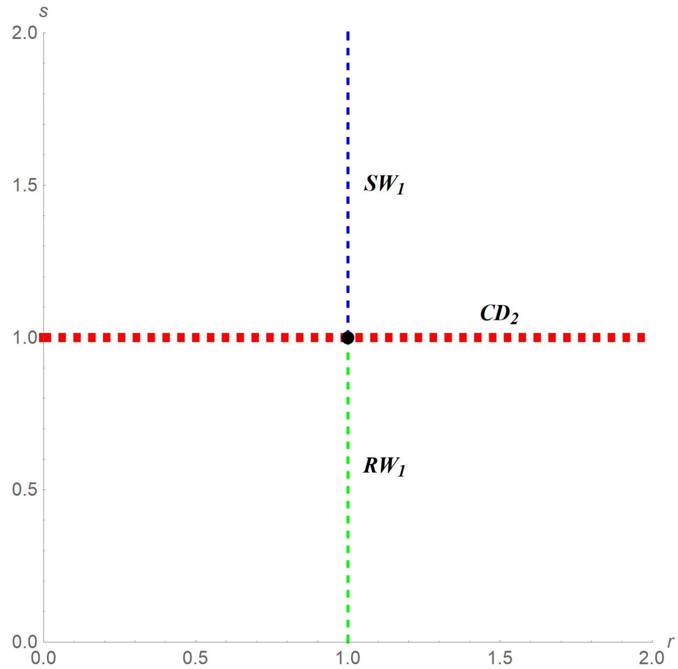
$$RW_1 : r = r_l, \, s \leq s_l,$$

$$CD_2 : s = s_l.$$

Krive SW_1, RW_1, CD_2 preko početnih promenljivih (v, w) i preko Rimanovih invarijanti (r, s) su date na Slikama 2.7 i 2.8, respektivno.



Slika 2.7: Fazna ravan(u,v)



Slika 2.8: Fazna ravan (r,s)

2.2.4 Sistem iz teorije hromatografije: (V)

Sistem dat u ovom odeljku potiče iz [67]. U literaturi se za njega kaže da je sistem sa jednom inertnom komponentom. U ovoj disertaciji ćemo ga obeležavati kao *sistem* (V).

Sistem (V) je u konzervativnom obliku dat sa

$$u_t = 0, \tag{2.42}$$

$$v_t + \left(\frac{kv}{1+u+v}\right)_x = 0, \tag{2.43}$$

gde su $u \geq 0$, $v \geq 0$, $k \in [0,1]$.

Sistema (V) u kvazilinearnom obliku je dat sa

$$u_t = 0, \tag{2.44}$$

$$v_t - \frac{kv}{(1+u+v)^2}u_x + \frac{k(1+u)}{(1+u+v)^2}v_x = 0. \tag{2.45}$$

Zapisom kvazilinearnog oblika u matričnoj formi (2.2) vidimo da matrica sistema A nije simetrična i data je sa

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{-kv}{(1+u+v)^2} & \frac{k(1+u)}{(1+u+v)^2} \end{bmatrix}.$$

Sada ćemo odrediti osobine sistema (V) i elementarna rešenja Rimanovog problema (2.42), (2.43), (2.4).

- **Karakteristični koreni**

Karakteristične korene dobijamo rešavajući jednačinu po λ:

$$|\lambda I - A| = \lambda\,(\lambda - \frac{k(1+u)}{(1+u+v)^2}) = 0.$$

Rešenja ove jednačine su data sa

$$\lambda_1 = 0,\, \lambda_2 = \frac{k(1+u)}{(1+u+v)^2}.$$

Iz ovoga vidimo da je za $u \geq 0$, $v \geq 0$, $k \in (0,1]$ sistem (V) uvek striktno hiperboličan.

• **Desni karakteristični vektori**

Desni karakteristični vektor koji odgovara karakterističnom korenu λ_1 se dobija iz

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{kv}{(1+u+v)^2} & \frac{-k(1+u)}{(1+u+v)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Odatle dobijamo da je $z_1 = \frac{1+u}{v} z_2$, pa je tako desni karakteristični vektor koji odgovara karakterističnom korenu λ_1 dat sa

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1+u \\ v \end{bmatrix}.$$

Desni karakteristični vektor koji odgovara karakterističnom korenu λ_2 se dobija iz

$$\begin{bmatrix} \frac{k(1+u)}{(1+u+v)^2} & 0 \\ \frac{kv}{(1+u+v)^2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Odatle dobijamo da je $z_1 = 0$, pa je tako desni karakteristični vektor koji odgovara karakterističnom korenu λ_2 dat sa

$$R_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

• **Levi karakteristični vektori**

Levi karakteristični vektor koji odgovara karakterističnom korenu λ_1 se dobija pomoću

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{kv}{(1+u+v)^2} \\ 0 & \frac{-k(1+u)}{(1+u+v)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Odatle dobijamo da je $z_2 = 0$, pa je tako levi karakteristični vektor koji odgovara karakterističnom korenu λ_1 dat sa

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Levi karakteristični vektor koji odgovara karakterističnom korenu λ_2 se dobija pomoću

$$\begin{bmatrix} \frac{k(1+u)}{(1+u+v)^2} & \frac{kv}{(1+u+v)^2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Odatle dobijamo da je $z_1 = -\frac{v}{1+u} z_2$, pa je tako levi karakteristični vektor koji odgovara karakterističnom korenu λ_2 dat sa

$$L_2 = \begin{bmatrix} -v \\ 1+u \end{bmatrix}.$$

• Karakteristična forma sistema

Množenjem kvazilinearnog oblika sistema (V) datog u (2.44)-(2.45) pomoću levih karakterističnih vektora i korišćenjem osobine karakterističnih korena i karakterističnih vektora dobijamo

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}_t + \lambda_1 \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}_x \right) = 0,$$

$$\begin{bmatrix} -v \\ 1+u \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}_t + \lambda_2 \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}_x \right) = 0.$$

Daljim sređivanjem dolazimo do

$$u_t = 0, \tag{2.46}$$

$$(1+u)v_t - vu_t + \lambda_2 \left((1+u)v_x - vu_x\right) = 0. \tag{2.47}$$

• Rimanove invarijante

Prvu Rimanovu invarijantu dobijamo iz $Dr\, R_1 = 0$, odnosno

$$\frac{du}{1+u} = \frac{dv}{v}.$$

Odatle sledi da je

$$r = \frac{v}{1+u}.$$

Drugu Rimanovu invarijantu dobijamo iz $Ds\, R_2 = 0$, odnosno

$$du = 0.$$

Odatle sledi da je

$$s = u.$$

Karakteristični koreni preko Rimanovih invarijanti: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \frac{k}{(1+s)(1+r)^2}$.

Množenjem (2.46) sa 1 i (2.47) sa $(1+u)^2$, dolazimo do dijagonalnog sistema (2.3) datog preko Rimanovih invarijanti.

• Zaista nelinearnost

Pošto je $D\lambda_1\, R_1 = 0$, prva familija je linearno degenerisana.

Kako je $D\lambda_2\, R_2 = -\frac{2k(1+u)}{(1+u+v)^3} \neq 0$, druga familija je zaista nelinearna.

• Određivanje elementarnih rešenja

Kako je prva familija linearno degenerisana, prvi talasi ce biti kontaktni diskontinuiteti. Pošto je ovde $\lambda_1 = 0$, ne možemo koristiti isti način kao u prethodnim odeljcima za njihovo određivanje. Zato ćemo krive kontaktnih diskontinuiteta odrediti koristeći Rankin-Igonoove uslove (2.49)-(2.50) zamenom $\zeta = \lambda_1 = 0$. Tako nam ostaje samo jedna jednakost

$$0 = \frac{kv}{1+u+v} - \frac{kv_l}{1+u_l+v_l}.$$

Odatle sledi da je kriva kontaktnih diskontinuiteta prve familije data sa

$$CD_1 : v = \frac{v_l}{1+u_l}(1+u).$$

Zbog zaista nelinearnosti druge familije, ovde će rešenja činiti krive udarnih i razređujućih talasa. Opšta kriva iz koje ćemo odrediti krivu razređujućeg talasa druge familije se dobija pomoću druge Rimanove invarijante s i data je sa

$$u = u_l. \tag{2.48}$$

Opšta kriva iz koje se dobija kriva udarnog talasa druge familije se određuje iz Rankin-Igonoovih uslova koji su ovde dati sa

$$\zeta\,(u - u_l) = 0, \tag{2.49}$$

$$\zeta\,(v - v_l) = \frac{kv}{1+u+v} - \frac{kv_l}{1+u_l+v_l}. \tag{2.50}$$

Odatle sledi da je

$$u = u_l. \tag{2.51}$$

Ovo je ponovo sistem klase Temple, tj. opšte krive razređujućih talasa se poklapaju sa opštim krivama udarnih talasa. Ostaje još uraditi odbacivanja delova kriva (2.48) i (2.51).

Za razređujući talas druge familije treba da važi

$$\lambda_2((u_l,v_l)) < \lambda_2((u_r,v_r)),$$

pa je kriva razređujućeg talasa druge familije data sa

$$RW_2:\ u=u_l,\ v\le v_l.$$

Za krivu udarnog talasa druge familije treba da važi Laksov kriterijum koji je ovde dat sa

$$\lambda_1((u_l,v_l)) < \zeta < \lambda_2((u_l,v_l)),\ \lambda_1((u_r,v_r)) < \lambda_2((u_r,v_r)) < \zeta,$$

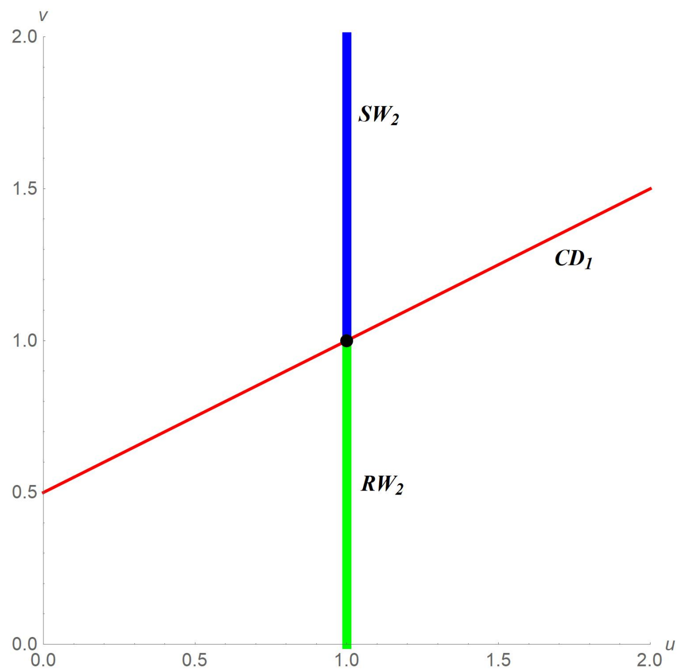
pa je kriva udarnog talasa druge familije data sa

$$SW_2:\ u=u_l,\ v\ge v_l.$$

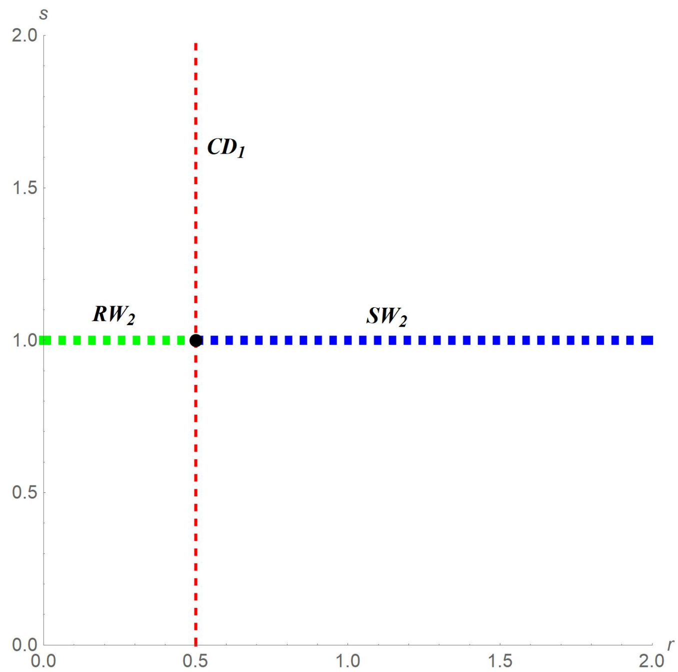
Krive CD_1, SW_2, RW_2 preko Rimanovih invarijanti su date sa

$$\begin{aligned} CD_1 &: r=r_l,\\ SW_2 &: s=s_l, r\ge r_l,\\ RW_2 &: s=s_l, r\le r_l. \end{aligned}$$

Krive CD_1, SW_2, RW_2 preko početnih promenljivih (u,v) i preko Rimanovih invarijanti (r,s) su date na Slikama 2.9 i 2.10, respektivno.



Slika 2.9: Fazna ravan (u, v)



Slika 2.10: Fazna ravan (r, s)

2.2.5 Sistem iz teorije elektroforeze: (VI)

Elektroforeza je proces koji se odnosi na kretanje naelektrisanih čestica u odnosu na fluid pod uticajem električnog polja. Elektroforeza koristi razliku u naboju čestica koja nastaje usled delovanja električnog polja sa ciljem da dovede do prostornog razdvajanja čestica. Otkrivena je početkom XIX veka posmatrajući kretanje čestica gline u vodi usled primene električnog polja. Danas se koristi u biohemiji, molekularnoj biologiji itd. Sam proces elektroforeze može se modelirati pomoću parcijalnih diferencijalnih jednačina. Više detalja i matematičkih modela se može pronaći u [6], [7], [60].

Takođe, procesi hromatografije i elektroforeze su međusobno povezani. Može se reći da im je cilj isti, ali su im tehnike drugačije. Sistem dat u ovom odeljku se nalazi u [6] i [35] i kroz celu ovu disertaciju ćemo ga obeležavati kao *sistem* (VI).

Sistem (VI) u konzervativnom obliku je dat sa

$$u_t + \left(\frac{a\,u}{u+v}\right)_x = 0, \tag{2.52}$$

$$v_t + \left(\frac{b\,v}{u+v}\right)_x = 0, \tag{2.53}$$

gde su $u \geq 0, v \geq 0$ i $0 < a < b$.

Sistem (VI) u kvazilinearnom obliku je dat sa

$$u_t + \frac{a\,v}{(u+v)^2}u_x - \frac{a\,u}{(u+v)^2}v_x = 0, \tag{2.54}$$

$$v_t - \frac{b\,v}{(u+v)^2}u_x + \frac{b\,u}{(u+v)^2}v_x = 0. \tag{2.55}$$

Zapisom kvazilinearnog oblika u matričnoj formi (2.2) vidimo da matrica sistema A nije simetrična

$$A = \frac{1}{(u+v)^2}\begin{bmatrix} av & -au \\ -bv & bu \end{bmatrix}.$$

Sada ćemo odrediti osobine sistema (VI) i elementarna rešenja Rimanovog problema (2.52), (2.53), uz početne uslove (2.4).

• **Karakteristični koreni**

Karakteristične korene dobijamo rešavajući jednačinu po λ:

$$|\lambda I - A| = \lambda\,(\lambda - \frac{av+bu}{(u+v)^2}) = 0.$$

Na osnovu toga sledi da su karakteristični koreni sistema (VI) dati sa

$$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = \frac{av+bu}{(u+v)^2}.$$

Iz ovoga vidimo da je sistem (VI) uvek striktno hiperboličan za $u \geq 0$, $v \geq 0$, $(u,v) \neq (0,0)$ i $0 < a < b$. Napomenimo da se dodatno jako slikovito objašnjenje striktne hiperboličnosti ovog sistema može pronaći u [6].

• **Desni karakteristični vektori**

Desni karakteristični vektor koji odgovara karakterističnom korenu λ_1 se dobija iz

$$\begin{bmatrix} \frac{-av}{(u+v)^2} & \frac{au}{(u+v)^2} \\ \frac{bv}{(u+v)^2} & \frac{-bu}{(u+v)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Odatle dobijamo da je $z_1 = \frac{u}{v} z_2$, pa je tako desni karakteristični vektor koji odgovara karakterističnom korenu λ_1 dat sa

$$R_1 = \begin{bmatrix} \frac{u}{v} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Desni karakteristični vektor koji odgovara karakterističnom korenu λ_2 se dobija iz

$$\begin{bmatrix} \frac{bu}{(u+v)^2} & \frac{au}{(u+v)^2} \\ \frac{bv}{(u+v)^2} & \frac{av}{(1+u+v)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Odatle dobijamo da je $z_1 = -\frac{a}{b} z_2$, pa je tako desni karakteristični vektor koji odgovara karakterističnom korenu λ_2 dat sa

$$R_2 = \begin{bmatrix} -\frac{a}{b} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

• **Levi karakteristični vektori**

Levi karakteristični vektor koji odgovara karakterističnom korenu λ_1 se dobija pomoću

$$\begin{bmatrix} \frac{-av}{(u+v)^2} & \frac{bv}{(u+v)^2} \\ \frac{au}{(u+v)^2} & \frac{-bu}{(u+v)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Odatle sledi da je $z_1 = \frac{b}{a} z_2$, pa je tako levi karakteristični vektor koji odgovara karakterističnom korenu λ_1 dat sa

$$L_1 = \begin{bmatrix} \frac{b}{a} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Levi karakteristični vektor koji odgovara karakterističnom korenu λ_2 se dobija pomoću

$$\begin{bmatrix} \frac{bu}{(u+v)^2} & \frac{bv}{(u+v)^2} \\ \frac{au}{(u+v)^2} & \frac{av}{(u+v)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Odatle sledi da je $z_1 = -\frac{v}{u} z_2$, pa je tako levi karakteristični vektor koji odgovara karakterističnom korenu λ_2 dat sa

$$L_2 = \begin{bmatrix} -\frac{v}{u} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

• **Karakteristična forma sistema**

Množenjem (2.54)-(2.55) pomoću levih karakterističnih vektora i korišćenjem osobine karakterističnih korena i karakterističnih vektora dobijamo

$$\begin{bmatrix} \frac{b}{a} \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}_t + \lambda_1 \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}_x \right) = 0,$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{v}{u} \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}_t + \lambda_2 \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}_x \right) = 0.$$

Daljim sređivanjem dolazimo do

$$u_t \frac{b}{a} + v_t = 0, \tag{2.56}$$

$$-\frac{v}{u} u_t + v_t + \lambda_2 \left(-\frac{v}{u} u_x + v_x\right) = 0. \tag{2.57}$$

• **Rimanove invarijante**

Prvu Rimanovu invarijantu dobijamo iz $Dr\, R_1 = 0$, odnosno iz

$$\frac{du}{u} = \frac{dv}{v}.$$

Odatle sledi da je

$$r = \frac{u}{v}.$$

Napomenimo da u [6] autori za prvu Rimanovu invarijantu uzimaju $r = \frac{av+bu}{u+v}$.

Drugu Rimanovu invarijantu dobijamo iz $Ds\,R_2 = 0$, odnosno iz

$$-\frac{du}{a} = \frac{dv}{b}.$$

Odatle sledi da je

$$s = \frac{u}{a} + \frac{v}{b}.$$

Karakteristični koreni preko Rimanovih invarijanti: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \frac{s(a+br)}{ab(1+r)}$.

Množenjem (2.56) sa $\frac{1}{b}$ i (2.57) sa $-\frac{u}{v^2}$, dolazimo do dijagonalnog sistema (2.3) datog preko Rimanovih invarijanti.

- **Zaista nelinearnost**

Kako je $D\lambda_1 R_1 = 0$, prva familija je linearno degenerisana.

Pošto je $D\lambda_2 R_2 = \frac{2(a-b)(av+bu)}{b(u+v)^3} \neq 0$, druga familija je zaista nelinearna.

- **Određivanje elementarnih rešenja**

Kako je prva familija linearno degenerisana, prvi talasi će biti kontaktni diskontinuiteti. Kao i u prethodnom odeljku, pošto je $\lambda_1 = 0$, odredićemo ih iz Rankin-Igonoovih uslova (2.59)-(2.60). Tako dobijamo

$$0 = \frac{a\,u_l}{u_l + v_l} - \frac{a\,u}{u+v}.$$

Daljim sređivanjem dobijamo krivu kontaktnog diskontinuiteta za prvu familiju

$$CD_1 : v = \frac{v_l}{u_l} u.$$

Druga familija je zaista nelinearna, pa su ovde elementarna rešenja razređujući i udarni talasi. Opšta kriva iz koje ćemo odrediti krivu razređujućeg talasa druge familije se dobija iz druge Rimanove invarijante s

$$\frac{u}{a} + \frac{v}{b} = \frac{u_l}{a} + \frac{v_l}{b}.$$

Odatle sledi

$$v = v_l + (u_l - u)\frac{b}{a}. \tag{2.58}$$

Opšta kriva iz koje se dobija kriva udarnog talasa druge familije se određuje iz Rankin-Igonoovih uslova koji su ovde dati sa

$$\zeta\,(u_l - u) = \frac{au_l}{u_l + v_l} - \frac{au}{u+v}, \tag{2.59}$$

$$\zeta\,(v_l - v) = \frac{bv_l}{u_l + v_l} - \frac{bv}{u+v}. \tag{2.60}$$

Odatle posle sređivanja sledi da je

$$v = v_l + (u_l - u)\frac{b}{a}. \tag{2.61}$$

Dakle, ovo je ponovo sistem klase Temple. Ostaje još uraditi odbacivanja delova kriva (2.58) i (2.61).

Za razređujući talas druge familije treba da važi

$$\lambda_2((u_l, v_l)) < \lambda_2((u_r, v_r)),$$

pa je kriva razređujućeg talasa druge familije

$$RW_2 :\ v = v_l + (u_l - u)\frac{b}{a},\ u \geq u_l.$$

Za udarni talas druge familije treba da važi Laksov kriterijum koji je ovde dat sa

$$\lambda_1((u_l, v_l)) < \zeta < \lambda_2(u_l, v_l)),\ \lambda_1((u_r, v_r)) < \lambda_2((u_r, v_r)) < \zeta,$$

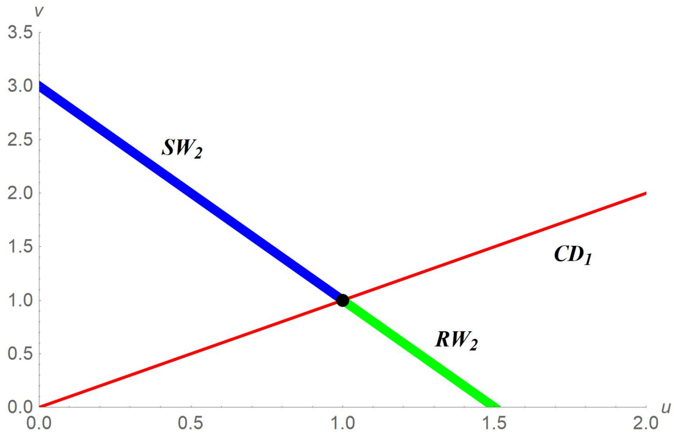
pa je kriva udarnog talasa druge familije

$$SW_2 :\ v = v_l + (u_l - u)\frac{b}{a},\ u \leq u_l.$$

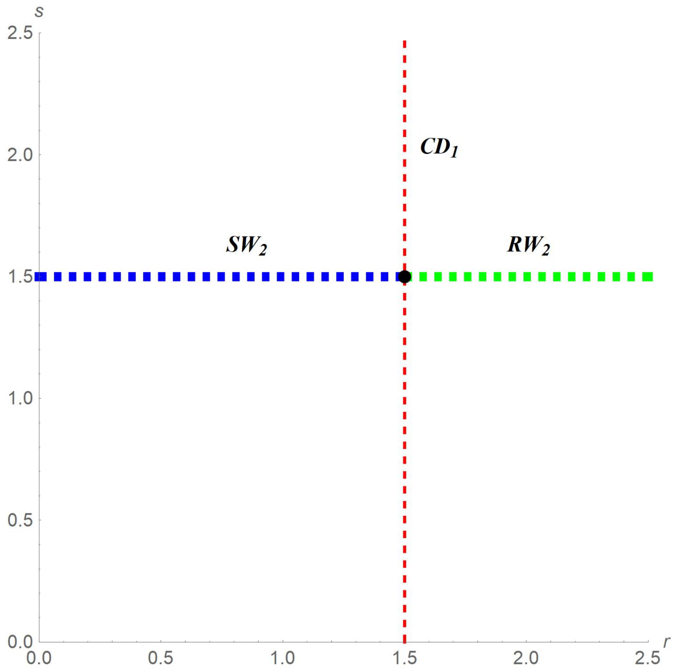
Preko Rimanovih invarijanti krive CD_1, SW_2, RW_2 su date sa

$$CD_1 : r = r_l,$$
$$SW_2 : s = s_l, r \leq r_l,$$
$$RW_2 : s = s_l, r \geq r_l.$$

Krive CD_1, SW_2, RW_2 preko početnih promenljivih (u, v) i preko Rimanovih invarijanti (r, s) su date na Slikama 2.11 i 2.12, respektivno.



Slika 2.11: Fazna ravan (u, v)



Slika 2.12: Fazna ravan(r, s)

2.2.6 Sistem izentropne gasne dinamike: (VII)

Ovaj sistem je jedan od najpoznatijih sistema zakona održanja. Zapravo sistem izentropne gasne dinamike, za idealan gas, u Ojlerovim koordinatama, je prvi hiperbolički zakon održanja ikada za koji je rešen Rimanov problem. Sam sistem opisuje izentropno strujanje termoelastičnih fluida. Više detalja o njemu kao i verzija koju ovde koristimo se može pronaći u [35]. Poznate detaljnije obrađene verzije datog sistema su model gasne dinamike bez pritiska, model plitke vode, izotermalni sistem gasne dinamike (videti [35], [64], [79], respektivno). U ovoj disertaciji ćemo ga obeležavati sa *sistem* (VII).

Sistem (VII) u konzervativnom obliku preko (ρ,u) koordinata je dat sa

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0, \tag{2.62}$$

$$(\rho u)_t + (\rho u^2 + p(\rho))_x = 0. \tag{2.63}$$

Takođe, često se sreće i preko (ρ,m) koordinata kao

$$\rho_t + m_x = 0, \tag{2.64}$$

$$m_t + \left(\frac{m^2}{\rho} + p(\rho)\right)_x = 0. \tag{2.65}$$

Ovde $\rho(x,t)$ predstavlja gustinu, $u(x,t)$ brzinu i $p(\rho)$ pritisak gasa. Pri prelasku sa (2.62), (2.63) na oblik (2.64), (2.65) koristi se smena $m := \rho u$, gde m predstavlja količinu kretanja. U ovom odeljku ćemo se posvetiti ovom sistemu preko (ρ,u) koordinata i nećemo se baviti rešenjima koja sadrže stanje vakuma tj. kada je $\rho = 0$. Taj slučaj je detaljnije proučavan u [82]. Takođe, umesto $p(\rho)$ ćemo pisati samo p i ponekad koristi oznaku c za $\sqrt{p'}$.

Sistem (VII) u kvazilinearnom obliku je dat sa

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0, \tag{2.66}$$

$$(\rho u)_t + p'\,\rho_x - u^2\,\rho_x + 2u\,(\rho u)_x = 0. \tag{2.67}$$

Zapisom kvazilinearnog oblika u matričnoj formi (2.2) vidimo da matrica sistema A nije simetrična

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ p' - u^2 & 2u \end{bmatrix}.$$

Kao i u prethodnim odeljcima sada ćemo odrediti brojne osobine ovog sistema i pronaći elementarna rešenja Rimanovog problema (2.62), (2.63), (2.4).

- **Karakteristični koreni**

Karakteristične korene dobijamo rešavajući kvadratnu jednačinu po λ:

$$|\lambda I - A| = \lambda\,(\lambda - 2\,u) + u^2 - p' = 0,$$

čijim sređivanjem dolazimo do

$$\lambda^2 - 2u\,\lambda + u^2 - p' = 0.$$

Rešavanjem date jednačine dobijamo da su karakteristični koreni sistema (VII)

$$\lambda_1 = u - \sqrt{p'},\ \lambda_2 = u + \sqrt{p'}.$$

Iz ovoga vidimo da je sistem (VII) striktno hiperboličan za $p' > 0$.

- **Desni karakteristični vektori**

Desni karakteristični vektor koji odgovara karakterističnom korenu λ_1 dobija se iz

$$\begin{bmatrix} u - \sqrt{p'} & -1 \\ u^2 - p' & -u - \sqrt{p'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Odatle sledi da je $z_1 = \frac{z_2}{u - \sqrt{p'}}$, pa je tako desni karakteristični vektor koji odgovara karakterističnom korenu λ_1 dat sa

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ u - c \end{bmatrix}.$$

Desni karakteristični vektor koji odgovara karakterističnom korenu λ_2 se dobija iz

$$\begin{bmatrix} u + \sqrt{p'} & -1 \\ u^2 - p' & -u + \sqrt{p'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Odatle sledi da je $z_1 = \frac{z_2}{u + \sqrt{p'}}$, pa je tako desni karakteristični vektor koji odgovara karakterističnom korenu λ_2 dat sa

$$R_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ u + c \end{bmatrix}.$$

- **Levi karakteristični vektori**

Levi karakteristični vektor koji odgovara karakterističnom korenu λ_1 se dobija pomoću

$$\begin{bmatrix} u - \sqrt{p'} & u^2 - p' \\ -1 & -u - \sqrt{p'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Odatle sledi da je $z_1 = (-u - \sqrt{p'})\, z_2$, pa je tako levi karakteristični vektor koji odgovara karakterističnom korenu λ_1 dat sa

$$L_1 = \left[\begin{array}{c} -u-c \\ 1 \end{array} \right].$$

Levi karakteristični vektor koji odgovara karakterističnom korenu λ_2 se dobija pomoću

$$\left[\begin{array}{cc} u+\sqrt{p'} & u^2-p' \\ -1 & -u+\sqrt{p'} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} z_1 \\ z_2 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right].$$

Odatle sledi da je $z_1 = (\sqrt{p'} - u)\, z_2$, pa je tako levi karakteristični vektor koji odgovara karakterističnom korenu λ_2 dat sa

$$L_2 = \left[\begin{array}{c} -u+c \\ 1 \end{array} \right].$$

• **Karakteristična forma sistema**

Množenjem (2.66)-(2.67) pomoću levih karakterističnih vektora i korišćenjem osobine karakterističnih korena i karakterističnih vektora dobijamo

$$\left[\begin{array}{c} -u-c \\ 1 \end{array} \right] \cdot \left(\left[\begin{array}{c} \rho \\ \rho u \end{array} \right]_t + \lambda_1 \left[\begin{array}{c} \rho \\ \rho u \end{array} \right]_x \right) = 0,$$

$$\left[\begin{array}{c} -u+c \\ 1 \end{array} \right] \cdot \left(\left[\begin{array}{c} \rho \\ \rho u \end{array} \right]_t + \lambda_2 \left[\begin{array}{c} \rho \\ \rho u \end{array} \right]_x \right) = 0.$$

Daljim sređivanjem dolazimo do

$$(-u-c)\rho_t + (\rho u)_t + \lambda_1 \left((-u-c)\rho_x + (\rho u)_x\right) = 0, \tag{2.68}$$

$$(-u+c)\rho_t + (\rho u)_t + \lambda_2 \left((-u+c)\rho_x + (\rho u)_x\right) = 0, \tag{2.69}$$

pri čemu je $c = \sqrt{p'} > 0$.

• **Rimanove invarijante**

Prvu Rimanovu invarijantu dobijamo iz $Dr\, R_1 = 0$, odnosno iz

$$\frac{d\rho}{1} = \frac{d(\rho u)}{u - \sqrt{p'}}.$$

Ovo je linearna obična diferencijalna jednačina čije rešenje je

$$r = u + \varphi(\rho), \text{ gde je } \varphi(\rho) = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{c}{z} dz.$$

Drugu Rimanovu invarijantu dobijamo iz $Ds\,R_2 = 0$, odnosno iz

$$\frac{d\rho}{1} = \frac{d(\rho u)}{u + \sqrt{p'}}.$$

Ovo je linearna obična diferencijalna jednačina čije rešenje je

$$s = u - \varphi(\rho).$$

Da bi dobili izgled karakterističnih korena preko Rimanovih invarijanti, ovde prvo iz definicije Rimanovih invarijanti izrazimo u i φ i tako dobijamo da su

$$u = \frac{r+s}{2}, \ \varphi(\rho) = \frac{r-s}{2}.$$

Kako je po pretpostavci $c > 0$, odatle sledi $\varphi'(\rho) = \frac{c(\rho)}{\rho} > 0$, pa je $\varphi(\rho)$ rastuća funkcija. Samim tim ρ je jedinstveno određeno sa $\rho = \varphi^{-1}(r-s)$, iz čega sledi

$$c(\rho) = c(\varphi^{-1}(r-s)).$$

I odatle zaključujemo da su

$$\lambda_1 = \frac{r+s}{2} - c(\varphi^{-1}(r-s)), \ \lambda_2 = \frac{r+s}{2} + c(\varphi^{-1}(r-s)).$$

Dakle, i ovde možemo izraziti karakteristične korene sistema preko Rimanovih invarijanti. Detaljnije objašnjenje ovog dela se može pronaći u [107].

Množenjem (2.68) sa $\frac{1}{\rho}$ i (2.69) sa $\frac{1}{\rho}$ i dodatnim sređivanjem, dolazimo do dijagonalnog sistema (2.3) datog preko Rimanovih invarijanti.

- **Zaista nelinearnost**

Ovde pretpostavljamo da važi $2p' + \rho p'' > 0$.

Pošto je $D\lambda_1 R_1 = -\frac{2p'+\rho p''}{2\rho\sqrt{p'}} \neq 0$, prva familija je zaista nelinearna.

Pošto je $D\lambda_2 R_2 = \frac{2p'+\rho p''}{2\rho\sqrt{p'}} \neq 0$, i druga familija je zaista nelinearna.

• Određivanje elementarnih rešenja

Kako su obe familije zaista nelinearne, ovde će elementarna rešenja činiti razređujući i udarni talasi za obe familije. Opšte krive iz kojih ćemo odrediti krive razređujućih talasa prve i druge familije se dobijaju iz prve i druge Rimanove invarijante i date su sa

$$u - u_l = -\varphi(\rho), \tag{2.70}$$

$$u - u_l = \varphi(\rho). \tag{2.71}$$

Opšte krive iz kojih ćemo odrediti krive udarnih talasa prve i druge familije se dobijaju iz Rankin-Igonoovih uslova koji su ovde dati sa

$$\zeta\,(\rho - \rho_l) = \rho u - \rho_l u_l,$$

$$\zeta\,(\rho u - \rho_l u_l) = p(\rho) - p(\rho_l) + \rho u^2 - \rho_l u_l^2.$$

Sređivanjem dobijamo

$$u - u_l = -\sqrt{\frac{(\rho_l - \rho)(p(\rho_l) - p(\rho))}{\rho\rho_l}}, \tag{2.72}$$

$$u - u_l = \sqrt{\frac{(\rho_l - \rho)(p(\rho_l) - p(\rho))}{\rho\rho_l}}. \tag{2.73}$$

Za razliku od sistema u prethodnim odeljcima ovo nije sistem klase Temple, tj. opšte krive razređujućih talasa se ne poklapaju sa opštim krivama udarnih talasa u faznoj ravni. Ostaje uraditi odbacivanje delova kriva (2.70), (2.71), (2.72), (2.73).

Za razređujući talas prve familije treba da važi

$$\lambda_1((\rho_l, u_l)) < \lambda_1((\rho_r, u_r)).$$

Za razređujući talas druge familije treba da važi

$$\lambda_2((\rho_l, u_l)) < \lambda_2((\rho_r, u_r)).$$

Odatle dobijamo da su krive razređujućih talasa prve i druge familije

$$RW_1 : u - u_l = -\varphi(\rho),\, \rho \leq \rho_l,$$

$$RW_2 : u - u_l = \varphi(\rho),\, \rho \geq \rho_l.$$

Za krive udarnih talasa treba da važi Laksov kriterijum koji je ovde za prvi udarni talas dat sa

$$\zeta < \lambda_1((\rho_l,u_l)) < \lambda_2((\rho_l,u_l)),\ \lambda_1((\rho_r,u_r)) < \zeta < \lambda_2((\rho_r,u_r)),$$

a za drugi udarni talas sa

$$\lambda_1((\rho_l,u_l)) < \zeta < \lambda_2((\rho_l,u_l)),\ \lambda_1((\rho_r,u_r)) < \lambda_2((\rho_r,u_r)) < \zeta.$$

Na osnovu toga krive udarnih talasa prve i druge familije su

$$SW_1 : u - u_l = -\sqrt{\frac{(\rho_l-\rho)(p(\rho_l)-p(\rho))}{\rho\rho_l}},\ \rho_l \leq \rho,$$

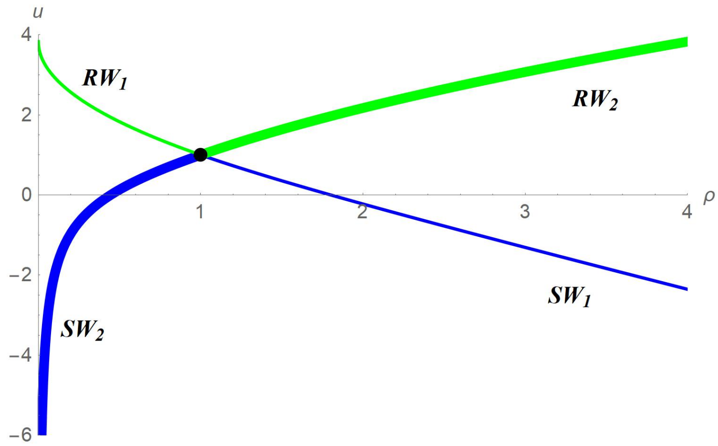
$$SW_2 : u - u_l = \sqrt{\frac{(\rho_l-\rho)(p(\rho_l)-p(\rho))}{\rho\rho_l}},\ \rho_l \geq \rho.$$

U poređenju sa sistemima (I)-(VI) iz prethodnih odeljaka, krive udarnih talasa ovde ne možemo eksplicitno izraziti preko Rimanovih invarijanti, dok krive razređujućih talasa možemo. One su date sa

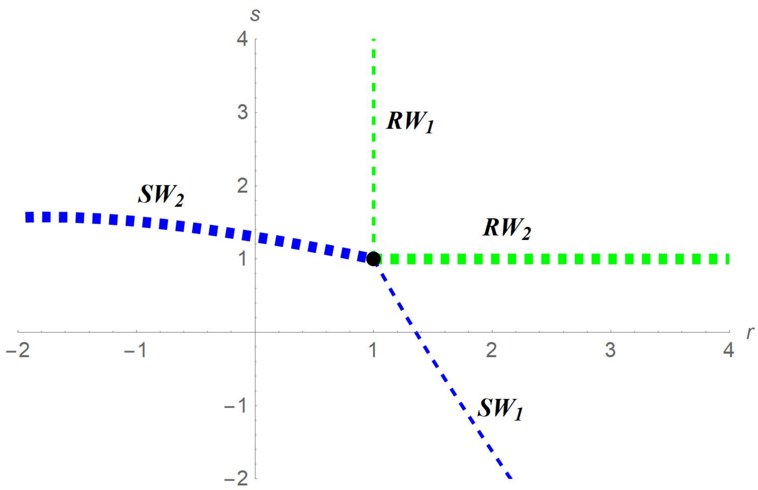
$$RW_1 : r = r_l,\ s \geq s_l,$$

$$RW_2 : s = s_l,\ r \geq r_l.$$

Krive razređujućih talasa RW_1, RW_2 i krive udarnih talasa SW_1, SW_2 preko početnih promenljivih (ρ,u) i preko Rimanovih invarijanti (r,s) date su na Slikama 2.13 i 2.14, respektivno. Napomenimo da su krive udarnih talasa na Slici 2.14 dobijene numerički.



