



Универзитет у Новом Саду
Факултет техничких наука
Нови Сад



Александар Окука

**Оптимално управљање кретањем сеизмички
побуђене и базно изоловане суперструктуре у
присуству пасивних пригушивача**

Докторска дисертација

Нови Сад, мај 2021.

КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА¹

Врста рада:	Докторска дисертација
Име и презиме аутора:	Александар Окука
Ментор (титула, име, презиме, звање, институција)	Драган Т. Спасић, редовни професор, Факултет Техничких наука Нови Сад
Наслов рада:	Оптимално управљање кретањем сеизмички побуђене и базно изоловане суперструктуре у присуству пасивних пригушивача
Језик публикације (писмо):	Српски језик Латинично писмо
Физички опис рада:	Унети број: Страница 74 Поглавља 7 Референци 76 Табела 8 Слика 12 Графикона 0 Прилога 0
Научна област:	Машинско инжењерство
Ужа научна област (научна дисциплина):	Механика
Кључне речи / предметна одредница:	Сеизмичка заштита, оптимално управљање, фракциона вискоеластичност, регуларизовани Кулонов модел трења, фракциони Бургерсов модел
Резиме на језику рада:	У овој тези проучен је проблем сеизмичке заштите базно изолованог објекта помоћу пасивног фракционог вискоеластичног пригушивача, пасивног фриксионог пригушивача и активног управљачког уређаја ограничених перформанси. Квантификација ефеката пасивних пригушивача и активног уређаја је урађена на основу упоређивања атрибута кретања решења Кошијевог проблема за задатак динамике са решењем двотачкастог граничног проблема за задатак оптимизације. Оба проблема су решавана нумерички. У оба случаја је систем фракционих диференцијалних једначина замењен са еквивалентним системом диференцијалних једначина целобројног реда помоћу експанзионе формуле Атанацковића и Станковића. Сила трења је моделирана као глатка функција која регуларизује Кулонов закон сувог трења који је дат у облику мултифункције. Анализирана су три типа сеизмичке побуде, опадајућа синусоида, Рикерова таласна функција и интерполирани акцелерограм земљотреса Ел Центро. Критеријум оптималности мотивисан је теоријом линеарних регулатора у облику да се релативно

¹ Аутор докторске дисертације потписао је и приложио следеће Обрасце:

5б – Изјава о ауторству;

5в – Изјава о истоветности штапане и електронске верзије и о личним подацима;

5г – Изјава о коришћењу.

Ове Изјаве се чувају на факултету у штапаном и електронском облику и не кориче се са тезом.

	<p>померање, релативна брзина и дејство управљачког уређаја минимизирају на специфицираном временском интервалу. Проблем оптималног управљања постављен је у оквир Понтрјагиновог Принципа Максимиума и решаван методом сукцесивних апроксимација који су предложили Крилов и Черноуско.</p> <p>Са обзиром на фракциону вискоеластичност испитиван је фракциони Келвин-Зенеров модел у присуству ограничења на параметре у моделу који су последица ентропијске неједнакости. Поред тога постављене су основе за примену фракционог Бургерсовог модела као алтернативе за реализацију пасивног вискоеластичног пригушивача.</p> <p>У оквиру рада на тези формулисана су ограничења на параметре Бургерсковог модела која обезбеђују енергијску конзистенцију проблема. Резултати приказани у Табели 1, већ су публиковани у референцама [52], [53] и [54], и представљају оригинални допринос ове тезе. Резултати приказани на сликама 5-10 и у табелама 2-7 су такође оригинални допринос тезе чије се публикавање очекује.</p> <p>Добијено решење постављеног задатка оптимизације смањује изабрани критеријум оптимизације, у зависности од вредности изабраних параметара, између 20 и 50%, и вредност силе у пасивном вискоеластичном пригушивачу између 20 и 30%, што смањује негативне ефекте сеизмичког дејства и продужава радни век пригушивача.</p>
Датум прихватања теме од стране надлежног већа:	
Датум одбране: (Попуњава одговарајућа служба)	
Чланови комисије: (титула, име, презиме, звање, институција)	<p>Председник: др Ђорђе Лађиновић, редовни професор, ФТН Нови Сад Члан: др Михаило Лазаревић, редовни професор, Машински факултет Београд Члан: др Ненад Граховац, ванредни професор, ФТН Нови Сад Члан: др Миодраг Жигић, ванредни професор, ФТН Нови Сад</p>
Напомена:	

KEY WORD DOCUMENTATION²

Document type:	Doctoral dissertation
Author:	Aleksandar Okuka
Supervisor (title, first name, last name, position, institution)	Dragan T. Spasić, full professor
Thesis title:	On optimal motion control of a seismically excited superstructure with seismic base isolation and passive dampers
Language of text (script):	Serbian language Latin script
Physical description:	Number of: Pages 74 Chapters 7 References 76 Tables 8 Illustrations 12 Graphs 0 Appendices 0
Scientific field:	Mechanical engineering
Scientific subfield (scientific discipline):	Mechanics
Subject, Key words:	Seismic protection, optimal control, fractional viscoelasticity, mollified Coulomb law, fractional Burgers model
Abstract in English language:	In this thesis a seismic protection optimal control problem for a sliding base isolated superstructure equipped with passive fractional viscoelastic damper, passive frictional damper and active device was considered. Effects of passive and active damping were estimated quantitatively on numerical solutions of a standard Cauchy problem for fractional differential equations describing motions of the system for several ground accelerations and several dry friction models. A comparison was made to the corresponding numerical solutions of two point boundary value problems obtained by use of the Pontryagin Maximum Principle. In doing so fractional derivatives were expressed according to Atanackovic Stankovic expansion formula. Friction force was initially chosen according to the Coulomb friction set-valued force law and then regularized to be a smooth function of sliding velocity. Three different types of seismic excitation: decreasing sinusoidal function, Ricker's wavelet function and accelerogram record of El Centro earthquake given in the form of interpolated smooth function were analyzed. The optimality criterion was motivated by the theory of the optimal linear regulators and chosen to minimize relative displacements, relative velocities and actions to be done by

² The author of doctoral dissertation has signed the following Statements:

5b – Statement on the authority,

5b – Statement that the printed and e-version of doctoral dissertation are identical and about personal data,

5r – Statement on copyright licenses.

The paper and e-versions of Statements are held at the faculty and are not included into the printed thesis.

	<p>the active device in the prescribed time interval. The numerical solutions of the optimal control problems were obtained by use of the method of successive approximations as suggested by Krylov and Chernousko. Regarding models describing viscoelastic passive damping elements the integer-order and the fractional order Kelvin-Zener model, with the corresponding constraints that follow from the entropic inequality were analyzed. Additionally, the fractional Burgers model was proposed as an alternative in passive viscoelastic dampers modeling. In doing so the constraints on the parameter included in the Burgers models are also given. Results shown in Table 1. of this thesis, are already published in the References [52], [53] and [54] during the thesis preparation and are its original contribution. Results shown in Figures 5-10 and in tables 2-7 are also the novel ones.</p> <p>The obtained solution of the posed optimal control problem decreases both the optimality criteria for 20-50% and the force in viscoelastic damper for 20-30%. This, in turn may reduce the damage caused by possible seismic action and at the same, time increase the longevity of the viscoelastic damper.</p>
Accepted on Scientific Board on:	
Defended: (Filled by the faculty service)	
Thesis Defend Board: (title, first name, last name, position, institution)	<p>President: Đorđe Ladinović, full professor, Faculty of Technical Sciences Novi Sad</p> <p>Member: Mihailo Lazarević, full professor, Faculty of Mechanical Engineering, Belgrade</p> <p>Member: Nenad Grahovac, associate professor, Faculty of Technical Sciences Novi Sad</p> <p>Member: Miodrag Žigić, associate professor, Faculty of Technical Sciences Novi Sad</p>
Note:	

Sadržaj

1	Uvod	3
2	Polazni stavovi	5
2.1	O seizmičkom dejstvu	5
2.2	O pasivnim prigušivačima frikcionog tipa	7
2.3	O pasivnim viskoelastičnim prigušivačima	9
2.3.1	Standardno linearno viskoelastično telo	10
2.3.2	Standardno frakciono linearno viskoelastično telo	10
2.3.3	Burgersovo viskoelastično telo	11
2.4	O metodama rešavanja frakcionih diferencijalnih jednačina i nalaženja optimalnih rešenja	19
2.4.1	Ekspanziona formula Atanackovića i Stankovića	19
2.4.2	Pontrjaginov princip maksimuma - određivanje neophodnih uslova optimalnosti	20
2.4.3	O nalaženju optimalnih rešenja metodom sukcesivnih aproksimacija	22
3	Postavka problema optimalnog upravljanja	24
4	Kretanje bez upravljanja	30
4.1	Slučaj A_I: Kelvin-Zenerov model i regularizovano trenje	31
4.2	Slučaj A_II: Kelvin-Zenerov model i trenje kao multifunkcija	31
4.3	Slučaj B_I: frakcioni Kelvin-Zenerov model i regularizovano trenje	34
4.4	Slučaj B_II: Frakcioni Kelvin-Zenerov model i trenje kao multifunkcija	35

5	Rešavanje problema optimizacije	37
5.1	Slučajevi A_I_1, 2, 3: Kelvin-Zenerov model za tri tipa pobude	38
5.2	Slučajevi B_I_1, 2, 3: frakcioni Kelvin-Zenerov model za tri tipa pobude .	40
6	Rezultati numeričkih simulacija	44
6.1	Slučajevi A_I_1, 2, 3 bez i sa upravljanjem	45
6.1.1	Slučaj A_I_1	47
6.1.2	Slučaj A_I_2	49
6.1.3	Slučaj A_I_3	50
6.2	Slučajevi B_I_1, 2, 3 bez i sa upravljanjem	52
6.2.1	Slučaj B_I_1	53
6.2.2	Slučaj B_I_2	55
6.2.3	Slučaj B_I_3	57
6.3	Diskusija i komentari dobijenih rezultata	59
6.3.1	O efektima pasivnih prigušivača	59
6.3.2	O restrikcijama u konstitutivnoj aksiomi	60
6.3.3	O izabranom modelu frikcionog prigušivača	61
7	Zaključna razmatranja	64
7.1	Uradjeno	64
7.2	Otvoreni problemi	65

1

Uvod

Cilj upotrebe svakog sistema za seizmičku zaštitu objekata je očuvanje odgovora konstrukcije na dejstvo zemljotresa u granicama sigurnosti i upotrebljivosti tokom i nakon trajanja tog dejstva. Kada su u pitanju objekti od velikog opšteg društvenog značaja ovi zahtevi se proširuju i na očuvanje pune funkcionalnosti. Zato se prilikom projektovanja ovih objekata nameće potreba za primenom složenih upravljačkih sistema seizmičke zaštite. Seizmička izolacija ili aseizmička izolacija temelja je strategija zaštite od zemljotresa koja ima za cilj da razdvoji kretanje superstrukture od podrhtavanja zemljine kore tj. da redukuje sile koje se zbog tog podrhtavanja prenose na superstrukturu [42]. Razvoj kako eksperimentalnih tako i teorijskih rezultata za sisteme ove vrste zaokuplja veliku pažnju naučne i stručne zajednice što se može videti u preglednim radovima [13], [32], [47] i [73], da se pomenu samo neki.