Slika 2.13: Fazna ravan (ρ, u)



Slika 2.14: Fazna ravan(r, s)

2.2.7 Keyfitz-Kranzer sistem: $(VIII)$

Sistem dat u ovom odeljku potiče iz teorije elastičnosti kao i sistemi (I) i (II) iz Odeljka 2.1 i Odeljka 2.2.1, respektivno. Ali kao što ćemo videti, on ima potpuno različite osobine od njih. Do njega se dolazi kada se kvazilinearni sistem koji povezuje brzinu elastičnih talasa[6] i opterećenje, u homogenoj sredini konstantne gustine, prebaci u konzervativni oblik (videti detaljnije [27]). Sam sistem se može pronaći u [71] i [76]. U ovoj disertaciji ćemo ga označavati sa *sistem* $(VIII)$.

Sistem $(VIII)$ u konzervativnom obliku je dat sa

$$u_t + (u^2 - v)_x = 0, \tag{2.74}$$

$$v_t + \left(\frac{1}{3}u^3 - u\right)_x = 0. \tag{2.75}$$

Sistem $(VIII)$ u kvazilinearnom obliku je dat sa

$$u_t + 2uu_x - v_x = 0, \tag{2.76}$$

$$v_t - (u^2 - 1)\, u_x = 0. \tag{2.77}$$

Zapisom kvazilinearnog oblika u matričnoj formi (2.2) vidimo da je nesimetrična matrica sistema data sa

$$A = \begin{bmatrix} 2u & -1 \\ u^2 - 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Kao i u prethodnim odeljcima sada ćemo odrediti brojne osobine ovog sistema i pronaći elementarna rešenja Rimanovog problema (2.74), (2.75), (2.4).

- **Karakteristični koreni**

Karakteristične korene dobijamo rešavajući kvadratnu jednačinu po λ:

$$|\lambda I - A| = \lambda^2 - 2u\lambda + u^2 - 1 = 0.$$

Odatle dobijamo da su karakteristični koreni dati sa

$$\lambda_1 = u - 1,\ \lambda_2 = u + 1,$$

iz čega vidimo da je sistem $(VIII)$ uvek striktno hiperboličan.

[6] Elastični talasi predstavljaju talase koji se javljaju u elastičnim i viskoelastičnim materijalima.

• **Desni karakteristični vektori**

Desni karakteristični vektor koji odgovara karakterističnom korenu λ_1 se dobija iz

$$\begin{bmatrix} -1-u & 1 \\ 1-u^2 & u-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Odatle sledi da je $z_1 = \frac{z_2}{1+u}$, pa je desni karakteristični vektor koji odgovara karakterističnom korenu λ_1 dat sa

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1+u \end{bmatrix}.$$

Desni karakteristični vektor koji odgovara karakterističnom korenu λ_2 se dobija iz

$$\begin{bmatrix} 1-u & 1 \\ 1-u^2 & u+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Odatle sledi da je $z_1 = \frac{z_2}{u-1}$, pa je desni karakteristični vektor koji odgovara karakterističnom korenu λ_2 dat sa

$$R_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ u-1 \end{bmatrix}.$$

• **Levi karakteristični vektori**

Levi karakteristični vektor koji odgovara karakterističnom korenu λ_1 se dobija pomoću

$$\begin{bmatrix} -1-u & 1-u^2 \\ 1 & u-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Odatle dobijamo da je $z_2 = \frac{z_1}{1-u}$, pa je levi karakteristični vektor koji odgovara karakterističnom korenu λ_1 dat sa

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1-u \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Levi karakteristični vektor koji odgovara karakterističnom korenu λ_2 se dobija pomoću

$$\begin{bmatrix} 1-u & 1-u^2 \\ 1 & u+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Odatle dobijamo da je $z_1 = -z_2\,(1+u)$, pa je tako levi karakteristični vektor koji odgovara karakterističnom korenu λ_2 dat sa

$$L_2 = \begin{bmatrix} -1-u \\ 1 \end{bmatrix}.$$

• **Karakteristična forma sistema**

Pomoću kvazilinearnog oblika sistema $(VIII)$ datog u (2.76)-(2.77), kao i ranije njegovu karakterističnu formu dobijamo iz

$$\begin{bmatrix} 1-u \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}_t + \lambda_1 \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}_x \right) = 0,$$

$$\begin{bmatrix} -1-u \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}_t + \lambda_2 \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}_x \right) = 0.$$

Daljim sređivanjem dolazimo do

$$(1-u)u_t + v_t + \lambda_1 \left((1-u)u_x + v_x\right) = 0, \tag{2.78}$$

$$(-1-u)u_t + v_t + \lambda_2 \left((-1-u)u_x + v_x\right) = 0. \tag{2.79}$$

• **Rimanove invarijante**

Prvu Rimanovu invarijantu dobijamo iz $Dr\,R_1 = 0$, odnosno

$$(1+u)du = dv,$$

iz čega sledi da je

$$r = \frac{u^2}{2} + u - v.$$

Drugu Rimanovu invarijantu dobijamo iz $Ds\,R_2 = 0$, odnosno

$$(u-1)du = dv,$$

iz čega sledi da je

$$s = \frac{u^2}{2} - u - v.$$

Karakteristični koreni preko Rimanovih invarijanti: $\lambda_1 = \frac{r-s}{2} - 1$, $\lambda_2 = \frac{r-s}{2} + 1$.

Množenjem (2.78) sa -1 i (2.79) sa -1, dolazimo do dijagonalnog sistema (2.3) datog preko Rimanovih invarijanti.

• **Zaista nelinearnost**

Kako je $D\lambda_1 R_1 = 1 \neq 0$, prva familija je zaista nelinearna.

Takođe, $D\lambda_2 R_2 = 1 \neq 0$, pa je i druga familija zaista nelinearna.

• Određivanje elementarnih rešenja

Kako su obe familije zaista nelinearne, talasi koji će činiti skup elementarnih rešenja su razređujući i udarni talasi. Opšte krive iz kojih ćemo odrediti krive razređujućih talasa prve i druge familije se dobijaju iz prve i druge Rimanove invarijante i redom su date sa

$$v = \frac{u^2}{2} + u + v_l - \frac{u_l^2}{2} - u_l, \tag{2.80}$$

$$v = \frac{u^2}{2} - u + v_l - \frac{u_l^2}{2} + u_l. \tag{2.81}$$

Opšte krive iz kojih ćemo dobiti krive udarnih talasa prve i druge familije se dobijaju iz Rankin-Igonoovih uslova koji su ovde dati sa

$$\zeta\,(u - u_l) = (u^2 - v) - (u_l^2 - v_l),$$

$$\zeta\,(v - v_l) = \left(\frac{1}{3}u^3 - u\right) - \left(\frac{1}{3}u_l^3 - u_l\right).$$

Sređivanjem dolazimo do

$$v - v_l = (u - u_l)\left(\frac{u + u_l}{2} + \sqrt{1 - \frac{(u - u_l)^2}{12}}\right), \tag{2.82}$$

$$v - v_l = (u - u_l)\left(\frac{u + u_l}{2} - \sqrt{1 - \frac{(u - u_l)^2}{12}}\right). \tag{2.83}$$

Primetimo da ovde imamo ograničenje $|u - u_l| \leq \sqrt{12}$. Od ove dve krive treba odrediti koja je kriva iz koje ćemo dobiti prvi udarni talas, a iz koje drugi. Da bi to uradili prvo treba odrediti brzinu ζ iz Rankin-Igonoovih uslova i nakon toga odrediti limes dobijene brzine ζ kad $u \to u_l$. Na osnovu toga koji karakteristični koren dobijemo kao granicu limesa brzine u tački u_l, određujemo tražene krive. Više detalja o ovoj tehnici se nalazi u [44]. Naravno istu tehniku smo mogli primeniti i u prethodnom odeljku. Dakle, na ovaj način dobijamo

$$\lim_{u \to u_l}\left(u_l + \frac{u - u_l}{2} - \sqrt{1 - \frac{(u - u_l)^2}{12}}\right) = u_l - 1,$$

$$\lim_{u \to u_l}\left(u_l + \frac{u - u_l}{2} + \sqrt{1 - \frac{(u - u_l)^2}{12}}\right) = u_l + 1.$$

Pri tome smo za dobijanje brzine u prvom limesu koristili krivu (2.82), a u drugom limesu krivu (2.83). Iz toga sledi da je kriva iz koje se dobija prvi udarni talas data sa

$$v - v_l = (u - u_l)\left[\frac{u+u_l}{2} + \sqrt{1 - \frac{(u-u_l)^2}{12}}\right], \tag{2.84}$$

dok je kriva iz koje se dobija drugi udarni talas data sa

$$v - v_l = (u - u_l)\left[\frac{u+u_l}{2} - \sqrt{1 - \frac{(u-u_l)^2}{12}}\right]. \tag{2.85}$$

Sistem $(VIII)$ nije sistem klase Temple, jer se opšte krive razređujućih talasa ne poklapaju sa opštim krivama udarnih talasa. Sada još treba da uradimo odbacivanja delova kriva (2.80), (2.81), (2.84), (2.85).

Za razređujući talas prve familije treba da važi

$$\lambda_1((u_l, v_l)) < \lambda_1((u_r, v_r)),$$

pa je kriva razređujućeg talasa prve familije data sa

$$RW_1 : \, v = \frac{u^2}{2} + u + v_l - \frac{u_l^2}{2} - u_l, \, u \geq u_l.$$

Za razređujući talas druge familije treba da važi

$$\lambda_2((u_l, v_l)) < \lambda_2((u_r, v_r)),$$

pa je kriva razređujućeg talasa druge familije data sa

$$RW_2 : \, v = \frac{u^2}{2} - u + v_l - \frac{u_l^2}{2} + u_l, \, u \geq u_l.$$

Za krivu udarnog talasa prve familije treba da važi Laksov kriterijum koji je ovde dat sa

$$\zeta < \lambda_1((u_l, v_l)) < \lambda_2((u_l, v_l)), \, \lambda_1((u_r, v_r)) < \zeta < \lambda_2((u_r, v_r)).$$

Na osnovu njega kriva udarnog talasa prve familije je

$$SW_1 : \, v - v_l = (u - u_l)\left[\frac{u+u_l}{2} + \sqrt{1 - \frac{(u-u_l)^2}{12}}\right], \, u \leq u_l.$$

Za krivu udarnog talasa druge familije takođe treba da važi Laksov kriterijum koji je ovde dat sa

$$\lambda_1((u_l,v_l)) < \zeta < \lambda_2((u_l,v_l)),\ \lambda_1((u_r,v_r)) < \lambda_2((u_r,v_r)) < \zeta,$$

Na osnovu njega kriva udarnog talasa druge familije je

$$SW_2:\ v - v_l = (u-u_l)\left[\frac{u+u_l}{2} - \sqrt{1-\frac{(u-u_l)^2}{12}}\right],\ u \le u_l.$$

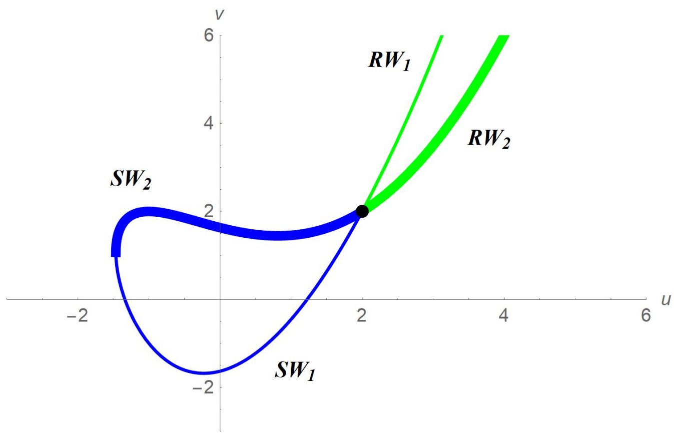
Za obe krive udarnih talasa uzimamo i dodatno ograničenje $u_l - 3 \le u$. Ono je nastalo jer u nekim tačkama faznih ravni (u,v) i (r,s) nema rešenja (vidimo da na Slikama 2.15 i 2.16 iz (u_l,v_l) i (r_l,s_l), ne možemo dosegnuti sve tačke u faznoj ravni). Videti detaljnije [76].

Kao i u slučaju izentropskog sistema (VII), krive udarnih talasa ne možemo izraziti preko Rimanovih invarijanti, dok krive razređujućih talasa možemo

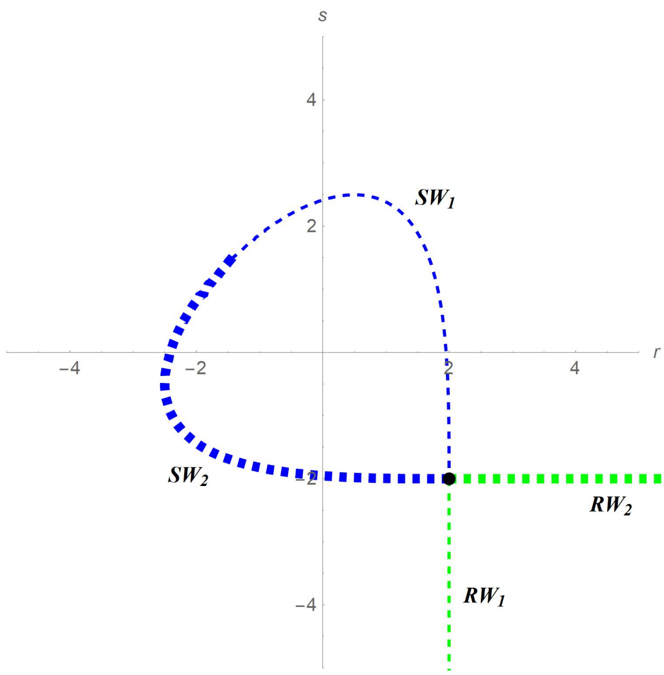
$$RW_1:\ r = r_l,\ s \ge s_l,$$

$$RW_2:\ s = s_l,\ r \ge r_l.$$

Krive razređujućih talasa RW_1, RW_2 i krive udarnih talasa SW_1, SW_2 preko početnih promenljivih (u,v) i preko Rimanovih invarijanti (r,s) su date na Slikama 2.15 i 2.16, respektivno. Napomenimo da su krive udarnih talasa preko Rimanovih invarijanti ponovo dobijene numerički.



Slika 2.15: Fazna ravan (u, v)



Slika 2.16: Fazna ravan (r, s)

2.2.8 Born-Infeld sistem: (IX)

Born-Infeld sistem potiče iz teorije elektrodinamike.[7] Zbog svog specifičnog oblika treba napomenuti da ima više osobina koje važe samo za njega, a koje ne važe za ostale sisteme zakona održanja navedene ovde. Ali time se ovde nećemo baviti. Sistem dat u ovom odeljku potiče iz [112] i u ovoj disertaciji ćemo ga označavati kao *sistem* (IX). U kvazilinearnom obliku je dat sa

$$u_t + v\,u_x = 0, \tag{2.86}$$

$$v_t + u\,v_x = 0. \tag{2.87}$$

Ovaj sistem je dijagonalan, tj. nije u konzervativnom obliku. Ali to ne predstavlja nikakav problem jer sistem (IX) ima beskonačno mnogo konzervativnih oblika (videti [16], [17]). Samim tim, iako ova forma nije konzervativna, ona je dovoljna za definisanje po delovima glatkih slabih rešenja, dakle onih koja se tiču Rimanovih problema (videti detaljnije [112]).

Matrica sistema (IX) je simetrična i data je sa

$$A = \begin{bmatrix} v & 0 \\ 0 & u \end{bmatrix}.$$

Kao i u prethodnim odeljcima sada ćemo odrediti brojne osobine ovog sistema i rešiti Rimanov problem (2.86), (2.87), (2.4).

- **Karakteristični koreni**

Kako je

$$|\lambda I - A| = (\lambda - u)(\lambda - v) = 0,$$

odatle sledi da su karakteristični koreni sistema (IX) dati sa

$$\lambda_1 = v,\ \lambda_2 = u.$$

Kod striktno hiperboličkih sistema uvek uzimamo da je $\lambda_1 < \lambda_2$, a ovde to ne možemo uraditi jer ne znamo odnos v i u. Iz toga vidimo da sistem (IX) nije uvek striktno hiperboličan. Pošto smo u svim prethodnim odeljcima imali striktno hiperbolične sisteme, u nastavku ćemo pretpostavljati da je $v < u$.

[7] Disciplina koja proučava interakciju između struja i magnetnih polja ili drugih struja.

• Desni karakteristični vektori

Desni karakteristični vektor koji odgovara karakterističnom korenu λ_1 se dobija iz

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & v-u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Odatle dobijamo da je $z_2 = 0$, pa je tako desni karakteristični vektor koji odgovara karakterističnom korenu λ_1 dat sa

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Desni karakteristični vektor koji odgovara karakterističnom korenu λ_2 se dobija iz

$$\begin{bmatrix} u-v & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Odatle dobijamo da je $z_1 = 0$, pa je tako desni karakteristični vektor koji odgovara karakterističnom korenu λ_2 dat sa

$$R_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

• Levi karakteristični vektori

Matrica sistema (IX) je simetrična, pa su levi i desni karakteristični vektori jednaki, tj.

$$L_1 = R_1, \, L_2 = R_2.$$

• Karakteristična forma sistema

Karakterističnu formu sistema (IX) dobijamo iz

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}_t + \lambda_1 \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}_x \right) = 0,$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}_t + \lambda_2 \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}_x \right) = 0,$$

čijim sređivanjem dolazimo do

$$u_t + \lambda_1 u_x = 0, \tag{2.88}$$

$$v_t + \lambda_2 v_x = 0. \tag{2.89}$$

• **Rimanove invarijante**

Prvu Rimanovu invarijantu dobijamo iz $Dr\,R_1 = 0$, iz čega sledi da je

$$r = v.$$

Drugu Rimanovu invarijantu dobijamo iz $Ds\,R_2 = 0$, iz čega sledi da je

$$s = u.$$

Izgled karakterističnih korena preko Rimanovih invarijanti: $\lambda_1 = r$, $\lambda_2 = s$.

Množenjem (2.88) sa 1 i (2.89) sa 1, dolazimo do dijagonalnog sistema (2.3) datog preko Rimanovih invarijanti.

• **Zaista nelinearnost**

Kako je $D\lambda_1 R_1 = 0$, prva familija je linearno degenerisana.

Takođe, $D\lambda_2 R_2 = 0$, pa je i druga familija linearno degenerisana.

• **Određivanje elementarnih rešenja**

Kako su obe familije linearno degenerisane, talasi koji će činiti elementarna rešenja za obe familije su kontaktni diskontinuiteti.

Kriva kontaktnog diskontinuiteta za prvu familiju se dobija iz

$$\lambda_1((u_l, v_l)) = \lambda_1((u_r, v_r)).$$

Kriva kontaktnog diskontinuiteta za drugu familiju se dobija iz

$$\lambda_2((u_l, v_l)) = \lambda_2((u_r, v_r)).$$

Odatle odmah sledi da su krive kontaktnih diskontinuiteta date sa

$$CD_1 : \ v = v_l,$$

$$CD_2 : \ u = u_l.$$

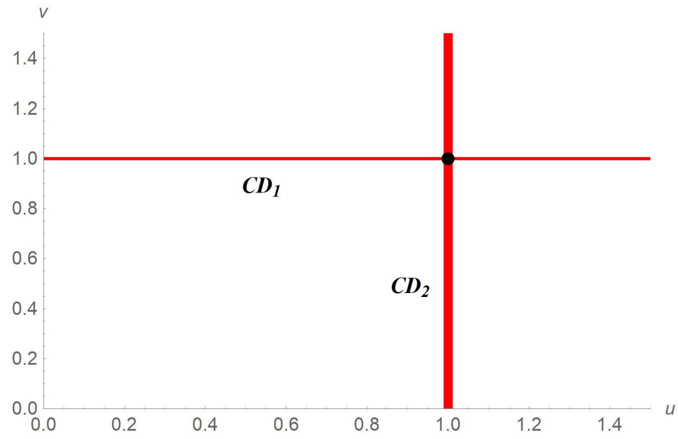
Ovde ne možemo govoriti o sistemu klase Temple, jer uopšte nemamo krive udarnih i razređujućih talasa.

Krive CD_1 i CD_2 su preko Rimanovih invarijanti date sa

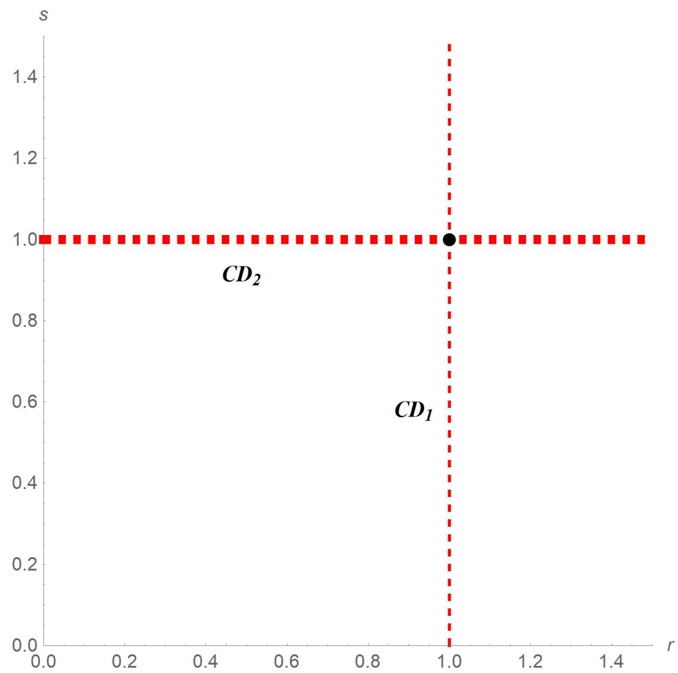
$$CD_1 : r = r_l,$$

$$CD_2 : s = s_l.$$

Krive CD_1 i CD_2 preko početnih promenljivih (u, v) i preko Rimanovih invarijanti (r, s) su date na Slikama 2.17 i 2.18, respektivno.



Slika 2.17: Fazna ravan (u, v)



Slika 2.18: Fazna ravan (r, s)

2.3 Sumirane osobine sistema (I)-(IX)

U ovom odeljku su na jednom mestu date sve veličine i svi rezultati do kojih smo došli u ovoj glavi za svaki od sistema (I)-(IX).

- **Sistem (I):**

$$u_t + \left((u^2+v^2)\,u\right)_x = 0,$$
$$v_t + \left((u^2+v^2)\,v\right)_x = 0.$$

Veličine:

Matrica sistema:

$$\begin{bmatrix} 3u^2+v^2 & 2uv \\ 2uv & u^2+3v^2 \end{bmatrix}.$$

Striktna hiperboličnost: uvek za $u \geq 0$, $v \geq 0$, $(u,v) \neq (0,0)$.

Karakteristični koreni: $\lambda_1 = u^2+v^2$, $\lambda_2 = 3(u^2+v^2)$.

Desni karakteristični vektori: $R_1 = (v,-u)^T$, $R_2 = (u,v)^T$.

Levi karakteristični vektori: $L_1 = R_1$, $L_2 = R_2$.

Rimanove invarijante: $r = \frac{u^2+v^2}{2}$, $s = \frac{u}{v}$.

Zaista nelinearnost: prva familija je linearno degenerisana; druga familija je zaista nelinearna.

Krive elementarnih rešenja Rimanovog problema:

$CD_1 : \; v = \sqrt{u_l^2+v_l^2-u^2}$, $u^2 \leq u_l^2+v_l^2$,

$RW_2 : \; v = \frac{v_l}{u_l}u$, $u \geq u_l$,

$SW_2 : \; v = \frac{v_l}{u_l}u$, $u \leq u_l$,

odnosno

$CD_1 : \; r = r_l$,

$RW_2 : \; s = s_l$, $r \geq r_l$,

$SW_2 : \; s = s_l$, $r \leq r_l$.

- **Sistem (II):**

$$u_t + \left(v\,u^2\right)_x = 0,$$
$$v_t + \left(u\,v^2\right)_x = 0.$$

Veličine:

Matrica sistema:

$$\begin{bmatrix} 2uv & u^2 \\ v^2 & 2uv \end{bmatrix}.$$

Striktna hiperboličnost: uvek za $u > 0$, $v > 0$.

Karakteristični koreni: $\lambda_1 = uv$, $\lambda_2 = 3uv$.

Desni karakteristični vektori: $R_1 = (-\frac{u}{v}, 1)^T$, $R_2 = (\frac{u}{v}, 1)^T$.

Levi karakteristični vektori: $L_1 = (-\frac{v}{u}, 1)^T$, $L_2 = (\frac{v}{u}, 1)^T$.

Rimanove invarijante: $r = uv$, $s = \frac{u}{v}$.

Zaista nelinearnost: prva familija je linearno degenerisana; druga familija je zaista nelinearna.

Krive elementarnih rešenja Rimanovog problema:

$CD_1 :\ v = \frac{u_l v_l}{u}$,

$RW_2 :\ v = \frac{v_l}{u_l} u,\ u \geq u_l$,

$SW_2 :\ v = \frac{v_l}{u_l} u,\ u \leq u_l$,

odnosno

$CD_1 :\ r = r_l$,

$RW_2 :\ s = s_l,\ r \geq r_l$,

$SW_2 :\ s = s_l,\ r \leq r_l$.

- **Sistem** (III)**:**

$$u_t + \left(\frac{u}{1+u+v}\right)_x = 0,$$
$$v_t + \left(\frac{v}{1+u+v}\right)_x = 0.$$

Veličine:

Matrica sistema:
$$\frac{1}{(1+u+v)^2}\begin{bmatrix} 1+v & -u \\ -v & 1+u \end{bmatrix}.$$

Striktna hiperboličnost: uvek za $u > 0$, $v > 0$.

Karakteristični koreni: $\lambda_1 = \frac{1}{(1+u+v)^2}$, $\lambda_2 = \frac{1}{1+u+v}$.

Desni karakteristični vektori: $R_1 = (\frac{u}{v}, 1)^T$, $R_2 = (-1, 1)^T$.

Levi karakteristični vektori: $L_1 = (1, 1)^T$, $L_2 = (-\frac{v}{u}, 1)^T$.

Rimanove invarijante: $r = \frac{u}{v}$, $s = u + v$.

Zaista nelinearnost: prva familija je zaista nelinearna; druga familija je linearno degenerisana.

Krive elementarnih rešenja Rimanovog problema:

$RW_1 : \; v = \frac{v_l}{u_l}u, \; u \leq u_l,$

$SW_1 : v = \frac{v_l}{u_l}u, \; u \geq u_l,$

$CD_2 : \; v = u_l + v_l - u,$

odnosno

$RW_1 : \; r = r_l, \; s \leq s_l,$

$SW_1 : \; r = r_l, \; s \geq s_l,$

$CD_2 : \; s = s_l.$

- **Sistem (IV):**

$$v_t + \left(\frac{v}{1+v}\right)_x = 0,$$

$$w_t + \left(\frac{w}{1+v}\right)_x = 0.$$

Veličine:

Matrica sistema:

$$\frac{1}{(1+v)^2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -w & 1+v \end{bmatrix}.$$

Striktna hiperboličnost: uvek za $v > 0$.

Karakteristični koreni: $\lambda_1 = \frac{1}{(1+v)^2}$, $\lambda_2 = \frac{1}{(1+v)}$.

Desni karakteristični vektori: $R_1 = (\frac{v}{w}, 1)^T$, $R_2 = (0,1)^T$.

Levi karakteristični vektori: $L_1 = (1,0)^T$, $L_2 = (-\frac{w}{v}, 1)^T$.

Rimanove invarijante: $r = \frac{w}{v}$, $s = v$.

Zaista nelinearnost: prva familija je zaista nelinearna; druga familija je linearno degenerisana.

Krive elementarnih rešenja Rimanovog problema:

$RW_1 : v = \frac{v_l}{w_l} w,\ v \leq v_l,$

$SW_1 : v = \frac{v_l}{w_l} w,\ v \geq v_l,$

$CD_2 : v = v_l,$

odnosno

$RW_1 : r = r_l,\ s \leq s_l,$

$SW_1 : r = r_l,\ s \geq s_l,$

$CD_2 : s = s_l.$

- **Sistem** (V)**:**

$$u_t = 0,$$
$$v_t + \left(\frac{kv}{1+u+v}\right)_x = 0.$$

Veličine:

Matrica sistema:
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{-kv}{(1+u+v)^2} & \frac{k(1+u)}{(1+u+v)^2} \end{bmatrix}.$$

Striktna hiperboličnost: uvek za $u \geq 0$, $v \geq 0$, $k \in (0,1]$.

Karakteristični koreni: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \frac{k(1+u)}{(1+u+v)^2}$.

Desni karakteristični vektori: $R_1 = (u+1,v)^T$, $R_2 = (0,1)^T$.

Levi karakteristični vektori: $L_1 = (1,0)^T$, $L_2 = (-v,u+1)^T$.

Rimanove invarijante: $r = \frac{v}{1+u}$, $s = u$.

Zaista nelinearnost: prva familija je linearno degenerisana; druga familija je zaista nelinearna.

Krive elementarnih rešenja Rimanovog problema:

$CD_1 :\ v = \frac{v_l}{1+u_l}(1+u)$,

$RW_2 :\ u = u_l,\ v \leq v_l$,

$SW_2 :\ u = u_l,\ v \geq v_l$,

odnosno

$CD_1 :\ r = r_l$,

$RW_2 :\ s = s_l, r \leq r_l$,

$SW_2 :\ s = s_l,\ r \geq r_l$.

- **Sistem (VI):**

$$u_t + \left(\frac{a\,u}{u+v}\right)_x = 0,$$
$$v_t + \left(\frac{b\,v}{u+v}\right)_x = 0.$$

Veličine:

Matrica sistema:

$$\frac{1}{(u+v)^2}\begin{bmatrix} av & -au \\ -bv & bu \end{bmatrix}.$$

Striktna hiperboličnost: uvek za $u \geq 0$, $v \geq 0$, $(u,v) \neq (0,0)$, $0 < a < b$.

Karakteristični koreni: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \frac{av+bu}{(u+v)^2}$.

Desni karakteristični vektori: $R_1 = (\frac{u}{v}, 1)^T$, $R_2 = (-\frac{a}{b}, 1)^T$.

Levi karakteristični vektori: $L_1 = (\frac{b}{a}, 1)^T$, $L_2 = (-\frac{v}{u}, 1)^T$.

Rimanove invarijante: $r = \frac{u}{v}$, $s = \frac{u}{a} + \frac{v}{b}$.

Zaista nelinearnost: prva familija je linearno degenerisana; druga familija je zaista nelinearna.

Krive elementarnih rešenja Rimanovog problema:

$CD_1 :\ v = \frac{v_l}{u_l} u$,

$RW_2 :\ v = v_l + (u_l - u)\frac{b}{a}$, $u \geq u_l$,

$SW_2 :\ v = v_l + (u_l - u)\frac{b}{a}$, $u \leq u_l$,

odnosno

$CD_1 :\ r = r_l$,

$RW_2 :\ s = s_l$, $r \geq r_l$,

$SW_2 :\ s = s_l$, $r \leq r_l$.

- **Sistem** (VII)**:**

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0,$$
$$(\rho u)_t + (\rho u^2 + p(\rho))_x = 0.$$

Veličine:

Matrica sistema:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ c^2 - u^2 & 2u \end{bmatrix}, \text{ gde je } \; c = \sqrt{p'}.$$

Striktna hiperboličnost: uvek za $p' > 0$.

Karakteristični koreni: $\lambda_1 = u - c$, $\lambda_2 = u + c$.

Desni karakteristični vektori:$R_1 = (1, u - c)^T$, $R_2 = (1, u + c)^T$.

Levi karakteristični vektori: $L_1 = (-u - c, 1)^T$, $L_2 = (-u + c, 1)^T$.

Rimanove invarijante: $r = u + \varphi(\rho)$, $s = u - \varphi(\rho)$, gde je $\varphi(\rho) = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{c}{z} dz$.

Zaista nelinearnost: za $2p' + \rho p'' > 0$ obe familije su zaista nelinearne.

Krive elementarnih rešenja Rimanovog problema:

$RW_1 : \; u - u_l = -\varphi(\rho)$, $\rho \leq \rho_l$,

$RW_2 : \; u - u_l = \varphi(\rho)$, $\rho \geq \rho_l$,

$SW_1 : \; u - u_l = -\sqrt{\frac{(\rho - \rho_l)(p(\rho) - p(\rho_l))}{\rho \rho_l}}$, $\rho \geq \rho_l$,

$SW_2 : \; u - u_l = \sqrt{\frac{(\rho - \rho_l)(p(\rho) - p(\rho_l))}{\rho \rho_l}}$, $\rho \leq \rho_l$,

odnosno

$RW_1 : \; r = r_l$, $s \geq s_l$,

$RW_2 : \; s = s_l$, $r \geq r_l$.

- **Sistem $(VIII)$:**

$$u_t + (u^2 - v)_x = 0,$$
$$v_t + \left(\frac{1}{3}u^3 - u\right)_x = 0.$$

Veličine:

Matrica sistema:
$$\begin{bmatrix} 2u & -1 \\ u^2 - 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Striktna hiperboličnost: uvek.

Karakteristični koreni: $\lambda_1 = u - 1$, $\lambda_2 = u + 1$.

Desni karakteristični vektori: $R_1 = (1, u+1)^T$, $R_2 = (1, u-1)^T$.

Levi karakteristični vektori: $L_1 = (1-u, 1)^T$, $L_2 = (-1-u, 1)^T$.

Rimanove invarijante: $r = \frac{u^2}{2} + u - v$, $s = \frac{u^2}{2} - u - v$.

Zaista nelinearnost: obe familije su zaista nelinearne.

Krive elementarnih rešenja Rimanovog problema:

$RW_1 : \ v = \frac{u^2}{2} + u + v_l - \frac{u_l^2}{2} - u_l$, $u \geq u_l$,

$RW_2 : \ v = \frac{u^2}{2} - u + v_l - \frac{u_l^2}{2} + u_l$, $u \geq u_l$,

$SW_1 : \ v - v_l = (u - u_l)[\frac{u+u_l}{2} + \sqrt{1 - \frac{(u-u_l)^2}{12}}]$, $u_l - 3 \leq u \leq u_l$,

$SW_2 : \ v - v_l = (u - u_l)[\frac{u+u_l}{2} - \sqrt{1 - \frac{(u-u_l)^2}{12}}]$, $u_l - 3 \leq u \leq u_l$,

odnosno

$RW_1 : \ r = r_l$, $s \geq s_l$,

$RW_2 : \ s = s_l$, $r \geq r_l$.

- **Sistem** (IX)**:**

$$u_t + v\,u_x = 0,$$
$$v_t + u\,v_x = 0.$$

Veličine:

Matrica sistema:

$$\begin{bmatrix} v & 0 \\ 0 & u \end{bmatrix}.$$

Striktna hiperboličnost: samo uz pretpostavku $v < u$.

Karakteristični koreni: $\lambda_1 = v$, $\lambda_2 = u$.

Desni karakteristični vektori: $R_1 = (1,0)^T$, $R_2 = (0,1)^T$.

Levi karakteristični vektori: $L_1 = R_1$, $L_2 = R_2$.

Rimanove invarijante: $r = v$, $s = u$.

Zaista nelinearnost: obe familije su linearno degenerisane.

Krive elementarnih rešenja Rimanovog problema:

$CD_1 : v = v_l,$

$CD_2 : u = u_l,$

odnosno

$CD_1 : r = r_l,$

$CD_2 : s = s_l.$

Glava 3

Stohastički sistem

Zamislimo da posmatramo neki početni problem vezan za proizvoljnu PDJ ili sistem PDJ. Pitanje koje se postavlja u ovoj disertaciji je: ako dodamo stohastičke procese u sam početni problem, da li možemo dobiti bolja rešenja na neki način tj. imati regularizaciju šumom. U svakom slučaju i sa i bez regularizacije, sami stohastički problemi su jako interesantni. Možemo ih posmatrati kao aproksimacije determinističkih problema i onda pokušati da zaključimo nešto o originalnom determinističkom problemu, i možemo ih posmatrati same za sebe. Lep osvrt na regularizaciju šumom u literaturi je dat u [11], [41], [50]. Transportna jednačina se smatra prvim primerom jednačine u dinamici fluida gde imamo primer eksplicitne regularizacije šumom (videti [48]). A stohastički procesi u zakonima održanja se najčešće sreću kao stohastički izvor ([9], [20], [28], [37], [47], [72]), kao stohastički početni uslovi ([90], [91], [100], [123]), kao perturbacija fluksa ([30], [97], [98], [114]), ili kao perturbacija komponente prostora ([2], [74], [75], [105]). Za druge primere vezane za numerička izračunavanja u dinamici fluida videti [14].

Kao što smo već spomenuli deterministički Rimanovi problemi nemaju jaka rešenja definisana u svakoj tački već imaju slaba rešenja u PDJ smislu data pomoću test funkcija. Ako u deterministički sistem ubacimo adekvatne stohastičke procese, možemo li dobiti rešenja koja nisu data pomoću test funkcija? Zahvaljujući radu [72] odgovor na ovo pitanje je potvrdan. U ovoj glavi ćemo uzeti proizvoljan deterministički sistem iz prethodne glave i od njega konstruisati novi sistem koristeći primarno stohastički izvor. Tako dobijamo novi aproksimativni problem koji ima jaka rešenja u PDJ smislu. Početni problemi za sisteme (I)-(IX) imaju slaba entropijska rešenja u BV prostorima (na primer, videti [40]). Sa druge strane, novi stohastički problem će imati jaka rešenja u PDJ smislu sa vrednostima u prostorima Soboljeva. Dakle, ovo je jedan od primera kako stohastičke perturbacije mogu dovesti do regularnijih rešenja. Ova glava je zasnovana na radu [72], i uz neke originalne promene u samim dokazima, blisko prati njegovu strukturu.

Rad [72] proučava Košijev problem dat u sledećem obliku

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \sum_{j=1}^{d} A_j(t,x,U)\,\frac{\partial U}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^{\infty} f_j(U)\frac{dB_j}{dt}, \tag{3.1}$$

$$U(0,x) = U_0. \tag{3.2}$$

Pri tome $U \in \mathbb{R}^p$, $x \in \mathbb{R}^d$, $t \in [0,\infty)$, A_j su simetrične p x p matrice, $\{B_j\}_{j=1}^{\infty}$ je niz nezavisnih standardnih Braunovih kretanja i

$$\sum_{j=1}^{\infty} f_j(U)\frac{dB_j}{dt} \text{ je uobičajeni zapis za } \frac{\partial}{\partial t}\sum_{j=1}^{\infty}\int_0^t f_j(U)dB_j.$$

Napomenimo da se beli šum, koji je (neformalno) izvod Braunovog kretanja, ne može definisati u konkretnoj tački već samo u integralu.

U ovoj disertaciji se bavimo sistemima reda dva u jednoj dimenziji, pa je $p = 2$ i $d = 1$. I da bi malo pojednostavili zapise, desnu stranu problema (3.1)-(3.2) ćemo pisati skraćeno kao

$$f(U)\frac{dB}{dt}, \tag{3.3}$$

gde je $f = (f_1, f_2)^T$. Zapis (3.3) se u suštini može odnositi na zbir konačno ili beskonačno mnogo belih šumova ili na samo jedan. Rezultati će biti isti u svakom slučaju. Da bi primenili rezultate iz [72] na Rimanove probleme za determinističke sisteme (I)-(IX) iz prethodne glave, treba dodati stohastički izvor, simetrizovati početni sistem i aproksimirati početne uslove. Sam redosled ovih koraka je proizvoljan (ovaj redosled je izabran zbog same prezentacije). Stohastički Košijev problem (3.4)-(3.6) koji dobijemo na kraju je ono što je važno. Dakle, uzmimo proizvoljan deterministički sistem iz prethodne glave u konzervativnom obliku (2.1) uz Rimanove početne uslove (2.4) i potom radimo sledeće:

(a) Desnoj strani konkretnog determinističkog sistema dodajemo stohastički šum u obliku (3.3). Napomenimo da ćemo u narednoj glavi ovde imati i ε ispred jer ćemo raditi limes kad šum nestaje.[1] U ovoj glavi u suštini pretpostavljamo da je $\varepsilon = 1$ pa to ne pišemo.

(b) Rad [72] se bavi simetričnim sistemima. Da bi dobili simetrični sistem, transformisaćemo originalni sistem sa dodatkom stohastičkog izvora iz (a) u dijagonalni sistem dat preko Rimanovih invarijanti (2.3). Ovom transformacijom početni šum (3.3) se menja takođe (zbog različitih karakterističnih vektora i

[1] eng. Zero-noise limit.

integracionih faktora u svakom sistemu na neki drugi način). Novi izvor će zadovoljavati uslove date u narednom odeljku.[2]

(c) Početni uslovi u [72] imaju vrednosti u Soboljevim prostorima H^m, $m \geq 3$ datim na celom skupu $\mathbb{R}$. To znači da početni uslovi treba da imaju vrednost nula u beskonačnosti i da su bar dva puta neprekidno diferencijabilni. Zato ćemo Rimanove početne uslove odseći na $x \in [-\beta, \beta]$, za $\beta > 0$ dovoljno veliko. Van intervala $[-\beta, \beta]$ početni uslovi će onda biti jednaki nuli. I pošto su Rimanovi početni uslovi prekidni, nakon odsecanja uglačaćemo ih dovoljno korišćenjem molifajera.[3, 4] Za više informacija o molifajerima videti Napomenu 3.6.1.

Nakon primene koraka (a)-(c) dolazimo do problema koji ćemo proučavati u ovoj glavi:

$$\begin{bmatrix} s \\ r \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} \lambda_1(s,r) & 0 \\ 0 & \lambda_2(s,r) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ r \end{bmatrix}_x = \begin{bmatrix} l_1(s,r)\frac{dB}{dt} \\ l_2(s,r)\frac{dB}{dt} \end{bmatrix}, \tag{3.4}$$

$$s\,|_{t=0} = s_0, \tag{3.5}$$

$$r\,|_{t=0} = r_0. \tag{3.6}$$

Ovde imamo simetričnu dijagonalnu matricu sistema, odgovarajući multiplikativni šum sa desne strane i dovoljno glatke početne uslove. Dakle, preduslovi za primenu rada [72] su zadovoljeni. I kada u ovoj glavi kažemo stohastička perturbacija ili stohastička aproksimacija originalnih determinističkih Rimanovih problema mislimo na početne probleme oblika (3.4)-(3.6).

U problemu (3.4)-(3.6) imamo simetrični sistem, a oni se u poređenju sa opštim sistemima zakona održanja ne sreću tako često u literaturi (za determinističke probleme videti [8], [33], [69], [77], [85]; za stohastičke probleme videti [19], [21], [72]). Ali po [33] većina jednačina matematičke fizike se može zapisati u nekom obliku simetričnog konzervativnog sistema zakona održanja, što govori mnogo o mogućnostima primene rezultata rada [72].

Sistemi dati preko Rimanovih invarijanti se manje proučavaju ali ih možemo pronaći na primer u [39], [118], [119] za determinističke, i u [105] za stohastičke sisteme. Same Rimanove invarijante se češće koriste u tehnikama dokazivanja (videti na primer [35]).

---

[2] Početna fukcija f može biti na primer iz prostora $C_b(\mathbb{R})$. Važno je samo da novi izvor nakon koraka (b) zadovoljava uslove date u Odeljku 3.1.

[3] U Glavi 4 ćemo posebno obeležiti početne uslove nakon odsecanja i početne uslove nakon odsecanja i uglačavanja. U ovoj glavi nam to nije neophodno.

[4] Vrlo često je gotovo nemoguće odrediti precizno početne uslove, pa se oni aproksimiraju. Videti detaljnije [14], [91]. Na primer u modelu plitke vode koji se koristi za predviđanje kretanja cunamija i koji je zasnovan na sistemu (VII), nemoguće je izmeriti inicijalno pomeranje vode na izvoru cunamija.

3.1 Pretpostavke

Neka je kroz celu ovu glavu data stohastička baza $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P)$. Pretpostavimo da je filtracija $\{\mathcal{F}_t\}$ desno neprekidna i $\{\mathcal{F}_0\}$ sadrži sve P-zanemarljive skupove iz σ-algebre $\mathcal{F}$ (u literaturi se ovi uslovi za filtraciju često nazivaju *uobičajeni uslovi*).

Stohastička rešenja koja ćemo proučavati ovde će imati vrednosti u Soboljevim prostorima $W^{m,2}(\mathbb{R}) := H^m(\mathbb{R})$. A pošto će se sve naredne procene, teoreme i definicije odnositi na konkretno m, na početku fiksiramo pozitivan ceo broj $m \geq 3$. Više informacija o stohastičkim procesima sa vrednostima u Hilbertovim prostorima se može pronaći u [34], [106].

Matrica sistema $A(s,r)$ u (3.4) je simetrična matrica takva da $A(s,r) \in C^m(\mathbb{R}^2)$, i za svako $K > 0$, postoji pozitivna konstanta C_K tako da za svako α_1, α_2, α_3 za koje je $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \leq m$ i za sve $|(s,r)| \leq K$ važi

$$|\partial_x^{\alpha_1} \partial_r^{\alpha_2} \partial_s^{\alpha_3} A(s,r)| \leq C_K.$$

Funkcije $l_1(s,r)$, $l_2(s,r)$ koje su date uz izvod Braunovog kretanja u (3.4) su Lipšic neprekidne funkcije koje preslikavaju $H^k(\mathbb{R})$ u $H^k(\mathbb{R})$ za $k = 1, ..., m$. Zbog procena u narednim odeljcima, neka za $k = 1, ..., m$ važe sledeće nejednakosti:

$$\sum_{\alpha \leq k} \int_{\mathbb{R}} \left(|\partial_x^\alpha l_1(0,0)|^2 + |\partial_x^\alpha l_2(0,0)|^2 \right) dx \leq \eta_1, \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned} &\sum_{\alpha \leq k} \int_{\mathbb{R}} \left(|\partial_x^\alpha \left(l_1(v_1,v_2) - l_1(w_1,w_2) \right)|^2 + |\partial_x^\alpha \left(l_2(v_1,v_2) - l_2(w_1,w_2) \right)|^2 \right) dx \\ &\qquad \leq \eta_2 \sum_{\alpha \leq k} \int_{\mathbb{R}} \left(|\partial_x^\alpha (v_1 - w_1)|^2 + |\partial_x^\alpha (v_2 - w_2)|^2 \right) dx, \end{aligned} \tag{3.8}$$

gde su η_1 i η_2 pozitivne konstante nezavisne od $v_1, v_2, w_1, w_2 \in H^k(\mathbb{R})$, $k = 1, ..., m$. Takođe, zbog pokazivanja osobine (TI) u Odeljku 3.8, definišemo funkcije χ_R i χ iz prostora $C_c^\infty(\mathbb{R})$ sa

$$\chi_R(y) = \chi\left(\frac{y}{R}\right), \quad \chi(y) = \begin{cases} 1, & |y| \leq 1, \\ 0, & |y| \geq 2, \end{cases}$$

(obe funkcije su date po promenljivoj x), i neka za $k = 1, ..., m$ važi

$$\begin{aligned} &\sum_{\alpha \leq k} \int_{\mathbb{R}} \left(|\partial_x^\alpha \left((1-\chi_R) l_1(v_1,v_2) \right)|^2 + |\partial_x^\alpha \left((1-\chi_R) l_2(v_1,v_2) \right)|^2 \right) dx \\ &\qquad \leq \eta_3 + \eta_4 \sum_{\alpha \leq k} \int_{\mathbb{R}} \left(|\partial_x^\alpha \left((1-\chi_R) v_1 \right)|^2 + |\partial_x^\alpha \left((1-\chi_R) v_2 \right)|^2 \right) dx, \end{aligned} \tag{3.9}$$

gde su η_3 i η_4 pozitivne konstante nezavisne od $v_1, v_2 \in H^k(\mathbb{R})$, $k = 1,...,m$ i $\eta_3 \to 0$, kad $R \to \infty$.

Napomena 3.1.1 *Od sada pa nadalje prostore funkcija koji su definisani na skupu $\mathbb{R}$ obeležavaćemo skraćeno. Na primer, umesto $H^m(\mathbb{R})$ pisaćemo H^m, i koristićemo $(s,r) \in H^m$ umesto $(s,r) \in H^m \times H^m$.*

Napomena 3.1.2 *U ostatku disertacije nećemo praviti razliku između zapisa vektora preko kolona i vrsta i koristićemo ono što nam je pogodnije u konkretnom slučaju. Dakle, zapise (s,r), $(s,r)^T$ i $\begin{bmatrix} s \\ r \end{bmatrix}$ ćemo koristiti ekvivalentno. Iz samog konteksta će uvek biti jasno o čemu je reč.*

3.2 Definicija rešenja i glavni rezultati

U ovojm odeljku definisaćemo rešenja početnog stohastičkog problema (3.4)-(3.6) i navesti glavne rezultate koji se tiču njihovog postojanja i jedinstvenosti. Stohastička rešenja (s,r) definisaćemo kao funkcije koje zavise od (t,ω) i smatraćemo da kada fiksiramo t i ω, $(s,r)(t,\omega)$ predstavljaju funkcije koje pripadaju Hilbertovim prostorima H^m.

Definicija 3.2.1 *Neka su početni uslovi (s_0, r_0) $\mathcal{F}_0$-merljivi i imaju vrednosti u prostoru H^m. Trojka (s,r,τ) se naziva rešenje stohastičkog problema (3.4)-(3.6) ako važe sledeći uslovi:*

1. *$(s,r)(t,\omega)$ je desno neprekidan progresivno merljiv proces koji ima vrednosti u prostoru H^m,*

2. *τ je vreme zaustavljanja u odnosu na $\{\mathcal{F}_t\}$ za koje važi*

$$\tau(\omega) = \lim_{N\to\infty} \tau_N(\omega), \text{ s.s. } \omega \in \Omega, \text{ gde je za } N \in \mathbb{N}$$

$$\tau_N(\omega) = \begin{cases} \inf\{0 \le t < \infty : \|(s,r)(t,\omega)\|_m \ge N\}, \\ \infty, \text{inače}. \end{cases}$$

3. *$(s,r)(\cdot,\omega) \in C([0,\tau(\omega)]; H^m)$, za s.s. ω i važi*

$$s(t \wedge \tau_N) = s_0 - \int_0^{t\wedge\tau_N} \lambda_1(s,r)\partial_x s\, ds + \int_0^{t\wedge\tau_N} l_1(s,r)dB, \tag{3.10}$$

$$r(t \wedge \tau_N) = r_0 - \int_0^{t\wedge\tau_N} \lambda_2(s,r)\partial_x r\, ds + \int_0^{t\wedge\tau_N} l_2(s,r)dB, \tag{3.11}$$

za svako $0 \le t < \infty$, za svako $N \ge 1$, za s.s. $\omega \in \Omega$.

Napomenimo da u tački 1. Definicije 3.2.1 zapravo piše da je proces (s,r) progresivno merljiv u odnosu na filtraciju $\{\mathcal{F}_t\}$, i da $(s,r)(t,\omega)$ ima vrednosti u prostoru H^m za sve fiksne t i ω. Način zapisa dat u Definiciji 3.2.1 je uobičajen u literaturi koja se tiče oblasti ove disertacije. Oznaka s.s. ω je skraćenica za skoro svako ω i često se ne piše, ali se gotovo uvek podrazumeva kad imamo neku stohastičku bazu. Tražiti da (3.10), (3.11) važe za svako ω je prevelik zahtev u stohastičkim PDJ. Glavni rezultat ove glave je dat u narednoj teoremi.

Teorema 3.2.2 *Neka su početni uslovi (s_0,r_0) $\mathcal{F}_0$-merljivi i $(s_0,r_0)\in L^4(\Omega;H^m)$. Pod pretpostavkama za funkcije l_1,l_2 uz beli šum i za matricu sistema A navedenim u Odeljku 3.1, postoji jedinstveno rešenje početnog problema (3.4)-(3.6) u smislu Definicije 3.2.1, pri čemu je $\tau>0$ za skoro svako $\omega\in\Omega$.*

Iz Definicije 3.2.1 i Teoreme 3.2.2 primetimo da u zavisnosti od $\omega\in\Omega$ imamo i različita vremena postojanja rešenja, tj. možemo reći da je interval postojanja rešenja slučajan. Takođe, rešenje koje smo dobili u Teoremi 3.2.2 je jako u PDJ smislu i u probabilističkom smislu.

Da bi bolje procenili interval $[0,\tau)$ na kom imamo rešenje, uvešćemo dodatne pretpostavke. Neka je dat pozitivan ceo broj θ za koji važi

$$|\partial_x^{q_1}\partial_s^{q_2}\partial_r^{q_3}A(s,r)|\le C|(s,r)|^{\theta-|q_2+q_3|}+C, \tag{3.12}$$

za svako (x,s,r), za svako t, i za svako $0\le q_1\le m$, $0\le|q_2+q_3|\le\theta$. Sa druge strane, kada je $|q_2+q_3|>\theta$, neka važi

$$|\partial_x^{q_1}\partial_s^{q_2}\partial_r^{q_3}A(s,r)|\le C, \tag{3.13}$$

za svako(x,s,r), za svako t, i za svako $0\le q_1\le m$. Dakle, (3.12) važi kad izvoda po (s,r) ima najviše θ, a (3.13) važi kad izvoda po (s,r) ima više od θ, dok izvoda po x uvek ima najviše m.

Teorema 3.2.3 *Neka je dato proizvoljno $0<\delta<1$ i neka je $\gamma=max(\theta,m)$. Ako važe pretpostavke za funkcije l_1,l_2 uz beli šum i za matricu sistema A navedene u Odeljku 3.1, i ako su uslovi (3.12)-(3.13) zadovoljeni, tada je*

$$P(\tau>\delta)>1-\delta^{\frac{2}{\gamma}}(C\,E(\|(s_0,r_0)\|_m^2)+C\,\delta),$$

gde su C pozitivne konstante nezavisne od δ i (s_0,r_0).

Teorema 3.2.3 predstavlja lokalnu procenu intervala na kome postoji rešenje. Da bi naveli teoremu koja se bavi pitanjem procene vremena postojanja globalnog rešenja, umesto (3.12)-(3.13) pretpostavljaćemo:

$$C_1\left\|\begin{bmatrix} s\\ r\end{bmatrix}\right\|_m^4\le\left|\left\langle\begin{bmatrix} l(s,r)\\ h(s,r)\end{bmatrix},\begin{bmatrix} s\\ r\end{bmatrix}\right\rangle_m\right|^2, \tag{3.14}$$

$$\left|\left|\left[\begin{array}{c} l(s,r) \\ h(s,r) \end{array}\right]\right|\right|_m^2 \le C_2 \left|\left|\left[\begin{array}{c} s \\ r \end{array}\right]\right|\right|_m^2, \tag{3.15}$$

pri čemu važi da je $2C_1 > C_2 > 0$. Napomenimo da se u [72] zahteva i da matrica sistema zavisi samo od (s,r), a to je zadovoljeno za svaki od sistema (I)-(IX).

Teorema 3.2.4 *Neka je $\Xi > 0$ dato. Ako važe pretpostavke za funkcije l_1, l_2 uz beli šum i za matricu sistema A navedene u Odeljku 3.1, i ako su uslovi (3.14)-(3.15) zadovoljeni, tada postoji $\Upsilon(\Xi) > 0$ takvo da, ako je*

$$E(\|(s_0,r_0)\|_m^4) < \Upsilon,$$

onda važi

$$P(\tau = \infty) > 1 - \Xi.$$

Dakle, ovom teoremom, za dovoljno male početne uslove dobijamo globalnu procenu postojanja stohastičkog rešenja koja je data u verovatnoći.

3.3 Plan dokaza Teoreme 3.2.2

Da bi pokazali postojanje i jedinstvenost rešenja stohastičkog problema (3.4)-(3.6) rešićemo niz problema. U zavisnosti od toga kako će izgledati desna strana novih sistema jednačina, razlikovaćemo tri problema. Počećemo sa određenim determinističkim problemom. Potom ćemo pomoću njega preći na aditivni problem, a nakon toga ćemo pomoću aditivnog rešiti multiplikativni problem. Zatim ćemo koristeći informacije iz multiplikativnog problema pokazati postojanje procesa koji zadovoljava osobine poput onih iz Definicije 3.2.1, ali na nekoj drugoj stohastičkoj bazi. Na kraju ćemo koristeći Yamada-Watanabe teoremu i određeno vreme zaustavljanja doći do rešenja početnog stohastičkog problema (3.4)-(3.6) datog u Teoremi 3.2.2. Deterministički, aditivni i multiplikativni problem su dati ispod.

Deterministički problem: (videti Odeljak 3.5 za detalje)

$$s_t + \varphi_N\, \lambda_1(s,r)\, s_x - \nu\, \partial_{xx}^2 s = \frac{\partial M_1}{\partial t}, \tag{3.16}$$

$$r_t + \varphi_N\, \lambda_2(s,r)\, r_x - \nu\, \partial_{xx}^2 r = \frac{\partial M_2}{\partial t}, \tag{3.17}$$

$$s|_{t=0} = s_0, \tag{3.18}$$

$$r|_{t=0} = r_0. \tag{3.19}$$

Ovaj problem nazivamo deterministički jer su (M_1, M_2) determinističke promenljive. Takođe, početni uslovi (s_0, r_0) su deterministički.

Aditivni problem: (videti Odeljak 3.6 za detalje)

$$s_t + \varphi_N \lambda_1(s,r)\, s_x - \nu\, \partial_{xx}^2 s = g_1(t,x,\omega)\frac{dB}{dt}, \tag{3.20}$$

$$r_t + \varphi_N \lambda_2(s,r)\, r_x - \nu\, \partial_{xx}^2 r = g_2(t,x,\omega)\frac{dB}{dt}. \tag{3.21}$$

Ovaj problem nazivamo aditivni jer funkcije g_1, g_2 ne zavise od (s,r). Početni uslovi ovde ostaju isti kao u determinističkom problemu (3.16)-(3.19). Ali desne strane problema su stohastičke sada.

Multiplikativni problem: (videti Odeljak 3.7 za detalje)

$$s_t + \varphi_N \lambda_1(s,r)\, s_x - \nu\, \partial_{xx}^2 s = l_1(s,r)\frac{dB}{dt}, \tag{3.22}$$

$$r_t + \varphi_N \lambda_2(s,r)\, r_x - \nu\, \partial_{xx}^2 r = l_2(s,r)\frac{dB}{dt}. \tag{3.23}$$

Ovaj problem nazivamo multiplikativni jer funkcije (l_1, l_2) sada zavise od (s,r). Početni uslovi su isti kao u determinističkom i aditivnom problemu i desne strane problema su ponovo stohastičke.

Primetimo da u odnosu na početni stohastički problem (3.4)-(3.6), u svakom od prethodna tri problema imamo i dve novine: funkciju odsecanja i viskozni član. Funkciju odsecanja φ_N uvodimo da bi kontrolisali nelinearni član. Ona je definisana u narednom odeljku i uvek zavisi od $\|(s,r)\|_{m-1}$, gde (s,r) predstavljaju rešenja problema koji trenutno radimo. A viskozni član uvodimo zbog korišćenja iterativnog postupka pri rešavanju multiplikativnog problema (više u Odeljku 3.7). Bez viskoznog člana, koji stohastički sistem pretvara u parabolički sistem, iterativni postupak možda ne bi radio kako treba.

Napomena 3.3.1 *U [72] se umesto $\nu\partial_{xx}^2$ koristi $\nu(\partial_{xx}^2 - I)$, što je danas ređe zastupljeno u literaturi. Ali u oba slučaja iterativni postupak funkcioniše. Ovde se koristi $\nu\partial_{xx}^2$ jer je to danas uobičajeno, ali i zbog jednostavnijih izračunavanja u Glavi 4.*

Napomena 3.3.2 *Početni uslovi u [72] vezani za aditivni i multiplikativni problem mogu biti stohastičke promenljive (ovaj opštiji slučaj navodimo u nastavku u Teoremi 3.3.4 i Teoremi 3.3.5).*

Teoreme koje se bave postojanjem i jedinstvenošću rešenja determinističkog, aditivnog i multiplikativnog problema su date u nastavku.

Teorema 3.3.3 *Neka su dati $0 < \nu \leq 1$, pozitivan ceo broj N i $0 < T < \infty$. Pretpostavimo da $M_1, M_2 \in C([0,T]; H^{m+2})$, $M_1(0) = 0$, $M_2(0) = 0$ i $(s_0, r_0) \in H^m$. Tada postoji jedinstveno rešenje (s,r) determinističkog problema (3.16)-(3.19) tako da važi*

$$(s,r) \in C([0,T]; H^m) \cap L^2(0,T; H^{m+1}).$$

Štaviše, preslikavanje $(s_0, r_0; M_1, M_2) \mapsto (s,r)$ iz $H^m \times C([0,T]; H^{m+2})$ u $C([0,T]; H^m)$ je neprekidno.

Teorema 3.3.4 *Neka su početni uslovi (s_0, r_0) $\mathcal{F}_0$-merljivi i $(s_0, r_0) \in L^4(\Omega; H^m)$. Tada za svako $0 < T < \infty$ postoji jedinstveno rešenje (s,r) aditivnog problema (3.20), (3.21) sa početnim uslovima (3.18), (3.19) tako da važi*

$$(s,r) \in L^4(\Omega; C([0,T]; H^m)) \cap L^4(\Omega; L^2(0,T; H^{m+1})).$$

Teorema 3.3.5 *Neka su početni uslovi (s_0, r_0) $\mathcal{F}_0$-merljivi i $(s_0, r_0) \in L^4(\Omega; H^m)$. Tada za svako $0 < T < \infty$ postoji jednistveno rešenje (s,r) multiplikativnog problema (3.22), (3.23) sa početnim uslovima (3.18), (3.19) tako da važi*

$$(s,r) \in L^4(\Omega; C([0,T]; H^m)) \cap L^4(\Omega; L^2(0,T; H^{m+1})).$$

Prostori koji se javljaju u prethodnim teoremama su definisani u Odeljku 1.3. Nakon dobijenog rezultata u Teoremi 3.3.5, da bi dokazali Teoremu 3.2.2 sada bi trebalo pustiti viskozni član u nulu. To ćemo uraditi indirektno tako što ćemo pronaći proces koji rešava problem sličan[5] početnom problemu (3.4)-(3.6), ali sada na nekoj drugoj stohastičkoj bazi i sa nekim drugim Braunovim kretanjem. Tako dolazimo do Teoreme 3.3.6.

Teorema 3.3.6 *Neka je dat ceo broj $N \geq 3$ i $0 < T < \infty$. Tada postoje stohastička baza $(\Omega^\#, \mathcal{F}^\#, \{\mathcal{F}_t^\#\}, P^\#)$, standardno Braunovo kretanje $B^\#$ i stohastički proces $(\tilde{s}, \tilde{r})$ na datoj bazi tako da važi:*

1. *$(\tilde{s}, \tilde{r})$ je progresivno merljiv i $(\tilde{s}, \tilde{r}) \in L^4(\Omega^\#; C([0,T]; H^m))$.*
2. *Za svako $t \in [0,T]$ i za skoro svako $\omega \in \Omega$ važi*

$$\tilde{s}(t) = \tilde{s}(0) - \int_0^t \varphi_N \, \lambda_1(\tilde{s}, \tilde{r}) \partial_x \tilde{s} \, d\mathrm{s} + \int_0^t l_1(\tilde{s}, \tilde{r}) dB^\#,$$

$$\tilde{r}(t) = \tilde{r}(0) - \int_0^t \varphi_N \, \lambda_2(\tilde{s}, \tilde{r}) \partial_x \tilde{r} \, d\mathrm{s} + \int_0^t l_2(\tilde{s}, \tilde{r}) dB^\#.$$

3. *Zakon raspodele od $(\tilde{s}_0, \tilde{r}_0)$ je isti kao i zakon raspodele od početnih uslova (s_0, r_0) koji su dati u Teoremi 3.2.2.*

[5] Kažemo sličan problem jer ćemo još uvek imati funkciju odsecanja; videti Teoremu 3.3.6.

Teorema 3.3.3

$\downarrow$

Teorema 3.3.4

$\downarrow$

Teorema 3.3.5

$\downarrow$

Teorema 3.3.6

$\downarrow$

Teorema 3.2.2

Slika 3.1: Plan dokaza Teoreme 3.2.2

Sada na osnovu Teoreme 3.3.6, korišćenjem Yamada-Watanabe teoreme i definisanjem određenog vremena zaustavljanja (pomoću kog se rešavamo funkcije odsecanja φ_N), dolazimo do postojanja i jedinstvenosti rešenja originalnog početnog problema (3.4)-(3.6) i samim tim do kraja dokaza Teoreme 3.2.2. Šematski prikaz toka dokazivanja Teoreme 3.2.2 je dat na Slici 3.1.

3.4 Procene u prostorima Soboljeva

U ovom odeljku ćemo pokazati neke procene koje važe u Soboljevim prostorima i koje ćemo koristiti kasnije u dokazima malopre navedenih teorema. Primetimo da za $m \geq 3,$ koje smo fiksirali u Odeljku 3.1 važi

$$H^{m-2} \subset L^{\infty} \text{ i prostori } H^{m-2}, H^{m-1}, H^{m} \text{ su Banahove algebre.}$$

Neka su dati $w_1, w_2, ..., w_k \in H^{m-1}$. Za $0 \leq \beta \leq m-1$, $\beta = |\beta_1| + ... + |\beta_k|$, važi

$$(\partial_x^{\beta_1} w_1) \cdot \dots \cdot (\partial_x^{\beta_k} w_k) \in H^{m-1-\beta},$$

$$\|(\partial_x^{\beta_1} w_1) \cdot \dots \cdot (\partial_x^{\beta_k} w_k)\|_{m-1-\beta} \leq C \|w_1 \cdot \dots \cdot w_k\|_{m-1} \leq C \prod_{j=1}^{k} \|w_j\|_{m-1}.$$

Ovde smo na kraju iskoristili to da je H^{m-1} Banahova algebra (odnosno za svako $a, b \in H^{m-1}$ važi $\|a \cdot b\| \leq \|a\| \|b\|$).

Dalje, za $1 \leq \beta \leq m-1$, $\beta = |\beta_1| + ... + |\beta_k|$ i $1 \leq \alpha \leq m+1-\beta$, pomoću procena proizvoda u Soboljevim prostorima,[6] može se pokazati da je preslikavanje $(a,b) \mapsto a \cdot b$ iz $H^{m-1-\beta} \times H^{m-\alpha}$ u L^2 neprekidno. A odatle za sve $v \in H^m$ i $w_1, w_2, ..., w_k \in H^{m-1}$ sledi da je

$$\|(\partial_x^{\beta_1} w_1) \cdot \cdots \cdot (\partial_x^{\beta_k} w_k)(\partial_x^{\alpha} v)\|_0 \leq C\|v\|_m \prod_{j=1}^{k} \|w_j\|_{m-1}. \tag{3.24}$$

Kada je $\beta = m$, $\alpha = 1$, $\beta = |\beta_1| + ... + |\beta_k|$ i $\beta_i = max\{|\beta_1|, ..., |\beta_k|\}$ (dakle tamo gde imamo najviše izvoda), tada se koristeći (3.24) može pokazati

$$\|(\partial_x^{\beta_1} w_1) \cdot \cdots \cdot (\partial_x^{\beta_k} w_k)(\partial_x v)\|_0 \leq C\|v\|_{m-1} \sum_{i=1}^{k} ||w_i||_m \prod_{j \neq i} \|w_j\|_{m-1}, \tag{3.25}$$

za $v \in H^{m-1}, w_i \in H^m, w_j \in H^{m-1}, j \neq i,\ j = 1, ..., k$. Na sličan način za $\beta = m$, $\alpha = 0$, dobija se

$$\|(\partial_x^{\beta_1} w_1) \cdot \cdots \cdot (\partial_x^{\beta_k} w_k)\, v\|_0 \leq C\|v\|_{m-2} \sum_{i=1}^{k} \|w_i\|_m \prod_{j \neq i} \|w_j\|_{m-1}. \tag{3.26}$$

Konačno za $1 \leq \beta \leq m$, $\beta = |\beta_1| + \cdots + |\beta_k|$ i $1 \leq \alpha \leq m+1-\beta$, iz (3.24) i (3.25) za $v \in H^m, w_i \in H^m, w_j \in H^{m-1}, j \neq i$, sledi

$$\begin{aligned} &\|(\partial_x^{\beta_1} w_1) \cdot \cdots \cdot (\partial_x^{\beta_k} w_k)(\partial_x^{\alpha} v)\|_0 \\ &\leq C\,\|v\|_m \prod_{j=1}^{k} \|w_j\|_{m-1} + C\,\|v\|_{m-1} \sum_{i=1}^{k} ||w_i||_m \prod_{j \neq i} \|w_j\|_{m-1}. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Sada ćemo zapisati neke opšte procene vezane za matrice sistema A početnih problema datih u nastavku ove glave. Ispod ćemo uvek precizno pisati od kojih promenljivih matrica sistema zavisi. I koristićemo kraći zapis $A(v)$ umesto $A(v_1, v_2)$ jer matrica sistema zavisi od obe promenljive 2x2 sistema kojima se bavimo ovde (isto važi i za kraće zapise $A(v_1)$ i $A(v_2)$). Koristeći (3.24), (3.26) i procenu iz Odeljka 3.1 za izvode matrice sistema, odmah se vidi da za svako $t \geq 0$, za sve $v, w \in H^m$ takve da je $\|v\|_{m-1} \leq K$, važi

$$\|A(v)\, w\|_m \leq C_K \|w\|_m + C_K \|v\|_m \|w\|_{m-2}, \tag{3.28}$$

$$\|A(v)\, w\|_{m-1} \leq C_K \|w\|_{m-1}. \tag{3.29}$$

[6] eng. Sobolev product estimates.

A na osnovu (3.29), za sve $v_1, v_2 \in H^{m-1}$ takve da je $\|v_1\|_{m-1} \le K$, $\|v_2\|_{m-1} \le K$, dobija se

$$\begin{aligned}\|A(v_1) - A(v_2)\|_{m-1} &= \left\| \int_0^1 \nabla A(v_1 + \mathrm{s}\,(v_2 - v_1))\,(v_1 - v_2)\,d\mathrm{s} \right\|_{m-1} \\ &\le \int_0^1 \left\| \nabla A(v_1 + \mathrm{s}\,(v_2 - v_1))\,(v_1 - v_2) \right\|_{m-1} d\mathrm{s} \le C_K \|v_1 - v_2\|_{m-1}. \end{aligned} \tag{3.30}$$

Funkciju odsecanja φ_N koju smo spomenuli ranije definišemo sa

$$\varphi_N(y) = \begin{cases} 1, & 0 \le y \le N, \\ N + 1 - y, & N < y \le N + 1, \\ 0, & y > N + 1. \end{cases} \tag{3.31}$$

Ona uvek zavisi od norme $\|\cdot\|_{m-1}$ rešenja stohastičkog PDJ sistema u kom se nalazi, pa to često nećemo pisati, a N ćemo birati kasnije.

Na osnovu (3.30) i definicije funkcije odsecanja može se zaključiti da za sve $w_1, w_2 \in H^m$ i sve $v_1, v_2 \in H^{m-1}$ važi

$$\begin{aligned} &\|\varphi_N(\|v_1\|_{m-1}) A(v_1) \partial_x w_1 - \varphi_N(\|v_2\|_{m-1}) A(v_2) \partial_x w_2\|_{m-1} \\ &= \big\|\varphi_N(\|v_1\|_{m-1}) A(v_1) \partial_x w_1 - \varphi_N(\|v_1\|_{m-1}) A(v_2) \partial_x w_1 \\ &+ \varphi_N(\|v_1\|_{m-1}) A(v_2) \partial_x w_1 - \varphi_N(\|v_2\|_{m-1}) A(v_1) \partial_x w_2 \\ &+ \varphi_N(\|v_2\|_{m-1}) A(v_1) \partial_x w_2 - \varphi_N(\|v_2\|_{m-1}) A(v_2) \partial_x w_2 \big\|_{m-1} \\ &\le C_N \|v_1 - v_2\|_{m-1} (\|w_1\|_m + \|w_2\|_m) + C_N \|w_1 - w_2\|_m. \end{aligned} \tag{3.32}$$

Do sada nismo koristili pretpostavku da je matrica sistema simetrična. Za više informacija o značaju simetričnosti i šta se može iskoristiti umesto nje videti [69]. Pomoću simetričnosti matrice sistema dobijamo jednakost (3.33) datu ispod. Da nema nje, ne bi mogli dobiti procenu (3.37), a bez nje ni dokazati Teoremu 3.3.4 za aditivni problem. Dakle, pod pretpostavkom simetričnosti matrice sistema A, za svako $v \in H^{m-1}$, $w \in H^{m+1}$, $\alpha \le m$ važi

$$\left\langle A(v) \frac{\partial}{\partial_x} \partial_x^\alpha w, \partial_x^\alpha w \right\rangle_0 = -\frac{1}{2} \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial_x} A(v) \right) \partial_x^\alpha w, \partial_x^\alpha w \right\rangle_0. \tag{3.33}$$

Dokaz ove jednakosti proističe iz osobina skalarnog proizvoda i simetričnosti matrice sistema. Ispod ga dajemo za $\alpha = 0$. Dakle,

$$\langle A(v)\, \partial_x w, w \rangle_0 = \langle \partial_x (A(v)\, w), w \rangle_0 - \langle \partial_x (A(v))\, w, w \rangle_0,$$

odnosno

$$\langle A(v)\, \partial_x w, w \rangle_0 + \langle \partial_x (A(v))\, w, w \rangle_0 = \langle \partial_x (A(v)\, w), w \rangle_0 = -\langle A(v)\, w, \partial_x w \rangle_0.$$

Tako dobijamo da je

$$\langle A(v)\,\partial_x w, w\rangle_0 + \langle A(v)\,w, \partial_x w\rangle_0 = -\,\langle \partial_x(A(v))\,w, w\rangle_0\,.$$

Zbog simetričnosti matrice A, članovi na levoj strani su jednaki, iz čega zaključujemo

$$\langle A(v)\,\partial_x w, w\rangle_0 = -\frac{1}{2}\,\langle \partial_x(A(v))\,w, w\rangle_0\,.$$

Dalje, na osnovu (3.27) za sve $v \in H^m$, $w \in H^{m+1}$ i $\alpha \leq m$, takve da su $\|v\|_{m-1} \leq K$ i $\|w\|_{m-1} \leq K$, važi

$$\left\|\partial_x^\alpha\left(A(v)\frac{\partial w}{\partial x} - A(v)\partial_x^\alpha\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right\|_0 \leq C_K\|v\|_m + C_K\|w\|_m. \tag{3.34}$$

Sada pomoću (3.33) i (3.34) za sve $v \in H^m$, $w \in H^{m+1}$ i $\alpha \leq m$, takve da su $\|v\|_{m-1} \leq K$ i $\|w\|_{m-1} \leq K$, dolazimo do

$$\left|\left\langle\partial_x^\alpha\Big(A(v)\frac{\partial w}{\partial x}\Big), \partial_x^\alpha w\right\rangle_0\right| \leq C_K\|w\|_m^2 + C_K\|v\|_m\|w\|_m. \tag{3.35}$$

Sumiranjem po svim $\alpha \leq m$ u (3.35), za sve $v \in H^m$, $w \in H^{m+1}$, za koje je $\|v\|_{m-1} \leq K$ i $\|w\|_{m-1} \leq K$, dobijamo

$$\left|\left\langle A(v)\frac{\partial w}{\partial x}, w\right\rangle_m\right| \leq C_K\|w\|_m^2 + C_K\|v\|_m\|w\|_m. \tag{3.36}$$

Na osnovu (3.36) za svako $v \in H^{m+1}$, takvo da je $\|v\|_{m-1} \leq K$, važi

$$|\langle A(v)\partial_x v, v\rangle_m| \leq C_K\,\|v\|_m^2\,. \tag{3.37}$$

Takođe, lako se može pokazati da za sve $v, w \in H^m$ za koje je $\|v\|_{m-1} \leq K$ važi

$$\left|\langle A(v)\partial_x v, v - w\rangle_{m-1}\right| \leq C_K\,\|v\|_{m-1}\,\|v - w\|_m\,. \tag{3.38}$$

Procene (3.37) i (3.38) se koristite u dokazu Teoreme 3.3.4 kasnije.