Kao najsloženiji i najefikasniji ističu se sistemi formirani od kombinacije aktivnih i pasivnih uređaja u okviru sistema bazne izolacije što i jeste predmet ove teze. Svaki od elemenata sistema bazne izolacije ima svoju upotrebnu svrhu, videti na primer [70] i [72] gde su prikazani rezultati dosadašnjeg razvoja sistema seizmičke izolacije sa primenom na objekte visokogradnje. U osnovi svaki sistem ima zadatak da smanji silu koja se prenosi na superstrukturu bilo klizanjem objekta u odnosu na njegove temelje bilo elementima za disipaciju energije kroz mehanizme viskoelastične deformacije i suvog trenja. Pri tome pasivni elementi uključuju i nove visokoefikasne viskoelastične materijale napravljene od elastomera i polimera i različite sisteme frikcionih mehanizama. S druge strane, ti sistemi

sadrže i aktivne upravljačke uređaje čiji je cilj ograničavanje pomeranja objekta kako se ne bi narušio funkcionalni kapacitet pasivnih elemenata.

Teorijska analiza ovako složenog sistema zahteva pažljiv pristup formiranju modela kojim bi se opisalo realno ponašanje sistema koji se najčešće koriste. Prema autorovom znanju u ovom radu je izložen jedinstven pristup razvoju modela sistema seizmičke zaštite ovakvog tipa. Osnovni cilj istraživanja u okviru ove teze je da se analizira i reši problem optimalnog upravljanja kojim bi se u pretpostavljenom vremenskom intervalu trajanja zemljotresa bazno izolovan objekat zadržao u blizini ravnotežnog položaja. Pri tome će se pored dejstva aktivnog uređaja kvantifikovati i uticaji frakcionog prigušenja i suvog trenja na disipaciju energije. Naime, za različite modele viskoelastičnih elemenata i različite tipove seizmičke pobude poređiće se vrednosti kriterijuma optimalnosti, motivisanog zadacima teorije linearnog regulatora, [71], i za zadatke dinamike i zadatke optimalnog upravljanja. Taj kriterijum je dat u obliku kvadratnog funkcionala koji u zadatom vremenskom intervalu treba da minimizira relativno pomeranje u odnosu na položaj pre početka zemljotresa, relativnu brzinu i dejstvo u aktivnom upravljačkom uređaju. Pri tome će se kvantifikovati i sile koje se od baze prenose na superstrukturu kroz sile u frikcionom i viskoelastičnom prigušivaču.

Ova teza povezuje probleme seizmičke izolacije sa teorijom frakcione viskoelastičnosti, matematičkom teorijom optimalnih procesa i numeričkom analizom. Rezultati ove teze iz domena frakcione viskoelastičnosti su objavljeni u [50] i [51], a sam rad, na neki način, predstavlja nastavak i dopunu rezultata prikazanih u [74] gde se problem optimalnog upravljanja u sistemu bazne izolacije analizira bez uzimanja u obzir efekata suvog trenja.

2

Polazni stavovi

Zadatak ove teze je da razvije pristup i matematički model koji bi omogućio numeričke simulacije ponašanja struktura pod dejstvom različitih seizmičkih pobuda i različitih elemenata kojima se minimizira njihov negativan efekat. Ideja je da se na osnovu rezultata tih, relativno jeftinih simulacija, prepoznaju prihvatljiva rešenja za izbor pasivnih frikcionih i viskoelastičnih elemenata koji bi konstrukcije u građevinarstvu činili bezbednijim.

2.1 O seizmičkom dejstvu

Zemljotres je kratkotrajno podrhtavanje pojedinih delova Zemljine kore koje nastaje usled pomeranja litosfernih ploča duž rasednih linija. Iako je ova pojava česta, najveći broj zemljotresa je slabog intenziteta, deluju na ograničenom području i vibracije tla koje nastaju kao posledica takvih potresa ne utiče značajno na građevinske objekte. Međutim, povremeni snažni zemljotresi tokom kojih potencijalna energija velikih masa prelazi u kinetičku energiju, mogu dovesti do značajnih oštećenja i rušenja građevinskih objekata što često za posledicu ima i gubitak ljudskih života. Kroz istoriju, uz razvoj tehničkih i graditeljskih saznanja došlo je i do nastanka sistema i mera za zaštitu od zemljotresa.

Za projektovanje objekata u seizmički aktivnim područjima i njihovu dinamičku analizu, neophodno je kvalitetno definisanje seizmičkog opterećenja - pobude. U projektantskoj praksi se mogu prepoznati dva standardna pristupa u definisanju seizmičke pobude. Prvi pristup se zasniva na korišćenju vremenskih zapisa ubrzanja tla tzv. akcelograma za zemljotrese koji su se već dogodili na odgovarajućem području. Ovaj pristup je

i uslovljen postojanjem već snimljenih zemljotresa. U suprotnom, ukoliko ne postoje već snimljeni zapisi merenja koristi se pristup predviđen u najvećem broju pravilnika za projektovanje objekata u seizmičkim područjima, a koji se zasniva na definisanju projektnog spektra odgovora, tj. spektra za koji se može očekivati (sa odgovarajućom verovatnoćom) da će simulirati sve moguće tipova zemljotresa koji se mogu desiti u odgovarajućem području. Najveća mana primene poslednjeg pristupa u seizmičkoj analizi je nemogućnost određivanja trenutnog ponašanja konstrukcije na seizmičku pobudu, a ovakva informacija je nekad ključna u procesu samog planiranja i projektovanja konstrukcije.

U radu [36], kao polazni oblik zemljotresne pobude u fazi generisanja složenijeg veštačkog zapisa zemljotresa na osnovu izabranog spektra odgovora u slučaju nuklearnih centrala, koristi se funkcija pobude dobijena proizvodom izabrane anvelope i superponiranih sinusnih funkcija u sledećem obliku:

$$w^{(2)}(t) = a(t) \sum_{n=1}^N A_n \cos\left(\frac{2\pi nt}{T} + \phi_n\right),$$

gde je T vreme trajanja zemljotresa, A_n su težinski koeficijenti, dok je $a(t)$ anvelopa. Ova funkcija vezuje se za ubrzanje tla tj. temelja i predstavlja prenosno ubrzanje za superstrukturu. Sličan pristup se koristi u radu [61]. Kao najjednostavniji model pobude ovog tipa može se odabrati sledeći izraz (videti [60])

$$w^{(2)}(t) = -w_0 \Omega^2 \sin(\Omega t), \quad (2.1)$$

gde su w_0 , κ i Ω parametri modela uzeti iz skupa pozitivnih realnih brojeva.

U literaturi se veoma često nailazi na drugi, nešto složeniji model pobude, u obliku Rikerove (Ricker) wavelet funkcije pomeranja tla $w(t)$ (videti [2])

$$w(t) = w_0 \sum_{i=1}^l (2w_i(t) - 1) e^{-w_i(t)} \sin(\Omega t), \quad w_i(t) = \left[\frac{\pi(t - t_{si})}{t_{pi}} \right]^2, \quad (2.2)$$

gde t_{si} i t_{pi} predstavljaju unapred zadate vremenske trenutke koji određuju oblik talasne funkcije $w(t)$, dok je w_0 pozitivna konstanta.

Kao treći model koristiće se stvarni vremenski zapis akceleroograma zemljotresa El Centro iz 1940 godine (ili 1940 Imperial Valley zemljotres) dat u obliku interpolirane glatke funkcije. Interpolirana glatka funkcija je u ovoj tezi dobijena korišćenjem matematičkog softvera Wolfram Mathematica Release 11.

2.2 O pasivnim prigušivačima frikcionog tipa

Pasivni prigušivači frikcionog tipa sadrže elemente koji mogu da klizu jedan po drugom u prisustvu suvog, Kulonovog trenja koje predstavlja strogu disipativan proces. Suvo trenje je veoma složen fenomen koji se izuzetno aktivno proučava u poslednjim dekadama, a pojavljuje se u zonama kontakta između dva tela pri klizanju a zbog činjenice da su iako glatke na makroskopskom nivou kontaktne površine tela u kontaktu hrapave na mikroskopskom nivou. Dualna priroda sile trenja da može da bude i reakcija veze i zadata aktivna sila, te da sa aspekta matematičkog modela može da bude i multifunkcija (funkcija koja uzima vrednosti na skupu) u odnosu na relativnu brzinu klizanja, a u isto vreme i poluneprekidna funkcija u odnosu na vreme, čini probleme sa trenjem veoma složenim. videti [65]. Pored toga, dualna priroda sile trenja itekako utiče na numeričku analizu problema.

Eksperimenti pokazuju da sila trenja zavisi od velikog broja parametara, kao što su brzina relativnog klizanja, intenzitet normalnog opterećenja, temperatura, karakteristike podloge, kao i kombinacija materijala u kontaktu. Uspeh predviđanja eksperimentalnih rezultata na osnovu teorijskih modela direktno zavisi od izbora korišćenog modela trenja.