3.5 Deterministički problem

U ovom odeljku ćemo dokazati Teoremu 3.3.3 vezanu za pomoćni deterministički problem i time napraviti prvi korak ka dokazu Teoreme 3.2.2. Podsetimo se, deterministički problem (3.16)-(3.19) je dat sa

$$s_t + \varphi_N \lambda_1(s,r)s_x - \nu\partial^2_{xx}s = \frac{\partial M_1}{\partial t},$$

$$r_t + \varphi_N \lambda_2(s,r)r_x - \nu\partial^2_{xx}r = \frac{\partial M_2}{\partial t},$$

$$s\,|_{t=0} = s_0,$$

$$r\,|_{t=0} = r_0.$$

Koristeći smenu $s = \hat{s} + M_1$, $r = \hat{r} + M_2$, dobijamo

$$\begin{aligned}
&\hat{s}_t + M_{1t} - \nu\partial^2_{xx}\hat{s} - \nu\partial^2_{xx}M_1 \\
&+\varphi_N(\|(\hat{s}+M_1,\hat{r}+M_2)\|_{m-1})\,\lambda_1(\hat{s}+M_1,\hat{r}+M_2)\,(\hat{s}+M_1)_x = M_{1t},\\
&\hat{r}_t + M_{2t} - \nu\partial^2_{xx}\hat{r} - \nu\partial^2_{xx}M_2 \\
&+\varphi_N(\|(\hat{s}+M_1,\hat{r}+M_2)\|_{m-1})\,\lambda_2(\hat{s}+M_1,\hat{r}+M_2)\,(\hat{r}+M_2)_x = M_{2t},
\end{aligned}$$

odnosno

$$\hat{s}_t - \nu\partial^2_{xx}\hat{s} = F_1(t,\hat{s},\hat{r}), \tag{3.39}$$

$$\hat{r}_t - \nu\partial^2_{xx}\hat{r} = F_2(t,\hat{s},\hat{r}), \tag{3.40}$$

gde su

$$F_1(t,\hat{s},\hat{r}) = \nu\partial^2_{xx}M_1 - \varphi_N\,\lambda_1\,(\hat{s}+M_1)_x,$$

$$F_2(t,\hat{s},\hat{r}) = \nu\partial^2_{xx}M_2 - \varphi_N\,\lambda_2\,(\hat{r}+M_2)_x.$$

Pošto su $M_1(0) = 0$ i $M_2(0) = 0$ (videti pretpostavke Teoreme 3.3.3) početni uslovi ostaju isti, tj.

$$\hat{s}\,|_{t=0} = s_0, \tag{3.41}$$

$$\hat{r}\,|_{t=0} = r_0. \tag{3.42}$$

Poznato je (videti na primer [44]) da su rešenja početnih problema datih u obliku

$$U_t - \partial_{xx}U = F(x,t),$$

$$U(x,0) = U_0,$$

data sa

$$U(x,t)=\int_{\mathbb{R}}\Phi(x-y,t)\,U_0(y)\,dy+\int_0^t\int_{\mathbb{R}}\Phi(x-y,t-\mathrm{s})\,F(y,\mathrm{s})\,dyd\mathrm{s},$$

gde je $\Phi(x,t)$ tzv. *fundamentalno rešenje toplotne jednačine* definisano sa

$$\Phi(x,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\,e^{-\frac{x^2}{4t}}.$$

To ćemo sada iskoristiti za određivanje rešenja problema (3.39)-(3.42) metodom nepokretne tačke. Naravno, ovde je $\Phi(x,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi\nu t}}\,e^{-\frac{x^2}{4\nu t}}$. Prvo zapišimo nekoliko procena koje će nam biti potrebne. Za svako $t\in[0,T]$ i sve $\hat{s},\hat{r},\hat{s}_1,\hat{r}_1,\hat{s}_2,\hat{r}_2\in H^m$ može se pokazati da

$$\|(F_1(t,\hat{s},\hat{r}),F_2(t,\hat{s},\hat{r}))\|_{m-1}\le C_N\|(\hat{s},\hat{r})\|_m+C_{N,M}, \tag{3.43}$$

$$\begin{aligned}&\|(F_1(t,\hat{s}_1,\hat{r}_1),F_2(t,\hat{s}_1,\hat{r}_1))-(F_1(t,\hat{s}_2,\hat{r}_2),F_2(t,\hat{s}_2,\hat{r}_2))\|_{m-1}\\&\le C_N\left(\|(\hat{s}_1,\hat{r}_1)\|_m+\|(\hat{s}_2,\hat{r}_2)\|_m\right)\|(\hat{s}_1,\hat{r}_1)-(\hat{s}_2,\hat{r}_2)\|_{m-1}\\&+C_{N,M}\|(\hat{s}_1,\hat{r}_1)-(\hat{s}_2,\hat{r}_2)\|_m,\end{aligned} \tag{3.44}$$

a za svako $t\in[0,T]$ i za sve $\hat{s},\hat{r}\in H^{m+1}$

$$\|(F_1(t,\hat{s},\hat{r}),F_2(t,\hat{s},\hat{r}))\|_m\le C_N\|(\hat{s},\hat{r})\|_{m+1}+C_{N,M}. \tag{3.45}$$

Procene (3.43), (3.44), (3.45) slede direktno iz $M_1,M_2\in C([0,T];H^{m+2})$ i procena (3.29), (3.32), (3.28), respektivno.

Da bi primenili metod nepokretne tačke na (3.39)-(3.42), posmatraćemo njegovu linearizaciju datu sa

$$\hat{s}_t-\nu\partial_{xx}^2\hat{s}=F_1(t,\bar{s},\bar{r}), \tag{3.46}$$

$$\hat{r}_t-\nu\partial_{xx}^2\hat{r}=F_2(t,\bar{s},\bar{r}), \tag{3.47}$$

$$\hat{s}\,|_{t=0}=s_0, \tag{3.48}$$

$$\hat{r}\,|_{t=0}=r_0, \tag{3.49}$$

(ovde je $(\bar{s},\bar{r})$ fiksirano). Sada definišimo funkciju $\Gamma:\Lambda\to\Lambda$ sa

$$\Phi*u_0+\int_0^t\Phi*F(\mathrm{s},u)\,d\mathrm{s}, \tag{3.50}$$

koja slika $(\bar{s},\bar{r})\mapsto(\hat{s},\hat{r})=:\Gamma(\bar{s},\bar{r})$ i gde sa "$*$" označavamo konvoluciju po x. Zbog jednostavnijeg zapisa u (3.50) smo koristili smene $u_0:=(s_0,r_0)$, $F:=(F_1,F_2)$, $u:=(\bar{s},\bar{r})$.

Napomena 3.5.1 *Konvolucija dve funkcije f i g se definiše sa*

$$[f*g](x) := \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy = \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)dy.$$

Naš zadatak je da nađemo prostor Λ i pokažemo da je funkcija Γ kontrakcija, za dovoljno mali vremenski interval. Na osnovu toga dobićemo rešenje problema (3.46)-(3.49). Odatle će slediti da je nepokretna tačka funkcije Γ rešenje problema (3.39)-(3.42), iz čega nalazimo jedinstveno rešenje početnog determinističkog problema (3.16)-(3.19).

Rešenja iz Teoreme 3.3.3 treba da budu u prostoru $C([0,T];H^m)$ i prostoru $L^2(0,T;H^{m+1})$. Ako procenimo svaki član funkcije Γ date sa (3.50) u ova dva prostora, na intervalu $[0,\hat{T}]$, $\hat{T}<T$, dolazimo do

$$\sup_{t\in[0,\hat{T}]} \|\Phi_t * u_0\|_m \leq \|u_0\|_m, \tag{3.51}$$

$$\sup_{t\in[0,\hat{T}]} \left\| \int_0^t \Phi_{t-\mathrm{s}} * F(\mathrm{s},u)d\mathrm{s} \right\|_m \leq C_\nu \hat{T}^{\frac{1}{2}} (C_N \|u\|_{C([0,\hat{T}];H^m)} + C_{N,M}), \tag{3.52}$$

$$\|\Phi_t * u_0\|_{L^2(0,\hat{T};H^{m+1})} \leq C_\nu \|u_0\|_m, \tag{3.53}$$

$$\left(\int_0^{\hat{T}} \left\| \int_0^t \Phi_{t-\mathrm{s}} * F(\mathrm{s},u)d\mathrm{s} \right\|_{m+1}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq C_\nu \, \hat{T}^{\frac{1}{2}} \, (C_N \|u\|_{L^2(0,\hat{T};H^{m+1})} + C_{N,M}). \tag{3.54}$$

Ovde smo sa Φ_t, Φ_{t-s} naznačili u kojim tačkama vremena su date ove funkcije (dakle, ovo nisu izvodi po vremenu već oznake za $\Phi(x,t)$ i $\Phi(x,t-s)$, respektivno). Ispod ćemo dokazati nejednakost (3.52).

$$\begin{aligned}
\left\| \int_0^t \Phi_{t-\mathrm{s}} * F(\mathrm{s},u)d\mathrm{s} \right\|_m &= \left(\sum_{\alpha\leq m} \left\| \int_0^t \partial_x^\alpha \left[\Phi_{t-\mathrm{s}} * F(\mathrm{s},u)\right] d\mathrm{s} \right\|_0^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \Bigg(\left\| \int_0^t \Phi_{t-\mathrm{s}} * F(\mathrm{s},u)d\mathrm{s} \right\|_0^2 + \left\| \int_0^t \partial_x[\Phi_{t-\mathrm{s}} * F(\mathrm{s},u)]d\mathrm{s} \right\|_0^2 \\
&\quad + \ldots + \left\| \int_0^t \partial_x^m [\Phi_{t-\mathrm{s}} * F(\mathrm{s},u)]d\mathrm{s} \right\|_0^2 \Bigg)^{1/2} \\
&= \Bigg(\left\| \int_0^t \Phi_{t-\mathrm{s}} * F(\mathrm{s},u)d\mathrm{s} \right\|_0^2 + \left\| \int_0^t \Phi_{t-\mathrm{s}} * \partial_x F(\mathrm{s},u)d\mathrm{s} \right\|_0^2 \\
&\quad + \ldots + \left\| \int_0^t \Phi_{t-\mathrm{s}} * \partial_x^{m-1} F(\mathrm{s},u)d\mathrm{s} \right\|_0^2 + \left\| \int_0^t \partial_x \Phi_{t-\mathrm{s}} * \partial_x^{m-1} F(\mathrm{s},u)d\mathrm{s} \right\|_0^2 \Bigg)^{1/2}
\end{aligned}$$

$$\leq C \int_0^t \Big(\|\Phi_{t-\mathrm{s}} * F(\mathrm{s},u)\|_0 + \|\Phi_{t-\mathrm{s}} * \partial_x F(\mathrm{s},u)\|_0$$
$$+ \ldots + \left\|\Phi_{t-\mathrm{s}} * \partial_x^{m-1} F(\mathrm{s},u)\right\|_0 + \left\|\partial_x \Phi_{t-\mathrm{s}} * \partial_x^{m-1} F(\mathrm{s},u)\right\|_0 \Big) d\mathrm{s}$$
$$\leq C \int_0^t \Big(\|F(\mathrm{s},u)\|_0 + \|\partial_x F(\mathrm{s},u)\|_0$$
$$+ \ldots + \left\|\partial_x^{m-1} F(\mathrm{s},u)\right\|_0 + \|\partial_x \Phi_{t-\mathrm{s}}\|_{L^1} \left\|\partial_x^{m-1} F(\mathrm{s},u)\right\|_0 \Big) d\mathrm{s}$$
$$\leq C \int_0^t \|F(\mathrm{s},u)\|_{m-1} (C + \|\partial \Phi_{t-\mathrm{s}}\|_{L^1}) d\mathrm{s}$$
$$\leq C_v \hat{T}^{1/2} (C_N \|u\|_m + C_{N,M}).$$

Ovde smo iskoristili osobinu izvoda konvolucije $D(f * g) = Df * g = f * Dg$, Jangovu nejednakost za konvolucije, procenu (3.43) i procene izvoda funkcije Φ (videti detaljnije [29]). Nakon što uradimo supremum po t, stižemo do kraja dokaza procene (3.52). Nejednakost (3.54) se pokazuje na sličan način pomoću (3.45), a (3.51), (3.53) slede direktno.

Napomena 3.5.2 *Jangova nejednakost za konvolucije*[7] *tvrdi da za* $f \in L^p$, $g \in L^q$, $p \in [1,\infty)$, $q \in [1,p']$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $r \geq 1$ *tako da je* $\frac{1}{r} = \frac{1}{q} + \frac{1}{p} - 1$, *važi*

$$\|f * g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

Sada uzimamo dovoljno veliku konstantu K, i za dovoljno malo $\hat{T} \in (0,T]$, definišemo metriku $d(v,w) = \|v - w\|_{C([0,\hat{T}];H^m)}$ i prostor Λ sa

$$\Lambda = \Big\{ u := (s,r) \in C([0,\hat{T}];H^m) \cap L^2(0,\hat{T};H^{m+1}) :$$
$$\|u\|_{C([0,\hat{T}];H^m)} \leq K,\ \|u\|_{L^2(0,\hat{T};H^{m+1})} \leq K \Big\}.$$

Prostor (Λ, d) je kompletan metrički prostor. Još treba pokazati da je preslikavanje $\Gamma : \Lambda \to \Lambda$ dato u (3.50) kontrakcija. Slično kao u dokazu od (3.52) dobija se

$$\|\Gamma(u) - \Gamma(\tilde{u})\|_m = \left\| \int_0^t \Phi_{t-\mathrm{s}} * [F(\mathrm{s},u) - F(\mathrm{s},\tilde{u})]\, d\mathrm{s} \right\|_m$$
$$\leq \int_0^t \|[F(\mathrm{s},u) - F(\mathrm{s},\tilde{u})]\|_{m-1} (C + \|\partial \Phi_{t-\mathrm{s}}\|_{L^1})\, d\mathrm{s}.$$

[7]eng. Young's inequality on convolutions.

Koristeći procenu (3.44), prethodni izraz je uvek manji od

$$C_\nu \hat{T}^{1/2}\left(C_{N,M}\|u-\tilde{u}\|_{C([0,\hat{T}];H^m)}+2C_N K\|u-\tilde{u}\|_{C([0,\hat{T}];H^m)}\right).$$

Dakle, za $\hat{T}$ dovoljno malo, Γ je kontrakcija. Vraćanjem unazad sledi da je (s,r) jedinstveno rešenje početnog determinističkog problema (3.16)-(3.19) na intervalu $[0,\hat{T}]$. Kako $\hat{T}$ ne zavisi od početnog uslova, za produženje rešenja ponavljamo dati postupak na intervalu $[\hat{T},2\hat{T}]$, pa na $[2\hat{T},3\hat{T}]$ itd., sve dok ne dobijemo rešenje na [0,T] (videti detaljnije [44] ili [72]).

Neka su (s,r) i $(\tilde{s},\tilde{r})$ rešenja problema (3.16)-(3.19) koja odgovaraju početnim uslovima i izvorima datim sa (s_0,r_0,M_1,M_2) i $(\tilde{s}_0,\tilde{r}_0,\tilde{M}_1,\tilde{M}_2)$. Tada se korišćenjem procene (3.32) može dobiti

$$\begin{aligned}&\left\|\begin{bmatrix} s\\ r\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\tilde{s}\\ \tilde{r}\end{bmatrix}\right\|_{C([0,T];H^m)}\\ &\le C\left(\left\|\begin{bmatrix} s_0\\ r_0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\tilde{s}_0\\ \tilde{r}_0\end{bmatrix}\right\|_m+(C_\nu T+1)\left\|\begin{bmatrix} M_1\\ M_2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\tilde{M}_1\\ \tilde{M}_2\end{bmatrix}\right\|_{C([0,T];H^{m+2})}\right)\end{aligned}$$

(videti detaljnije [72]). Ovde prva konstanta C zavisi od ν, N i $s,r,\tilde{s},\tilde{r}$ u normi prostora $C([0,T];H^m)$. Pa iz prethodne nejednakosti sledi neprekidna zavisnost rešenja početnog determinističkog problema od početnih uslova i izvora. I time smo završili dokaz Teoreme 3.3.3.$\square$

3.6 Aditivni problem

U ovom odeljku ćemo dokazati Teoremu 3.3.4 vezanu za aditivni problem (3.20), (3.21) sa početnim uslovima (3.18), (3.19) koji je bio dat sa

$$\begin{aligned} s_t+\varphi_N\,\lambda_1(s,r)s_x-\nu\partial^2_{xx}s&=g_1(t,x,\omega)\frac{dB}{dt},\\ r_t+\varphi_N\,\lambda_2(s,r)r_x-\nu\partial^2_{xx}r&=g_2(t,x,\omega)\frac{dB}{dt},\\ s\,|_{t=0}&=s_0,\\ r\,|_{t=0}&=r_0.\end{aligned}$$

Za funkciju $g(x,t,\omega)=(g_1,g_2)$ uz izvod Braunovog kretanja pretpostavljamo da je progresivno merljiva i da za svako $T>0,\ g\in L^4(\Omega;L^2(0,T;H^m))$, tj. važi

$$E\left(\left(\int_0^T\sum_{\alpha\le m}\int_{\mathbb{R}}\left(|\partial_x^\alpha g_1|^2+|\partial_x^\alpha g_2|^2\right)dxdt\right)^2\right)<\infty.$$

Naš cilj je da pokažemo postojanje rešenja u prostoru

$$(s,r) \in L^4(\Omega; C([0,T]; H^m)) \cap L^4(\Omega; L^2(0,T; H^{m+1})).$$

Neka je

$$M(t) = \begin{bmatrix} M_1(t) \\ M_2(t) \end{bmatrix} = \int_0^t \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} dB.$$

Proces M je neprekidni martingal sa vrednostima u H^m i za svako $0 < T < \infty$ $M \in L^4(\Omega; C([0,T]; H^m))$. Dalje, za $n = 1, 2, ...,$ i $t \in [0,T]$ definišimo niz procesa M_n sa

$$M_n(t) = \begin{bmatrix} M_{n1}(t) \\ M_{n2}(t) \end{bmatrix} = \int_0^t \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} * \rho_{1/n}\, dB.$$

Ovde je $\rho_{1/n}$ molifajer koji se odnosi samo na promenljivu x. Za sve fiksne T i n, M_n pripada prostoru $L^4(\Omega; C([0,T]; H^{m+2}))$, i u prostoru $L^4(\Omega; C([0,T]; H^m))$ važi $M_n \to M$ kad $n \to \infty$.

Napomena 3.6.1 *Neka je data nenegativna funkcija $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ čiji nosač je na skupu $\{|x| \leq 1\}$ i $\int_{\mathbb{R}} \rho(x)\, dx = 1$. Za svako $\mu > 0$, funkciju $\rho_\mu := \frac{1}{\mu}\rho(\frac{x}{\mu})$ nazivamo molifajer. Najvažnija osobina ovih funkcija je da konvolucijom sa njima dolazi do uglačavanja drugih funkcija (videti detaljnije [1], [29], [43], [86]). U ovoj disertaciji konvoluciju molifajerima uvek radimo samo po promenljivoj x.*

Neka je (s_n, r_n) rešenje determinističkog problema (3.16)-(3.19), pri čemu je na desnoj strani M zamenjeno sa M_n. Funkcije (s_n, r_n) su progresivno merljive. Sada ćemo pokazati da je za svako $n \geq 1$

$$\{(s_n, r_n)\}_n \text{ Košijev niz u prostoru} L^4(\Omega; C([0,T]; H^{m-1})). \tag{3.55}$$

Primenom Itove formule na (3.16)-(3.19) sa funkcijom M_n na desnoj strani, za svako $t \in [0,T]$, n, $k \geq 1$, za skoro svako ω, dobijamo

$$\left\| \begin{bmatrix} s_n \\ r_n \end{bmatrix}(t) - \begin{bmatrix} s_k \\ r_k \end{bmatrix}(t) \right\|_{m-1}^2$$
$$+2\nu \int_0^t \left\| \begin{bmatrix} s_n \\ r_n \end{bmatrix}(\mathrm{s}) - \begin{bmatrix} s_k \\ r_k \end{bmatrix}(\mathrm{s}) \right\|_m^2 d\mathrm{s} - 2\nu \int_0^t \left\| \begin{bmatrix} s_n \\ r_n \end{bmatrix}(\mathrm{s}) - \begin{bmatrix} s_k \\ r_k \end{bmatrix}(\mathrm{s}) \right\|_0^2 d\mathrm{s}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\int_0^t \left\langle \varphi_{Nk} A(s_k,r_k) \begin{bmatrix} s_k \\ r_k \end{bmatrix}_x - \varphi_{Nn} A(s_n,r_n) \begin{bmatrix} s_n \\ r_n \end{bmatrix}_x , \begin{bmatrix} s_n \\ r_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} s_k \\ r_k \end{bmatrix} \right\rangle_{m-1} d\mathrm{s} \\
&+2\int_0^t \left\langle \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} * \rho_{1/n} - \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} * \rho_{1/k}, \begin{bmatrix} s_n \\ r_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} s_k \\ r_k \end{bmatrix} \right\rangle_{m-1} dB_{\mathrm{s}} \\
&+ \int_0^t \left\| \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} * \rho_{1/n} - \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} * \rho_{1/k} \right\|_{m-1}^2 d\mathrm{s}. \qquad (3.56)
\end{aligned}
$$

Ovde smo sa φ_{Nk} obeležili funkciju odsecanja φ_N koja zavisi od $\|(s_k,r_k)\|_{m-1}$, a sa φ_{Nn} funkciju odsecanja koja zavisi od $\|(s_n,r_n)\|_{m-1}$. Naravno, matrica sistema je $A = diag(\lambda_1,\lambda_2)$.

Sada ćemo proceniti izraze povezane sa prva dva člana sa desne strane (3.56). Na osnovu prvog člana sa desne strane definišimo

$$
Q = \left| \left\langle \varphi_{N1} A(s_1,r_1) \begin{bmatrix} s_1 \\ r_1 \end{bmatrix}_x - \varphi_{N2} A(s_2,r_2) \begin{bmatrix} s_2 \\ r_2 \end{bmatrix}_x , \begin{bmatrix} s_1 \\ r_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} s_2 \\ r_2 \end{bmatrix} \right\rangle_{m-1} \right|,
$$

gde ponovo prva funkcija odsecanja zavisi od $\|(s_1,r_1)\|_{m-1}$, a druga od $\|(s_2,r_2)\|_{m-1}$. Sada ćemo proceniti Q.

Na osnovu izgleda funkcije odsecanja (3.31), posmatraćemo tri slučaja za $N \geq 3$:

1. $\left\| \begin{bmatrix} s_1 \\ r_1 \end{bmatrix} \right\|_{m-1} \geq N+1, \left\| \begin{bmatrix} s_2 \\ r_2 \end{bmatrix} \right\|_{m-1} \geq N+1,$

2. $\left\| \begin{bmatrix} s_1 \\ r_1 \end{bmatrix} \right\|_{m-1} \leq N+1, \left\| \begin{bmatrix} s_2 \\ r_2 \end{bmatrix} \right\|_{m-1} \geq 2N,$

3. $\left\| \begin{bmatrix} s_1 \\ r_1 \end{bmatrix} \right\|_{m-1} \leq 2N, \left\| \begin{bmatrix} s_2 \\ r_2 \end{bmatrix} \right\|_{m-1} \leq 2N.$

U prvom slučaju odmah možemo zaključiti da je $Q = 0$ jer su funkcije odsecanja jednake nuli.

U drugom slučaju druga funkcija odsecanja je nula, pa zato na osnovu (3.38) sledi

$$
\begin{aligned}
Q &\leq C_N \left| \left\langle A(s_1,r_1) \begin{bmatrix} s_1 \\ r_1 \end{bmatrix}_x , \begin{bmatrix} s_1 \\ r_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} s_2 \\ r_2 \end{bmatrix} \right\rangle_{m-1} \right| \\
&\leq C_N \left\| \begin{bmatrix} s_1 \\ r_1 \end{bmatrix} \right\|_{m-1} \left\| \begin{bmatrix} s_1 \\ r_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} s_2 \\ r_2 \end{bmatrix} \right\|_m \\
&\leq 2C_N \left\| \begin{bmatrix} s_1 \\ r_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} s_2 \\ r_2 \end{bmatrix} \right\|_{m-1} \left\| \begin{bmatrix} s_1 \\ r_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} s_2 \\ r_2 \end{bmatrix} \right\|_m .
\end{aligned}
$$

U trećem slučaju na osnovu (3.30), (3.38) i parcijalne intergracije dobijamo

$$
\begin{aligned}
Q \le & \left| \left\langle \Big(\varphi_{N1}\left(\|(s_1,r_1)\|_{m-1}\right) - \varphi_{N2}\left(\|(s_2,r_2)\|_{m-1}\right) \Big) A(s_1,r_1) \begin{bmatrix} s_1 \\ r_1 \end{bmatrix}_x, \begin{bmatrix} s_1 \\ r_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} s_2 \\ r_2 \end{bmatrix} \right\rangle_{m-1} \right| \\
& + \left| \left\langle \varphi_{N2}\left(\|(s_2,r_2)\|_{m-1}\right) \Big(A(s_1,r_1) - A(s_2,r_2) \Big) \begin{bmatrix} s_1 \\ r_1 \end{bmatrix}_x, \begin{bmatrix} s_1 \\ r_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} s_2 \\ r_2 \end{bmatrix} \right\rangle_{m-1} \right| \\
& + \left| \left\langle \varphi_{N2}\left(\|(s_2,r_2)\|_{m-1}\right) A(s_2,r_2) \left(\begin{bmatrix} s_1 \\ r_1 \end{bmatrix}_x - \begin{bmatrix} s_2 \\ r_2 \end{bmatrix}_x \right), \begin{bmatrix} s_1 \\ r_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} s_2 \\ r_2 \end{bmatrix} \right\rangle_{m-1} \right| \\
& \le C_N \left\| \begin{bmatrix} s_1 \\ r_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} s_2 \\ r_2 \end{bmatrix} \right\|_{m-1} \left\| \begin{bmatrix} s_1 \\ r_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} s_2 \\ r_2 \end{bmatrix} \right\|_{m}.
\end{aligned}
$$

Dakle, za svako $\delta > 0$ i za sve $s_1, r_1, s_2, r_2 \in H^m$ na osnovu prethodnih procena i Jangove nejednakosti važi

$$
\begin{aligned}
Q & \le C_N \left\| \begin{bmatrix} s_1 \\ r_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} s_2 \\ r_2 \end{bmatrix} \right\|_{m-1} \left\| \begin{bmatrix} s_1 \\ r_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} s_2 \\ r_2 \end{bmatrix} \right\|_{m} \\
& \le \delta \left\| \begin{bmatrix} s_1 \\ r_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} s_2 \\ r_2 \end{bmatrix} \right\|_{m}^2 + \frac{C_N}{\delta} \left\| \begin{bmatrix} s_1 \\ r_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} s_2 \\ r_2 \end{bmatrix} \right\|_{m-1}^2 . \qquad (3.57)
\end{aligned}
$$

Napomena 3.6.2 *Jangova nejednakost*[8] *koju koristimo ovde tvrdi da za* $a, b \in \mathbb{R}^+$, $\varepsilon > 0$, $p \ge 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *važi*

$$
a\, b \le \varepsilon^p\, a^p + \frac{b^q}{\varepsilon^q}.
$$

Sada treba proceniti izraz povezan sa stohastičkim integralom u drugom članu sa desne strane (3.56) koji je dat sa

$$
E \left(\sup_{0 \le s \le t} \left| \int_0^s \left\langle \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} * \rho_{1/n} - \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} * \rho_{1/k}, \begin{bmatrix} s_n \\ r_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} s_k \\ r_k \end{bmatrix} \right\rangle_{m-1} dB_{\mathrm{s}} \right|^2 \right).
$$

Na osnovu BDG nejednakosti znamo da je to manje od

$$
C E \left(\int_0^t \left| \left\langle \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} * \rho_{1/n} - \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} * \rho_{1/k}, \begin{bmatrix} s_n \\ r_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} s_k \\ r_k \end{bmatrix} \right\rangle_{m-1} \right|^2 d\mathrm{s} \right),
$$

a što je uvek manje od

$$
C E \left(\sup_{0 \le s \le t} \left\| \begin{bmatrix} s_n \\ r_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} s_k \\ r_k \end{bmatrix} \right\|_{m-1}^2 \int_0^t \left\| \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} * \rho_{1/n} - \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} * \rho_{1/k} \right\|_{m-1}^2 d\mathrm{s} \right).
$$

[8] eng. Interpolated Young's inequality.

Na osnovu Jangove nejednakosti sledi da je za svako $\delta > 0$ i za svako $t \in [0,T]$ prethodni izraz manji od

$$\delta E\left(\sup_{0\le s\le t}\left\|\begin{bmatrix} s_n \\ r_n\end{bmatrix} - \begin{bmatrix} s_k \\ r_k\end{bmatrix}\right\|_{m-1}^4\right)$$
$$+\frac{C}{\delta}E\left(\int_0^t\left\|\begin{bmatrix} g_1 \\ g_2\end{bmatrix}*\rho_{1/n} - \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2\end{bmatrix}*\rho_{1/k}\right\|_{m-1}^2 d\mathrm{s}\right)^2.$$

Napomena 3.6.3 *BDG nejednakost*[9] *tvrdi da za svako* $1 < p < \infty$ *važi*

$$E\left(\sup_{0\le s\le t}\left|\int_0^s u(r)dB_r\right|^p\right) \le C_p E\left(\int_0^t |u(r)|^2 dr\right)^{\frac{p}{2}}.$$

Da bi iskoristili prethodnu i procenu (3.57), sada formulu (3.56) kvadriramo, uradimo supremum po t i očekivanje, i za svako $t \in [0,T]$ i dovoljno malo $\delta > 0$ dobijamo

$$E\left(\sup_{0\le s\le t}\left\|\begin{bmatrix} s_n \\ r_n\end{bmatrix}(s) - \begin{bmatrix} s_k \\ r_k\end{bmatrix}(s)\right\|_{m-1}^4\right)$$
$$\le C_{\nu,N}E\left(\int_0^t\left\|\begin{bmatrix} s_n \\ r_n\end{bmatrix}(\mathrm{s}) - \begin{bmatrix} s_k \\ r_k\end{bmatrix}(\mathrm{s})\right\|_{m-1}^4 d\mathrm{s}\right)$$
$$+CE\left(\int_0^t\left\|\begin{bmatrix} g_1 \\ g_2\end{bmatrix}*\rho_{1/n} - \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2\end{bmatrix}*\rho_{1/k}\right\|_{m-1}^2 d\mathrm{s}\right)^2.$$

Primenom Gronvalove nejednakosti dolazimo do

$$E\left(\sup_{0\le t\le T}\left\|\begin{bmatrix} s_n \\ r_n\end{bmatrix}(t) - \begin{bmatrix} s_k \\ r_k\end{bmatrix}(t)\right\|_{m-1}^4\right)$$
$$\le C_{\nu,N,T}E\left(\int_0^T\left\|\begin{bmatrix} g_1 \\ g_2\end{bmatrix}*\rho_{1/n} - \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2\end{bmatrix}*\rho_{1/k}\right\|_{m-1}^2 d\mathrm{s}\right)^2.$$

Napomena 3.6.4 *Gronvalova nejednakost*[10] *koju koristimo ovde tvrdi da za neprekidne funkcije* $u, \alpha, \beta : [0,T] \to [0,\infty)$ *koje za svako* $t \in [0,T]$ *zadovoljavaju*

$$u(t) \le \alpha(t) + \int_0^t \beta(\mathrm{s})u(\mathrm{s})\,d\mathrm{s},$$

važi

$$u(t) \le \alpha(t)\,e^{\int_0^t \beta(\mathrm{s})\,d\mathrm{s}}.$$

[9] eng. Burkholder-Davis-Gundy inequality.

[10] eng. Gronwall's inequality.

Odatle sledi da je $\{(s_n, r_n)\}_n$ Košijev niz u prostoru $L^4(\Omega; C([0,T]; H^{m-1}))$. Sličnim postupkom se pokazuje više procena u ovoj glavi. Tako se i za svako $n \geq 1$ može dokazati da je

$$E\left(\left\| \begin{bmatrix} s_n \\ r_n \end{bmatrix} \right\|^4_{C([0,T];H^m)}\right) \leq C, \tag{3.58}$$

$$E\left(\left\| \begin{bmatrix} s_n \\ r_n \end{bmatrix} \right\|^4_{L^2(0,T;H^{m+1})}\right) \leq C. \tag{3.59}$$

Kod dokaza procena (3.58) i (3.59) Itovu formulu ne primenjujemo na razlici kao u (3.56) već na samo jednoj funkciji, i umesto (3.38) koristimo (3.37).

Sada se vraćamo na dokaz Teoreme 3.3.4. Kako je $\{(s_n, r_n)\}_n$ Košijev niz u prostoru $L^4(\Omega; C([0,T]; H^{m-1}))$, on ima graničnu vrednost u tom prostoru

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n,$$

$$r = \lim_{n\to\infty} r_n.$$

Ako primenimo konvoluciju sa molifajerima, za svako $\delta > 0$, znamo da u prostoru $L^4(\Omega; C([0,T]; H^m))$ važi

$$s_n * \rho_\delta \to s * \rho_\delta,$$

$$r_n * \rho_\delta \to r * \rho_\delta.$$

Na osnovu procene (3.58) sledi da je

$$E\left(\|s * \rho_\delta\|^4_{C([0,T];H^m)}\right) \leq C,$$

$$E\left(\|r * \rho_\delta\|^4_{C([0,T];H^m)}\right) \leq C,$$

odnosno

$$\liminf_{\delta\to 0} E\left(\|s * \rho_\delta\|^4_{C([0,T];H^m)}\right) \leq C,$$

$$\liminf_{\delta\to 0} E\left(\|r * \rho_\delta\|^4_{C([0,T];H^m)}\right) \leq C.$$

Korišćenjem leme Fatua dobijamo

$$E\left(\liminf_{\delta\to 0} \|s * \rho_\delta\|^4_{C([0,T];H^m)}\right) \leq C,$$

$$E\left(\liminf_{\delta\to 0} \|r * \rho_\delta\|^4_{C([0,T];H^m)}\right) \leq C.$$

Napomena 3.6.5 *Lema Fatua*[11] *tvrdi da niz nenegativnih merljivih funkcija* $\{f_\delta\}$ *zadovoljava*

$$\int \liminf_{\delta\to 0} f_\delta \, dP \le \liminf_{\delta\to 0} \int f_\delta \, dP.$$

Kako je $C([0,T];H^m) \hookrightarrow L^\infty(0,T;H^m)$,[12] odmah sledi

$$E\left(\left\|\begin{bmatrix} s \\ r \end{bmatrix}\right\|^4_{L^\infty(0,T;H^m)}\right) \le C. \tag{3.60}$$

Na sličan način na osnovu (3.59) sledi da je

$$E\left(\left\|\begin{bmatrix} s \\ r \end{bmatrix}\right\|^4_{L^2(0,T;H^{m+1})}\right) \le C. \tag{3.61}$$

Pošto je (s,r) granica niza (s_n,r_n), za svako $t \in [0,T]$, za s.s. $\omega \in \Omega$ važi

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} s(t) \\ r(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_0 \\ r_0 \end{bmatrix} &- \int_0^t \varphi_N A(s,r) \begin{bmatrix} s \\ r \end{bmatrix}_x d\mathtt{s} \\ &+ \int_0^t \nu \partial^2_{xx} \begin{bmatrix} s \\ r \end{bmatrix} d\mathtt{s} + \int_0^t \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} dB_{\mathtt{s}}.\end{aligned}$$

Dakle, za sada $(s,r)(t,\omega) \in H^{m-1}$. Ostaje još malo poboljšati regularnost rešenja, tj. treba pokazati da $(s,r)(t,\omega) \in H^m$. Kada na prethodni izraz primenimo konvoluciju molifajerom, za svako $t \in [0,T]$, za skoro svako ω, za svako $\delta > 0$ važi

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} s(t) \\ r(t) \end{bmatrix} * \rho_\delta = \begin{bmatrix} s_0 \\ r_0 \end{bmatrix} * \rho_\delta &- \int_0^t \varphi_N A(s,r) \begin{bmatrix} s \\ r \end{bmatrix}_x * \rho_\delta \, d\mathtt{s} \\ &+ \int_0^t \nu \partial^2_{xx} \begin{bmatrix} s \\ r \end{bmatrix} * \rho_\delta \, d\mathtt{s} + \int_0^t \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} * \rho_\delta \, dB_{\mathtt{s}}.\end{aligned}$$

Primenom Itove formule dobijamo

$$\begin{aligned}&\left\|\begin{bmatrix} s(t) \\ r(t) \end{bmatrix} * \rho_\delta\right\|^2_m = \left\|\begin{bmatrix} s_0 \\ r_0 \end{bmatrix} * \rho_\delta\right\|^2_m - 2\nu \int_0^t \left\|\begin{bmatrix} s \\ r \end{bmatrix} * \rho_\delta\right\|^2_{m+1} d\mathtt{s} \\ &+2\nu \int_0^t \left\|\begin{bmatrix} s \\ r \end{bmatrix} * \rho_\delta\right\|^2_0 d\mathtt{s} - 2\int_0^t \left\langle \varphi_N A(s,r) \begin{bmatrix} s \\ r \end{bmatrix}_x * \rho_\delta, \begin{bmatrix} s \\ r \end{bmatrix} * \rho_\delta \right\rangle_m d\mathtt{s} \\ &+2\int_0^t \left\langle \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} * \rho_\delta, \begin{bmatrix} s \\ r \end{bmatrix} * \rho_\delta \right\rangle_m dB_{\mathtt{s}} + \int_0^t \left\|\begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} * \rho_\delta\right\|^2_m d\mathtt{s}.\end{aligned} \tag{3.62}$$

[11] eng. Fatou's lemma.

[12] Oznaka $\hookrightarrow$ se koristi za neprekidno ulaganje prostora.

Korišćenjem prvog dela Propozicije 1.7.1 iz [29] sledi da za svako $t \in [0,T]$, za skoro svako $\omega \in \Omega$, $(s,r)(t,\omega)$ pripada prostoru $C_w([0,T];H^m)$, tj. prostoru slabo neprekidnih funkcija sa vrednostima u prostoru H^m.

Sada možemo pustiti $\delta \to 0$ u (3.62). Tako dobijamo

$$\begin{aligned}\left\| \begin{bmatrix} s(t) \\ r(t) \end{bmatrix} \right\|_m^2 &= \left\| \begin{bmatrix} s_0 \\ r_0 \end{bmatrix} \right\|_m^2 - 2\nu \int_0^t \left\| \begin{bmatrix} s \\ r \end{bmatrix} \right\|_{m+1}^2 d\mathrm{s} \\ &+2\nu \int_0^t \left\| \begin{bmatrix} s \\ r \end{bmatrix} \right\|_0^2 d\mathrm{s} - 2\int_0^t \left\langle \varphi_N A(s,r) \begin{bmatrix} s \\ r \end{bmatrix}_x, \begin{bmatrix} s \\ r \end{bmatrix} \right\rangle_m d\mathrm{s} \\ &+2\int_0^t \left\langle \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} s \\ r \end{bmatrix} \right\rangle_m dB_{\mathrm{s}} + \int_0^t \left\| \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} \right\|_m^2 d\mathrm{s}.\end{aligned}$$

Na osnovu drugog dela Propozicije 1.7.1 iz [29] sledi da $(s,r) \in C([0,T];H^m)$ za s.s. $\omega \in \Omega$. Sada iz (3.60) sledi da je

$$E\left(\left\| \begin{bmatrix} s \\ r \end{bmatrix} \right\|_{C([0,T];H^m)}^4 \right) \leq C. \tag{3.63}$$

Iz procena (3.61) i (3.63) sledi postojanje rešenja u Teoremi 3.3.4. Jedinstvenost se pokazuje slično kao u dokazu od (3.55). Ovim je Teorema 3.3.4 dokazana. □

3.7 Multiplikativni problem

U ovom odeljku ćemo dokazati Teoremu 3.3.5 koja se odnosi na pomoćni multiplikativni problem (3.22), (3.23) sa početnim uslovima (3.18), (3.19) dat sa

$$\begin{aligned} s_t + \varphi_N \lambda_1(s,r)s_x - \nu\partial_{xx}^2 s &= l_1(s,r)\frac{dB}{dt}, \\ r_t + \varphi_N \lambda_2(s,r)r_x - \nu\partial_{xx}^2 r &= l_2(s,r)\frac{dB}{dt}, \\ s\,|_{t=0} &= s_0, \\ r\,|_{t=0} &= r_0. \end{aligned}$$

Sam dokaz je zasnovan na prethodnom odeljku i primeni iterativnog postupka

$$\begin{bmatrix} s \\ r \end{bmatrix}_t + \varphi_N\left(\left\| \begin{bmatrix} s \\ r \end{bmatrix} \right\|_{m-1} \right) A(s,r) \begin{bmatrix} s \\ r \end{bmatrix}_x - \nu\partial_{xx}^2 \begin{bmatrix} s \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1(s^{(n-1)}, r^{(n-1)}) \\ l_2(s^{(n-1)}, r^{(n-1)}) \end{bmatrix} \frac{dB}{dt},$$

$$(s^{(0)}, r^{(0)}) = (s_0, r_0),$$

gde je $(s^{(n)}, r^{(n)})$, $n = 1, 2, ...$ jedinstveno rešenje ovog problema u prostoru

$$L^4(\Omega; C([0,T]; H^m)) \cap L^4(\Omega; L^2(0,T; H^{m+1}))$$

(na osnovu prethodnog odeljka znamo da takvo rešenje postoji). Ponavljajući sličan postupak (Itova formula, procene, kvadriranje, supremum, očekivanje), za svako $n \geq 1$ i za svako $t \in [0,T]$ dolazimo do sledećih nejednakosti:

$$\begin{aligned} &E\left(\sup_{0\leq s\leq t}\left\|\begin{bmatrix} s^{(n+1)} \\ r^{(n+1)} \end{bmatrix}(\mathrm{s}) - \begin{bmatrix} s^{(n)} \\ r^{(n)} \end{bmatrix}(\mathrm{s})\right\|_{m-1}^4\right) \\ &\leq C_{\nu,N}\int_0^t E\left(\left\|\begin{bmatrix} s^{(n+1)} \\ r^{(n+1)} \end{bmatrix}(\mathrm{s}) - \begin{bmatrix} s^{(n)} \\ r^{(n)} \end{bmatrix}(\mathrm{s})\right\|_{m-1}^4\right) d\mathrm{s} \\ &+C\int_0^t E\left(\left\|\begin{bmatrix} s^{(n)} \\ r^{(n)} \end{bmatrix}(\mathrm{s}) - \begin{bmatrix} s^{(n-1)} \\ r^{(n-1)} \end{bmatrix}(\mathrm{s})\right\|_{m-1}^4\right) d\mathrm{s}, \end{aligned} \tag{3.64}$$

$$\begin{aligned} &E\left(\int_0^t\left\|\begin{bmatrix} s^{(n+1)} \\ r^{(n+1)} \end{bmatrix}(\mathrm{s}) - \begin{bmatrix} s^{(n)} \\ r^{(n)} \end{bmatrix}(\mathrm{s})\right\|_{m}^2 d\mathrm{s}\right)^2 \\ &\leq C_{\nu,N}\int_0^t E\left(\left\|\begin{bmatrix} s^{(n+1)} \\ r^{(n+1)} \end{bmatrix}(\mathrm{s}) - \begin{bmatrix} s^{(n)} \\ r^{(n)} \end{bmatrix}(\mathrm{s})\right\|_{m-1}^4\right) d\mathrm{s} \\ &+C_\nu\int_0^t E\left(\left\|\begin{bmatrix} s^{(n)} \\ r^{(n)} \end{bmatrix}(\mathrm{s}) - \begin{bmatrix} s^{(n-1)} \\ r^{(n-1)} \end{bmatrix}(\mathrm{s})\right\|_{m-1}^4\right) d\mathrm{s}. \end{aligned} \tag{3.65}$$

Primenom Gronvalove nejednakosti na (3.64) za svako $t \in [0,T]$ i $n \geq 1$ sledi

$$\begin{aligned} &E\left(\sup_{0\leq s\leq t}\left\|\begin{bmatrix} s^{(n+1)} \\ r^{(n+1)} \end{bmatrix}(\mathrm{s}) - \begin{bmatrix} s^{(n)} \\ r^{(n)} \end{bmatrix}(\mathrm{s})\right\|_{m-1}^4\right) \\ &\leq C_{\nu,N}\int_0^t E\left(\left\|\begin{bmatrix} s^{(n)} \\ r^{(n)} \end{bmatrix}(\mathrm{s}) - \begin{bmatrix} s^{(n-1)} \\ r^{(n-1)} \end{bmatrix}(\mathrm{s})\right\|_{m-1}^4\right) d\mathrm{s}. \end{aligned}$$

Takođe, na osnovu aditivnog problema znamo da je

$$E\left(\sup_{0\leq s\leq t}\left\|\begin{bmatrix} s^{(1)} \\ r^{(1)} \end{bmatrix}(\mathrm{s}) - \begin{bmatrix} s^{(0)} \\ r^{(0)} \end{bmatrix}\right\|_{m-1}^4\right) \leq C\frac{t^0}{0!}.$$

I indukcijom po n se može pokazati da za svako $t \in [0,T]$ važi

$$E\left(\sup_{0\leq s\leq t}\left\|\begin{bmatrix} s^{(n+1)} \\ r^{(n+1)} \end{bmatrix}(\mathrm{s}) - \begin{bmatrix} s^{(n)} \\ r^{(n)} \end{bmatrix}(\mathrm{s})\right\|_{m-1}^4\right) \leq C\frac{t^n}{n!},$$

gde je C konstanta nezavisna od t i n. Kada ovu nejednakost sumiramo po n, na osnovu skale divergentnih nizova dobijamo da važi

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[E\left(\sup_{0\le t\le T}\left\|\begin{bmatrix} s^{(n+1)} \\ r^{(n+1)} \end{bmatrix}(t)-\begin{bmatrix} s^{(n)} \\ r^{(n)} \end{bmatrix}(t)\right\|_{m-1}^{4}\right)\right]^{\frac{1}{4}}<\infty.$$

Dakle, $\{(s_n,r_n)\}_n$ je Košijev niz u prostoru $L^4(\Omega;C([0,T];H^{m-1}))$. Sličnim razmatranjem na osnovu (3.65), može se zaključiti da je $\{(s_n,r_n)\}_n$ Košijev niz u prostoru $L^4(\Omega;L^2(0,T;H^m))$. Onda su funkcije

$$s=\lim_{n\to\infty}s^{(n)},$$

$$r=\lim_{n\to\infty}r^{(n)},$$

rešenja multiplikativnog problema (u preseku dva prethodno navedena prostora):

$$\begin{bmatrix} s \\ r \end{bmatrix}_t+\varphi_N A(s,r)\begin{bmatrix} s \\ r \end{bmatrix}_x-\nu\partial_{xx}^2\begin{bmatrix} s \\ r \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} f_1(s,r) \\ f_2(s,r) \end{bmatrix}\frac{dB}{dt},$$

$$s\mid_{t=0}=s_0,$$

$$r\mid_{t=0}=r_0.$$

Sa druge strane, posmatrajmo aditivni problem

$$\begin{bmatrix} \tilde{s} \\ \tilde{r} \end{bmatrix}_t+\varphi_N A(\tilde{s},\tilde{r})\begin{bmatrix} \tilde{s} \\ \tilde{r} \end{bmatrix}_x-\nu\partial_{xx}^2\begin{bmatrix} \tilde{s} \\ \tilde{r} \end{bmatrix}=\frac{\partial}{\partial t}M,$$

sa istim početnim uslovima (s_0,r_0). Ovde je

$$M(t)=\begin{bmatrix} M_1(t) \\ M_2(t) \end{bmatrix}=\int_0^t\begin{bmatrix} f_1(s,r) \\ f_2(s,r) \end{bmatrix}dB.$$

Na osnovu Teoreme 3.3.4 znamo da postoji jedinstveno rešenje ovog aditivnog problema koje je u prostoru

$$L^4(\Omega;C([0,T];H^m))\cap L^4(\Omega;L^2(0,T;H^{m+1})).$$

Kada napravimo razliku rešenja prethodna dva problema i uradimo uobičajeni postupak (kvadriranje, supremum, očekivanje itd.), dolazimo do

$$\begin{aligned} & E\left(\sup_{0\le s\le t}\left\|\begin{bmatrix} s \\ r \end{bmatrix}(\mathrm{s})-\begin{bmatrix} \tilde{s} \\ \tilde{r} \end{bmatrix}(\mathrm{s})\right\|_{m-1}^{4}\right) \\ & \le C_{\nu,N,T}\int_0^t E\left(\left\|\begin{bmatrix} s \\ r \end{bmatrix}(\mathrm{s})-\begin{bmatrix} \tilde{s} \\ \tilde{r} \end{bmatrix}(\mathrm{s})\right\|_{m-1}^{4}\right)d\mathrm{s}. \end{aligned}$$

Primenom Gronvalove nejednakosti dobijamo da je $(s,r)=(\tilde{s},\tilde{r})$ i to je kraj dokaza Teoreme 3.3.5. $\square$

3.8 Prelazak na drugu stohastičku bazu

U ovom odeljku ćemo dokazati Teoremu 3.3.6 i pustiti $\nu \to 0$ koristeći multiplikativni problem iz prethodnog odeljka. Tehnika dokaza koju koristimo je data u Glavi 8 u [34]. Ukratko ona se sastoji iz naredna četiri koraka:

(i) Napraviti niz rešenja multiplikativnog problema, koji zavisi od parametra ν.

(ii) Pokazati da njihov niz zakona raspodele slabo konvergira ka nekoj meri na Borelovim skupovima prostora $C([0,T];H^{m-1})$.

(iii) Koristeći Skorohodovu teoremu i Teoremu o reprezentaciji martingala pustiti $\nu \to 0$ i konstruisati rešenje novog problema na drugom prostoru verovatnoća.

(iv) Poboljšati regularnost dobijenog rešenja.

Na osnovu prethodnog odeljka i Teoreme 3.3.5, korak (i) je zadovoljen. Neka je dat niz rešenja (s_k,r_k) multiplikativnog problema (3.22), (3.23) sa početnim uslovima (3.18), (3.19) i neka je $\nu = \frac{1}{k}$, $,k = 1,2,...$ Sada treba pokazati da zakon raspodele datog rešenja slabo konvergira ka nekoj meri na Borelovim skupovima prostora $C([0,T];H^{m-1})$. Dakle, za svako $t \in [0,T]$, za skoro svako $\omega \in \Omega$, pomoću Itove formule dobijamo

$$\begin{aligned}\left\|\begin{bmatrix} s_k(t) \\ r_k(t) \end{bmatrix}\right\|_m^2 &= \left\|\begin{bmatrix} s_0 \\ r_0 \end{bmatrix}\right\|_m^2 - \frac{2}{k}\int_0^t \left\|\begin{bmatrix} s_k \\ r_k \end{bmatrix}\right\|_{m+1}^2 d\mathrm{s} + \frac{2}{k}\int_0^t \left\|\begin{bmatrix} s_k \\ r_k \end{bmatrix}\right\|_0^2 d\mathrm{s} \\ &\quad -2\int_0^t \left\langle \varphi_N A(s_k,r_k)\begin{bmatrix} s_k \\ r_k \end{bmatrix}_x, \begin{bmatrix} s_k \\ r_k \end{bmatrix}\right\rangle_m d\mathrm{s} \\ &\quad +2\int_0^t \left\langle \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} s_k \\ r_k \end{bmatrix}\right\rangle_m dB_{\mathrm{s}} + \int_0^t \left\|\begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix}\right\|_m^2 d\mathrm{s}. \end{aligned} \tag{3.66}$$

Koristeći pretpostavke (3.7), (3.8) za l_1, l_2, kao i (3.37), BDG i Gronvalovu nejednakost, na sličan način kao i ranije iz (3.66) dolazimo do sledećih procena:

$$E\left(\sup_{0\le t\le T}\left\|\begin{bmatrix} s_k(t) \\ r_k(t) \end{bmatrix}\right\|_m^4\right) \le C, \tag{3.67}$$

$$\frac{1}{k^2}E\left(\int_0^T \left\|\begin{bmatrix} s_k(t) \\ r_k(t) \end{bmatrix}\right\|_{m+1}^2 dt\right)^2 \le C. \tag{3.68}$$

Takođe, ako definišemo proces

$$M_k(t) = \begin{bmatrix} M_{k1}(t) \\ M_{k2}(t) \end{bmatrix} = \int_0^t \begin{bmatrix} l_1(s_k,r_k) \\ l_2(s_k,r_k) \end{bmatrix} dB,$$

koristeći (3.7), (3.8), (3.67) i BDG nejednakost, za svako k dobijamo

$$E\left(\sup_{0\le t\le T}\left\|\begin{bmatrix} M_{k1}(t)\\ M_{k2}(t)\end{bmatrix}\right\|_m^4\right)\le C. \tag{3.69}$$

Neka je dato $R>1$. Primenom funkcije $(1-\chi_R)$ (videti Odeljak 3.1) na multiplikativni problem (3.22), (3.23), uz početne uslove (3.18), (3.19), za svako $t\in[0,T]$, za skoro svako $\omega\in\Omega$ sledi

$$\begin{aligned}&(1-\chi_R)\begin{bmatrix} s_k\\ r_k\end{bmatrix}_t+\varphi_N\,(1-\chi_R)A(s_k,r_k)\begin{bmatrix} s_k\\ r_k\end{bmatrix}_x-(1-\chi_R)\nu\partial_{xx}^2\begin{bmatrix} s_k\\ r_k\end{bmatrix}\\ &=(1-\chi_R)\begin{bmatrix} l_1\\ l_2\end{bmatrix}\frac{dB}{dt}.\end{aligned}$$

Integracijom ovog izraza po vremenu od 0 do t i korišćenjem $\nu=\frac{1}{k}$ dobijamo

$$\begin{aligned}(1-\chi_R)\begin{bmatrix} s_k(t)\\ r_k(t)\end{bmatrix}&=(1-\chi_R)\begin{bmatrix} s_0\\ r_0\end{bmatrix}+\int_0^t(1-\chi_R)\begin{bmatrix} l_1\\ l_2\end{bmatrix}dB_{\mathrm{s}}\\ &+\frac{1}{k}\int_0^t(1-\chi_R)\partial_{xx}^2\begin{bmatrix} s_k\\ r_k\end{bmatrix}d\mathrm{s}\\ &-\int_0^t\varphi_N\,(1-\chi_R)A(s_k,r_k)\begin{bmatrix} s_k\\ r_k\end{bmatrix}_x d\mathrm{s}.\end{aligned} \tag{3.70}$$

Sada ćemo transformisati poslednja dva člana sa desne strane ove jednakosti. Znamo

$$\begin{aligned}\partial_{xx}^2\left((1-\chi_R)\begin{bmatrix} s_k\\ r_k\end{bmatrix}\right)&=\frac{\partial}{\partial x}\left(-(\chi_R)_x\begin{bmatrix} s_k\\ r_k\end{bmatrix}+(1-\chi_R)\begin{bmatrix} s_k\\ r_k\end{bmatrix}_x\right)\\ &=-\partial_{xx}^2\chi_R\begin{bmatrix} s_k\\ r_k\end{bmatrix}-(\chi_R)_x\begin{bmatrix} s_k\\ r_k\end{bmatrix}_x-(\chi_R)_x\begin{bmatrix} s_k\\ r_k\end{bmatrix}_x+(1-\chi_R)\begin{bmatrix} s_k\\ r_k\end{bmatrix}_{xx}\\ &=-\partial_{xx}^2\chi_R\begin{bmatrix} s_k\\ r_k\end{bmatrix}-2(\chi_R)_x\begin{bmatrix} s_k\\ r_k\end{bmatrix}_x+(1-\chi_R)\partial_{xx}^2\begin{bmatrix} s_k\\ r_k\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Odatle sledi da je

$$\begin{aligned}&\frac{1}{k}\int_0^t(1-\chi_R)\partial_{xx}^2\begin{bmatrix} s_k\\ r_k\end{bmatrix}d\mathrm{s}\\ &=\frac{1}{k}\int_0^t\partial_{xx}^2\left((1-\chi_R)\begin{bmatrix} s_k\\ r_k\end{bmatrix}\right)d\mathrm{s}+\frac{2}{k}\int_0^t(\chi_R)_x\begin{bmatrix} s_k\\ r_k\end{bmatrix}_x d\mathrm{s}+\frac{1}{k}\int_0^t(\partial_{xx}^2\chi_R)\begin{bmatrix} s_k\\ r_k\end{bmatrix}d\mathrm{s}.\end{aligned}$$

Takođe, znamo

$$A(s_k,r_k)\left((1-\chi_R)\begin{bmatrix} s_k \\ r_k \end{bmatrix}\right)_x = (1-\chi_R)A(s_k,r_k)\begin{bmatrix} s_k \\ r_k \end{bmatrix}_x + (1-\chi_R)_x A(s_k,r_k)\begin{bmatrix} s_k \\ r_k \end{bmatrix},$$

iz čega sledi da je

$$(1-\chi_R)A(s_k,r_k)\begin{bmatrix} s_k \\ r_k \end{bmatrix}_x = A(s_k,r_k)\left((1-\chi_R)\begin{bmatrix} s_k \\ r_k \end{bmatrix}\right)_x + (\chi_R-1)_x A(s_k,r_k)\begin{bmatrix} s_k \\ r_k \end{bmatrix}.$$

Kada se vratimo nazad u (3.70), imamo

$$\begin{aligned}
(1-\chi_R)\begin{bmatrix} s_k(t) \\ r_k(t) \end{bmatrix} &= (1-\chi_R)\begin{bmatrix} s_0 \\ r_0 \end{bmatrix} + \int_0^t (1-\chi_R)\begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} dB_s \\
&+ \frac{1}{k}\int_0^t \partial_{xx}^2\left((1-\chi_R)\begin{bmatrix} s_k \\ r_k \end{bmatrix}\right) ds + \frac{2}{k}\int_0^t (\chi_R)_x \begin{bmatrix} s_k \\ r_k \end{bmatrix}_x ds + \frac{1}{k}\int_0^t (\partial_{xx}^2\chi_R)\begin{bmatrix} s_k \\ r_k \end{bmatrix} ds \\
&- \int_0^t \varphi_N A(s_k,r_k)\left((1-\chi_R)\begin{bmatrix} s_k \\ r_k \end{bmatrix}\right)_x ds - \int_0^t \varphi_N (\chi_R)_x A(s_k,r_k)\begin{bmatrix} s_k \\ r_k \end{bmatrix} ds.
\end{aligned}$$

Na ovaj izraz primenimo Itovu formulu i tako za svako $k \geq 1$, $t \in [0,T]$, za skoro svako $\omega \in \Omega$, dobijamo

$$\begin{aligned}
&\left\|(1-\chi_R)\begin{bmatrix} s_k(t) \\ r_k(t) \end{bmatrix}\right\|_{m-1}^2 \\
&\leq \left\|(1-\chi_R)\begin{bmatrix} s_0 \\ r_0 \end{bmatrix}\right\|_{m-1}^2 + 2\int_0^t \left\langle (1-\chi_R)\begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix}, (1-\chi_R)\begin{bmatrix} s_k \\ r_k \end{bmatrix}\right\rangle_{m-1} dB_s \\
&+ \int_0^t \left\|(1-\chi_R)\begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix}\right\|_{m-1}^2 ds + C\int_0^t \left\|(1-\chi_R)\begin{bmatrix} s_k \\ r_k \end{bmatrix}\right\|_{m-1}^2 ds \\
&+ \frac{C}{kR^2}\int_0^t \left\|\begin{bmatrix} s_k \\ r_k \end{bmatrix}\right\|_{m-1}^2 ds + \frac{C}{kR}\int_0^t \left\|\begin{bmatrix} s_k \\ r_k \end{bmatrix}\right\|_m \left\|\begin{bmatrix} s_k \\ r_k \end{bmatrix}\right\|_{m-1} ds \\
&+ \frac{C}{R}\int_0^t \left\|\begin{bmatrix} s_k \\ r_k \end{bmatrix}\right\|_{m-1}^2 ds - \frac{2}{k}\int_0^t \left\|(1-\chi_R)\begin{bmatrix} s_k \\ r_k \end{bmatrix}\right\|_m^2 ds + \frac{2}{k}\int_0^t \left\|(1-\chi_R)\begin{bmatrix} s_k \\ r_k \end{bmatrix}\right\|_0^2 ds.
\end{aligned}$$

Kada uradimo očekivanje, supremum, pa potom primenimo (3.9), (3.67) i na kraju BDG i Gronvalovu nejednakost, desna strana gornje nejednakosti nestaje (odnosno kad $R \to \infty$, $\frac{1}{R} \to 0$ i $(1-\chi_R) \to 0$). I tako dolazimo do važnih procena

$$E\left(\left\|(1-\chi_R)\begin{bmatrix} s_k(t) \\ r_k(t) \end{bmatrix}\right\|^2_{C([0,T];H^{m-1})}\right) \to 0, \tag{3.71}$$

$$E\left(\left\|(1-\chi_R)\begin{bmatrix} M_{k1}(t) \\ M_{k2}(t) \end{bmatrix}\right\|^2_{C([0,T];H^{m-1})}\right) \to 0, \tag{3.72}$$

kad $R \to \infty$ za $k \geq 1$ ((3.72) sledi iz (3.71)). Za nastavak dokaza će nam trebati još dve nejednakosti za svako $k \geq 1$ date sa

$$E\left(\left\|\begin{bmatrix} s_k \\ r_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} M_{k1} \\ M_{k2} \end{bmatrix}\right\|^2_{C([0,T];H^{m})}\right) \leq C, \tag{3.73}$$

$$E\left(\left\|\frac{\partial}{\partial t}\left(\begin{bmatrix} s_k \\ r_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} M_{k1} \\ M_{k2} \end{bmatrix}\right)\right\|^2_{L^2(0,T;H^{m-1})}\right) \leq C. \tag{3.74}$$

Procena (3.73) se pokazuje koristeći (3.67), (3.69), a procena (3.74) pomoću (3.67), (3.68) i početnih jednačina.

Sada ćemo konačno pokazati tačku (ii) datu na početku ovog odeljka, tj. da niz zakona raspodele slabo konvergira. To ćemo uraditi tako što pokažemo osobinu (TI) i potom iskoristimo teoremu Prohorova.

3.8.1 Pokazivanje osobine (TI)

Da bi pokazali konvergenciju niza zakona raspodele rešenja SPDJ problema, koristićemo jedan od indirektnih metoda koji se sastoji iz pokazivanja relativne kompaktnosti tog niza i potom da svi konvergentni podnizovi konvergiraju ka istoj granici. A relativnu kompaktnost zahvaljujući teoremi Prohorova pokazujemo tako što pokažemo osobinu (TI). Definicije slabe konvergencije mera verovatnoće, relativne kompaktnosti i osobine (TI) navodimo u nastavku.

• Neka je dat prostor sa merom $(S,\mathcal{F})$ i neka je $\{P_n\}_n$ niz mera verovatnoće na $(S,\mathcal{F})$. Kažemo da niz $\{P_n\}_n$ *slabo konvergira* ka meri verovatnoće P ako i samo ako za sve ograničene, neprekidne funkcije f na S važi

$$\int_S f dP_n \to \int_S f dP, \text{ kad } n \to \infty.$$

• Neka je dat prostor sa merom $(S,\mathcal{B}(S))$ i neka je Π familija mera verovatnoće na $(S,\mathcal{B}(S))$. Kažemo da je familija Π *relativno kompaktna* ako svaki niz elemenata od Π sadrži slabo konvergentan podniz.

• Neka je dat prostor sa merom $(S,\mathcal{B}(S))$ i neka je Π familija mera verovatnoće na $(S,\mathcal{B}(S))$. Kažemo da familija Π zadovoljava *osobinu (TI)*[13] ako za svako $\varepsilon > 0$, postoji kompaktan skup $K \subseteq S$, tako da za svako $P \in \Pi$ važi

$$P(K) \geq 1 - \varepsilon.$$

Sada se vratimo na naš SPDJ problem. Prvo uvodimo smenu

$$\begin{bmatrix} v_{k1} \\ v_{k2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_k \\ r_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} M_{k1} \\ M_{k2} \end{bmatrix}.$$

Za ovaj niz, osobina (TI) zahteva da za svako $\delta > 0$, postoji kompaktan podskup od $C([0,T];H^{m-1})$ koji obeležavamo sa K_δ, tako da za svako k važi

$$P\left(\begin{bmatrix} v_{k1} \\ v_{k2} \end{bmatrix} \in K_\delta\right) > 1 - \delta.$$

Dakle, treba konstruisati kompaktan skup K_δ i pokazati ovu nejednakost. Fiksirajmo $\delta > 0$ i izaberimo nizove $\{\delta_n\} \downarrow 0$ i $\{\alpha_n\} \uparrow \infty$ tako da važi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \, \delta_n + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n < \delta. \tag{3.75}$$

Za svako $n \geq 1$, postoji $R_n > 1$, tako da je za svako $k \geq 1$ ispunjeno

$$E\left(\left\|(1-\chi_{R_n})\begin{bmatrix} v_{k1} \\ v_{k2} \end{bmatrix}\right\|^2_{C([0,T];H^{m-1})}\right) + E\left(\left\|(1-\chi_{R_n})\begin{bmatrix} M_{k1} \\ M_{k2} \end{bmatrix}\right\|^2_{C([0,T];H^{m-1})}\right) < \delta_n \tag{3.76}$$

(videti (3.71)). Na osnovu (3.73), (3.74) sledi da postoji konstanta $\tilde{C} > 0$, tako da za svako $R > 1$ i za svako k važi

$$E\left(\left\|\chi_R \begin{bmatrix} v_{k1} \\ v_{k2} \end{bmatrix}\right\|^2_{C([0,T];H^m)}\right) \leq \tilde{C},$$

$$E\left(\left\|\frac{\partial}{\partial t}\left(\chi_R \begin{bmatrix} v_{k1} \\ v_{k2} \end{bmatrix}\right)\right\|^2_{L^2(0,T;H^{m-1})}\right) \leq \tilde{C}.$$

[13] eng. Tightness.

Sada biramo $D_n > 0$ tako da je $D_n > \frac{\tilde{C}}{\delta_n}$. Korišćenjem prethodnih procena i nejednakosti Čebiševa, odmah dolazimo do

$$P\left(\left\|(1-\chi_{R_n})\begin{bmatrix} v_{k1} \\ v_{k2} \end{bmatrix}\right\|_{C([0,T];H^{m-1})} \geq \frac{1}{\sqrt{\alpha_n}}\right)$$
$$\leq \alpha_n\, E\left(\left\|(1-\chi_{R_n})\begin{bmatrix} v_{k1} \\ v_{k2} \end{bmatrix}\right\|^2_{C([0,T];H^{m-1})}\right) \leq \alpha_n\, \delta_n, \tag{3.77}$$

$$P\left(\left\|\chi_{R_n}\begin{bmatrix} v_{k1} \\ v_{k2} \end{bmatrix}\right\|_{C([0,T];H^{m})} \geq \sqrt{D_n}\right) \leq \delta_n, \tag{3.78}$$

$$P\left(\left\|\frac{\partial}{\partial t}\left(\chi_{R_n}\begin{bmatrix} v_{k1} \\ v_{k2} \end{bmatrix}\right)\right\|_{L^2(0,T;H^{m-1})} \geq \sqrt{D_n}\right) \leq \delta_n. \tag{3.79}$$

Napomena 3.8.1 *Nejednakost Čebiševa*[14] *tvrdi da ako slučajna promenljiva X zadovoljava $E(\|X\|^2) < \infty$, tada je za svako $\varepsilon > 0$*

$$P(\|X\| \geq \varepsilon) \leq \frac{E(\|X\|^2)}{\varepsilon^2}.$$

Na osnovu procena (3.77)-(3.79) konstruisaćemo kompaktni skup K_δ. Definišimo prvo skup S_n sa

$$S_n = \Bigg\{ f = (f_1, f_2) \in C([0,T];H^{m-1}) : supp(f) \subset [0,T] \times \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq 2R_n\},$$
$$\left\|\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}\right\|_{L^\infty(0,T;H^m)} \leq \sqrt{D_n},\ \left\|\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}_t\right\|_{L^2(0,T;H^{m-1})} \leq \sqrt{D_n} \Bigg\}.$$

Na osnovu Posledice 4 u [113] ovaj skup je kompaktan u prostoru $C([0,T];H^{m-1})$.

Napomena 3.8.2 *Posledica 4 u [113]: Neka su X, B, Y Banahovi prostori takvi da je $X \hookrightarrow_c B \hookrightarrow Y$,*[15] *i neka je F proizvoljan skup funkcija. Ako je F ograničen u $L^\infty(0,T;X)$ i F_t ograničen u $L^r(0,T;Y)$ za $r > 1$, onda je F relativno kompaktan skup u prostoru $C([0,T];B)$.*

[14] eng. Chebyshev's inequality.

[15] Oznaka $\hookrightarrow_c$ se koristi za kompaktno ulaganje prostora.

Potom definišemo skup Q_n sa

$$Q_n = \left\{ f = (f_1, f_2) \in C([0,T]; H^{m-1}) : \inf_{h \in S_n} (\|f - h\|_{C([0,T];H^{m-1})}) \le \frac{1}{\sqrt{\alpha_n}} \right\}.$$

Za njega možemo reći da se sastoji iz funkcija koje su dovoljno blizu onima iz skupa S_n. A na osnovu procena u verovatnoći (3.77)-(3.79) sledi

$$P\left(\begin{bmatrix} v_{k1} \\ v_{k2} \end{bmatrix} \notin Q_n \right) \le \delta_n + \delta_n + \alpha_n \delta_n.$$

Sada za fiksirano δ, definišemo kompaktan skup K_δ koji tražimo sa

$$K_\delta = \bigcap_{n=1}^{\infty} Q_n.$$

Na osnovu pretpostavke (3.75) važi

$$P\left(\begin{bmatrix} v_{k1} \\ v_{k2} \end{bmatrix} \in K_\delta \right) > 1 - \delta.$$

Ovim smo pokazali osobinu (TI) za niz $\{v_k\}$. Sada ćemo to isto uraditi i za niz $\{M_k\}$. Dakle, za svako $\delta > 0$ treba pronaći kompaktan podskup od $C([0,T]; H^{m-1})$ koji obeležavamo sa H_δ, i za koji za svako $k \ge 1$ važi

$$P\left(M_k = \begin{bmatrix} M_{k1} \\ M_{k2} \end{bmatrix} \in H_\delta \right) > 1 - \delta.$$

Kao i malopre prvo ćemo dokazati neke procene u verovatnoći i onda na osnovu njih konstruisati traženi kompaktan skup. Primenom Itove formule na M_k sledi

$$\|M_k(t) - M_k(\mathtt{s})\|_m^2 = \int_{\mathtt{s}}^t \left\| \begin{bmatrix} l_1(s_k(\eta), r_k(\eta)) \\ l_2(s_k(\eta), r_k(\eta)) \end{bmatrix} \right\|_m^2 d\eta$$
$$+2 \int_{\mathtt{s}}^t \left\langle \begin{bmatrix} l_1(s_k(\eta), r_k(\eta)) \\ l_2(s_k(\eta), r_k(\eta)) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} M_{k1}(\eta) \\ M_{k2}(\eta) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} M_{k1}(\mathtt{s}) \\ M_{k2}(\mathtt{s}) \end{bmatrix} \right\rangle_m dB_\eta.$$

Potom kao i ranije koristeći BDG i Jangovu nejednakost radimo procenu stohastičkog integrala.

Dakle,

$$
\begin{aligned}
&E\left(\sup_{\mathrm{s}\le\xi\le t}\left|\int_{\mathrm{s}}^{\xi}\left\langle\begin{bmatrix} l_1(s_k(\eta),r_k(\eta))\\ l_2(s_k(\eta),r_k(\eta))\end{bmatrix},\begin{bmatrix} M_{k1}(\eta)\\ M_{k2}(\eta)\end{bmatrix}-\begin{bmatrix} M_{k1}(\mathrm{s})\\ M_{k2}(\mathrm{s})\end{bmatrix}\right\rangle_m dB_\eta\right|^2\right)\\
&\le CE\left(\int_{\mathrm{s}}^{t}\left\|\begin{bmatrix} l_1(s_k(\eta),r_k(\eta))\\ l_2(s_k(\eta),r_k(\eta))\end{bmatrix}\right\|_m^2\left\|\begin{bmatrix} M_{k1}(\eta)\\ M_{k2}(\eta)\end{bmatrix}-\begin{bmatrix} M_{k1}(\mathrm{s})\\ M_{k2}(\mathrm{s})\end{bmatrix}\right\|_m^2 d\eta\right)\\
&\le CE\left(\sup_{\mathrm{s}\le\eta\le t}\left\|\begin{bmatrix} M_{k1}(\eta)\\ M_{k2}(\eta)\end{bmatrix}-\begin{bmatrix} M_{k1}(\mathrm{s})\\ M_{k2}(\mathrm{s})\end{bmatrix}\right\|_m^2\int_{\mathrm{s}}^{t}\left\|\begin{bmatrix} l_1(s_k(\eta),r_k(\eta))\\ l_2(s_k(\eta),r_k(\eta))\end{bmatrix}\right\|_m^2 d\eta\right)\\
&\le \sigma E\left(\sup_{\mathrm{s}\le\eta\le t}\left\|\begin{bmatrix} M_{k1}(\eta)\\ M_{k2}(\eta)\end{bmatrix}-\begin{bmatrix} M_{k1}(\mathrm{s})\\ M_{k2}(\mathrm{s})\end{bmatrix}\right\|_m^4\right)\\
&+C_\sigma E\left(\int_{\mathrm{s}}^{t}\left\|\begin{bmatrix} l_1(s_k(\eta),r_k(\eta))\\ l_2(s_k(\eta),r_k(\eta))\end{bmatrix}\right\|_m^2 d\eta\right)^2.
\end{aligned}
$$

Birajući σ dovoljno malo (uz kvadriranje, supremum i očekivanje), vraćamo se nazad u Itovu formulu. I tako dolazimo do procene za sve $0\le \mathrm{s}\le t\le T$ date sa

$$
E\left(\sup_{\mathrm{s}\le\xi\le t}\left\|\begin{bmatrix} M_{k1}(\xi)\\ M_{k2}(\xi)\end{bmatrix}-\begin{bmatrix} M_{k1}(\mathrm{s})\\ M_{k2}(\mathrm{s})\end{bmatrix}\right\|_m^4\right)\le CE\left(\int_{\mathrm{s}}^{t}\left\|\begin{bmatrix} l_1(s_k(\eta),r_k(\eta))\\ l_2(s_k(\eta),r_k(\eta))\end{bmatrix}\right\|_m^2 d\eta\right)^2.
$$

Koristeći osobinu Lipšic neprekidnosti funkcija l_1,l_2 sledi

$$
E\left(\int_{\mathrm{s}}^{t}\left\|\begin{bmatrix} l_1(s_k(\eta),r_k(\eta))\\ l_2(s_k(\eta),r_k(\eta))\end{bmatrix}\right\|_m^2 d\eta\right)^2\le (t-\mathrm{s})^2E\left(C+C\|(s_k,r_k)\|^4_{L^\infty(0,T;H^m)}\right).
$$

Sada ćemo iskoristiti prostore Soboljeva $W^{l,p}(0,T;H^m)$, za $l\in(0,1)$, $p\ge 1$ (videti Odeljak 1.3). Na osnovu prethodnog i (3.67) direktnom zamenom sledi

$$
E\left(\int_0^T\int_0^T\frac{\left\|\begin{bmatrix} M_{k1}(t)\\ M_{k2}(t)\end{bmatrix}-\begin{bmatrix} M_{k1}(\mathrm{s})\\ M_{k2}(\mathrm{s})\end{bmatrix}\right\|_m^4}{|t-\mathrm{s}|^{5/2}}dtd\mathrm{s}\right)\le C.
$$

Napomenimo da je $5/2$ dobijeno iz $3/8\cdot 4+1$. Na osnovu svega prethodnog i (3.69), sada važi

$$
E\left(\left\|\begin{bmatrix} M_{k1}\\ M_{k2}\end{bmatrix}\right\|^4_{W^{3/8,4}(0,T;H^m)}\right)\le C.
$$

Odavde vidimo da $(M_{k1}, M_{k2}) \in L^4(\Omega; W^{3/8,4}(0,T;H^m))$. Takođe, korišćenjem nejednakosti Čebiševa i (3.76) sledi

$$P\left(\left\|(1-\chi_{R_n})\begin{bmatrix} M_{k1} \\ M_{k2} \end{bmatrix}\right\|_{C([0,T];H^{m-1})} \geq \frac{1}{\sqrt{\alpha_n}}\right) \leq \alpha_n\,\delta_n.$$

Potom, ponovo biramo neku konstantu $\hat{D}_n > 0$ tako da je za svako k zadovoljeno

$$P\left(\left\|\chi_{R_n}\begin{bmatrix} M_{k1} \\ M_{k2} \end{bmatrix}\right\|_{W^{3/8,4}(0,T;H^m)} \geq \hat{D}_n\right) \leq \delta_n.$$

Slično kao malopre, neka je sada dat skup

$$\hat{S}_n = \Bigg\{ f = (f_1, f_2) \in C([0,T];H^{m-1}) : supp(f) \subset [0,T] \times \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq 2R_n\},$$
$$\left\|\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}\right\|_{W^{3/8,4}(0,T;H^m)} \leq \hat{D}_n \Bigg\}.$$

Na osnovu (6.5) u [113] skup $\hat{S}_n$ je kompaktan u prostoru $C([0,T];H^{m-1})$.