Polazeći od eksperimenata Kulona [17] i čuvenog Amont-Kulonovog zakona kojim je sila trenja q definisana kao linearna funkcija normalne reakcije veze N uz uvođenje jednog koeficijenta proporcionalnosti μ_T koji fizički izražava nivo hrapavosti površina u kontaktu

$$q = \mu_T N \cdot Sgn(v_r), \quad Sgn(v_r) = \left\{ \begin{array}{l} 1 \quad \text{za } v_r < 0 \\ [-1, 1] \quad \text{za } v_r = 0 \\ -1 \quad \text{za } v_r > 0 \end{array} \right\},$$

gde je v_r relativna brzina tela u kontaktu, a $Sgn(v_r)$ multifunkcija znaka, vremenom su razvijeni mnogo sofisticiraniji modeli koji uključuju efekte kao što su: zavisnost sile trenja od intenziteta brzine, memorijski efekti, uticaj promene normalne reakcije na silu trenja, promenu sile trenja u fazi mirovanja, uticaj malih pomeranja pre početka klizanja itd. Detaljan uvid u sve poznate modele trenja, kao i samu problematiku može se videti u preglednim referencama [56], [57], [12], [20], [21] i [59]. Korišćenje Kulonovog modela

trenja u obliku neglatke viševrednosne funkcije, funkcije koja uzima vrednosti na skupu ili multifunkcije, obezbeđuje da se blok može zaustaviti u zoni zastoja u konačnom vremenu. Ovo je sa fizičke tačke gledišta korektan pristup, ali matematička analiza problema se znatno usložnjava. Naime, primena ovog modela ima za posledicu analizu različitih faza kretanja, gde svakoj fazi odgovara drugi dinamički model. Moguće faze relativnog kretanja bloka u odnosu na osnovu su klizanje u levu stranu, klizanje u desnu stranu i priljubljanje tj. faza bez relativnog pomeranja. Svaka faza se analizira posebno s tim da su krajnji uslovi jedne faze jednaki početnim uslovima naredne. Pri tome se u slučaju sprezanja sa frakcionim viskoelastičnim prigušivačem posebna pažnja posvećuje memorijskim efektima.

Model trenja je potrebno uvek odabrati u zavisnosti od konkretnog problema koji se rešava. Kako se u ovoj doktorskoj tezi razmatra kretanje objekta sa zaustavljanjem tj. priljubljanjem, ovde će se koristiti Kulonov model suvog trenja sa viševrednosnim funkcijama koji obezbeđuje zaustavljanje. Međutim, iz razloga pojednostavljenja numeričke analize, u problemima se nailazi i na rešenja u kojima se Kulonov model suvog trenja daje u obliku glatke zavisnosti sile trenja i brzine klizanja. I ovi regularizovani modeli se veoma često koriste. U okvirima ove teze ponašanje pasivnog frikcionog prigušivača biće modelirano regularizovanim Kulonovim modelom trenja u obliku glatke neprekidne zavisnosti sile trenja q od relativne brzine $x^{(1)}$

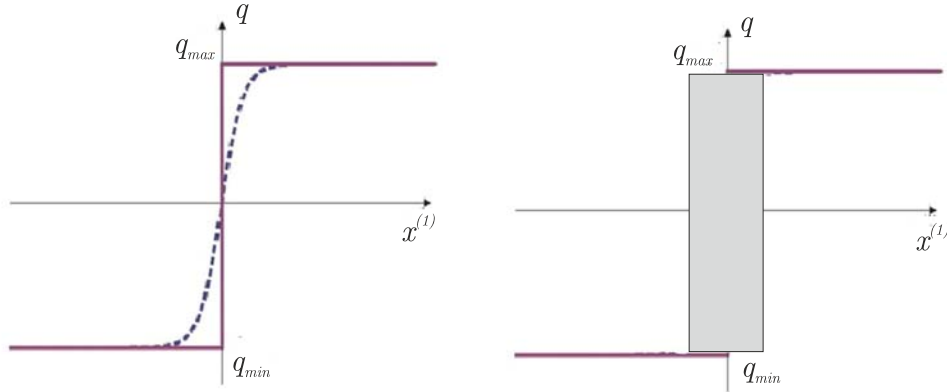
$$q = \mu_T N \tanh(kx^{(1)}),$$

prikazane u [4], gde veličine μ_T i N stoje za koeficijent trenja i normalnu kontaktnu reakciju veze, dok je k koeficijent koji određuje brzinu promene funkcije. Pored ovog regularizovanog modela, mogu se koristiti i sledeće zavisnosti

$$q = \mu_T N \left(\frac{2}{1 + e^{x^{(1)}/\varepsilon}} - 1 \right),$$

$$q = \mu_T N D_1 \left(1 - \frac{2}{1 + e^{2D_2 x^{(1)}}} \right),$$

predložene u radovima [18] i [28] respektivno, gde su k , ε , D_1 i D_2 konstante modela. Pogodnim izborom vrednosti koeficijenata u ova tri modela mogu se dobiti kvantitativno približno iste funkcije. Gore pomenuti modeli trenja prikazani su na narednoj slici 1.



Slika 1. Kulonov model trenja u obliku multifunkcije (puna linija) i jedna od njegovih regularizacija (isprekidana), levo i Karnopov model trenja (desno).

Pošto primenom prethodno pomenutih regularizovanih modela nije moguće opisati pojavu priljubljanja (*slip-to-stick*) i zaustavljanja objekta u konačnom vremenu, kao pogodan način za prevazilaženje ovog problema ovde se predlaže primena Karnopovog modela suvog trenja koji u zoni kada se relativna brzina dovoljno smanji dozvoljava zaustavljanje (videti osenčenu oblast na Slici 2.) . Ovim pristupom se značajno olakšava numerička analiza problema, a takođe se obezbeđuje zaustavljanje superstrukture u konačnom vremenu. Karnopov model trenja je pogodan za numeričke simulacije (v. [22]) , jer se u području malih brzina usvaja da je relativna brzina jednaka nuli čime se izbegava određivanje tačnog trenutka prelaska iz faze klizanja u fazu priljubljanja kada relativna brzina postaje nula (videti [34], [59], [29]). Naime, ovim modelom je definisan interval nulte vrednosti brzine, tj $|x^{(1)}| < \tilde{V}$, gde je \tilde{V} usvojena granična vrednost.

2.3 O pasivnim viskoelastičnim prigušivačima

Svaki proces deformacije viskoelastičnih tela prati disipacija energije. Kao model pasivnog prigušivača ovde će se koristiti štap napravljen od viskoelastičnog materijala, dužine l u nenapregnutom stanju, površine poprečnog preseka A , za koju se pretpostavlja da se ne menja tokom deformacije. Pretpostavlja se da je deformacija štapa uniaksijalna i izotermna. Neka je $f(t)$ sila u štapu i neka se njegova deformacija meri koordinatom $x(t)$. Veza izmedju napona u štapu $\sigma(t) = f(t)/A$ i mere deformacije $\varepsilon(t) = x(t)/l$ se može odabrati na različite načine. U ovoj tezi će se ta veza tj. konstitutivna aksioma birati

prema uobičajenim modelima Kelvin-Zenera, frakcionog Kelvin-Zenera, a zbog veoma česte upotrebe u građevinarstvu Burgersa i frakcionog Burgersa. Naime, problem kako modelirati unutrašnje trenje u materijalu i koji model je pogodniji za zadatau aplikaciju je veoma aktuelan, videti radove [44], [40] u kojima se redom Burgersov model poredi sa Kelvin-Vojtovim, i Kelvin-Zenerovim modelom viskoelastičnog tela.

2.3.1 Standardno linearno viskoelastično telo

Kao prvi model biće korišćeno standardno linearno viskoelastično telo poznato i kao Kelvin-Zenerov model viskoelastičnog tela, dalje KZM,

$$\sigma(t) + \tau_\sigma \cdot_0 D_t^1 \sigma(t) = E (\varepsilon(t) + \tau_\varepsilon \cdot_0 D_t^1 \varepsilon(t)),$$

gde ${}_0 D_t^1(\cdot)$ stoji za prvi izvod po vremenu, i gde je E modul elastičnosti, a τ_σ i τ_ε su relaksacione konstante dimenzije vremena, $[s]$ koje se nazivaju redom vreme relaksacije napona i vreme relaksacije deformacije. Ovaj izraz dopunjuje se ograničenjima na vrednosti konstanti u modelu koja su posledica Klauzsius-Diemove nejednakosti

$$E > 0, \quad \tau_\sigma > 0, \quad \tau_\varepsilon > \tau_\sigma,$$

i koja obezbeđuju disipaciju energije *ab initio*.

2.3.2 Standardno frakciono linearno viskoelastično telo

Generalizacija prethodnog dovodi do modela standardnog frakcionog linearno viskoelastičnog tela - frakcionog Kelvin-Zenerovog modela, dalje FKZM,

$$\sigma(t) + \tau_{\sigma\alpha} \cdot_0 D_t^\alpha \sigma(t) = E_\alpha (\varepsilon(t) + \tau_{\varepsilon\alpha} \cdot_0 D_t^\alpha \varepsilon(t))$$

gde je $\alpha \in (0, 1]$ realan broj, E_α je modul elastičnosti, a $\tau_{\sigma\alpha}$ i $\tau_{\varepsilon\alpha}$ su konstante relaksacije dimenzije $[s]^\alpha$, koji se kao gore dopunjuje ograničenjima u vidu nejednakosti

$$E_\alpha > 0, \quad \tau_{\sigma\alpha} > 0, \quad \tau_{\varepsilon\alpha} > \tau_{\sigma\alpha}.$$

Ova generalizacija nije formalne već suštinske prirode jer se prvi izvod kao lokalni operator menja frakcionim izvodom reda α koji je nelokalni operator jer uzima u obzir memoriju

procesa. Sada izraz ${}_0D_t^\alpha(\cdot)$ stoji za standardni frakcioni levi izvod Riman-Ljuvilovog tipa reda α , koji se funkciju $u(t)$ definiše, za $0 < \alpha \leq 1$, sa

$${}_0D_t^\alpha u(t) = \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} u(t) = u^{(\alpha)} \equiv \frac{d}{dt} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{u(\xi) d\xi}{(t-\xi)^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} (t^{-\alpha} * u(t)), \quad t > 0, \quad (2.3)$$

gde $\Gamma(z)$ stoji za Ojlerovu gama funkciju $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$ i gde zvezdica predstavlja operator konvolucije. Ovaj model je veoma pogodan za različite inženjerske primene [64]. Koeficijenti u modelu, red izvoda, modul elastičnosti i konstante relaksacije mogu se na osnovu reoloških eksperimenata odrediti ili metodom najmanjih kvadrata ili Post-Njutnovim metodom kao što je preporučeno u [67].