Napomena 3.8.3 *Procena* (6.5) *u [113]: Neka su X i B Banahovi prostori takvi da je $X \hookrightarrow_c B$. Ako je $s > 1/r$, onda je $W^{s,r}(0,T;X) \hookrightarrow_c C([0,T];B)$.*

Potom definišemo skup $\hat{Q}_n$ sa

$$\hat{Q}_n = \left\{ f = (f_1, f_2) \in C([0,T];H^{m-1}) : \inf_{h \in \hat{S}_n} \left(\|f-h\|_{C([0,T];H^{m-1})}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{\alpha_n}} \right\},$$

i kao i ranije uzmimo

$$H_\delta = \bigcap_{n=1}^{\infty} \hat{Q}_n.$$

Skup H_δ je kompaktan podskup od $C([0,T];H^{m-1})$ i za svako k važi

$$P\left(\begin{bmatrix} M_{k1} \\ M_{k2} \end{bmatrix} \in H_\delta\right) > 1-\delta.$$

Time smo pokazali osobinu (TI) i za niz $\{M_k\}$.

Da sumiramo, sada za svako δ postoji kompaktan skup $\mathcal{A}_\delta \subset C([0,T];H^{m-1}) \times C([0,T];H^{m-1})$ tako da za svako k važi

$$P\left(\left(\begin{bmatrix} s_k \\ r_k \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} M_{k1} \\ M_{k2} \end{bmatrix}\right) \in \mathcal{A}_\delta\right) > 1-\delta.$$

Sada ćemo primeniti teoremu Prohorova.

Napomena 3.8.4 *Teorema Prohorova:*[16] *Neka je* Π *familija mera verovatnoće na kompletnom, separabilnom, metričkom prostoru S. Ova familija je relativno kompaktna ako i samo ako zadovoljava osobinu* (TI).

Dakle, proizvoljni niz mera verovatnoće koji ima osobinu (TI) ima slabo konvergentan podniz. Na osnovu teoreme Prohorova sledi da postoje podnizovi (s_k, r_k), (M_{k1}, M_{k2}) (koji obeležavamo isto) čiji zakon raspodele je slabo konvergentan na Borelovim skupovima prostora $C([0,T];H^{m-1})$. Ovim je tačka (ii) sa početka Odeljka 3.8 pokazana.

3.8.2 Puštanje viskoznosti u nulu

Na početku Odeljka 3.8 smo pretpostavili da je $\nu = \frac{1}{k}$. Sada ćemo pomoću Skorohodove teoreme pustiti $k \to \infty$ odnosno $\nu \to 0$. Na osnovu svega što smo pokazali, uslovi za njenu primenu su ispunjeni.

Napomena 3.8.5 *Teorema Skorohoda:*[17] *Neka je dat prostor sa merom* $(S, \mathcal{B}(S))$ *i na njemu niz mera verovatnoće* $\{\mu_n\}_n$ *koji slabo konvergira ka meri verovatnoće* μ. *Tada postoji prostor verovatnoća* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *i slučajne promenljive* X, X_1, $X_2, \ldots$ *tako da važi*

$$\mathcal{L}(X_n) = \mu_n,\ \mathcal{L}(X) = \mu,\ \lim_{n\to\infty} X_n = X,\ P\text{-}s.s.$$

Na osnovu Skorohodove teoreme, postoji prostor verovatnoća $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{P})$ i slučajne promenljive $(\tilde{s}_k, \tilde{r}_k)$, $(\tilde{s}, \tilde{r})$, $(\tilde{M}_{k1}, \tilde{M}_{k2})$, $(\tilde{M}_1, \tilde{M}_2)$ tako da je

$$\mathcal{L}(s_k, r_k) = \mathcal{L}(\tilde{s}_k, \tilde{r}_k),$$

$$\mathcal{L}(M_{k1}, M_{k2}) = \mathcal{L}(\tilde{M}_{k1}, \tilde{M}_{k2}),$$

i za skoro svako $\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}$, kad $k \to \infty$ u prostoru $C([0,T];H^{m-1})$ važi

$$\begin{bmatrix} \tilde{s}_k \\ \tilde{r}_k \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \tilde{s} \\ \tilde{r} \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} \tilde{M}_{k1} \\ \tilde{M}_{k2} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \tilde{M}_1 \\ \tilde{M}_2 \end{bmatrix}.$$

Dakle, vidimo da će u nastavku biti reč o jakoj konvergenciji u PDJ smislu i slaboj konvergenciji u probabilističkom smislu. Za sada imamo novi prostor verovatnoća, pa ostaje još da konstruišemo novu filtraciju i pronađemo novo Braunovo kretanje.

Za svaku neprekidnu ograničenu funkciju ψ datu na H^{m-1} važi

$$\int_{\tilde{\Omega}} \psi\left(\begin{bmatrix} \tilde{s}(0) \\ \tilde{r}(0) \end{bmatrix}\right) d\tilde{P} = \lim_{k\to\infty} \int_{\tilde{\Omega}} \psi\left(\begin{bmatrix} \tilde{s}_k(0) \\ \tilde{r}_k(0) \end{bmatrix}\right) d\tilde{P}.$$

[16] eng. Prokhorov theorem.
[17] eng. Skorohod theorem.

Pošto su zakoni raspodele za $(\tilde{s}_k, \tilde{r}_k)$ i (s_k, r_k) isti, prethodni izraz je jednak sa

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega \psi\left(\begin{bmatrix} s_k(0) \\ r_k(0) \end{bmatrix}\right) dP = \int_\Omega \psi\left(\begin{bmatrix} s_0 \\ r_0 \end{bmatrix}\right) dP.$$

Prostor H^m je potprostor od H^{m-1}, pa je svaki Borelov skup od H^m ujedno i Borelov skup od H^{m-1}. A kako je (s_0, r_0) slučajna promenljiva sa vrednostima u H^m, sledi da i slučajna promenljiva $(\tilde{s}(0), \tilde{r}(0))$ ima vrednosti u H^m i da je

$$\mathcal{L}(s_0, r_0) = \mathcal{L}(\tilde{s}_0, \tilde{r}_0). \tag{3.80}$$

Dalje, pošto $(\tilde{M}_{k1}, \tilde{M}_{k2}) \to (\tilde{M}_1, \tilde{M}_2)$ u prostoru $C([0,T]; H^{m-1})$, korišćenjem leme Fatua dobijamo

$$\tilde{E}\left(\left\|\begin{bmatrix} \tilde{M}_1 \\ \tilde{M}_2 \end{bmatrix}\right\|^4_{C([0,T];H^{m-1})}\right) \le \liminf_{k\to\infty} \tilde{E}\left(\left\|\begin{bmatrix} \tilde{M}_{k1} \\ \tilde{M}_{k2} \end{bmatrix}\right\|^4_{C([0,T];H^{m-1})}\right).$$

A zbog istih zakona raspodele za (M_{k1}, M_{k2}) i $(\tilde{M}_{k1}, \tilde{M}_{k2})$, znamo da je za svako k

$$\tilde{E}\left(\left\|\begin{bmatrix} \tilde{M}_{k1} \\ \tilde{M}_{k2} \end{bmatrix}\right\|^4_{C([0,T];H^{m-1})}\right) = E\left(\left\|\begin{bmatrix} M_{k1} \\ M_{k2} \end{bmatrix}\right\|^4_{C([0,T];H^{m-1})}\right) \le C,$$

gde ograničenost sa C sledi iz (3.69). Na osnovu toga dobijamo da je

$$\tilde{E}\left(\left\|\begin{bmatrix} \tilde{M}_1 \\ \tilde{M}_2 \end{bmatrix}\right\|^4_{C([0,T];H^{m-1})}\right) \le C. \tag{3.81}$$

Iz definicije M_k sledi da za sve $0 \le \mathtt{p} \le \mathtt{s} \le t \le T$ i za svaku neprekidnu ograničenu funkciju ψ definisanu na $H^{m-1} \times H^{m-1}$ važi

$$E\left(\left(\begin{bmatrix} M_{k1}(t) \\ M_{k2}(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} M_{k1}(\mathtt{s}) \\ M_{k2}(\mathtt{s}) \end{bmatrix}\right) \psi\left(\begin{bmatrix} s_k(\mathtt{p}) \\ r_k(\mathtt{p}) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} M_{k1}(\mathtt{p}) \\ M_{k2}(\mathtt{p}) \end{bmatrix}\right)\right) = 0.$$

Pošto (M_{k1}, M_{k2}) i $(\tilde{M}_{k1}, \tilde{M}_{k2})$ imaju isti zakon raspodele sledi

$$\tilde{E}\left(\left(\begin{bmatrix} \tilde{M}_{k1}(t) \\ \tilde{M}_{k2}(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \tilde{M}_{k1}(\mathtt{s}) \\ \tilde{M}_{k2}(\mathtt{s}) \end{bmatrix}\right) \psi\left(\begin{bmatrix} \tilde{s}_k(\mathtt{p}) \\ \tilde{r}_k(\mathtt{p}) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \tilde{M}_{k1}(\mathtt{p}) \\ \tilde{M}_{k2}(\mathtt{p}) \end{bmatrix}\right)\right) = 0.$$

Kada pustimo $k \to \infty$, dobijamo da je

$$\tilde{E}\left(\left(\begin{bmatrix} \tilde{M}_1(t) \\ \tilde{M}_2(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \tilde{M}_1(\mathtt{s}) \\ \tilde{M}_2(\mathtt{s}) \end{bmatrix}\right) \psi\left(\begin{bmatrix} \tilde{s}(\mathtt{p}) \\ \tilde{r}(\mathtt{p}) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \tilde{M}_1(\mathtt{p}) \\ \tilde{M}_2(\mathtt{p}) \end{bmatrix}\right)\right) = 0. \tag{3.82}$$

Neka je $\hat{\mathcal{F}}_t$ σ-algebra generisana sa $(\tilde{s}(\mathrm{p}),\tilde{r}(\mathrm{p}))$, $(\tilde{M}_1(\mathrm{p}),\tilde{M}_2(\mathrm{p}))$, $0\le \mathrm{p}\le t$ i sa svim $\tilde{P}$-zanemarljivim skupovima u $\tilde{\mathcal{F}}$. Definišimo filtraciju $\{\tilde{\mathcal{F}}_t\}$, $t\in[0,T)$ sa

$$\tilde{\mathcal{F}}_t=\bigcap_{\varepsilon>0}\hat{\mathcal{F}}_{t+\varepsilon}.$$

Na osnovu (3.81), (3.82) sledi da je $\tilde{M}$ neprekidni martingal sa vrednostima u prostoru H^{m-1} u odnosu na filtraciju $\{\tilde{\mathcal{F}}_t\}$.

Sada ćemo iskoristiti Teoremu o reprezentaciji martingala (videti Teoremu 8.2 u [34]). Bez zalaženja u detalje ona nam u suštini kaže da se veliki broj neprekidnih martingala može predstaviti kao stohastički integral u odnosu na neko Braunovo kretanje. Na osnovu nje sledi da postoji stohastička baza $(\Omega^\#,\mathcal{F}^\#,\{\mathcal{F}^\#_t\},P^\#)$ koja je ekstenzija stohastičke baze $(\tilde{\Omega},\tilde{\mathcal{F}},\{\tilde{\mathcal{F}}_t\},\tilde{P})$ tako da je

$$\begin{bmatrix}\tilde{M}_1(t)\\ \tilde{M}_2(t)\end{bmatrix}=\int_0^t\begin{bmatrix}l_1(\tilde{s},\tilde{r})\\ l_2(\tilde{s},\tilde{r})\end{bmatrix}dB^\#,$$

gde je $B^\#$ Braunovo kretanje na novoj bazi. Pošto su zakoni raspodele za (s_k,r_k) i $(\tilde{s}_k,\tilde{r}_k)$ isti, i $(\tilde{s}_k,\tilde{r}_k)\to(\tilde{s},\tilde{r})$, onda za svako $t\in[0,T]$ i za s.s. $\omega^\#\in\Omega^\#$ važi

$$\begin{bmatrix}\tilde{s}(t)\\ \tilde{r}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\tilde{s}_0\\ \tilde{r}_0\end{bmatrix}-\int_0^t\varphi_N A(\tilde{s},\tilde{r})\begin{bmatrix}\tilde{s}\\ \tilde{r}\end{bmatrix}_x d\mathrm{s}+\int_0^t\begin{bmatrix}l_1(\tilde{s},\tilde{r})\\ l_2(\tilde{s},\tilde{r})\end{bmatrix}dB^\#_{\mathrm{s}}. \tag{3.83}$$

Time su tačka 2. iz Teoreme 3.3.6 i korak (iii) sa početka Odeljka 3.8 kompletirani. A na osnovu jednakosti (3.80) i postojanja ekstenzije stohastičke baze sledi deo 3. Teoreme 3.3.6.

3.8.3 Poboljšanje regularnosti

Ostalo je još pokazati tačku 1. iz Teoreme 3.3.6 i korak (iv) sa početka Odeljka 3.8. Regularnost od $(\tilde{s},\tilde{r})$ ćemo poboljšati korišćenjem njihove konvolucije sa molifajerima ρ_η, tako da nove promenljive pripadaju prostoru H^m. Na osnovu prethodnog odeljka znamo da slučajne promenljive (s_k,r_k) i $(\tilde{s}_k,\tilde{r}_k)$ imaju isti zakon raspodele u prostoru $C([0,T];H^{m-1})$. Zato je

$$\tilde{E}\left(\left\|\begin{bmatrix}\tilde{s}_k\\ \tilde{r}_k\end{bmatrix}*\rho_\eta\right\|^4_{C([0,T];H^m)}\right)=E\left(\left\|\begin{bmatrix}s_k\\ r_k\end{bmatrix}*\rho_\eta\right\|^4_{C([0,T];H^m)}\right).$$

Primenom Jangove nejednakosti za konvolucije i (3.67), za svako k i za svako $\eta>0$, sledi

$$E\left(\left\|\begin{bmatrix}s_k\\ r_k\end{bmatrix}*\rho_\eta\right\|^4_{C([0,T];H^m)}\right)\le E\left(\left\|\begin{bmatrix}s_k\\ r_k\end{bmatrix}\right\|^4_{C([0,T];H^m)}\right)\le C.$$

A pošto u prostoru $C([0,T];H^{m-1})$ važi $(\tilde{s}_k,\tilde{r}_k)\to(\tilde{s},\tilde{r})$ kad $k\to\infty$, onda za skoro svako $\tilde{\omega}\in\tilde{\Omega}$, za svako $\eta>0$, u prostoru $C([0,T];H^m)$ važi

$$\begin{bmatrix}\tilde{s}_k\\ \tilde{r}_k\end{bmatrix}*\rho_\eta\to\begin{bmatrix}\tilde{s}\\ \tilde{r}\end{bmatrix}*\rho_\eta,\ \text{kad}\,k\to\infty.$$

Na osnovu prethodnih nejednakosti i leme Fatua sledi

$$\begin{aligned}
&\tilde{E}\left(\left\|\begin{bmatrix}\tilde{s}\\ \tilde{r}\end{bmatrix}*\rho_\eta\right\|^4_{C([0,T];H^m)}\right)\\
&=\tilde{E}\left(\liminf_{k\to\infty}\left\|\begin{bmatrix}\tilde{s}_k\\ \tilde{r}_k\end{bmatrix}*\rho_\eta\right\|^4_{C([0,T];H^m)}\right)\\
&\leq\liminf_{k\to\infty}\tilde{E}\left(\left\|\begin{bmatrix}\tilde{s}_k\\ \tilde{r}_k\end{bmatrix}*\rho_\eta\right\|^4_{C([0,T];H^m)}\right)\leq C.
\end{aligned}$$

Sada dolazimo do procene

$$\begin{aligned}
E^{\#}&\left(\left\|\begin{bmatrix}\tilde{s}\\ \tilde{r}\end{bmatrix}\right\|^4_{L^\infty(0,T;H^m)}\right)=\tilde{E}\left(\left\|\begin{bmatrix}\tilde{s}\\ \tilde{r}\end{bmatrix}\right\|^4_{L^\infty(0,T;H^m)}\right)\\
&\leq\tilde{E}\left(\liminf_{\eta\to0}\left\|\begin{bmatrix}\tilde{s}\\ \tilde{r}\end{bmatrix}*\rho_\eta\right\|^4_{C([0,T];H^m)}\right)\\
&\leq\liminf_{\eta\to0}\tilde{E}\left(\left\|\begin{bmatrix}\tilde{s}\\ \tilde{r}\end{bmatrix}*\rho_\eta\right\|^4_{C([0,T];H^m)}\right)\leq C. \qquad (3.84)
\end{aligned}$$

Ovde smo iskoristili da je $C([0,T];H^m)\hookrightarrow L^\infty(0,T;H^m)$ i ponovo lemu Fatua. Kada uradimo konvoluciju izraza (3.83) sa ρ_η, i potom primenimo Itovu formulu, za svako $t\in[0,T]$, za s.s. $\omega^{\#}\in\Omega^{\#}$, dobijamo

$$\begin{aligned}
&\left\|\begin{bmatrix}\tilde{s}(t)\\ \tilde{r}(t)\end{bmatrix}*\rho_\eta\right\|^2_m=\left\|\begin{bmatrix}\tilde{s}_0\\ \tilde{r}_0\end{bmatrix}*\rho_\eta\right\|^2_m+\int_0^t\left\|\begin{bmatrix}l_1(\tilde{s},\tilde{r})\\ l_2(\tilde{s},\tilde{r})\end{bmatrix}*\rho_\eta\right\|^2_m d\mathrm{s}\\
&-2\int_0^t\left\langle\varphi_N(\|(\tilde{s},\tilde{r})\|_{m-1})\left(A(\tilde{s},\tilde{r})\begin{bmatrix}\tilde{s}\\ \tilde{r}\end{bmatrix}_x\right)*\rho_\eta,\begin{bmatrix}\tilde{s}\\ \tilde{r}\end{bmatrix}*\rho_\eta\right\rangle_m d\mathrm{s}\\
&+2\int_0^t\left\langle\begin{bmatrix}l_1(\tilde{s},\tilde{r})\\ l_2(\tilde{s},\tilde{r})\end{bmatrix}*\rho_\eta,\begin{bmatrix}\tilde{s}\\ \tilde{r}\end{bmatrix}*\rho_\eta\right\rangle_m dB^{\#}_{\mathrm{s}}. \qquad (3.85)
\end{aligned}$$

U ostatku ove glave koristićemo promenljivu

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(v) := &\sum_{\alpha=m}\left\langle \partial_x^\alpha \left(A(v_1,v_2)\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}_x \right) - A(v_1,v_2)\begin{bmatrix} \partial_x^\alpha v_1 \\ \partial_x^\alpha v_2 \end{bmatrix}_x, \begin{bmatrix} \partial_x^\alpha v_1 \\ \partial_x^\alpha v_2 \end{bmatrix} \right\rangle_0 \\ &-\frac{1}{2}\sum_{\alpha=m}\left\langle \left(\frac{\partial}{\partial x}A(v_1,v_2)\right)\left(\partial_x^\alpha \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}\right), \partial_x^\alpha \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\rangle_0 \\ &+\sum_{\alpha\le m+1}\left\langle \partial_x^\alpha \left(A(v_1,v_2)\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}_x \right), \begin{bmatrix} \partial_x^\alpha v_1 \\ \partial_x^\alpha v_2 \end{bmatrix} \right\rangle_0, \end{aligned} \tag{3.86}$$

za svako $v = (v_1, v_2) \in H^m$ za koju važi da je

$$\mathcal{R}(v) = \lim_{\eta\to 0}\left\langle \left(A(v_1,v_2)\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}_x \right) * \rho_\eta, \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} * \rho_\eta \right\rangle_m.$$

Takođe, može se pokazati da za svako $v \in H^m$ za koje je $\|(v_1, v_2)\|_{m-1} \le N$, važi

$$|\mathcal{R}(v)| \le C_N \left\| \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\|_m^2. \tag{3.87}$$

Kako je trenutno za skoro svako $\omega^\# \in \Omega^\#$

$$(\tilde{s},\tilde{r}) \in C([0,T];H^{m-1}) \cap L^\infty(0,T;H^m),$$

(drugi deo proizilazi iz (3.84)), odatle zaključujemo da $(\tilde{s},\tilde{r})(t,\omega^\#) \in H^m$, za svako $t \in [0,T]$ i za skoro svako $\omega^\# \in \Omega^\#$. I time smo pokazali korak (iv) sa početka Odeljka 3.8. Kada u jednakosti (3.85) pustimo da $\eta \to 0$, dobijamo da je za svako $t \in [0,T]$ i za skoro svako $\omega^\# \in \Omega^\#$ zadovoljeno

$$\begin{aligned}\left\| \begin{bmatrix} \tilde{s}(t) \\ \tilde{r}(t) \end{bmatrix} \right\|_m^2 = &\left\| \begin{bmatrix} \tilde{s}_0 \\ \tilde{r}_0 \end{bmatrix} \right\|_m^2 + \int_0^t \left\| \begin{bmatrix} l_1(\tilde{s},\tilde{r}) \\ l_2(\tilde{s},\tilde{r}) \end{bmatrix} \right\|_m^2 d\mathtt{s} \\ &+2\int_0^t \left\langle \begin{bmatrix} l_1(\tilde{s},\tilde{r}) \\ l_2(\tilde{s},\tilde{r}) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \tilde{s} \\ \tilde{r} \end{bmatrix} \right\rangle_m dB_{\mathtt{s}}^\# \\ &-2\int_0^t \varphi_N(\|(\tilde{s},\tilde{r})\|_{m-1})\,\mathcal{R}(\tilde{s},\tilde{r})d\mathtt{s}.\end{aligned}$$

Kao i na kraju Odeljka 3.6, primenom Propozicije 1.7.1 iz [29] sledi

$$E^\#\left(\left\| \begin{bmatrix} \tilde{s} \\ \tilde{r} \end{bmatrix} \right\|_{C([0,T];H^m)} \right) \le C.$$

Ovim smo pokazali deo 1. Teoreme 3.3.6 i time je njen dokaz konačno gotov. $\square$

3.9 Dokaz Teoreme 3.2.2

Na osnovu Odeljka 3.8 i Teoreme 3.3.6, za svako $N \geq 3$ i $0 < T < \infty$, postoji slabo rešenje u probabilističkom smislu problema koji nema viskozni član i koji sadrži funkciju odsecanja. Da bi dobili jako rešenje u probabilističkom smislu procesa iz Teoreme 3.3.6, pokazaćemo jedinstvenost po trajektorijama i potom iskoristiti Yamada-Watanabe teoremu (zbog svoje obimnosti u nastavku je nećemo navesti precizno već ćemo pojednostavljeno objasniti njenu suštinu; precizne verzije se mogu pronaći u [102] za konačno dimenzione prostore, i u [108] za beskonačno dimenzione). A da bi došli do rešenja koje je dato u Teoremi 3.2.2, definisaćemo odgovarajuće vreme zaustavljanja pomoću koga puštamo limes kad $N \to \infty$, i time ostajemo i bez funkcije odsecanja φ_N. Tako dolazimo do rešenja originalnog problema (3.4)-(3.6).

Napomena 3.9.1 *Za dva stohastička procesa $X(t,\omega), Y(t,\omega)$ koji su dati na istoj stohastičkoj bazi, kažemo da imaju osobinu jedinstvenosti po trajektorijama ako iz $X(0) = Y(0)$, s.s. ω, sledi $X(t) = Y(t)$, za svako $t \in [0,T]$, s.s. ω. Intuitivno, ako dva procesa kreću iz istih početnih uslova, onda moraju imati i iste trajektorije, ako ova osobina važi, ili različitim trajektorijama odgovaraju različiti početni uslovi.*

Neka je data proizvoljna stohastička baza $(\Omega^*, \mathcal{F}^*, \{\mathcal{F}_t^*\}, P^*)$ i Braunovo kretanje $\{B^*\}$. Neka su dati stohastički procesi $(\tilde{s}_1, \tilde{r}_1)$ i $(\tilde{s}_2, \tilde{r}_2)$ iz Teoreme 3.3.6, koji su definisani na datoj stohastičkoj bazi i koji imaju iste početne uslove. Kada napravimo njihovu razliku za svako $t \in [0,T]$ i za skoro svako $\omega \in \Omega^*$ važi

$$\begin{bmatrix} \tilde{s}_2(t) \\ \tilde{r}_2(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \tilde{s}_1(t) \\ \tilde{r}_1(t) \end{bmatrix} = \int_0^t \left(\begin{bmatrix} l_1(\tilde{s}_2, \tilde{r}_2) \\ l_2(\tilde{s}_2, \tilde{r}_2) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_1(\tilde{s}_1, \tilde{r}_1) \\ l_2(\tilde{s}_1, \tilde{r}_1) \end{bmatrix} \right) dB^*_{\mathtt{s}}$$
$$+ \int_0^t \left(\varphi_N(\|(\tilde{s}_1, \tilde{r}_1)\|_{m-1}) A(\tilde{s}_1, \tilde{r}_1) \begin{bmatrix} \tilde{s}_1 \\ \tilde{r}_1 \end{bmatrix}_x - \varphi_N(\|(\tilde{s}_2, \tilde{r}_2)\|_{m-1}) A(\tilde{s}_2, \tilde{r}_2) \begin{bmatrix} \tilde{s}_2 \\ \tilde{r}_2 \end{bmatrix}_x \right) d\mathtt{s}.$$

Treba pokazati da je za svako $t \in [0,T]$ i za skoro svako $\omega \in \Omega^*$ zadovoljeno

$$\begin{bmatrix} \tilde{s}_1(t) \\ \tilde{r}_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{s}_2(t) \\ \tilde{r}_2(t) \end{bmatrix}.$$

Definišimo vremena zaustavljanja sa

$$\sigma_{1,K} = \begin{cases} \inf\{0 \leq t \leq T : ||(\tilde{s}_1(t), \tilde{r}_1(t))||_m \geq K\}, \\ T, \text{ inače.} \end{cases}$$

$$\sigma_{2,K} = \begin{cases} \inf\{0 \leq t \leq T : ||(\tilde{s}_2(t), \tilde{r}_2(t))||_m \geq K\}, \\ T, \text{ inače.} \end{cases}$$

$$\sigma_K = \sigma_{1,K} \wedge \sigma_{2,K}.$$

Na sličan način kao i ranije kada na razliku sa vrha strane primenimo Itovu formulu, supremum, očekivanje, iskoristimo BDG nejednakost itd., dolazimo do

$$E^* \left(\sup_{0 \le s \le t} \left\| \begin{bmatrix} \tilde{s}_2(s \wedge \sigma_K) \\ \tilde{r}_2(s \wedge \sigma_K) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \tilde{s}_1(s \wedge \sigma_K) \\ \tilde{r}_1(s \wedge \sigma_K) \end{bmatrix} \right\|_{m-1}^2 \right)$$
$$\le C_{N,K} \int_0^t E^* \left(\left\| \begin{bmatrix} \tilde{s}_2(s \wedge \sigma_K) \\ \tilde{r}_2(s \wedge \sigma_K) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \tilde{s}_1(s \wedge \sigma_K) \\ \tilde{r}_1(s \wedge \sigma_K) \end{bmatrix} \right\|_{m-1}^2 \right) ds.$$

Primenom Gronvalove nejednakosti za svako $t \in [0,T]$, za s.s. $\omega \in \Omega^*$ sledi da je

$$\begin{bmatrix} \tilde{s}_2(t \wedge \sigma_K) \\ \tilde{r}_2(t \wedge \sigma_K) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{s}_1(t \wedge \sigma_K) \\ \tilde{r}_1(t \wedge \sigma_K) \end{bmatrix}.$$

Puštajući $K \to \infty$ u prethodnom izrazu, jedinstvenost po trajektorijama sledi.

Yamada-Watanabe teorema tvrdi da ako imamo rešenje nekog problema na proizvoljnoj stohastičkoj bazi i ako imamo osobinu jedinstvenosti po trajektorijama, onda imamo i rešenje na stohastičkoj bazi $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P)$ koja nas interesuje. Ili na drugi način, slabo rešenje u probabilističkom smislu (tj. martingalno rešenje) i osobina jedinstvenosti po trajektorijama vode do jakog rešenja u probabilističkom smislu (tj. rešenja po trajektorijama). Na osnovu Yamada-Watanabe teoreme, za sve fiksirane $N \ge 3$ i $0 < T < \infty$, postoji progresivno merljiv stohastički proces (s_N, r_N) na početnoj stohastičkoj bazi $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P)$, takav da za s.s. $\omega \in \Omega$, $(s_N, r_N) \in C([0,T]; H^m)$, i za svako $0 \le t \le T$, za s.s. $\omega \in \Omega$ važi

$$\begin{bmatrix} s_N(t) \\ r_N(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_0 \\ r_0 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} l_1(s_N, r_N)(s) \\ l_2(s_N, r_N)(s) \end{bmatrix} dB_s$$
$$- \int_0^t \varphi_N(\|(s_N, r_N)\|_{m-1}) A(s_N, r_N) \begin{bmatrix} s_N \\ r_N \end{bmatrix}_x ds. \tag{3.88}$$

Kako T mozemo izabrati proizvoljno, za skoro svako $\omega \in \Omega$ sledi da

$$\begin{bmatrix} s_N \\ r_N \end{bmatrix} \in C([0,\infty); H^m).$$

Sada ostaje još rešiti se funkcije odsecanja. Neka je dato vreme zaustavljanja

$$\tau_N = \begin{cases} \inf\{t \ge 0 : ||(s_N(t), r_N(t))||_m \ge N\}, \\ \infty, \text{ inače.} \end{cases}$$

Za $3 \le N < M$, neka procesi (s_N, r_N), (s_M, r_M) za skoro svako $\omega \in \Omega$ pripadaju prostoru $C([0,\infty); H^m)$ i neka zadovoljavaju (3.88). Koristeći uobičajeni postupak

(Itova formula, supremum, očekivanje itd.), za svako $t \in [0, \tau_N \wedge \tau_M]$, za s.s. $\omega \in \Omega$, dobija se

$$\begin{bmatrix} s_N(t) \\ r_N(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_M(t) \\ r_M(t) \end{bmatrix}.$$

Na osnovu osobina vremena zaustavljanja znamo da je $\tau_N \leq \tau_M$, za skoro svako $\omega \in \Omega$. Ako sada definišemo vreme zaustavljanja τ za skoro svako $\omega \in \Omega$ sa

$$\tau(\omega) = \lim_{N \to \infty} \tau_N(\omega),$$

rešenje iz Teoreme 3.2.2 koje tražimo je definisano kao

$$\begin{bmatrix} s(t) \\ r(t) \end{bmatrix} = \begin{cases} \lim_{N\to\infty} \begin{bmatrix} s_N(t) \\ r_N(t) \end{bmatrix}, 0 \leq t < \tau, \\ 0, \, t \geq \tau. \end{cases}$$

I time konačno dolazimo do kraja dokaza Teoreme 3.2.2. □

3.10 Lokalna procena vremena postojanja rešenja

U ovom odeljku ćemo preciznije proceniti vremenski interval u kom rešenje postoji i dokazati Teoremu 3.2.3. Koristeći (3.12), (3.13), (3.27) i (3.34) odmah sledi da za svako $t \in [0, \infty)$, za svako $(v, w) \in H^m$, $1 \leq \alpha \leq m$ važi

$$\left\| \partial_x^\alpha \left(A(v,w) \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix}_x \right) - A(v,w)\, \partial_x^\alpha \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix}_x \right\|_0 \leq \left(C + C \left\| \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} \right\|_{m-1}^\gamma \right) \left\| \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} \right\|_m .$$

A na osnovu ove i procene (3.87), dobijamo

$$|\mathcal{R}(v,w)| \leq \left(C + C \left\| \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} \right\|_{m-1}^\gamma \right) \left\| \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} \right\|_m^2 ,$$

gde je $\mathcal{R}(v,w)$ dato u (3.86). Neka je (s,r) rešenje iz Teoreme 3.2.2. Ako ponovimo uobičajeni postupak (Itova formula, kvadriranje, supremum, očekivanje itd.) i iskoristimo prethodnu procenu za $\mathcal{R}(v,w)$, za svako $\delta > 0$ dobija se

$$\begin{aligned} E\left(\sup_{0 \leq t \leq \delta} \left\| \begin{bmatrix} s(t\wedge\tau_N) \\ r(t\wedge\tau_N) \end{bmatrix} \right\|_m^2 \right) &\leq (CN^\gamma + C) \int_0^\delta E\left(\left\| \begin{bmatrix} s(\mathrm{s}\wedge\tau_N) \\ r(\mathrm{s}\wedge\tau_N) \end{bmatrix} \right\|_m^2 \right) d\mathrm{s} \\ &+ CE\left(\left\| \begin{bmatrix} s_0 \\ r_0 \end{bmatrix} \right\|_m^2 \right) + C\int_0^\delta E\left(\left\| \begin{bmatrix} l_1(s(\mathrm{s}\wedge\tau_N), r(\mathrm{s}\wedge\tau_N)) \\ l_2(s(\mathrm{s}\wedge\tau_N), r(\mathrm{s}\wedge\tau_N)) \end{bmatrix} \right\|_m^2 \right) d\mathrm{s}. \end{aligned}$$

Primenom Gronvalove nejednakosti uz pretpostavke (3.7) i (3.8) za l_1, l_2, sledi

$$E\left(\sup_{0\le t\le\delta}\left\|\begin{bmatrix} s(t\wedge\tau_N)\\ r(t\wedge\tau_N)\end{bmatrix}\right\|_m^2\right)\le\left(C\,E\left(\left\|\begin{bmatrix} s_0\\ r_0\end{bmatrix}\right\|_m^2\right)+C\,\delta\right)e^{(C+C\,N^\gamma)\delta}.$$

Takođe, na osnovu definicija τ_N i τ, uvek važi

$$\left\{\omega:\ \sup_{0\le t\le\delta}\left\|\begin{bmatrix} s(t\wedge\tau_N,\omega)\\ r(t\wedge\tau_N,\omega)\end{bmatrix}\right\|_m<N\right\}\subset\{\omega:\ \tau_N>\delta\}\subset\{\omega:\ \tau>\delta\}.$$

Kada prethodne dve nejednakosti iskoristimo zajedno, uz nejednakost Čebiševa i sa činjenicom da za proizvoljno $0<\delta<1$ uvek postoji ceo broj N koje zadovoljava $(N+1)^{-1}\le\delta^{\frac{1}{\gamma}}<N^{-1}$, odmah se dobija

$$P(\tau>\delta)>1-\delta^{2/\gamma}\left(C\,E\left(\left\|\begin{bmatrix} s_0\\ r_0\end{bmatrix}\right\|_m^2\right)+C\,\delta\right).$$

Time smo došli do kraja dokaza Teoreme 3.2.3. □

3.11 Globalna procena vremena postojanja rešenja

U ovom odeljku ćemo dokazati Teoremu 3.2.4. Po pretpostavkama iz Odeljka 3.1 matrica sistema $A(s,r)$ je u prostoru C^m. Onda postoji neopadajuća funkcija $\psi:[0,\infty)\to[0,\infty)$ takva da za sve $(v,w)\in H^{m-1}$ važi

$$\|\partial_x A(v,w)\|_{L^\infty}\le\psi\left(\left\|\begin{bmatrix} v\\ w\end{bmatrix}\right\|_{m-1}\right)\left\|\begin{bmatrix} v\\ w\end{bmatrix}\right\|_{m-1}.$$

Na osnovu ove i procene (3.34), za svako $\alpha\le m$, za sve $(v,w)\in H^m$, sledi

$$\begin{aligned}&\left\|\partial_x^\alpha\left(A(v,w)\begin{bmatrix} v\\ w\end{bmatrix}_x\right)-A(v,w)\,\partial_x^\alpha\begin{bmatrix} v\\ w\end{bmatrix}_x\right\|_0\\ &\le\psi\left(\left\|\begin{bmatrix} v\\ w\end{bmatrix}\right\|_{m-1}\right)\left\|\begin{bmatrix} v\\ w\end{bmatrix}\right\|_{m-1}\left\|\begin{bmatrix} v\\ w\end{bmatrix}\right\|_m.\end{aligned}$$

Odatle se kao i ranije za sve $(v,w)\in H^m$ odmah dobija

$$|\mathcal{R}(v,w)|\le C_3\,\psi\left(\left\|\begin{bmatrix} v\\ w\end{bmatrix}\right\|_{m-1}\right)\left\|\begin{bmatrix} v\\ w\end{bmatrix}\right\|_{m-1}\left\|\begin{bmatrix} v\\ w\end{bmatrix}\right\|_m^2. \qquad (3.89)$$

Neka je (s,r) rešenje iz Teoreme 3.2.2. Za $\delta \in (0,1)$ neka je vreme zaustavljanja dato sa

$$\tau_\delta = \begin{cases} \inf\{0 \le t < \infty : \|s(t,\omega), r(t,\omega)\|_m \ge \delta\}, \\ \infty, \text{ inače.} \end{cases}$$

Primenom Itove formule za svako $t \ge 0$ i za skoro svako $\omega \in \Omega$, dobija se

$$\begin{aligned} \left\| \begin{bmatrix} s(t\wedge\tau_\delta) \\ r(t\wedge\tau_\delta) \end{bmatrix} \right\|_m^2 &= \left\| \begin{bmatrix} s_0 \\ r_0 \end{bmatrix} \right\|_m^2 - 2\int_0^t \chi_{[0,\tau_\delta]} \mathcal{R}\left(\begin{bmatrix} s(\mathrm{s}\wedge\tau_\delta) \\ r(\mathrm{s}\wedge\tau_\delta) \end{bmatrix} \right) d\mathrm{s} \\ &+2\int_0^t \chi_{[0,\tau_\delta]} \left\langle \begin{bmatrix} l_1(s(\mathrm{s}\wedge\tau_\delta), r(\mathrm{s}\wedge\tau_\delta)) \\ l_2(s(\mathrm{s}\wedge\tau_\delta), r(\mathrm{s}\wedge\tau_\delta)) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} s(\mathrm{s}\wedge\tau_\delta) \\ r(\mathrm{s}\wedge\tau_\delta) \end{bmatrix} \right\rangle_m dB_\mathrm{s} \\ &+\int_0^t \chi_{[0,\tau_\delta]} \left\| \begin{bmatrix} l_1(s(\mathrm{s}\wedge\tau_\delta), r(\mathrm{s}\wedge\tau_\delta)) \\ l_2(s(\mathrm{s}\wedge\tau_\delta), r(\mathrm{s}\wedge\tau_\delta)) \end{bmatrix} \right\|_m^2 d\mathrm{s}, \end{aligned} \tag{3.90}$$

gde sa $\chi_{[0,\tau_\delta]}$ obeležavamo karakterističnu funkciju intervala $[0,\tau_\delta]$. Radi jednostavnijeg zapisa uvodimo smenu

$$X(\mathrm{s}) = \left\| \begin{bmatrix} s(\mathrm{s}\wedge\tau_\delta) \\ r(\mathrm{s}\wedge\tau_\delta) \end{bmatrix} \right\|_m^2.$$