2.3.3 Burgersovo viskoelastično telo

Aktuelni viskoelastični materijali kao elastomeri i polimeri imaju svojstvo da se njihova relaksacija ne odvija tako brzo kao što eksponencijalni zakon pokazuje. To je zbog činjenice da se u proces relaksacije uključuju mnogi mehanizmi na različitim vremenskim skalama molekularne baze, videti [69]. Da se opišu ti ne-eksponencijalni memorijski efekti pored Kelvin- Zenerovog koristi se i Burgersov model. Burgersov model sa celobrojnim izvodima poznat i kao klasični Burgersov model se koristi u modeliranju ponašanja realnih materijala, naročito u modeliranju dinamičkog ponašanja polimera na širokom frekventnom opsegu, modeliranju viskoelastičnih svojstava asfaltnih veziva, kao i ponašanju stakla tokom procesa topljenja, videti npr. [30]. Modeliranje mikromehaničkog ponašanja asfaltnih mešavina korišćenjem klasičnog Burgersovog modela sa celobrojnim izvodima je prikazano u radovima [1]. Isto tako klasični Burgersov model se koristi u analizi ponašanja nenjutnovskih fluida što se prepoznaje i u proizvodnji polimera, videti [35]. Postoje primene ovog modela i u geološkim naukama, videti [41] pre svega za prostiranje talasa kroz zemljinu koru jer mnoge stene ispoljavaju ponašanje koje je vremenski zavisno, [49], ili za ponašanje viskoelastičnih tela sa mikroprslinama [48].

Pored klasičnog i frakcioni Burgersov model se koristi u modeliranju asfaltnih mešavina na osnovu eksperimentalnih podataka dobijenih na standardnim opitima tečenja (*creep* eksperiment sa stalno prisutnim opterećenjem) i tečenja sa otpuštanjem (*creep-recovery* eksperiment kod kojeg je uzorak opterećen samo na jednom intervalu vremena), vidi

[16]. Polazeći od uopštenja reološke šeme sa zamenom obične prigušnice frakcionim Skot-Blerovim elementom

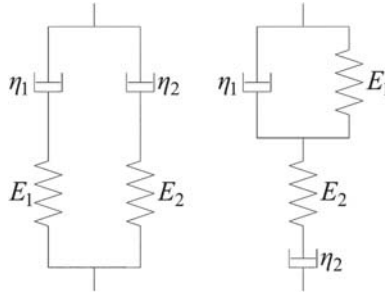
$$\sigma(t) = \eta \cdot {}_0 D_t^\xi \varepsilon(t), \quad \xi \in [0, 1],$$

gde je η koeficijent viskoznosti dimenzije Pa s^ξ , razvijeno je osam termodinamički konzistentnih frakcionih Burgersovih modela, vidi [52]. Ponašanje svih frakcionih Burgersovih modela kao i klasičnog Burgersa u okvirima klasičnih eksperimenata relaksacije napona i tečenja detaljno je analizirano u radu [53]. U okvirima rada [54] analizirana je i rešena frakciona Burgersova talasna jednačina za osam gore pomenutih modela. Razmatranja koja slede, preuzeta iz rada [52], daju širi uvid u razvoj i primene kako klasičnog Burgersovog modela tako i njegovih frakcionih generalizacija sa posebnim akcentom na primenu teorije Begli i Torvika, [11], kojim se potvrđuje termodinamička konzistentnost modela koji se razmatraju. Radovi [52], [53], [54] predstavljaju originalni doprinos kandidata.

U dobro poznatim i često korišćenim konstitutivnim modelima za opis ponašanja viskoelastičnih tela, kao što su npr. Kelvin-Voitov, Maksvelov ili Kelvin-Zenerov model, prvi izvod po vremenu se pojavljuje kao izvod najvišeg reda, dok je kod klasičnog jednodimenzijskog Burgersovog modela to drugi izvod

$$\left(1 + a_1 \frac{d}{dt} + a_2 \frac{d^2}{dt^2}\right) \sigma(t) = \eta \left(1 + b_1 \frac{d}{dt}\right) \varepsilon^{(1)}(t), \quad (2.4)$$

Ova jednačina dobijena je korišćenjem reoloških reprezentacija prikazanih na Slici 2.



Slika 2. Burgersov model-reološke šeme

U razvijenom obliku to se svodi na sledeće relacije

$$\left(1 + \frac{\eta_2}{E_1} \left(1 + \frac{E_1}{E_2} + \frac{\eta_1}{\eta_2}\right) \frac{d}{dt} + \frac{\eta_1 \eta_2}{E_1 E_2} \frac{d^2}{dt^2}\right) \sigma(t) = \eta_2 \left(\frac{d}{dt} + \frac{\eta_1}{E_1} \frac{d^2}{dt^2}\right) \varepsilon(t),$$

$$\left(1 + \left(\frac{\eta_1}{E_1} + \frac{\eta_2}{E_2}\right) \frac{d}{dt} + \frac{\eta_1 \eta_2}{E_1 E_2} \frac{d^2}{dt^2}\right) \sigma(t) = \eta_2 \left(\left(1 + \frac{\eta_1}{\eta_2}\right) \frac{d}{dt} + \frac{\eta_1}{E_1} \left(1 + \frac{E_1}{E_2}\right) \frac{d^2}{dt^2}\right) \varepsilon(t),$$

videti [23].

Uopštavanjem Burgersovog modela (2.4) u klasičnom smislu, dobija se uopšteni Burgersov model sa celobrojnim izvodima

$$\left(1 + a_1 \frac{d}{dt} + a_2 \frac{d^2}{dt^2}\right) \sigma(t) = \eta \left(1 + b_1 \frac{d}{dt} + b_2 \frac{d^2}{dt^2}\right) \varepsilon^{(1)}(t),$$

gde su a_1, a_2, b_1, b_2 , uz koeficijent viskoznosti η , parametri modela. Ovde se može primetiti treći izvod deformacije po vremenu kao izvod najvišeg reda.

Uopštavanjem klasičnog Burgersovog modela (2.4) u okviru teorije fracione viskoelastičnosti, dobijeni su fracioni i uopšteni fracioni Burgersov model u sledećim oblicima

$$(1 + a_1 {}_0D_t^\alpha + a_2 {}_0D_t^{2\alpha}) \sigma(t) = \eta \left(1 + b_1 {}_0D_t^\beta\right) \varepsilon^{(1)}(t),$$

$$(1 + a_1 {}_0D_t^\alpha + a_2 {}_0D_t^{2\alpha}) \sigma(t) = \eta \left(1 + b_1 {}_0D_t^\beta + b_2 {}_0D_t^{2\beta}\right) \varepsilon^{(1)}(t).$$

videti [14].

Kako bi se dobili termodinamički konzistentni reološki modeli koji obezbeđuju disipaciju energije ab initio, saglasno argumentima iz rada [11], potrebno je odrediti ograničenja na parametre modela - multiplikativne konstante - i red fracionih izvoda. Naime, posle dovoljno dugog prisustva deformacije harmonijskog karaktera, napon indukovani u materijalu će takođe postati harmonijska funkcija. Prelaskom iz vremenskog u frekventni domen - Furijeovom transformacijom $\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}[f(t)](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$, $\omega \in \mathbb{R}$, konstitutivna jednačina postaje

$$\frac{\hat{\sigma}(\omega)}{\hat{\varepsilon}(\omega)} = \hat{E}(\omega) = E'(\omega) + iE''(\omega), \quad \omega \geq 0,$$

gde je i imaginarna jedinica dok su \hat{E} , E' , i E'' redom kompleksni, povratni (*storage*, elastični), i nepovratni (*loss*, viskozni ili disipativni) modul. Saglasno entropijskoj nejed-

nakosti povratnom i nepovratnom modulu se nameću sledeća ograničenja

$$E'(\omega) \geq 0 \text{ and } E''(\omega) \geq 0, \quad (2.5)$$

za sve nenegativne frekvencije ω , ($\omega \geq 0$), videti [8], [10] i [9] za frakcione izvode koji ne prelaze vrednost jedan, ili [14] za slučaj kada frakcioni izvodi prelaze vrednost jedan na primeru uopštenog frakcionog Burgersovog modela viskoelastičnog fluida

$$(1 + a_1 {}_0D_t^\alpha + a_2 {}_0D_t^{2\alpha}) \sigma(t) = \eta \left(1 + b_1 {}_0D_t^\beta + b_2 {}_0D_t^{2\beta}\right) \varepsilon^{(1)}(t), \quad (2.6)$$

gde se uslov termodinamičke konzistentnosti svodi na ispunjavanje sledećih relacija

$$\alpha = \beta, \quad a_1 \geq b_1, \quad a_2 \geq b_2, \quad a_2 b_1 \geq a_1 b_2, \quad a_1 b_1 + (a_2 + b_2) \cos(\alpha\pi) \geq 0.$$

Klasični Burgersov model

Kako bi se osigurala fizička prihvatljivost klasičnog Burgers-ovog modela (2.4), ograničenja na parametre modela kojima se garantuje termodinamička konzistentnost su

$$a_1 b_1 - b_2 \geq 0 \text{ i } a_1 b_2 - a_2 b_1 \geq 0, \quad \text{t.j.}, \quad \frac{a_2}{a_1} \leq \frac{b_2}{b_1} \leq a_1. \quad (2.7)$$

gde je usvojena pretpostavka da su konstante multiplikacije pozitivne ($a_1, a_2, b_1, b_2 > 0$). Ograničenja na parametre modela (2.7) su dobijena primenom Fourier-ove transformacije na (2.4), gde je kompleksni modul dobija u obliku

$$\hat{E}(\omega) = \frac{\hat{\sigma}(\omega)}{\hat{\varepsilon}(\omega)} = \frac{b_1(i\omega) + b_2(i\omega)^2}{1 + a_1(i\omega) + a_2(i\omega)^2},$$

gde se razdvajanjem realnog i imaginarnog dela kompleksnog modula dobijaju oblici za povratni i nepovratni modul

$$E'(\omega) = \frac{(a_1 b_1 - b_2) \omega^2 + a_2 b_2 \omega^4}{|1 - a_2 \omega^2 + i a_1 \omega|^2}, \quad (2.8)$$

$$E''(\omega) = \frac{b_1 \omega + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \omega^3}{|1 - a_2 \omega^2 + i a_1 \omega|^2}. \quad (2.9)$$

Termodinamički zahtevi (2.5), primenjeni na dobijene vrednosti povratnog i nepovratnog (2.8) i (2.9) impliciraju ograničenja na parametre modela (2.7).

Frakciono Burgersovo viskoelastično telo

U radu [52] frakcioni Burgersov model, dalje FBM, je dat konstitutivnom jednačinom

$$\left(1 + a_1 {}_0D_t^\alpha + a_2 {}_0D_t^\beta + a_3 {}_0D_t^\gamma\right) \sigma(t) = \left(b_1 {}_0D_t^\mu + b_2 {}_0D_t^{\mu+\varkappa}\right) \varepsilon(t),$$

$$0 \leq \alpha \leq \beta \leq \gamma \leq \mu \leq 1, \quad 1 \leq \mu + \varkappa \leq 1 + \alpha, \quad \frac{b_2}{b_1} \leq a_i \left| \frac{\cos \frac{(\mu - \varkappa) \pi}{2}}{\cos \frac{(\mu + \varkappa) \pi}{2}} \right|;$$

gde su parametri modela označeni sa $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 > 0$, $\alpha, \beta, \mu \in [0, 1]$, sa $\alpha \leq \beta$ i $\gamma, \nu \in [1, 2]$, dok ${}_0D_t^\xi$ označava operator Riman-Ljuvilovog frakcionog izvoda reda $\xi \in [n, n + 1]$, $n \in \mathbb{N}_0$, definisan sa

$${}_0D_t^\xi y(t) = \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} \left(\frac{t^{-(\xi-n)}}{\Gamma(1 - (\xi - n))} * y(t) \right), \quad t > 0.$$

Dakle, suprotno uobičajenom pristupu u kome se vrši frakcionalizacija klasičnog Burgersovog modela zamenom celobrojnih, frakcionim izvodima, ovde je adaptiran drugi pristup koji se zasniva na zameni viskoznoeg elementa - linearne prigušnice - frakcionim Skot-Blerovim elementom u reološkoj šemi koja odgovara Burgersovoj konstitutivnoj jednačini. Dobijeni frakcioni konstitutivni model je dalje uopšten usvajanjem izvoda proizvoljnog realnog reda u intervalima $[0, 1]$ i $[1, 2]$. Iako obe reološke reprezentacije prikazane na Slici 2 daju isti matematički oblik Burgersove konstitutivne jednačine sa celobrojnim izvodima (2.4), korišćenjem reoloških reprezentacija prikazanih na Slici 2, sa frakcionim elementima stavljenim umesto prigušnica, dobijaju se dva različita matematička oblika frakcione Burgersove konstitutivne jednačine:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{\eta_1}{E_1} {}_0D_t^\alpha + \frac{\eta_2}{E_2} {}_0D_t^\beta + \frac{\eta_1 \eta_2}{E_1 E_2} {}_0D_t^{\alpha+\beta}\right) \sigma(t) \\ = \left(\eta_1 {}_0D_t^\alpha + \eta_2 {}_0D_t^\beta + \frac{\eta_1 \eta_2}{E_1} \left(1 + \frac{E_1}{E_2}\right) {}_0D_t^{\alpha+\beta}\right) \varepsilon(t), \end{aligned}$$

$$\left(1 + \frac{\eta_1}{E_1} {}_0D_t^\alpha + \frac{\eta_2}{E_2} \left(1 + \frac{E_2}{E_1}\right) {}_0D_t^\beta + \frac{\eta_1 \eta_2}{E_1 E_2} {}_0D_t^{\alpha+\beta}\right) \sigma(t) = \eta_2 \left({}_0D_t^\beta + \frac{\eta_1}{E_1} {}_0D_t^{\alpha+\beta}\right) \varepsilon(t). \quad (2.10)$$

Inspirisano reološkim modelom (2.10), frakciono uopštenje Burgers-ovog modela je pretpostavljeno u obliku

$$\left(1 + a_1 {}_0D_t^\alpha + a_2 {}_0D_t^\beta + a_3 {}_0D_t^\gamma\right) \sigma(t) = (b_1 {}_0D_t^\mu + b_2 {}_0D_t^\nu) \varepsilon(t), \quad (2.11)$$

sa parametrizacijom modela $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 > 0$, $\alpha, \beta, \mu \in [0, 1]$, gde je $\alpha \leq \beta$ i $\gamma, \nu \in [1, 2]$. Termodinamička konzistentnost (2.11) je ispitana kako bi se potvrdila fizička prihvatljivost modela.

Primenom Fourier-ove transformacije na (2.11), dobija se kompleksni modul u obliku

$$\hat{E}(\omega) = \frac{\hat{\sigma}(\omega)}{\hat{\varepsilon}(\omega)} = \frac{b_1 (i\omega)^\mu + b_2 (i\omega)^\nu}{1 + a_1 (i\omega)^\alpha + a_2 (i\omega)^\beta + a_3 (i\omega)^\gamma},$$

tako da su povratni i nepovratni moduli

$$\begin{pmatrix} E'(\omega) \\ E''(\omega) \end{pmatrix} = \frac{1}{\left|1 + a_1 (i\omega)^\alpha + a_2 (i\omega)^\beta + a_3 (i\omega)^\gamma\right|^2} \begin{pmatrix} \bar{E}'(\omega) \\ \bar{E}''(\omega) \end{pmatrix}, \quad (2.12)$$

sa

$$\begin{aligned} \bar{E}'(\omega) &= a_1 b_1 \omega^{\mu+\alpha} \cos \frac{(\mu-\alpha)\pi}{2} + a_2 b_1 \omega^{\mu+\beta} \cos \frac{(\mu-\beta)\pi}{2} + a_3 b_1 \omega^{\mu+\gamma} \cos \frac{(\mu-\gamma)\pi}{2} \\ &+ a_1 b_2 \omega^{\nu+\alpha} \cos \frac{(\nu-\alpha)\pi}{2} + a_2 b_2 \omega^{\nu+\beta} \cos \frac{(\nu-\beta)\pi}{2} + a_3 b_2 \omega^{\nu+\gamma} \cos \frac{(\nu-\gamma)\pi}{2} \\ &+ b_1 \omega^\mu \cos \frac{\mu\pi}{2} + b_2 \omega^\nu \cos \frac{\nu\pi}{2}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} \bar{E}''(\omega) &= a_1 b_1 \omega^{\mu+\alpha} \sin \frac{(\mu-\alpha)\pi}{2} + a_2 b_1 \omega^{\mu+\beta} \sin \frac{(\mu-\beta)\pi}{2} + a_3 b_1 \omega^{\mu+\gamma} \sin \frac{(\mu-\gamma)\pi}{2} \\ &+ a_1 b_2 \omega^{\nu+\alpha} \sin \frac{(\nu-\alpha)\pi}{2} + a_2 b_2 \omega^{\nu+\beta} \sin \frac{(\nu-\beta)\pi}{2} + a_3 b_2 \omega^{\nu+\gamma} \sin \frac{(\nu-\gamma)\pi}{2} \\ &+ b_1 \omega^\mu \sin \frac{\mu\pi}{2} + b_2 \omega^\nu \sin \frac{\nu\pi}{2}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Termodinamički zahtev je da su povratni i nepovratni moduli nenegativne funkcije za sve pozitivne frekvencije ω , vidi (2.5). Prvi, drugi, šesti i sedmi član u \bar{E}' su nenegativni, kao i četvrti, peti, sedmi i osmi u \bar{E}'' , dok je osmi član u \bar{E}' i treći u \bar{E}'' nepozitivni. Namećući ograničenja $\gamma - \mu \leq 1$, $\nu - \alpha \leq 1$ i $\nu - \beta \leq 1$, treći, četvrti i peti član u \bar{E}' postaju nenegativni, dok uz nametanje daljih ograničenja $\mu \geq \alpha$, $\mu \geq \beta$, i $\nu \geq \gamma$, prvi, drugi, i šesti član u \bar{E}'' postaju nenegativni. Sumiranjem navedenog, ograničenja na red frakcionih izvoda su:

$$0 \leq \alpha \leq \beta \leq \mu \leq 1, \quad 1 \leq \gamma \leq \nu \leq 2, \quad \gamma - \mu \leq 1, \quad \nu - \alpha \leq 1. \quad (2.15)$$

Odabirom različitih vrednosti za ν, γ i μ na takav način da povratni i nepovratni moduli, (2.13) i (2.14) budu nenegativni, a polazeći od relacije za uopšteni Burgersov model (2.11), dobija se osam termodinamički konzistentnih frakcionih Burgersovih modela, dalje Modeli I do VIII. Model I je devetoparametarski model, koji sadrži pet multiplikativnih nenegativnih konstanti a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 , i četiri različita reda frakcionih izvoda: $\alpha, \beta, \gamma, \mu \in [0, 1]$. Modeli II-V sadrže osam parametara: pet nenegativnih multiplikativnih konstanti a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 i tri različita reda frakcionih izvoda $\alpha, \beta, \mu \in [0, 1]$, Modeli VI i VII su sedmoparametarski sa pet nenegativnih multiplikativnih konstanti a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 i dva različita reda frakcionih izvoda $\alpha, \beta \in [0, 1]$, dok je Model VIII petoparametarski sa četiri nenegativne multiplikativne konstante $(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{b}_1, \bar{b}_2)$ uz jedan red frakcionog izvoda $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1]$. U nastavku je dat tabelarni prikaz svih Modela I-VIII sa usvojenim vrednostima za ν, γ i μ i odgovarajućim termodinamičkim ograničenjima.