Diferenciranjem izraza (3.90) dobijamo

$$\begin{aligned} dX(t) = \chi_{[0,\tau_\delta]} &\left(-2\mathcal{R}\left(\begin{bmatrix} s(t\wedge\tau_\delta) \\ r(t\wedge\tau_\delta) \end{bmatrix} \right) + \left\| \begin{bmatrix} l_1(s(t\wedge\tau_\delta), r(t\wedge\tau_\delta)) \\ l_2(s(t\wedge\tau_\delta), r(t\wedge\tau_\delta)) \end{bmatrix} \right\|_m^2 \right) dt \\ &+2\left(\chi_{[0,\tau_\delta]} \left\langle \begin{bmatrix} l_1(s(t\wedge\tau_\delta), r(t\wedge\tau_\delta)) \\ l_2(s(t\wedge\tau_\delta), r(t\wedge\tau_\delta)) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} s(t\wedge\tau_\delta) \\ r(t\wedge\tau_\delta) \end{bmatrix} \right\rangle_m \right) dB_t. \end{aligned}$$

Sada uzmimo proizvoljne $\eta > 0$ i $\alpha \in (0,1/2)$, i primenimo Itovu formulu na prethodni izraz. Tada, za svako $t \ge 0$ i za skoro svako $\omega \in \Omega$ važi

$$\begin{aligned} &(\eta + X(t))^\alpha = (\eta + X(0))^\alpha \\ &+2\alpha\int_0^t (\eta + X(\mathrm{s}))^{\alpha-1} \chi_{[0,\tau_\delta]} \left\langle \begin{bmatrix} l_1(s(\mathrm{s}\wedge\tau_\delta), r(\mathrm{s}\wedge\tau_\delta)) \\ l_2(s(\mathrm{s}\wedge\tau_\delta), r(\mathrm{s}\wedge\tau_\delta)) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} s(\mathrm{s}\wedge\tau_\delta) \\ r(\mathrm{s}\wedge\tau_\delta) \end{bmatrix} \right\rangle_m dB_\mathrm{s} \\ &+\alpha\int_0^t (\eta + X(\mathrm{s}))^{\alpha-1} \chi_{[0,\tau_\delta]} \left(-2\mathcal{R}\left(\begin{bmatrix} s(\mathrm{s}\wedge\tau_\delta) \\ r(\mathrm{s}\wedge\tau_\delta) \end{bmatrix} \right) + \left\| \begin{bmatrix} l_1(s(\mathrm{s}\wedge\tau_\delta), r(\mathrm{s}\wedge\tau_\delta)) \\ l_2(s(\mathrm{s}\wedge\tau_\delta), r(\mathrm{s}\wedge\tau_\delta)) \end{bmatrix} \right\|_m^2 \right) d\mathrm{s} \\ &+2\alpha(\alpha-1)\int_0^t (\eta + X(\mathrm{s}))^{\alpha-2} \chi_{[0,\tau_\delta]} \left(\left| \left\langle \begin{bmatrix} l_1(s(\mathrm{s}\wedge\tau_\delta), r(\mathrm{s}\wedge\tau_\delta)) \\ l_2(s(\mathrm{s}\wedge\tau_\delta), r(\mathrm{s}\wedge\tau_\delta)) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} s(\mathrm{s}\wedge\tau_\delta) \\ r(\mathrm{s}\wedge\tau_\delta) \end{bmatrix} \right\rangle_m \right|^2 \right) d\mathrm{s}. \end{aligned}$$

Kada uradimo očekivanje prethodnog izraza, koristeći procene (3.14), (3.15) i (3.89), dolazimo do

$$\begin{aligned}
E(\eta+X(t))^{\alpha} &\leq E(\eta+X(0))^{\alpha} \\
&+\alpha E\left(\int_0^t (\eta+X(\mathrm{s}))^{\alpha-1}\chi_{[0,\tau_\delta]}\,(2C_3C_4\delta+C_2)\,X\,d\mathrm{s}\right) \\
&-2\alpha(1-\alpha)C_1E\left(\int_0^t (\eta+X(\mathrm{s}))^{\alpha-2}\chi_{[0,\tau_\delta]}\,X^2\,d\mathrm{s}\right).
\end{aligned} \tag{3.91}$$

Ovde su konstante C_1 i C_2 date u (3.15), (3.14), respektivno, C_3 je konstanta iz (3.89), a C_4 definišemo sa $C_4=\psi(\mathbf{1})$. Procenom dva podintegralna člana u (3.91) dobijamo

$$\begin{aligned}
&(\eta+X)^{\alpha-1}\,(2C_3C_4\delta+C_2)\,X-2(1-\alpha)\,C_1\,(\eta+X)^{\alpha-2}\,X^2 \\
&\leq(\eta+X)^{\alpha}\,(2C_3C_4\delta+C_2)-2(1-\alpha)^2\,C_1\,(\eta+X)^{\alpha}+2C_1\eta^{\alpha}\,\frac{(1-\alpha)^2}{\alpha}.
\end{aligned}$$

Ovde smo iskoristili procenu da je za svako $a,b\geq 0$ i $\alpha\in(0,1)$ zadovoljeno

$$a^2\geq(1-\alpha)\,(a+b)^2-\frac{1-\alpha}{\alpha}\,b^2,$$

koja se dobija iz $(a+b)^2\leq\frac{1}{1-\alpha}\,a^2+\frac{1}{\alpha}\,b^2$.

Kako iz Odeljka 3.2 znamo da je $2C_1>C_2$, možemo izabrati dovoljno male parametre $\delta\in(0,1)$ i $\alpha\in(0,1/2)$ tako da važi

$$2C_3C_4\delta+C_2<2C_1(1-\alpha)^2.$$

Na osnovu svega prethodno pokazanog možemo zaključiti da je za svako $t\geq 0$

$$E(\eta+X(t))^{\alpha}\leq E(\eta+X(0))^{\alpha}+2C_1(1-\alpha)^2\,\eta^{\alpha}\,t.$$

Kada pustimo $\eta\to 0$ i vratimo se na (s,r), za svako $t\geq 0$ dobijamo

$$E\left(\left\|\begin{bmatrix} s(t\wedge\tau_\delta) \\ r(t\wedge\tau_\delta)\end{bmatrix}\right\|_m^{2\alpha}\right)\leq E\left(\left\|\begin{bmatrix} s_0 \\ r_0\end{bmatrix}\right\|_m^{2\alpha}\right). \tag{3.92}$$

Da bi pokazali Teoremu 3.2.4, još treba odrediti verovatnoću da je vreme postojanja rešenja konačno. Neka je $\mathcal{G}=\{\omega:\tau_\delta(\omega)<\infty\}$. Onda na osnovu nejednakosti Čebiševa i leme Fatua važi

$$\begin{aligned}
P(\mathcal{G}) &= P\left(\liminf_{t\to\infty}\left(\chi_{\mathcal{G}}\left\|\begin{bmatrix} s(t\wedge\tau_\delta) \\ r(t\wedge\tau_\delta)\end{bmatrix}\right\|_m\right)\geq\delta\right) \\
&\leq\frac{1}{\delta^{2\alpha}}\,E\left(\liminf_{t\to\infty}\chi_{\mathcal{G}}\left\|\begin{bmatrix} s(t\wedge\tau_\delta) \\ r(t\wedge\tau_\delta)\end{bmatrix}\right\|_m^{2\alpha}\right) \\
&\leq\frac{1}{\delta^{2\alpha}}\,\liminf_{t\to\infty}E\left(\chi_{\mathcal{G}}\left\|\begin{bmatrix} s(t\wedge\tau_\delta) \\ r(t\wedge\tau_\delta)\end{bmatrix}\right\|_m^{2\alpha}\right).
\end{aligned}$$

Sada na osnovu (3.92) i Helderove nejednakosti dobijamo

$$P(\mathcal{G}) \leq \frac{1}{\delta^{2\alpha}} E\left(\left\| \begin{bmatrix} s_0 \\ r_0 \end{bmatrix} \right\|_m^{2\alpha}\right) \leq \frac{1}{\delta^{2\alpha}} E\left(\left\| \begin{bmatrix} s_0 \\ r_0 \end{bmatrix} \right\|_m^{4}\right)^{\frac{\alpha}{2}}.$$

Ako odaberemo ograničenje na početne uslove kao $\Upsilon(\Xi) := \Xi^{2/\alpha}\,\delta^4$, sledi da je

$$P(\tau = \infty) > 1 - \Xi.$$

Ovim dolazimo do kraja dokaza Teoreme 3.2.4 i do kraja ove glave. $\square$

Glava 4

Dodatna veza determinističkih i stohastičkih rešenja

Na osnovu prethodne dve glave primetili smo da rešenja nekih determinističkih problema možemo poboljšati malim promenama u samom modeliranju i uključivanjem stohastičkih procesa. Sa jedne strane, imali smo elementarna rešenja Rimanovih problema vezanih za determinističke sisteme zakona održanja (I)-(IX). To su rešenja koja su slaba u PDJ smislu odnosno izvodi postoje samo u smislu distribucija i rešenja su u suštini data integralnim jednakostima. Sa druge strane, imali smo rešenja dobijena njihovom stohastičkom aproksimacijom. Ova rešenja su jaka u PDJ i u probabilističkom smislu odnosno stohastički sistem je zadovoljen u svakoj tački i njegova rešenja su data na originalnoj stohastičkoj bazi datoj na početku Odeljka 3.1. Treba napomenuti da i jedna i druga rešenja za dovoljno male početne uslove postoje globalno.

U literaturi gotovo da nema radova koji eksplicitno porede i dovode u vezu neka stohastička i deterministička rešenja međusobno povezanih problema u oblasti zakona održanja. Zanimljiv primer je rad [4] u kom autori proučavaju transportnu jednačinu i njene aproksimativne probleme dobijene pomoću metode iščezavajuće viskoznosti sa jedne strane, i određenog stohastičkog izvora sa druge strane. Takođe, interesantni radovi u kojima se porede različiti deterministički problemi vezani za zakone održanja su [65] i [80]. U Glavi 5 od [65] porede se viskozni Košijev problem sa standardnim Rimanovim problemom. A u [80] autor poredi rešenja standardnog Rimanovog problema u kom početni uslovi imaju jedan prekid sa rešenjima Rimanovog problema sa dva prekida.

Zahvaljujući početnoj simetričnosti sistema (I), u ovoj glavi ćemo pokazati dodatnu vezu sa njegovom stohastičkom aproksimacijom kada stohastički deo ide u nulu. To ćemo uraditi uvođenjem dodatnih paraboličkih i stohastičkih viskoznih problema. Na samom kraju ove glave dajemo i mali osvrt na sisteme (II)-(IX).

Neki važni primeri u literaturi koji proučavaju stohastička rešenja kada stohastički deo ide u nulu su dati u [2], [25], [73], [87], [121].

Rimanov problem za sistem (I) zapisan u konzervativnoj formi je bio dat sa

$$u_t + \big((u^2+v^2)\,u\big)_x = 0, \tag{4.1}$$

$$v_t + \big((u^2+v^2)\,v\big)_x = 0, \tag{4.2}$$

$$(u,v)(x,0) := (u_0,v_0) = \begin{cases} (u_l,v_l), x<0, \\ (u_r,v_r), x>0. \end{cases} \tag{4.3}$$

Elementarna rešenja problema (4.1)-(4.3) se sastoje iz kontaktnih diskontinuiteta prve familije, i potom razređujućih ili udarnih talasa druge familije.

Dakle, u poređenju sa sistemima (II)-(IX), sistem (4.1)-(4.2) se odmah može zapisati u simetričnoj kvazilinearnoj formi bez potrebe za prevođenjem u dijagonalni sistem dat preko Rimanovih invarijanti. Ovu mogućnost ćemo iskoristiti u nastavku jer je simetrična kvazilinearna forma sistema bila neophodna da bismo mogli koristiti rezultate rada [72]. A pošto se sistem (I) može zapisati i u konzervativnoj formi, možemo razmatrati direktno i njegova slaba distributivna rešenja.

Ako se podsetimo koraka datih na početku Glave 3, više nećemo raditi korak (b) koji se odnosio na simetrizaciju, već ćemo samo dodati stohastički izvor u koraku (a), i zameniti početne uslove u koraku (c). Novi sistem koji dobijamo je dat sa

$$u_t + (3u^2+v^2)\,u_x + 2uv\,v_x = \varepsilon\, l_1(u,v)\,\frac{dB}{dt}, \tag{4.4}$$

$$v_t + 2uv\,u_x + (u^2+3v^2)\,v_x = \varepsilon\, l_2(u,v)\,\frac{dB}{dt}, \tag{4.5}$$

tj. pošto su kvazilinearna i konzervativna forma ekvivalentne za dovoljno glatka rešenja, sistem (4.4)-(4.5) se može zapisati i sa

$$u_t + \big((u^2+v^2)\,u\big)_x = \varepsilon\, l_1(u,v)\frac{dB}{dt}, \tag{4.6}$$

$$v_t + \big((u^2+v^2)\,v\big)_x = \varepsilon\, l_2(u,v)\frac{dB}{dt}, \tag{4.7}$$

uz početne uslove

$$u\,|_{t=0} = u_0^{\varepsilon}, \tag{4.8}$$

$$v\,|_{t=0} = v_0^{\varepsilon}. \tag{4.9}$$

Ovde su $(u_0^{\varepsilon}, v_0^{\varepsilon}) := \chi_{[-\beta,\beta]}(u_0,v_0) * \rho_{\varepsilon}$, i sa ε u početnim uslovima smo hteli da naznačimo da je koeficijent molifajera baš ε (videti i Napomenu 3.6.1 za $\delta := \varepsilon$).

Za sisteme (4.4)-(4.5) i (4.6)-(4.7) važe sve pretpostavke iz Odeljka 3.1. Pošto ne radimo simetrizaciju, Definiciju 3.2.1 stohastičkog rešenja ćemo prilagoditi onome što ovde analiziramo.

Definicija 4.0.1 *Neka je data stohastička baza* $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P)$*, gde je filtracija* $\{\mathcal{F}_t\}$ *kompletna i desno neprekidna. Neka su početni uslovi* $(u_0^\varepsilon, v_0^\varepsilon)$ $\mathcal{F}_0$*-merljivi i imaju vrednosti u prostoru* H^m*,* $m \geq 3$*. Trojka* (u, v, τ) *se naziva rešenje stohastičkih problema (4.4)-(4.5) i (4.6)-(4.7) sa početnim uslovima (4.8)-(4.9), respektivno ako je ispunjeno sledeće:*

- $(u, v)(t, \omega)$ *je desno neprekidan progresivno merljiv proces koji ima vrednosti u prostoru* H^m*,*

- τ *je vreme zaustavljanja u odnosu na* $\{\mathcal{F}_t\}$ *za koje važi*

$$\tau(\omega) = \lim_{N \to \infty} \tau_N(\omega), \ s.s.\ \omega \in \Omega, \ gde\ je\ za\ N \in \mathbb{N}$$

$$\tau_N(\omega) = \begin{cases} \inf\{0 \leq t < \infty : \|(u, v)(t, \omega)\|_m \geq N\}, \\ \infty, \ inače. \end{cases}$$

- $(u, v)(\cdot, \omega) \in C([0, \tau(\omega)]; H^m)$*, s.s.* ω *i važi*

$$u(t \wedge \tau_N) = u_0^\varepsilon - \int_0^{t \wedge \tau_N} (3u^2 + v^2)\, \partial_x u\, ds - \int_0^{t \wedge \tau_N} 2uv\, \partial_x v\, ds + \varepsilon \int_0^{t \wedge \tau_N} l_1(u, v) dB_s,$$

$$v(t \wedge \tau_N) = v_0^\varepsilon - \int_0^{t \wedge \tau_N} 2uv\, \partial_x u\, ds - \int_0^{t \wedge \tau_N} (u^2 + 3v^2)\, \partial_x v\, ds + \varepsilon \int_0^{t \wedge \tau_N} l_2(u, v) dB_s,$$

odnosno zbog ekvivalencije sistema (4.4)-(4.5) sa (4.6)-(4.7)

$$u(t \wedge \tau_N) = u_0^\varepsilon - \int_0^{t \wedge \tau_N} \partial_x \big((u^2 + v^2)\, u \big)\, ds + \varepsilon \int_0^{t \wedge \tau_N} l_1(u, v) dB_s,$$

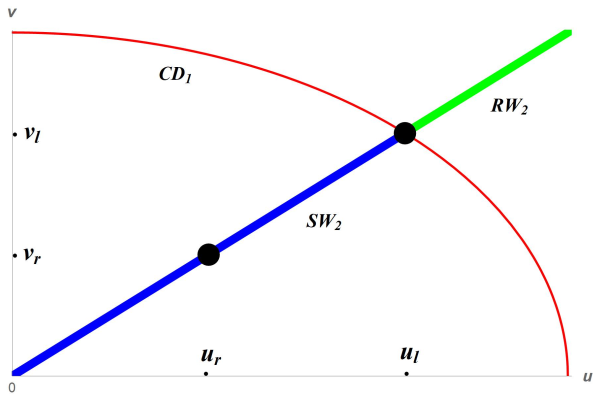
$$v(t \wedge \tau_N) = v_0^\varepsilon - \int_0^{t \wedge \tau_N} \partial_x \big((u^2 + v^2)\, v \big)\, ds + \varepsilon \int_0^{t \wedge \tau_N} l_2(u, v) dB_s,$$

za svako $0 \leq t < \infty$*, za svako* $N \geq 1$*, i za skoro svako* $\omega \in \Omega$*.*

Primetimo da pored toga što su stohastička rešenja jaka, a deterministička slaba u PDJ smislu, njihova dodatna prednost je što vrednosti promenljivih (u, v) sada možemo posmatrati na celom skupu realnih brojeva umesto samo u prvom kvadrantu. Sa druge strane, njihov manji nedostatak je to što je interval postojanja stohastičkog rešenja slučajan pa će se razlikovati u zavisnosti od $\omega \in \Omega$. Ali, kao što smo videli u Teoremi 3.2.4, vreme postojanja je beskonačno veliko sa proizvoljno velikom verovatnoćom.

U nastavku zbog jednostavnijeg zapisa umesto $(u(t \wedge \tau_N), v(t \wedge \tau_N))$ pisaćemo samo $(u(t), v(t))$. Intuitivno ono što želimo pokazati u ovoj glavi je sledeće:
U sistemu (I) neka je udarni talas koji se kreće brzinom $\zeta > 0$ dat sa

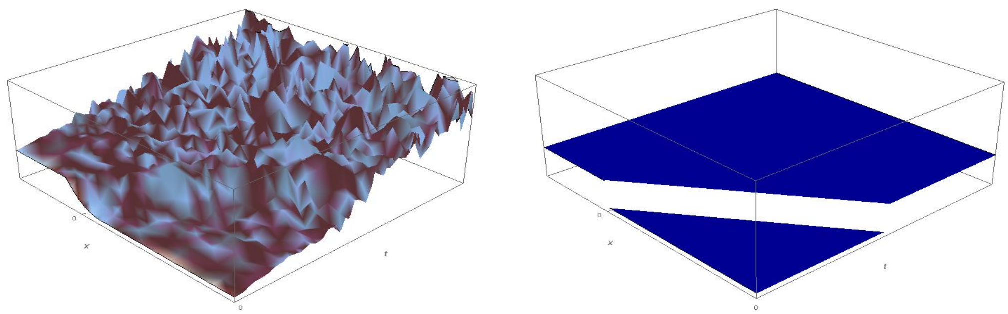
$$(u, v)(x, t) = \begin{cases} (u_l, v_l), & x < \zeta t, \\ (u_r, \frac{v_l}{u_l} u_r), & x > \zeta t, \end{cases} \tag{4.10}$$



Slika 4.1: Fazna ravan i početni uslovi (u_l, v_l) i (u_r, v_r)

Ovaj udarni talas predstavlja jedno jednostavno rešenje problema (4.1)-(4.3) koje se dobija u slučaju kada desni početni uslovi (u_r, v_r) pripadaju krivi udarnog talasa druge familije (videti Sliku 4.1).

U ostatku ove glave demonstriraćemo da stohastičko rešenje dato na Slici 4.2a konvergira u određenom indirektnom smislu ka determinističkom rešenju datom na Slici 4.2b (u slučaju datom u ovoj ilustraciji to je udarni talas (4.10)), kada stohastički izvor ide u nulu. Isto važi i za bilo koje drugo elementarno rešenje početnog problema (4.1)-(4.3), samo su slike onda malo komplikovanije.



(a) Stohastičko rešenje iz Definicije 4.0.1 (b) Determinističko rešenje (4.10)

Slika 4.2: Veza rešenja

4.1 Sistem (I): veza kada šum nestaje

U ovom odeljku želimo pokazati konvergenciju u određenom smislu stohastičkih rešenja od (4.6)-(4.9) ka determinističkim rešenjima od (4.1)-(4.3) kad $\varepsilon \to 0$. Kako direktnu vezu još uvek nismo uspeli dobiti, ovde ćemo pokazati indirektnu. Originalni rezultati ovog odeljka su objavljeni u [88].

Na osnovu Odeljka 3.7 koji je proučavao multiplikativni problem, znamo da određeni početni problemi koji u sebi imaju viskozni i stohastički član imaju rešenja sa trajektorijama u prostorima $C([0,T];H^m)\cap L^2(0,T;H^{m+1})$. To će biti naša početna tačka. Dakle, neka je dat problem

$$u_t+\varphi_N\left((u^2+v^2)u\right)_x=\nu\,\partial^2_{xx}u+\varepsilon l_1(u,v)\frac{dB}{dt}, \tag{4.11}$$

$$v_t+\varphi_N\left((u^2+v^2)v\right)_x=\nu\,\partial^2_{xx}v+\varepsilon l_2(u,v)\frac{dB}{dt}, \tag{4.12}$$

$$(u_0^*,v_0^*)\in L^4(\Omega;H^m), \tag{4.13}$$

gde su $(u_0^*,v_0^*):=(u_0^{\varepsilon,\nu},v_0^{\varepsilon,\nu})=\chi_{[-\beta,\beta]}(u_0,v_0)*\rho_{\varepsilon+\nu}$. Zbog prezentacije ovog odeljka pretpostavili smo da su početni uslovi (4.13) dobijeni korišćenjem molifajera sa koeficijentom $\varepsilon+\nu$. I za razliku od problema iz Odeljka 3.7, sada ispred stohastičkih članova imamo i ε, pošto tražimo limes kad stohastički deo nestaje.

U Glavi 3 videli smo da polazeći od stohastičkog viskoznog problema (4.11)-(4.13) i puštajući $\nu\to 0$, dolazimo do početnog stohastičkog problema (4.6)-(4.9). Preciznije, početni uslovi ova dva problema su bili isti. Ali zbog same prezentacije, pretpostavljamo da su početni uslovi (4.8)-(4.9) uglačani molifajerom koji zavisi od ε. Onda početni uslovi (4.13) konvergiraju ka (4.8)-(4.9) kad $\nu\to 0$. Tako da rezultati Glave 3 i dalje važe.

Ovde krećemo drugim putem. U problemu (4.11)-(4.12) sa početnim uslovima (4.13), prvo ćemo pustiti $\varepsilon\to 0$. Na taj način dolazimo do novog paraboličkog problema datog sa

$$u_t+\left((u^2+v^2)u\right)_x=\nu\,\partial^2_{xx}u, \tag{4.14}$$

$$v_t+\left((u^2+v^2)v\right)_x=\nu\,\partial^2_{xx}v, \tag{4.15}$$

sa početnim uslovima

$$(u_0^\nu,v_0^\nu), \tag{4.16}$$

gde su $(u_0^\nu,v_0^\nu):=\chi_{[-\beta,\beta]}(u_0,v_0)*\rho_\nu$ sa vrednostima u H^m. I takođe, pretpostavljamo da početni uslovi (4.13) iz stohastičkog viskoznog problema konvergiraju u verovatnoći ka početnim uslovima (4.16) ovog paraboličkog problema kad šum ide u nulu (ovu pretpostavku ćemo iskoristiti kasnije).

Parabolički problemi ovog tipa su detaljno proučavani u [42], gde je pokazana i jedinstvenost njihovih jakih klasičnih rešenja. Rezultate date knjige je iskoristio autor rada [99] da pusti viskozni član u nulu. A da bi pustili $\nu \to 0$, mi ćemo upotrebiti rezultate tog rada. Takođe, napomenimo da je na početku rada [104] sumirano ono što je pokazano u [99].

Tako dolazimo do originalnog determinističkog sistema (4.1)-(4.2) sa novim početnim uslovima datim sa

$$(u_0^\beta, v_0^\beta) = \begin{cases} (0,0), & x < -\beta, \\ (u_l, v_l), & -\beta < x < 0, \\ (u_r, v_r), & 0 < x < \beta, \\ (0,0), & x > \beta, \end{cases} \tag{4.17}$$

gde su $(u_0^\beta, v_0^\beta) := \chi_{[-\beta,\beta]}(u_0, v_0)$. Ovi početni uslovi su u stvari originalni Rimanovi početni uslovi (4.3) koji su odsečeni sa β, pa sada imamo tri prekida. A takvi problemi se u literaturi rešavaju tako što napravimo tri standardna Rimanova problema sa po jednim prekidom i nađemo interval gde se sva tri rešenja slažu. Dakle, sada imamo tri problema data sistemom (4.1)-(4.2) i redom početnim uslovima:

$$(u_0^1, v_0^1) = \begin{cases} (0,0), x < -\beta, \\ (u_l, v_l), x > -\beta, \end{cases} \tag{4.18}$$

$$(u_0^2, v_0^2) = \begin{cases} (u_l, v_l), x < 0, \\ (u_r, v_r), x > 0, \end{cases} \tag{4.19}$$

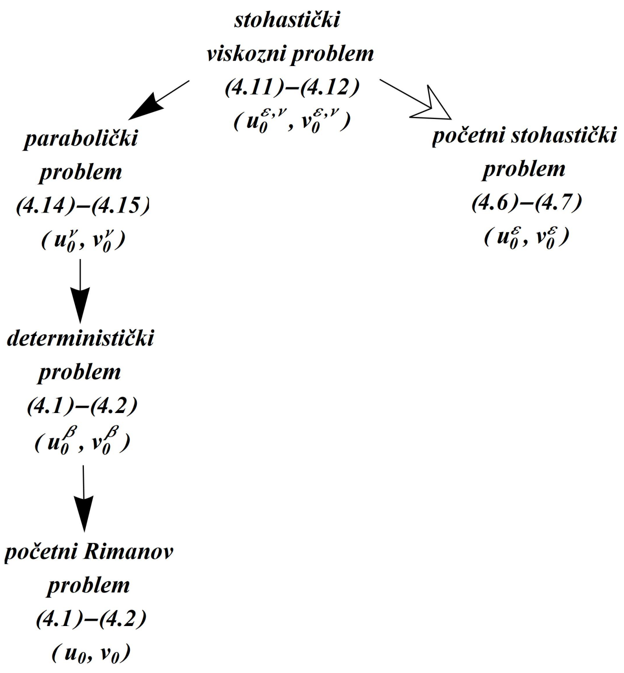
$$(u_0^3, v_0^3) = \begin{cases} (u_r, v_r), x < \beta, \\ (u_0, v_0), x > \beta. \end{cases} \tag{4.20}$$

Njihovim rešavanjem konačno dolazimo do početnog determinističkog Rimanovog problema (4.1)-(4.3). Objašnjenje kompletnog postupka dokazivanja je dato na Slici 4.3.

Tehnika koju ćemo iskoristiti da bi pustili $\varepsilon \to 0$ je data u Glavi 4 knjige [73] (videti takođe i rad [94]). Sama tehnika je zasnovana na standardnom indirektnom metodu dokazivanja konvergencije nekog niza mera verovatnoće koji se sastoji iz pokazivanja relativne kompaktnosti, i potom da svi konvergentni podnizovi imaju istu granicu. Ovde ćemo ovu tehniku primeniti pomoću naredna dva koraka:

(i): na osnovu Prohorove teoreme, umesto relativne kompaktnosti pokazati osobinu (TI) za zakon raspodele rešenja stohastičkog viskoznog problema (4.11)-(4.13);

(ii): potom, pokazati konvergenciju zakona raspodele stohastičkog viskoznog rešenja (4.11)-(4.13) ka meri verovatnoće koja je koncentrisana na jedinstvenim rešenjima paraboličkog problema (4.14)-(4.16).



Slika 4.3: Tehnika dokaza

Napomena 4.1.1 *Ova tehnika se može koristiti kada imamo jedan stohastički i jedan deterministički problem i želimo pustiti stohastički deo u nulu. Slična tehnika koja se često naziva metod stohastičke kompaktnosti (videti [20]) koristi Skorohodovu teoremu u drugom koraku i adekvatnija je u slučaju kada imamo dva stohastička problema i puštamo neki deterministički deo u nulu (ovu tehniku smo primenili u Odeljku 3.8 kada smo pustili viskozni deo u nulu).*

Napomena 4.1.2 *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F})$ *prostor sa merom i neka je na njemu data pozitivna mera* μ. *Kažemo da je mera* μ *koncentrisana na* $\mathcal{F}$*-merljivom skupu* A *ako je* $\mu(A^c) = 0$.[1] *U nastavku će skup na kom je mera koncentrisana predstavljati skup rešenja određenog problema.*

Korišćenjem samo determinističkog Rimanovog problema (4.1)-(4.3) i početnog stohastičkog problema (4.6)-(4.9) ovom tehnikom možemo pokazati da je mera verovatnoće koja se dobija u koraku (ii) koncentrisana na slabim rešenjima determinističkog problema, ali ne i na njegovim jedinstvenim rešenjima. Za tako nešto bi nam trebala neka entropijska nejednakost koja bi bila implementirana u korak

[1] Kada je skup A zatvoren, ovo je zapravo definicija nosača mere. U ovoj disertaciji se proučavaju samo mere koje su koncentrisane na svom nosaču, pa zato koristimo ovu formulaciju. Više detalja o oba termina se može pronaći u [32].

(ii), ali koja nam nije dostupna. Sa druge strane, poznato je i da se metod isčezavajuće viskoznosti upotrebljava kao entropijski uslov i da njegova primena vodi ka identifikaciji jedinstvenih rešenja. Mi ćemo baš tu činjenicu iskoristiti.

Radi lakšeg zapisa u nastavku pretpostavljamo da su sva rešenja, stohastička i deterministička, definisana na intervalu $[0,T]$, $T>0$, za svako $\omega\in\Omega$. Glavni rezultat ove glave je dat u narednoj teoremi.

Teorema 4.1.3 *Neka su data rešenja stohastičkog viskoznog problema (4.11)-(4.13) i početnog determinističkog Rimanovog problema (4.1)-(4.3). Onda postoji interval* $[-L,L]\times[0,\tilde{T}]$ *gde rešenja stohastičkog viskoznog problema konvergiraju ka rešenjima Rimanovog problema, kada prvo šum pa zatim viskoznost idu u nulu.*

Da bi olakšali praćenje dokaza Teoreme 4.1.3, prvo ćemo pokazati dve leme.

Lema 4.1.4 *Neka sa* $U^{\varepsilon}:=(u^{\varepsilon},v^{\varepsilon})$ *obeležavamo rešenje stohastičkog viskoznog problema (4.11)-(4.13) i neka je njegov zakon raspodele dat sa* $\{Q^{\varepsilon}\}$. *Tada niz* $\{Q^{\varepsilon}\}_{\varepsilon}$ *zadovoljava osobinu* (TI) *u prostoru* $L^2(0,T;L^2)$.

Dokaz: Ova lema predstavlja primenu koraka (i) prethodno navedene tehnike. Prostor $L^2(0,T;L^2)$ je pogodno odabran tako da obuhvata sva rešenja sa kojima radimo, ali naravno ne predstavlja jedinu mogućnost. Dakle, za proizvoljno dato $\delta>0$ treba pronaći relativno kompaktan skup $\mathcal{K}\subset L^2(0,T;L^2)$ takav da je

$$P(\mathcal{K}^c)<\delta,\ \text{za svako}\ \varepsilon\ \text{(dovoljno malo)}. \tag{4.21}$$

U Odeljku 3.8.1, pre nego što smo pustili viskozni deo u nulu u Odeljku 3.8.2, pokazano je da zakoni raspodele stohastičkog viskoznog problema (tzv. multiplikativnog problema) zadovoljavaju osobinu (TI). Uz male modifikacije, taj dokaz ćemo i ovde iskoristiti za puštanje šuma u nulu. Neka je sada

$$U^{\varepsilon}=V^{\varepsilon}+\varepsilon M^{\varepsilon}.$$

Ovde je stohastički deo od U^{ε} dat sa

$$M^{\varepsilon}(t)=\int_0^t l(U^{\varepsilon})dB,$$

gde je $l:=(l_1,l_2)$, a V^{ε} predstavlja deterministički deo rešenja U^{ε} i dat je kao integral ostatka problema (4.11)-(4.12).

Ako sada pratimo postupak koji je dat u Odeljku 3.8.1, na sličan način možemo pokazati da (4.21) važi u prostoru $C([0,T];H^{m-1})$. Preciznije, za razliku od Odeljka 3.8.1 gde smo fiksirali stohastički deo, sada fiksiramo viskozni deo. Koristeći činjenicu da sve procene u Odeljku 3.8.1 važe za svako ν, praćenjem istog postupka može se pokazati da iste procene važe i sa svako ε (stohastički deo množimo sa ε koje može da izađe ispred svake norme kojom se procenjuje taj stohastički deo, tako da se ništa suštinski ne menja). I na taj način dolazimo do osobine (TI) u prostoru $C([0,T];H^{m-1})$ koja važi za niz zakona raspodele $\{Q^\varepsilon\}_\varepsilon$. Kako je $C([0,T];H^{m-1}) \hookrightarrow L^2(0,T;L^2)$, odmah zaključujemo da niz zakona raspodele $\{Q^\varepsilon\}_\varepsilon$ ima osobinu (TI) i u prostoru $L^2(0,T;L^2)$. $\square$

Napomena 4.1.5 *Osobina (TI) u prostoru $L^2(0,T;L^2)$ se mogla pokazati i odgovarajućim verzijama Aubin-Lions teorema datim u [36], [113].*

Pošto smo pokazali da niz $\{Q^\varepsilon\}_\varepsilon$ ima osobinu (TI) u prostoru $L^2(0,T;L^2)$, po Prohorovoj teoremi postoji njegov podniz (koji obeležavamo isto) koji konvergira slabo. Dakle, $Q^\varepsilon \to Q$ na Borelovim skupovima od $L^2(0,T;L^2)$, kad $\varepsilon \to 0$.

Lema 4.1.6 *Pretpostavimo da početni uslovi $U_0^* := (u_0^*, v_0^*)$ stohastičkog viskoznog problema (4.11)-(4.13) konvergiraju u verovatnoći ka $U_0^\nu := (u_0^\nu, v_0^\nu)$, početnim uslovima paraboličkog problema (4.14)-(4.16), kad $\varepsilon \to 0$, i neka je $N := 1/\varepsilon$. Tada je svaka mera verovatnoće Q koncentrisana na rešenjima paraboličkog problema (4.14)-(4.16).*

Dokaz: Neka je data funkcija $\Phi : L^2(0,T;L^2) \to \mathbb{R}$ definisana sa

$$\Phi(U) := \sup_{t\in[0,T]} \left| U - U_0^\nu + \int_0^t \partial_x(|U|^2 U) ds - \int_0^t \nu \triangle U ds \right|, \tag{4.22}$$

za $U := (u,v) \in L^2(0,T;L^2)$. Funkcija Φ je konstruisana na osnovu rešenja problema (4.14)-(4.16) i svakoj trajektoriji pridružuje broj. Treba pokazati da je

$$Q(U \in L^2(0,T;L^2) : \Phi(U) > \delta) = 0, \text{ za svako } \delta > 0.$$

U tom slučaju važi

$$Q(U \in L^2(0,T;L^2) : \Phi(U) = 0) = 1,$$

a to je ono što želimo ustanoviti. Prvo ćemo iskoristiti Portmanteau teoremu. Kako je funkcija Φ neprekidna na $L^2(0,T;L^2)$, to znači da su skupovi oblika $\{U : \Phi(U) > \delta\}$ otvoreni i da po Portmanteau teoremi važi

$$Q(\Phi(U) > \delta) \leq \liminf_{\varepsilon\to 0} Q^\varepsilon(\Phi(U) > \delta).$$

Pokazaćemo da je desna strana ove nejednakosti jednaka nuli.

Napomena 4.1.7 *Portmanteau teorema:*[2] *Neka je dat prostor sa merom* $(S, \mathcal{B}(S))$*, i na njemu niz mera verovatnoće* $\{P_n\}_n$ *i mera verovatnoće* P*. Niz mera* $\{P_n\}_n$ *slabo konvergira ka meri* P *ako i samo ako za svaki otvoren skup* G *važi*

$$P(G) \leq \liminf_{n\to\infty} P_n(G).$$

Napomenimo i da je ovo samo deo Portmanteau teoreme koji nam je neophodan u Glavi 4. Ostatak ove teoreme se može pronaći u [15].