TABELA 1

Model I: $\nu = \mu + \varkappa, \quad (\varkappa, i) \in \{(\alpha, 1), (\beta, 2), (\gamma, 3)\}$	
$(1 + a_1 {}_0D_t^\alpha + a_2 {}_0D_t^\beta + a_3 {}_0D_t^\gamma) \sigma(t) = (b_1 {}_0D_t^\mu + b_2 {}_0D_t^{\mu+\varkappa}) \varepsilon(t),$	
$0 \leq \alpha \leq \beta \leq \gamma \leq \mu \leq 1, \quad 1 \leq \mu + \varkappa \leq 1 + \alpha,$	
$\frac{b_2}{b_1} \leq a_i \left \frac{\cos \frac{(\mu - \varkappa) \pi}{2}}{\cos \frac{(\mu + \varkappa) \pi}{2}} \right ,$	
Model II: $\nu = \mu + \alpha, \quad \gamma = 2\alpha$	
$(1 + a_1 {}_0D_t^\alpha + a_2 {}_0D_t^\beta + a_3 {}_0D_t^{2\alpha}) \sigma(t) = (b_1 {}_0D_t^\mu + b_2 {}_0D_t^{\mu+\alpha}) \varepsilon(t),$	
$\frac{1}{2} \leq \alpha \leq \beta \leq \mu \leq 1,$	
$\frac{a_3}{a_1} \left \frac{\sin \frac{(\mu - 2\alpha) \pi}{2}}{\sin \frac{\mu \pi b}{2}} \right \leq \frac{b_2}{b_1} \leq a_1 \left \frac{\cos \frac{(\mu - \alpha) \pi}{2}}{\cos \frac{(\mu + \alpha) \pi}{2}} \right ,$	

Model III: $\nu = \mu + \alpha, \quad \gamma = \alpha + \beta$
$\left(1 + a_1 {}_0D_t^\alpha + a_2 {}_0D_t^\beta + a_3 {}_0D_t^{\alpha+\beta}\right) \sigma(t) = \left(b_1 {}_0D_t^\mu + b_2 {}_0D_t^{\mu+\alpha}\right) \varepsilon(t),$
$0 \leq \alpha \leq \beta \leq \mu \leq 1, \quad \alpha + \beta \geq 1,$
$\frac{a_3}{a_2} \frac{\left \sin \frac{(\mu - \beta - \alpha) \pi}{2} \right }{\left \sin \frac{(\mu - \beta + \alpha) \pi}{2} \right } \leq \frac{b_2}{b_1} \leq a_1 \frac{\cos \frac{(\mu - \alpha) \pi}{2}}{\left \cos \frac{(\mu + \alpha) \pi}{2} \right }$

Model IV: $\nu = \mu + \beta, \quad \gamma = \alpha + \beta$
$\left(1 + a_1 {}_0D_t^\alpha + a_2 {}_0D_t^\beta + a_3 {}_0D_t^{\alpha+\beta}\right) \sigma(t) = \left(b_1 {}_0D_t^\mu + b_2 {}_0D_t^{\mu+\beta}\right) \varepsilon(t),$
$0 \leq \alpha \leq \beta \leq \mu \leq 1, \quad 1 - \alpha \leq \beta \leq 1 - (\mu - \alpha),$
$\frac{a_3}{a_1} \frac{\left \sin \frac{(\mu - \alpha - \beta) \pi}{2} \right }{\left \sin \frac{(\mu - \alpha + \beta) \pi}{2} \right } \leq \frac{b_2}{b_1} \leq a_2 \frac{\cos \frac{(\mu - \beta) \pi}{2}}{\left \cos \frac{(\mu + \beta) \pi}{2} \right }$

Model V: $\nu = \mu + \beta, \quad \gamma = 2\beta$
$\left(1 + a_1 {}_0D_t^\alpha + a_2 {}_0D_t^\beta + a_3 {}_0D_t^{2\beta}\right) \sigma(t) = \left(b_1 {}_0D_t^\mu + b_2 {}_0D_t^{\mu+\beta}\right) \varepsilon(t),$
$0 \leq \alpha \leq \beta \leq \mu \leq 1, \quad \frac{1}{2} \leq \beta \leq 1 - (\mu - \alpha),$
$\frac{a_3}{a_2} \frac{\left \sin \frac{(\mu - 2\beta) \pi}{2} \right }{\left \sin \frac{\mu \pi}{2} \right } \leq \frac{b_2}{b_1} \leq a_2 \frac{\cos \frac{(\mu - \beta) \pi}{2}}{\left \cos \frac{(\mu + \beta) \pi}{2} \right }$

Model VI: $\mu = \beta, \quad \gamma = \alpha + \beta$
$\left(1 + a_1 {}_0D_t^\alpha + a_2 {}_0D_t^\beta + a_3 {}_0D_t^{\alpha+\beta}\right) \sigma(t) = \left(b_1 {}_0D_t^\beta + b_2 {}_0D_t^{\alpha+\beta}\right) \varepsilon(t),$
$0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1, \quad \alpha + \beta \geq 1,$
$\frac{a_3}{a_2} \leq \frac{b_2}{b_1} \leq a_1 \frac{\cos \frac{(\beta - \alpha) \pi}{2}}{\left \cos \frac{(\beta + \alpha) \pi}{2} \right },$

Model VII: $\mu = \beta, \quad \gamma = 2\beta$
$\left(1 + a_1 {}_0D_t^\alpha + a_2 {}_0D_t^\beta + a_3 {}_0D_t^{2\beta}\right) \sigma(t) = \left(b_1 {}_0D_t^\beta + b_2 {}_0D_t^{2\beta}\right) \varepsilon(t),$
$0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1, \quad \frac{1}{2} \leq \beta \leq \frac{1 + \alpha}{2},$
$\frac{a_3}{a_1} \leq \frac{b_2}{b_1} \leq a_2 \frac{1}{\left \cos(\beta \pi) \right }$

Model VIII: $\mu = \beta = \alpha, \quad \gamma = 2\alpha$
$(1 + \bar{a}_{10}D_t^\alpha + \bar{a}_{20}D_t^{2\alpha})\sigma(t) = (b_{10}D_t^\alpha + b_{20}D_t^{2\alpha})\varepsilon(t),$
$0 \leq \alpha \leq \beta \leq \mu \leq 1, \quad \frac{1}{2} \leq \beta \leq 1 - (\mu - \alpha),$
$\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1, \quad \frac{\bar{a}_2}{\bar{a}_1} \leq \frac{b_2}{b_1} \leq \bar{a}_1 \frac{1}{ \cos(\alpha\pi) }.$

Svaki od ovih osam modela ima šanse da bude pogodniji od ostalih za izabrani viskoelastični materijal. Više detalja o ovoj problematici može se naći [52], [53], [54]. Prethodne tabele predstavljaju jedan od osnovnih doprinosa ove doktorske teze.

Na kraju ove sekcije napominje se da su rezultati eksperimenata tipa puzanja ili relaksacije napona neophodni za prepoznavanje koji od navedenih modela najbolje opisuje izabrani materijal. Napominje da se može postaviti i problem poredjenja količine disipirane energije za dva različita viskoelastična elementa za isti tip seizmičke pobude, ali taj problem prevazilazi okvire ove teze.

2.4 O metodama rešavanja frakcionih diferencijalnih jednačina i nalaženja optimalnih rešenja

Obične frakcione diferencijalne jednačine se mogu rešavati pomoću Laplasovi transformacija, Grunvald-Letnikovom aproksimacijom a od 2004. godine i svodjenjem na sistem običnih diferencijalnih jednačina celobrojnog reda. Ova poslednja metoda predložena od strane Atanackovića i Stankovića se vrlo lako vezuje za probleme nalaženja optimalnih rešenja jer ulazi u okvir primene Principa Maksimuma Pontrijagina, videti [74].

2.4.1 Ekspanziona formula Atanackovića i Stankovića

Frakcioni levi Riman-Ljuvilov izvod funkcije proizvoljnog realnog reda se može izraziti pomoću same funkcije, njenog prvog izvoda i momenata te funkcije upotrebom ekspanzione

formule Atanackovića i Stankovića, dalje ASEF, videti [5], [6], [7], na sledeći način

$$\begin{aligned} {}_0D_t^\alpha z(t) = z^{(\alpha)}(t) &= A(\alpha, N) t^{-\alpha} z(t) + B(\alpha, N) \frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} z^{(1)}(t) \\ &+ \sum_{j=2}^N \frac{C_j(\alpha)}{t^{j+\alpha-1}} m_{z,j-2}(t), \quad 0 < \alpha \leq 1, \end{aligned} \quad (2.16)$$

gde koeficijenti u izrazu imaju sledeći oblik

$$\begin{aligned} A(\alpha, N) &= \frac{\Gamma(\alpha + N) \sin(\alpha\pi)}{\Gamma(N) \pi\alpha}, \quad B(\alpha, N) = \frac{\Gamma(N + \alpha)}{\Gamma(N + 1) \Gamma(\alpha)}, \\ C_j(\alpha) &= \frac{\Gamma(j + \alpha - 1)}{\Gamma(2 - \alpha) \Gamma(\alpha - 1) (j - 2)!}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

dok se momenti funkcije $z(t)$ definišu izrazom

$$m_{z,j-2}(t) = \int_0^t t^{j-2} z(\tau) d\tau. \quad (2.18)$$

U vezi sa ASEF se može staviti nekoliko napomena:

- ako se izabere veća vrednost N veća je tačnost aproksimacije,
- član $B(\alpha, N)$ isčezava kada $N \rightarrow \infty$, ali ovaj član ne treba zanemariti pri numeričkoj analizi,
- integrali koji predstavljaju momente mogu se predstaviti i u obliku sistema diferencijalnih jednačina prvog reda

$$m_{z,j-2}^{(1)}(t) = t^{j-2} z(\tau), \quad (2.19)$$

tako da se sistemi diferencijalnih jednačina sa frakcionim izvodima mogu rešavati metodama za obične diferencijalne jednačine celobrojnog reda. Za primenu ASEF u problemima optimalnog upravljanja videti [33] i [74].

2.4.2 Pontrjaginov princip maksimuma - određivanje neophodnih uslova optimalnosti

Princip maksimuma L.S. Pontrjagina predstavlja veoma uopšten pristup za određivanje neophodnih uslova optimalnosti u problemima optimalnog upravljanja. U knjigama [3] i [71] data je detaljna teorijska analiza principa maksimuma. Ovde je prikazan kratak

sažetak principa maksimuma kao priprema za rešavanje problema optimalnog upravljanja koji su predmet ove teze.

Neka se dinamički sistem ponaša saglasno sa sistemom diferencijalnih jednačina

$$x_i^{(1)}(t) = f_i(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m), \quad (i = 1, \dots, n), \quad (2.20)$$

uz zadate početne uslove

$$x_i(0) = \alpha_i, \quad (i = 1, \dots, n), \quad (2.21)$$

na zadatom vremenskom intervalu $0 \leq t \leq T$. Kao zadatak optimalnog upravljanja potrebno je odrediti minimalnu ili maksimalnu vrednost kriterijuma optimalnosti zadanog u obliku integrala

$$I = \int_0^T F(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) dt, \quad (2.22)$$

uz ograničenja data u obliku sistema diferencijalnih jednačina (2.20) i uslova (2.21), gde se dodatno pretpostavlja da komponente vektora upravljanja $u(t)$ mogu biti stešnjene ograničenjima $u \in \Omega = [u_{\min}, u_{\max}]$, gde u_{\min} i u_{\max} stoje za donju i gornju granicu dopustivih vrednosti funkcije upravljanja. Ove granice su određene performansama tehničkih uređaja kojima se realizuje upravljačka funkcija.

Osnovna ideja principa maksimuma je da se u razmatranje uvede nova funkcija Hamiltonijan (Hamiltonova funkcija ili funkcija Pontrjagina)

$$H = H(t, x_i, p_i, u), \quad (i = 1, \dots, n),$$

gde su $p_i(t)$ impulsi odnosno konjugovane promenljive. Optimalna svojstva Hamiltonijana H po vektoru upravljanja se uzimaju kao osnovni kriterijum za nalaženje optimalnih uslova problema optimalnog upravljanja koji je formulisan jednačinama (2.20) - (2.22). Princip maksimuma glasi: ako je vektor upravljanja u optimalan, tj. obezbeđuje maksimum (minimum) kriterijuma optimalnosti I , tada je Hamiltonova funkcija H maksimalna (minimalna) u odnosu na vektore upravljanja u u dozvoljenom skupu upravljanja Ω . Prema tome optimalno upravljanje na intervalu $t \in [0, T]$ se određuje iz uslova

$$\min_{u \in \Omega} H(t, x_i, p_i, u), \quad (i = 1, \dots, n), \quad \Omega = [u_{\min}, u_{\max}] \text{ za svako } t, \quad 0 \leq t \leq T,$$

pri čemu funkcije stanja $x_i(t)$ i impulsi $p_i(t)$ treba da zadovolje neophodne uslove ekstremuma date u kanonskoj formi:

$$x_i^{(1)}(t) = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad p_i^{(1)}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad (i = 1, \dots, n).$$

Ovaj problem treba rešavati zajedno sa početnim uslovima (2.21) i prirodnim graničnim uslovima koji za slučaj da promenljive stanja u terminalnom trenutku $x_i(T)$ nisu zadate glase

$$p_i(T) = 0, \quad (i = 1, \dots, n),$$

dok se za opštije forme terminalnih uslova ili drugačije formulacije problema optimalnog upravljanja primenjuju postupci iz već pomenutih referenci. Pored toga u daljim razmatranjima biće dopuštena mogućnost da komponente vektora upravljanja $u(t)$ budu delimično glatke funkcije, tj. da imaju prekide - "skokove" u konačnom broju tačaka u zdatom intervalu.

2.4.3 O nalaženju optimalnih rešenja metodom sukcesivnih aproksimacija

Sedamdesetih godina prošloga veka Krilov i Černousko su predložili metod sukcesivnih aproksimacija kao numeričku tehniku za rešavanje nelinearnih problema sa ograničenjima, [37]. Algoritam metode nalaženja minimuma kriterijuma optimalnosti se sastoji iz nekoliko iteracija sledećeg oblika:

I) pretpostavi se početna vrednost upravljanja $u^0 = u^0(t)$ iz dopustivog skupa upravljanja $u \in \Omega = [u_{\min}, u_{\max}]$ za $t \in [0, T]$, a na osnovu nekih fizičkih razmatranja vezanih za pretpostavljeni problem,

II) integracijom udesno od $t = 0$ do $t = T$, rešava se Košijev problem za promenljive stanja sa zdatim početnim uslovima

$$x_i^{(1)}(t) = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad x_i(0) = 0, \quad (i = 1, \dots, n),$$

i pretpostavljenim upravljanjem $u^0 = u^0(t)$ sa ciljem da se dobije prva aproksimacija optimalne trajektorije $x^0 = x^0(t)$,

III) izračunava se vrednost kriterijuma optimalnosti I^0 koja odgovara početnoj aproksimaciji $u^0(t)$ i $x^0(t)$,

IV) zatim se integracijom unazad od $t = T$ do $t = 0$, sa poznatim funkcijama $u^0(t)$ i

$x^0(t)$ rešava Košijev problem za konjugovane promenljive i prirodne granične uslove

$$\begin{aligned} p_i^{(1)}(t) &= -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad (i = 1, \dots, n), \\ p_i(T) &= 0, \quad (i = 1, \dots, n), \end{aligned}$$

da bi se odredili impulsi $p^0 = p^0(t)$ na intervalu $[0, T]$ koji odgovaraju prvoj aproksimaciji,

V) U sledećoj iteraciji se iz uslova

$$H(x^0, p^0, u^1) = \min_{u \in \Omega} H(x^0, p^0, u^1) \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad 0 \leq t \leq T,$$

odredi novo upravljanje $u^1 = u^1(t)$ i ispita razlika između u^1 i u^0 ,

VI) ako je ta razlika dovoljno mala postupak je završen a ako nije u^1 se proglašava za u^0 i ciklus se ponavlja od koraka II.

U svakoj aproksimaciji prati se i vrednost kriterijuma optimalnosti.

Ako proces sukcesivnih aproksimacija konvergira, posle izvesnog broja ciklusa m , razlika između dve susedne vrednosti u^k i u^{k-1} , gde je $k = 1, 2, \dots, m$ će postati manja od unapred propisane vrednosti, što znači da će rešenje $H(x^0, p^0, u^0)$ zadovoljavati Pontrjaginov princip maksimuma. Ako se ta razlika povećava treba prekinuti ciklus i krenuti sa novim oblikom za u^0 . Isto važi i ako I^k postane veće od I^{k-1} .

3

Postavka problema optimalnog upravljanja

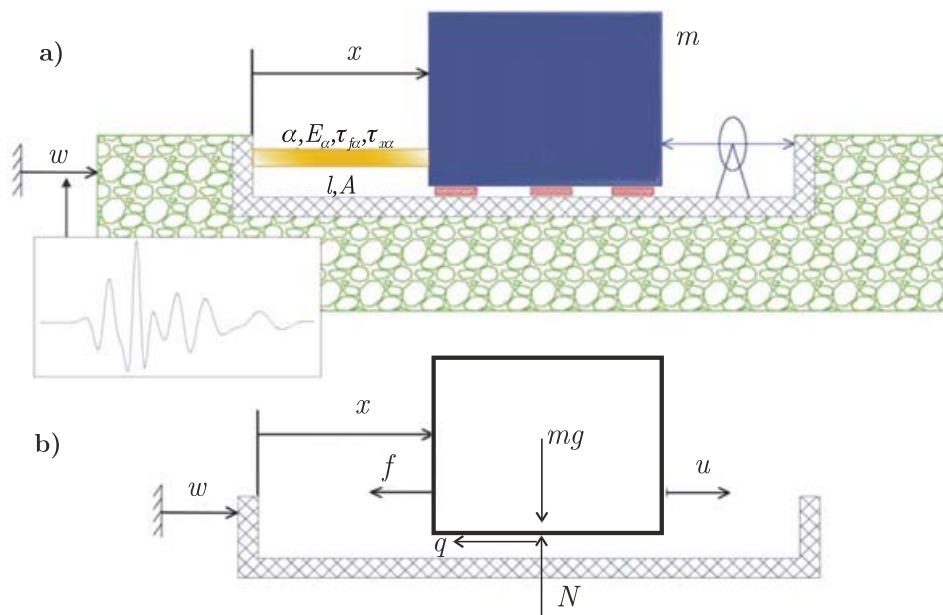
Posmatra se sistem od dva kruta bloka pri čemu je kretanje donjeg, baznog bloka - temelja (platforme, substrukture) - poznato, dok kretanje gornjeg bloka koji ima ulogu superstrukture, ograničava pasivni prigušivač o obliku viskoelastičnog štapa, Slika 3a. Na kretanje superstrukture može da utiče aktivni uređaj dejstvom koje ima ulogu upravljačke sile. Ova teza se ne bavi strukturom i principom rada ovog aktivnog uređaja. Više detalja o aktivnim uređajima za seizmičku zaštitu može se naći u [15], [24] i [63]. U zoni kontakta između dva bloka može da se pojavi sila trenja koja se suprotstavlja klizanju jednog bloka po drugom i ima ulogu pasivnog frikcionog prigušivača. Slika 3b prikazuje sistem oslobođen od veza. Analizira se samo kretanje u horizontalnom pravcu, tako da je vertikalna reakcija veze N jednaka težini gornjeg bloka mg . Neka je masa gornjeg bloka m . Saglasno osnovnoj aksiomi dinamike i principu određenosti Njutn-Laplase kretanje gornjeg bloka opisuje sledeći Košijev problem

$$m(w^{(2)} + x^{(2)}) = -f - q - u, \quad (3.1)$$

$$x(0) = 0, \quad x^{(1)}(0) = 0, \quad f(0) = 0, \quad u(0) = 0, \quad (3.2)$$

gde je sa w označeno pomeranje donjeg bloka koji se pomera zajedno sa tlom tokom trajanja zemljotresa, x je relativno pomeranje superstrukture u odnosu na temelj, dok f , q i u predstavljaju silu u viskoelastičnom štapi, silu trenja i silu u upravljačkom

uređaju respektivno. Sve pomenute veličine su vremenski zavisne funkcije. Oznaka $(\cdot)^{(k)} = d^k(\cdot)/dt^k$ stoji za k -ti izvod funkcije (\cdot) po vremenu t .



Slika 3. Sistem koji se razmatra (a) i blok oslobodjen veza (free body diagram)

Kao što je nagovešteno za model viskoelastičnog prigušivača koristi se štapić dužine l , površine poprečnog preseka A , čija se uniaksijalna i izotermna deformacija meri koordinatom x . Štapić je napravljen od viskoelastičnog materijala. U okviru ove teze posmatraće se tri linearne konstitutivne relacije iskazane u obliku vremenske zavisnosti sile $f(t)$ i relativnog pomeranja $x(t)$. Ideja je da se ispita uticaj izbora viskoelastičnog materijala na ponašanje superstrukture pri seizmičkom dejstvu.