Po definiciji važi

$$\begin{aligned} Q^\varepsilon(\Phi(U) > \delta) &= P(\Phi(U^\varepsilon) > \delta) \\ &= P\Big(\sup_{t\in[0,T]} \Big|U^\varepsilon - U_0^\nu + \int_0^t \partial_x(|U^\varepsilon|^2 U^\varepsilon) d\mathrm{s} - \int_0^t \nu \triangle U^\varepsilon d\mathrm{s}\Big| > \delta\Big). \end{aligned}$$

Koristeći rešenje stohastičkog viskoznog problema (4.11)-(4.13) dobijamo

$$\begin{aligned} Q^\varepsilon(\Phi(U) > \delta) = P\Big(\sup_{t\in[0,T]} \Big| U_0^* - \int_0^t \varphi_N\, \partial_x(|U^\varepsilon|^2 U^\varepsilon) d\mathrm{s} \\ + \int_0^t \nu \triangle U^\varepsilon d\mathrm{s} + \varepsilon \int_0^t l(U^\varepsilon) dB_\mathrm{s} \\ - U_0^\nu + \int_0^t \partial_x(|U^\varepsilon|^2 U^\varepsilon) d\mathrm{s} - \int_0^t \nu \triangle U^\varepsilon d\mathrm{s}\Big| > \delta\Big). \end{aligned}$$

A to je uvek manje ili jednako od

$$\begin{aligned} P\Big(\Big|U_0^* - U_0^\nu\Big| + \sup_{t\in[0,T]}\Big|\varepsilon \int_0^t l(U^\varepsilon) dB_\mathrm{s}\Big| \\ + \sup_{t\in[0,T]}\Big|\int_0^t \partial_x(|U^\varepsilon|^2 U^\varepsilon) d\mathrm{s} - \int_0^t \varphi_N\, \partial_x(|U^\varepsilon|^2 U^\varepsilon) d\mathrm{s}\Big| > \delta\Big), \end{aligned}$$

odnosno od

$$\begin{aligned} P\Big(\Big|U_0^* - U_0^\nu\Big| > \delta/3\Big) + P\Big(\sup_{t\in[0,T]}\Big|\varepsilon \int_0^t l(U^\varepsilon) dB_\mathrm{s}\Big| > \delta/3\Big) \\ + P\Big(\sup_{t\in[0,T]}\Big|\int_0^t \partial_x(|U^\varepsilon|^2 U^\varepsilon) d\mathrm{s} - \int_0^t \varphi_N \partial_x(|U^\varepsilon|^2 U^\varepsilon) d\mathrm{s}\Big| > \delta/3\Big). \end{aligned}$$

Prvi član sa desne strane prethodnog izraza nestaje zbog konvergencije u verovatnoći koju smo pretpostavili.

[2] eng. Portmanteau theorem.

Za drugi član primenom Dubove nejednakosti i potom Itove izometrije dobijamo

$$P\Big(\sup_{t\in[0,T]}\Big|\varepsilon\int_0^t l(U^\varepsilon)dB_{\mathrm{s}}\Big| > \frac{\delta}{3}\Big) \le \Big(\frac{3\varepsilon}{\delta}\Big)^2 E\Big(\Big|\int_0^T l(U^\varepsilon)dB_{\mathrm{s}}\Big|^2\Big)$$

$$= \Big(\frac{3\varepsilon}{\delta}\Big)^2 E\Big(\int_0^T |l(U^\varepsilon)|^2 d\mathrm{s}\Big).$$

Na osnovu osobina šuma iz Odeljka 3.1, ovo očekivanje je konačno. Pa kad $\varepsilon \to 0$ ovaj izraz ide u nulu i tako nestaje i drugi član.

Za treći član uzmimo da je $N = 1/\varepsilon$. Kad $\varepsilon \to 0$, onda $N \to \infty$ i $\varphi_N \to 1$. Pa i ova verovatnoća ide u nulu.

Napomena 4.1.8 *Dubova nejednakost*[3] *koju smo iskoristili malopre tvrdi da ako je M_t martingal, $\mathcal{F}_t$ filtracija, $t \in [0,T]$, $T > 0$, $p > 1$ i $E(|M_T|^p) < \infty$, onda je*

$$P(\sup_{t\in[0,T]} |M_t| \ge \lambda) \le \frac{E(|M_T|^p)}{\lambda^p}.$$

Napomena 4.1.9 *Itova izometrija*[4] *tvrdi da za $T > 0$ važi*

$$E\left(\left(\int_0^T f(\mathrm{s},\omega)dB_{\mathrm{s}}\right)^2\right) = E\left(\int_0^T f^2(\mathrm{s},\omega)d\mathrm{s}\right),$$

za određenu klasu funkcija f (videti detaljnije [95]).

Dakle, sada sa svako $\delta > 0$ važi

$$Q(U : \Phi(U) > \delta) = 0,$$

odnosno

$$Q(U : \Phi(U) = 0) = 1. \square$$

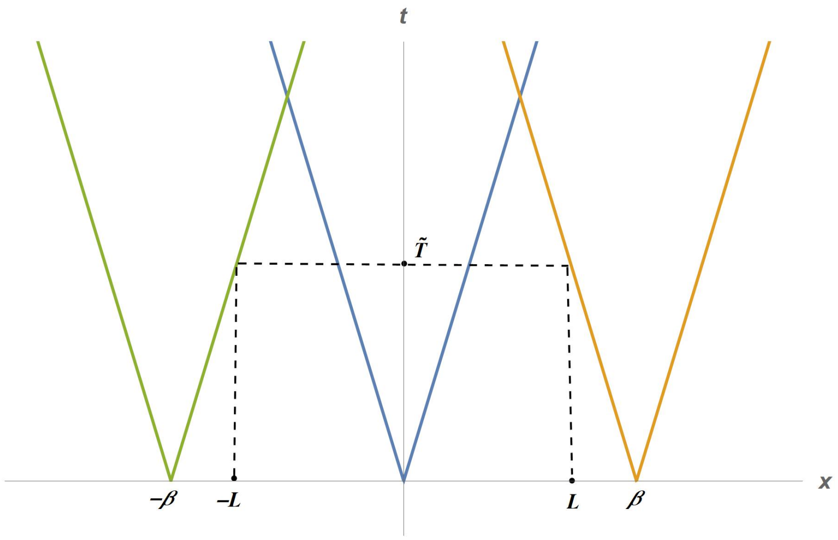
Dokaz Teoreme 4.1.3: Na osnovu rezultata Leme 4.1.4 i Leme 4.1.6, znamo da je mera verovatnoće Q koncentrisana na rešenjima problema (4.14)-(4.16). Ako se podsetimo tehnike za puštaje šuma u nulu koju smo naveli na početku ovog odeljka, vidimo da ostaje još završiti pokazivanje koraka (ii). Dakle, treba dokazati da parabolički problem (4.14)-(4.16) ima jedinstvena rešenja. Jedinstvenost jakog rešenja problema (4.14)-(4.15) sa početnim uslovima koji su Helder neprekidni je pokazana u Teoremi 6.3 u [42]. Kako je zakon raspodele rešenja determinističkih problema po definiciji Dirakova mera verovatnoće koncentrisana na tom rešenju,

[3] eng. Doob's inequality.
[4] eng. Ito isometry.

sledi da niz $\{Q_\varepsilon\}_\varepsilon$ takođe konvergira i ka Dirakovoj delti koncentrisanoj na rešenjima problema (4.14)-(4.15) iz [42]. Odatle zaključujemo da je mera verovatnoće Q koncentrisana na jedinstvenim rešenjima problema (4.14)-(4.16). Ovim je korak (ii) završen, i na taj način smo dokazali da rešenja stohastičkog viskoznog problema (4.11)-(4.13) konvergiraju u zakonu raspodele ka rešenjima paraboličkog problema (4.14)-(4.16).

Sada pomoću Propozicije 2, Teoreme 7 i Odeljka 4 iz [99] (ili Teoreme 1.1 iz [104]), puštamo $\nu \to 0$. Ovde koristimo da molifajer ρ_ν kojim smo dobili uglačane početne uslove (u_0^ν, v_0^ν) zavisi od viskoznog parametra ν. Na taj način kada $\nu \to 0$, početni uslovi (4.16) paraboličkog problema konvergiraju ka početnim uslovima (4.17) determinističkog problema u prostoru L^1_{loc} (što predstavlja važan zahtev iz [99]). I tada kada $\nu \to 0$, rešenja paraboličkih problema (4.14)-(4.16) konvergiraju u L^1_{loc} ka rešenjima početnog determinističkog sistema (4.1)-(4.2) sa početnim uslovima (4.17).

Kao što znamo taj problem rešavamo tako što ga delimo na tri standardna Rimanova problema data sa (4.1)-(4.2) i početnim uslovima (4.18), (4.19), (4.20), respektivno. Ilustracija rešenja navedenih problema je data na Slici 4.4.



Slika 4.4: Rešenja problema (4.1)-(4.2) sa početnim uslovima (4.18), (4.19), (4.20), respektivno

Dakle, pre nego što se karakteristike preseku, postoji interval $[-L, L] \times [0, \tilde{T}]$, gde su $[-L, L] \subset [-\beta, \beta]$, $[0, \tilde{T}] \subset [0, T]$, na kom se rešenja problema (4.1)-(4.2) sa početnim uslovima (4.17) slažu sa rešenjima problema (4.1)-(4.2) sa početnim uslovima (4.3) (ovo važi na osnovu konačne brzine prostiranja za zakone održanja). Time smo došli do kraja dokaza Teoreme 4.1.3. $\square$

Ako sada pogledamo zajedno ono što je pokazano u ovom odeljku, kao i u radovima [72] i [88], primetićemo da smo dokazali indirektnu vezu stohastičkog Košijevog problema (4.6)-(4.9) sa originalnim determinističkim Rimanovim problemom (4.1)-(4.3), kad stohastički izvor ide u nulu (videti ponovo Sliku 4.3). Direktna veza ovih problema je predmet istraživanja koje je u toku.

4.2 Sistemi (II)-(IX): veza kada šum nestaje

U slučaju kada sistem zakona održanja nije simetričan preko početnih koordinata (u,v) poput sistema (I), uz male modifikacije ponovo možemo dobiti slične (iako malo slabije) rezultate kao u prethodnom odeljku. Napomenimo da je postupak koji ćemo zapisati u nastavku predmet istraživanja koja su u toku, i da se može primeniti na svaki od sistema (II)-(IX).

Dakle, krećemo od proizvoljnog zakona održanja i radimo sve korake (a), (b), (c) date na početku Glave 3, tj. dodajemo stohastički izvor, simetrizujemo sistem i aproksimiramo početne uslove. Tako dobijamo dijagonalni simetrični sistem dat preko (s,r) kakve smo proučavali u Glavi 3. Takođe, sada će i verzije stohastičkog viskoznog (4.11)-(4.13) i paraboličkog problema (4.14)-(4.16) biti date preko (s,r). Ova dva problema ponovo povezujemo na isti način kao u Odeljku 4.1, tehnikom za puštanje stohastičkog izvora u nulu. Potom nam ostaje parabolički problem, gde viskoznost puštamo u nulu pomoću rada [12] vezanog za opšte sisteme zakona održanja. Na kraju, u zavisnosti od konkretnog sistema koji radimo, dolazimo do sličnih zaključaka koje smo imali i u prethodnom odeljku, samo što su sada sistemi dati preko promenljivih (s,r).

Napomenimo da kada su sistemi zakona održanja u kvazilinearnom obliku (poput onih preko (s,r)), slaba rešenja u PDJ smislu možemo definisati koristeći radove P.L. Flocha (videti na primer [51], [52]). Tada slaba rešenja zakona održanja nisu više data u distributivnom smislu već samo kao funkcije ograničene varijacije. Ako slaba rešenja ne definišemo na ovaj način, na početne promenljive sistema se vraćamo numerički. Ne možemo se vratiti analitički jer se simetrizacijom slaba rešenja ne održavaju.

Za većinu problema vezanih za stohastičke parcijalne diferencijalne jednačine i sisteme, ne postoji neka opšta tehnika kojom se može pronaći analitičko rešenje, i često se ona pronalaze pomoću numeričkih metoda. Implementacija rezultata i tehnika prikazanih u ovoj glavi, možda može dovesti i do unapređenja neke od numeričkih šema. U svakom slučaju, na osnovu ove disertacije može se bar naslutiti o korisnoj vezi između determinističkih sistema i njihovih stohastičkih aproksimacija.

Glava 5

Zaključak

Ako pretpostavimo da proučavamo sistem koji se sastoji od velikog broja komponenti, šanse da opišemo mikroskopski takav sistem i svaku njegovu komponentu su prilično male. Umesto toga bolji izbor bi bio probati opisati dati sistem pomoću samo nekoliko veličina. Sistemi zakona održanja predstavljaju jedan od načina da to uradimo. Kako se veliki broj PDJ može zapisati kao hiperbolički sistem zakona održanja, vidimo koliko je njihovo proučavanje značajno. A mikroskopske efekte u sam opis sistema uvodimo koristeći stohastičke procese.

Za razliku od opštih sistema zakona održanja u više dimenzija, o jednodimenzionalnim sistemima zakona održanja koji se sastoje od dve promenljive se zna mnogo više. A u ovoj disertaciji je na jednom mestu dat veliki skup 2x2 sistema zakona održanja sa njihovim raznim osobinama, i za svaki od njih pronašli smo elementarna rešenja Rimanovih problema. Ono što je posebno za 2x2 sisteme zakona održanja je da za njih uvek postoje Rimanove invarijante koje nam omogućavaju njihovu dijagonalizaciju i samim tim i simetrizaciju, a čiju važnost smo videli u ovoj disertaciji.

Tehnika koja se često koristi da bi pronašli rešenja nekog nelinearnog PDJ problema se sastoji iz konstruisanja niza aproksimativnih problema, pronalaženja njihovih rešenja, i potom pokazivanja konvergencije ka rešenju početnog PDJ problema. A ponekad se i sam nelinearni PDJ problem jednostavno aproksimira novim problemom koji se onda nastavlja proučavati. U svakom slučaju u ovoj disertaciji aproksimativni problemi sadrže stohastičke procese. I kao što smo videli, dodavanjem konkretnog multiplikativnog stohastičkog šuma, od slabih rešenja u PDJ smislu kakve imamo za determinističke Rimanove probleme, možemo doći do jakih rešenja u PDJ smislu kakve imamo za njihove stohastičke perturbacije. Takođe, na konkretnom primeru smo videli da postoji i interesantna veza između determinističkih sistema zakona održanja i njihove stohastičke aproksimacije koja je dobijena korišćenjem stohastičkog viskoznog aproksimativnog problema.

Bilo da stohastičke probleme proučavamo kao aproksimacije determinističkih sistema, zbog pronalaženja rešenja i boljeg razumevanja samih determinističkih problema, ili kao probleme koji se danas samostalno javljaju u mnogim oblastima i njihovo proučavanje je važno samo za sebe, značaj samih stohastičkih procesa se ne može poreći. A informacije o 2x2 sistemima do kojih smo došli u ovoj disertaciji će nam nadamo se poslužiti za neka dalja istraživanja. Ovom disertacijom smo samo zagrebali površinu nekih interesantnih tema. Rezultati do kojih smo došli se mogu sumirati u nekoliko rečenica koje su date na početku knjige [95]: "Nismo uspeli u pokušaju da odgovorimo na sva naša pitanja. Odgovori koje smo pronašli su nam dali čitav novi skup pitanja. Na neki način osećamo se zbunjeno i dalje, ali verujemo da smo zbunjeni na višem nivou i oko važnijih pitanja."[1]

[1]eng. "We have not succeeded in answering all our problems. The answer we have found only serve to raise a whole set of new questions. In some ways we feel we are confused as ever, but we believe we are confused on a higher level and about more important things."

Literatura

[1] Adams, R., Fournier, J., Sobolev spaces, Pure and Applied Mathematics, Vol. 140, Academic Press, 2003

[2] Albeverio, S., Korshunova, A., Rozanova, O.S., A probabilistic model associated with the pressureless gas dynamics, Bulletin de Sciences Mathematiques, Vol. 137, No. 7, 2013, 902-922

[3] Ambrosio, L., Crippa, G., Figalli, A., Spinolo, L.V., Some new well-posedness results for continuity and transport equations, and applications to chromatography system, SIAM Journal of Mathematical Analysis, Vol. 45, No. 5, 2009, 1890-1920

[4] Attanasio, S., Flandoli, F., Zero-noise solutions of linear transport equations without uniqueness: an example, Comptes Rendus Mathematique, Vol. 347, No. 13-14, 2009, 753-756

[5] Audusse, E., Boyaval S., Goutal, N., Jodeau, M., Ung, P., Numerical simulation of the dynamics of sedimentary river beds with a stochastic Exner equation, ESAIM Proceedings and Surveys, Vol. 48, 2015, 321-340

[6] Babskii, V.G., Zhukov, M.Yu., Yudovich, V.I., Mathematical theory of electrophoresis, Springer US, 1989

[7] Bahga, S.S., Moza, R., Khichar, M., Theory of multi-species electrophoresis in the presence of surface conduction, Proceedings of the Royal Society A, Vol. 472, No. 2186, 2016, 1-20

[8] Bahouri, H., Chemin, J.Y., Danchin, R., Fourier analysis and nonlinear partial differential equations, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Vol. 343, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2011

[9] Bauzet, C., Vallet, G., Wittbold, P., The Cauchy problem for conservation laws with a multiplicative stochastic perturbation, Journal of Hyperbolic Differential Equations, Vol. 9, No. 4, 2012, 661-709

[10] Berthelin, F., Vovelle, J., Stochastic isentropic Euler equations, Annales de l'ENS, Vol. 52, No. 1, 2019, 181-254

[11] Bianchi, L.A., Flandoli, F., Stochastic Navier-Stokes equations and related models, Milan Journal of Mathematics, Vol. 88, No. 1, 2020, 225-246

[12] Bianchini, S., Bressan, A., Vanishing viscosity solutions of nonlinear hyperbolic systems, Annals of Mathematics, Vol. 161, No. 1, 2005, 223-342

[13] Bianchini, S., On the Riemann problem for non-conservative hyperbolic systems, Archive for Rational Mechanics and Analysis, Vol. 166, No. 1, 2003, 1-26

[14] Bijl, H., Lucor, D., Mishra, S., Schwab, C., Uncertainty Quantification in Computational Fluid Dynamics, Lecture Notes in Computational Science and Engineering, Vol. 92, Springer International Publishing Switzerland, 2013

[15] Billingsley, P., Convergence of probability measures, Willey Series in Probability and Statistics, Willey Interscience Publication, 1999

[16] Bolliat, G., Dafermos, C.M., Lax, P.D., Liu, T.P., Recent mathematical methods in nonlinear wave propagation, Lectures given at the 1st Session of the Centro Internazionale Matematico Estivo (C.I.M.E.), held in Montecatini Terme, Italy, May 23-31, 1994, C.I.M.E. Foundation subseries, Vol. 1640, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1996

[17] Boillat, G., Ruggeri, T., Characteristic shocks: completely and strictly exceptional systems, Bolletino dell'Unione Matematica Italiana A, Vol. 15, No. 1, 1978, 197-204

[18] Breit, D., Feireisl, E., Hofmanova, M., Incompressible limit for compressible fluids with stochastic forcing, Archive for Rational Mechanics and Analysis, Vol. 222, No. 2, 2016, 895-926

[19] Breit, D., Feireisl, E., Hofmanova, M., Local strong solutions to the stochastic compressible Navier–Stokes system, Communications in Partial Differential Equations, Vol. 43, No. 2, 2018, 313-345

[20] Breit, D., Feireisl, E., Hofmanova, M., Stochastically forced compressible fluid flows, De Gruyter Series in Applied and Numerical Mathematics, Vol. 3, Walter de Gruyter GmbH, Berlin, Boston, 2018

[21] Breit, D., Mensah, P.R., Stochastic compressible Euler equations and inviscid limits, Nonlinear Analysis, Vol. 184, 2019, 218-238

[22] Bressan, A., Hyperbolic conservation laws: an illustrated tutorial, Modelling and Optimisation of Flows on Networks, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 2062, Springer, Berlin, Heidelberg, 2013, 157-245

[23] Bressan, A., One dimensional hyperbolic systems of conservation laws, Current Developments in Mathematics, Vol. 2002, 2002, 1-37

[24] Brown, R., A brief account of microscopical observations made in the months of June, July and August 1827, on the particles contained in the pollen of plants; and on the general existence of active molecules in organic and inorganic bodies, The Philosophical Magazine, Vol. 4, No. 21, 1828, 161-173

[25] Buckdahna, R., Ouknineb, Y., Quincampoixa, M., On limiting values of stochastic differential equations with small noise intensity tending to zero, Bulletin des Sciences Mathematiques, Vol. 133, No. 3, 2009, 229-237

[26] Carmona, R.A., Rozovskii, B., Stochastic partial differential equations: six perspectives, Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 64, American Mathematical Society, Providence, Rode Island, 1999

[27] Cauret, J.J., Colombeau, J.F., Le Roux, A.J., Discontinuous generalized solutions of nonlinear nonconservative hyperbolic equations, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 139, No. 2, 1989, 552-573

[28] Chen, G.Q., Ding, Q., Karlsen, K., On nonlinear stochastic balance laws, Archive for Rational Mechanics and Analysis, Vol. 204, No. 3, 2012, 707-743

[29] Cherrier, P., Milani, A., Linear and quasi-linear evolution equations in Hilbert spaces, Graduate Studies in Mathematics, Vol. 135, American Mathematical Society, Providence, Rode Island, 2012

[30] Chouk, K., Gess, B., Path-by-path regularization by noise for scalar conservation laws, Journal of Functional Analysis, Vol. 277, No. 5, 2019, 1469-1498

[31] Cohen, R.H., Kulsrud, R.M., Nonlinear evolution of parallel-propagating hydrodynamic waves, Physics of Fluids, Vol. 17, No. 12, 1974, 2215-2225

[32] Cohn, D.L., Measure theory, Birkhäuser Advanced Texts, Birkhäuser, Basel, 2013

[33] Courant, R., Hilbert, D., Methods of mathematical physics: partial differential equations, Vol. 2, Interscience, New York, 1962

[34] Da Prato, G., Zabczyk, J., Stochastic equations in infinite dimensions, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Vol. 45, Cambrige University Press, Cambridge, 1992

[35] Dafermos, C.M., Hyperbolic conservation laws in continuum physics, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Vol. 325, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2016

[36] Debussche, A., Glatt-Holtz, N., Temam, R., Local martingale and pathwise solutions for an abstract fluids model, Physica D: Nonlinear Phenomena, Vol. 240, No. 14-15, 2011, 1123-1144

[37] Debussche, A., Vovelle, J., Scalar conservation laws with stochastic forcing, Journal of Functional Analysis, Vol. 259, No. 4, 2010, 1014-1042

[38] DiPerna, R.J., Measure-valued solutions to conservation laws, Archive for Rational Mechanics and Analysis, Vol. 88, No. 3, 1985, 223-270

[39] DiPerna, R.J., Singularities of solutions of nonlinear hyperbolic systems of conservation laws, Archive for Rational Mechanics and Analysis, Vol. 60, No. 1, 1975, 75-100

[40] DiPerna, R.J., Uniqueness of solutions to hyperbolic conservation laws, Indiana University Mathematics Journal, Vol. 28, No. 1, 1979, 137-188

[41] Eberle, A., Grothaus, M., Hoh, W., Kassmann, M., Stannat, W., Trutnau, G., Stochastic partial differential equations and related fields, in honor of Michael Röckner SPDERF, Bielefeld, Germany, October 10-14, 2016, Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, Vol. 229, Springer International Publishing, 2018

[42] Eidelman, S.D., Parabolic systems, Nauka, Moscow, 1964; English translation, North-Holland, Amsterdam, 1969

[43] Evans, L.C., Gariepy, R.F., Measure theory and fine properties of functions, revised edition, Textbooks in Mathematics, CRC Press, 2015

[44] Evans, L.C., Partial differential equations, Graduate Studies in Mathematics, Vol. 19, American Mathematical Society, Providence, Rode Island, 1997

[45] Evans, L.C., Weak convergence methods for nonlinear partial differential equations, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, Vol. 74, American Mathematical Society, Providence, Rode Island, 1990

[46] Feireisl, E., Maslowski, B., Novotny, A., Compressible fluid flows driven by stochastic forcing, Journal of Differential Equations, Vol. 254, No. 3, 2013, 1342-1358

[47] Feng, J., Nualart, D., Stochastic scalar conservation laws, Journal of Functional Analysis, Vol. 255, No. 2, 2008, 313-373

[48] Flandoli, F., Gubinelli, M., Priola, E., Well-posedness of the transport equation by stochastic perturbation, Inventiones Mathematicae, Vol. 180, No. 1, 2010, 1-53

[49] Flandoli, F., Luo, D., High mode transport noise improves vorticity blow-up control in 3D Navier-Stokes equations, Probability Theory and Related Fields, Vol. 180, No. 1, 2021, 309-363

[50] Flandoli, F., Random perturbation of PDEs and fluid dynamic models, École d'Été de Probabilités de Saint-Flour XL – 2010, Vol. 2015, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2011

[51] Floch, P.L., Entropy weak solutions to nonlinear hyperbolic systems under nonconservative form, Communications in Partial Differential Equations, Vol. 13, No. 6, 1988, 669-427

[52] Floch, P.L., Liu, T.P., Existence theory for nonlinear hyperbolic systems in nonconservative form, Forum Mathematicum, Vol. 5, No. 5, 1993, 261-280

[53] Freistühler, H., A standard model of generic rotational degeneracy, Nonlinear Hyperbolic Equations - Theory, Computation Methods, and Applications, Vieweg, Braunschweig, 1989, 149-158

[54] Freistühler, H., Dynamical stability and vanishing viscosity: a case study of a non-strictly hyperbolic system, Communications on Pure and Applied Mathematics, Vol. 45, No. 5, 1992, 561-582

[55] Freistühler, H., Hyperbolic systems of conservation laws with rotationally equivariant flux function, Computation and applied Mathematics , Vol. 11, No. 2, 1992, 167-188

[56] Freistühler, H., Liu, T.P., Nonlinear stability of overcompresive shock waves in a rotationally invariant system of viscous conservation laws, Communications in Mathematical Physics, Vol. 153, No. 1, 1993, 147-158

[57] Freistühler, H., Pitman, E.B., A numerical study of a rotationally degenerate hyperbolic system. Part I. The Riemann problem, Journal of Computational Physics, Vol. 100, No. 2, 1992, 306-321

[58] Freistühler, H., Pitman, E.B., A numerical study of a rotationally degenerate hyperbolic system. Part II. The Cauchy problem, SIAM Journal on Numerical Analysis, Vol. 32, No. 3, 1995, 741-753

[59] Gardiner, C.W., Handbook of stochastic methods: for physics, chemistry and the natural sciences, Springer Series in Synergetics, Vol. 13, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2004

[60] Gaš, B., Theory of electrophoresis: fate of one equation, Electrophoresis, Vol. 30, No. S1, 2009, 7-15

[61] Glatt-Holtz, N., Vicol, V.C., Local and global existence of smooth solutions for the stochastic Euler equations with multiplicative noise, The Annals of Probability, Vol. 42, No. 1, 2014, 80-145

[62] Holden, H., Oksendal, B., Uboe, J., Zhang, T., Stochastic partial differential equations, a modeling, white noise functional approach, Universitext, Springer-Verlag, New York, 2010

[63] Holden, H., Risebro, N.H., Conservation laws with a random source, Applied Mathematics and Optimization, Vol. 36, No. 2, 1997, 229-241

[64] Holden, H., Risebro, N.H., Front tracking for hyperbolic conservation laws, Applied Mathematical Sciences, Vol. 152, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2011

[65] Hsiao, L., Quasilinear hyperbolic systems and dissipative mechanisms, World Scientific Publishing, 1998

[66] Ikeda, N., Watanabe, S., Stochastic differential equations and diffusion processes, North-Holland Mathematical Library, Vol. 24, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1989

[67] Ji, P., Shen, C., The perturbed Riemann problem for the chromatography system of Langmuir isotherm with one inert component, Journal of Nonlinear Science and Applications, Vol. 9, No. 9, 2016, 5382-5397

[68] Karatzas, I., Shreve, S., Brownian motion and stochastic calculus, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 113, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 1991

[69] Kato, T., The Cauchy problem for quasi-linear symmetric hyperbolic systems, Archive for Rational Mechanics and Analysis, Vol. 58, No. 3, 1975, 181-205

[70] Keyfitz, B.L., Kranzer, H.C., A system of non-strictly hyperbolic conservation laws arising in elasticity theory, Archive for Rational Mechanics and Analysis, Vol. 72, No. 3, 1980, 219-241

[71] Keyfitz, B.L., Kranzer, H.C., Space of weighted measures for conservation laws with singular shock solutions, Journal of Differential Equations, Vol. 118, No. 2, 1995, 420-451

[72] Kim, J.U., On the stochastic quasi-linear symmetric hyperbolic system, Journal of Differential Equations, Vol. 250, No. 3, 2011, 1650-1684

[73] Kipnis, C., Landim, C., Scaling limits of interacting particle systems, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Vol. 320, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1999

[74] Korshunova, A., Rozanova, O.S., On effects of stochastic regularization for the pressureless gas dynamics, Hyperbolic Problems: Theory, Numerics and Applications, Contemporary Applied Mathematics, Vol. 2, 2012, 486-493

[75] Korshunova, A., Rozanova, O.S., The Riemann problem for the stochastically perturbed non-viscous Burgers equation and the pressureless gas dynamics model, Proceedings of the International Conference Days on Diffraction, 2009, 108-113

[76] Kranzer, H.C., Keyfitz, B.L., A strictly hyperbolic system of conservation laws admitting singular shocks, Nonlinear Evolution Equations that change type, The IMA Volumes in Mathematics and its Applications, Vol. 27, 1990, 107-125

[77] Kreiss, H.O., Lorenz, J., Initial-boundary value problems and Navier-Stokes equations, Pure and Applied Mathematics, Vol. 136, Academic Press, 1989

[78] Lax, P.D., Hyperbolic systems of conservation laws and the mathematical theory of shock waves, CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, Vol. 11, SIAM, 1973

[79] LeVeque, R.J., Numerical methods for conservation laws, Lecture Notes in Mathematics: ETH Zürich, Birkhaüser, Basel, 1992

[80] Liu, T.P., Asymptotic behavior of solutions of general system of nonlinear hyperbolic conservation laws, Indiana University Mathematics Journal, Vol. 27, No. 2, 1978, 211-253

[81] Liu, T.P., On the viscosity criterion for hyperbolic conservation laws, Viscous Profiles and Numerical Methods for Shock Waves, Proceedings of a workshop at North Carolina State University, Releigh, North Carolina, May 23-25, 1990, SIAM, 1991, 105-114

[82] Liu, T.P., Smoller, J.A., On the vacuum state for the isentropic gas dynamics, Advances in Applied Mathematics, Vol. 1, No. 4, 1980, 345-359

[83] Liu, T.P., Wang, C.H., On a nonstrictly hyperbolic system of conservation laws, Journal of Differential Equations, Vol. 57, No. 1, 1985, 1-14

[84] Liu, T.P., Zero dissipation and stability of shocks, Methods and Applications of Analysis, Vol. 5, No. 1, 1998, 81-94

[85] Lu, Y., Hyperbolic conservation laws and the compensated compactness method, CRC Press, 2002

[86] Málek, J., Nečas, J., Rokyta, M., Ružička, M., Weak and measure-valued solutions to evolutionary PDEs, Vol. 13, CRC Press, 1996

[87] Mariani, M., Large deviations principles for stochastic scalar conservation laws, Probability Theory and Related Fields, Vol. 147, No. 3-4, 2010, 607-648

[88] Marković, B., Nedeljkov, M., A zero-noise limit to a symmetric system of conservation laws, Stochastic Analysis and Applications, 2021

[89] Mathelin, L., Hussaini, M.Y., Zang, T.A., Stochastic approaches to uncertainty quantification in CFD simulations, Numerical Algorithms, Vol. 38, No. 1-3, 2005, 607-648

[90] Mishra, S., Schwab, C., Sparse tensor multi-level Monte Carlo finite volume methods for hyperbolic conservation laws with random initial data, Mathematics of Computation, Vol. 81, No. 280, 2012, 1979-2018

[91] Mishra, S., Schwab, C., Šukys, J., Multi-level Monte Carlo finite volume methods for nonlinear systems of conservation laws in multi-dimensions, Journal of Computational Physics, Vol. 231, No. 8, 2012, 3365-3388

[92] Mumford, D., The dawning of the age of stochasticity, Mathematics: Frontiers and Perspectives, 2000, 197-218

[93] Novotny, A., Straskraba, I., Introduction to the mathematical theory of compressible flow, Oxford Lecture Series in Mathematics and Its Applications, Vol. 27, Oxford University Press, New York, 2004

[94] Oelschläger, K., A law of large numbers for moderately interacting diffusion processes, Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete, Vol. 69, No. 2, 1985, 279-322

[95] Oksendal, B., Stochastic differential equations, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2003

[96] Olivera, C., Regularization by noise in (2x2) hyperbolic systems of conservation law, arXiv preprint arXiv:1704.00802, 2017

[97] Olivera, C., Regularization by noise in one-dimensional continuity equation, Potential Analysis, Vol. 51, No. 1, 2019, 23-35

[98] Olivera, C., Well-posedness of the non-local conservation law by stochastic perturbation, Manuscripta Mathematica, Vol. 162, No. 3-4, 2020, 367-387

[99] Panov, E.Y., On the theory of generalized entropy solutions of the Cauchy problem for a class of non-strictly hyperbolic systems of conservation laws, Sbornik: Mathematics, Vol. 191, No. 1, 2000, 121-150

[100] Poëtte, G., Després, B., Lucor, D., Uncertainty quantification for systems of conservation laws, Journal of Computational Physics, Vol. 228, No. 7, 2009, 2443-2467

[101] Polyanin, A.D., Zaitsev, V.F., Handbook of nonlinear partial differential equations, CRC Press, Boca Raton, 2012

[102] Prévôt, C., Röckner, M., A concise course on stochastic partial differential equations, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1905, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2007

[103] Rhee, H.K., Aris, R., Amundson, N.R., First-order partial differential equations: theory and application of hyperbolic systems of quasilinear equations, Dover Books on Mathematics, Vol. 2, Dover Publications, Mineola, New York, 2001

[104] Risebro, N.H., Weber, F., A note on front tracking for the Keyfitz-Kranzer system, Journal of Mathematical Analysys and Applications, Vol. 407, No. 2, 2013, 190-199

[105] Rozanova, O.S., Stochastic perturbations method for a system of Riemann invariants, Mathematical Communications, Vol. 19, No. 3, 2014, 573-580

[106] Rozovskii, B.L., Stochastic evolution systems: linear theory and applications to non-linear filtering, Mathematics and Its Applications, Vol. 35, Springer Netherlands, 1990

[107] Roždestvenskii, B.L., Janenko, N.N., Systems of quasilinear equations and their applications to gas dynamics, Translations of Mathematical Monographs, Vol. 55, American Mathematical Society, Providence, Rode Island, 1983

[108] Röckner, M., Schmuland, B., Zhang, X., Yamada-Watanabe theorem for stochastic evolution equations in infinite dimensions, Condensed Matter Physics, Vol. 11, No. 2, 2008, 247-259

[109] Salsa, S., Partial differential equations in action: from modelling to theory, La Mathematica per il 3+2, Vol. 86, Springer International Publishing, 2015

[110] Scott, M., Applied stochastic processes in science and engineering, University of Waterloo, 2013

[111] Serre, D., Systems of conservation laws 1: hyperbolicity, entropies, shock waves, Cambridge University Press, Cambridge, 1999

[112] Serre, D., Systems of conservation laws 2: geometric structures, oscillations and initial-boundary value problems, Cambridge University Press, Cambridge, 2000

[113] Simon, J., Compact sets in the space $L^p(0,T;B)$, Annali di Matematica Pura ed Applicata, Vol. 146, No. 1, 1986, 65-96

[114] Simon, M., Olivera, C., Non-local conservation law from stochastic particle systems, Journal of Dynamics and Differential Equations, Vol. 30, No. 4, 2018, 1661-1682

[115] Smith, S.A., Random perturbations of viscous, compressible fluids: global existence of weak solutions, SIAM Journal on Mathematical Analysis, Vol. 49, No. 6, 2017, 4521-4578

[116] Smoller, J.A., A uniqueness theorem for Riemann problems, Archive for Rational Mechanics and Analysis, Vol. 33, No. 2, 1969, 110-115

[117] Smoller, J.A., Conley, C.C., Viscosity matrices for two-dimensional nonlinear hyperbolic systems, Communications on Pure and Applied Mathematics, Vol. 23, No. 6, 1970, 867-884

[118] Smoller, J.A., Johnson, J.L., Global solutions for an extended class of hyperbolic systems of conservation laws, Archive for Rational Mechanics and Analysis, Vol. 32, No. 3, 1969, 169-189

[119] Smoller, J.A., On the solution of the Riemann problem with general step data for an extended class of hyperbolic systems, The Michigan Mathematical Journal, Vol. 16, No. 3, 1969, 201-210

[120] Toro, E.F., Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics, a practical introduction, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2009

[121] Trevisan, D., Zero noise limits using local times, Electronic Communications in Probability, Vol. 18, paper No. 31, 2013, 1-7

[122] Urbach, H.P., Comparations of two hyperbolic systems in chromatography, Proceedings: Mathematical and Physical Sciences, Vol. 437, No. 1900, 1992, 403-428

[123] Weinan, E., Rykov, Y.G., Sinai, Y.G., Generalized variational principles, global weak solutions and behavior with random initial data for systems of conservation laws arising in adhesion particle dynamics, Communications in Mathematical Physics, Vol. 177, No. 2, 1996, 349-380

[124] Zhang, Z., Karniadakis, G.E., Numerical methods for stochastic partial differential equations with white noise, Applied Mathematical Sciences, Vol. 196, Springer International Publishing, 2017

Biografija

Branko Marković je rođen 29. jula 1985. u Šapcu. Osnovne studije na Departmanu za Matematiku i Informatiku, Prirodno-matematičkog fakulteta, Univerziteta u Novom Sadu završio je 2008. godine sa prosekom 9.68 i stekao stručni naziv Diplomirani matematičar - matematika finansija. Master studije na istom Departmanu završio je 2009. godine sa prosekom 9.93 i stekao diplomu Master matematičar - primenjena matematika. Na istom Departmanu upisao je doktorske studije matematike i položio sve ispite predviđene programom doktorskih studija sa prosekom 9.92.
Kao stipendista Ministarstva nauke i tehnološkog razvoja bio je učesnik projekta:"Funkcionalna analiza, ODJ i PDJ sa singularitetima". Kao istraživač saradnik proveo je pet godina radeći na Departmanu za Matematiku i Informatiku tokom kojih je bio učesnik projekta Ministarstva nauke i tehnološkog razvoja: "Numeričke metode, simulacije i primene". Tokom doktorskih studija je učestvovao na više različitih konferencija. Oblasti njegovog naučnog interesovanja su stohastički procesi, parcijalne diferencijalne jednačine, matematičko modeliranje i numerička optimizacija. Trenutno radi na rešavanju matematičkih problema u industriji.

Novi Sad, februar 2022 Branko Marković

Овај Образац чини саставни део докторске дисертације, односно докторског уметничког пројекта који се брани на Универзитету у Новом Саду. Попуњен Образац укоричити иза текста докторске дисертације, односно докторског уметничког пројекта.

План третмана података

Назив пројекта/истраживања
Закони одржања и њихова стохастичка апроксимација
Назив институције/институција у оквиру којих се спроводи истраживање
Природно-математички факултет, Универзитет у Новом Саду
Назив програма у оквиру ког се реализује истраживање
1. Опис података
1.1 Врста студије *У овој студији нису прикупљани подаци.*
2. Прикупљање података
3. Третман података и пратећа документација
4. Безбедност података и заштита поверљивих информација
5. Доступност података
6. Улоге и одговорност