Kao prvi model ispitaće se standardno linearno viskoelastično telo KZM

$$f + \tau_f \cdot {}_0 D_t^1 f = \frac{EA}{l} (x + \tau_x \cdot {}_0 D_t^1 x), \quad (3.3)$$

gde je E modul elastičnosti, a τ_f i τ_x su relaksacione konstante dimenzije $[s]$, koje zadovoljavaju ograničenja koja diktira drugi zakon termodinamike

$$\tau_f > 0, \quad \tau_x > \tau_f. \quad (3.4)$$

Ovaj model se veoma često sreće u literaturi.

Za drugi model uzima se standardno frakciono linearno viskoelastično telo FKZM

$$f + \tau_{f\alpha} {}_0D_t^\alpha f = \frac{EA}{l} (x + \tau_{x\alpha} {}_0D_t^\alpha x) \quad (3.5)$$

gde je $\alpha \in (0, 1]$ realan broj, E_α je modul elastičnosti, a $\tau_{f\alpha}$ i $\tau_{x\alpha}$ su konstante relaksacije dimenzije $[s]^\alpha$.

Najzad ispitaće se ponašanje sistema za slučaj da se viskoelastičan element ponaša saglasno FBM

$$\left(1 + a_1 {}_0D_t^\alpha + a_2 {}_0D_t^\beta + a_3 {}_0D_t^{\alpha+\beta}\right) f = \frac{A}{l} (b_1 {}_0D_t^\mu + b_2 {}_0D_t^{\mu+\alpha}) x, \quad (3.6)$$

$$0 \leq \alpha \leq \beta \leq \mu \leq 1, \quad \alpha + \beta \geq 1, \quad (3.7)$$

$$\frac{a_3 \left| \sin \frac{(\mu-\beta-\alpha)\pi}{2} \right|}{a_2 \sin \frac{(\mu-\beta+\alpha)\pi}{2}} \leq \frac{b_2}{b_1} \leq a_1 \frac{\cos \frac{(\mu-\alpha)\pi}{2}}{\left| \cos \frac{(\mu+\alpha)\pi}{2} \right|}.$$

gde su parametri modela označeni sa $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 > 0$, $\alpha, \beta, \mu \in [0, 1]$, sa $\alpha \leq \beta$ i $\gamma, \nu \in [1, 2]$, dok ${}_0D_t^\xi$ označava operator Riman-Ljuvilovog frakcionog izvoda reda $\xi \in [n, n+1]$, $n \in \mathbb{N}_0$. Ovaj model predstavlja Model III iz gornje analize.

Što se tiče frikcionog prigušivača koristiće se dva modela sile suvog trenja klizanja.

Kao prvi model koristiće se Kulonov zakon dat u obliku funkcije koja uzima vrednosti na skupu (tj. u obliku neglatke viševrednosne funkcije)

$$q \in \mu_T N \operatorname{Sgn}(x^{(1)}), \quad (3.8)$$

gde je

$$\operatorname{Sgn}(x^{(1)}) = \begin{cases} 1, & x^{(1)} > 0 \\ [-1, 1], & x^{(1)} = 0 \\ -1, & x^{(1)} < 0 \end{cases}.$$

Kao drugi model trenja koristiće se regularizovani Kulonov model zadat u obliku glatke neprekidne zavisnosti sile trenja q od relativne brzine $x^{(1)}$

$$q = \mu_T N \tanh(kx^{(1)}) \quad (3.9)$$

prikazane u [4]. Veličine μ_T i N stoje za koeficijent trenja i normalnu kontaktnu reakciju veze, dok je k koeficijent koji određuje brzinu promene tanh funkcije.

Seizmičko dejstvo se uzima u obliku tri tipa pobude.

Kao prvi model zemljotresne pobude uzima se vremenska zavisnost ubrzanja tla od vremena u obliku sinusoide (v. [60])

$$w^{(2)}(t) = -e^{-a_g t} u_0 \Omega^2 \sin(\Omega t) \quad (3.10)$$

gde su w_0 , κ i Ω parametri modela.

Za drugi model pobude koristi se Rikerova talasna funkcija pomeranja tla $w(t)$ (videti [2])

$$w(t) = w_0 \sum_{i=1}^l (2w_i(t) - 1)e^{-w_i(t)}, \quad w_i(t) = \left[\frac{\pi(t - t_{si})}{t_{pi}} \right]^2, \quad (3.11)$$

gde t_{si} i t_{pi} predstavljaju unapred zadate vremenske trenutke koji određuju oblik talasne funkcije $w(t)$, dok je w_0 konstanta.

Kao treći model koristiće se stvarni vremenski zapis akcelerograma zemljotresa El Centro iz 1940 godine (ili 1940 Imperial Valley zemljotres) dat u obliku interpolirane glatke funkcije. Interpolirana glatka funkcija je dobijena korišćenjem matematičkog softvera Wolfram Mathematica 11.

Sa ovakvom pripremom za različite kombinacije koje nastaju izborom tipa viskoelastičnog prigušivača, modela trenja i seizmičkog dejstva, uz upravljanje koje je stešnjeno sledećim ograničenjem $u = u(t) \in [u_{\min}, u_{\max}]$ će se u zadatom vremenskom intervalu $[0, T]$ minimizirati kriterijum optimalnosti, zadat u obliku funkcionala koji je motivisan teorijom linearnih regulatora

$$I = \int_0^T (\alpha_1 x^2 + \alpha_2 (x^{(1)})^2 + \alpha_3 u^2) dt \rightarrow \min, \quad (3.12)$$

gde su α_1 , α_2 i α_3 usvojeni težinski koeficijenti, a pod pretpostavkom da je opseg vrednosti upravljačke sile u unapred zadat i da se može ostvariti aktivnim uređajem. Ovim kriterijumom u zadatom vremenskom intervalu minimiziraju se relativno pomeranje, relativna brzina gornjeg bloka i upravljačko dejstvo.

U okviru pripreme za rešavanje problema, uvode se sledeće bezdimenzijske veličine:

$$\begin{aligned}
\bar{t} &= t\sqrt{\frac{EA}{ml}}, \quad \bar{x} = \frac{xEA}{mgl}, \quad \bar{u}_0 = \frac{u_0EA}{mgl}, \quad \bar{\Omega} = \Omega\sqrt{\frac{ml}{EA}}, \quad \bar{U} = \bar{u}_0\bar{\Omega}^2, \\
\bar{f} &= \frac{f}{mg}, \quad \bar{q} = \frac{q}{mg}, \quad \bar{u} = \frac{u}{mg}, \quad \bar{N} = \frac{N}{mg}, \quad \bar{T} = T\sqrt{\frac{EA}{ml}}, \\
\bar{w}^{(2)} &= \frac{\bar{w}^{(2)}}{g}, \quad \bar{a}_g = a_g\sqrt{\frac{ml}{EA}}, \quad \bar{k} = kg\sqrt{\frac{ml}{EA}}, \quad \bar{\tau}_f = \tau_f\left(\frac{EA}{ml}\right)^{1/2}, \quad (3.13)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\tau}_x &= \tau_x\left(\frac{EA}{ml}\right)^{1/2}, \quad \bar{\tau}_{f\alpha} = \tau_{f\alpha}\left(\frac{EA}{ml}\right)^{\alpha/2}, \quad \bar{\tau}_{x\alpha} = \tau_{x\alpha}\left(\frac{EA}{ml}\right)^{\alpha/2}, \\
\bar{a}_1 &= a_1\left(\frac{EA}{ml}\right)^{\alpha/2}, \quad \bar{a}_2 = a_2\left(\frac{EA}{ml}\right)^{\beta/2}, \quad \bar{a}_3 = a_3\left(\frac{EA}{ml}\right)^{\gamma/2}, \\
\bar{b}_1 &= \frac{b_1}{E}\left(\frac{EA}{ml}\right)^{\mu/2}, \quad \bar{b}_2 = \frac{b_2}{E}\left(\frac{EA}{ml}\right)^{\mu/2}, \quad \bar{\alpha}_1 = \alpha_1g^2\left(\frac{ml}{EA}\right)^{5/2}, \\
\bar{\alpha}_2 &= \alpha_2g^2\left(\frac{ml}{EA}\right)^{3/2}, \quad \bar{\alpha}_3 = \alpha_3g^2m^{3/2}\left(\frac{l}{EA}\right)^{1/2},
\end{aligned}$$

pomoću kojih će se sve gore definisane jednačine prikazati u bezdimenzijskom obliku pri čemu se crtica iznad oznake bezdimenzijske veličine može izostaviti.

Dakle, centralni zadatak ove doktorske teze je sledeći problem optimalnog upravljanja: naći funkcije relativnog pomeranja $x = x(t)$ i upravljanja $u = u(t) \in [u_{\min}, u_{\max}]$, koje će tokom kretanja minimizirati kriterijum optimalnosti

$$I = \int_0^T (\alpha_1 x^2 + \alpha_2 (x^{(1)})^2 + \alpha_3 u^2) dt \rightarrow \min . , \quad (3.14)$$

uz diferencijalna ograničenja

$$w^{(2)} + x^{(2)} = -f - q - u, \quad (3.15)$$

i početne uslove

$$x(0) = 0, \quad x^{(1)}(0) = 0, \quad f(0) = 0, \quad u(0) = 0, \quad (3.16)$$

gde se za vezu f i x bira jedna od konstitutivnih jednačina (3.3), (3.5) i (3.6) koje su bezdimenzijskoj formi date sa

$$f + \tau_{f0} D_t^1 f = x + \tau_{x0} D_t^1 x, \quad (3.17)$$

$$f + \tau_{f\alpha} {}_0D_t^\alpha f = x + \tau_{x\alpha} {}_0D_t^\alpha x \quad (3.18)$$

što odgovora KZM i FKZM tipu pasivnog viskoelastičnog prigušivača respektivno, pri čemu se sila trenja može izabrati kao multifunkcija

$$q \in \mu_T \operatorname{Sgn}(x^{(1)}), \quad (3.19)$$

ili obična funkcija relativne brzine klizanja

$$q = \mu_T \tanh(kx^{(1)}). \quad (3.20)$$

Seizmička pobuda u bezdimenzijskoj formi se može odabrati kao opadajuća sinusoida:

$$w^{(2)}(t) = Ue^{-a_g t} \sin(\Omega t), \quad (3.21)$$

ili kao Rikerova funkcija

$$w(t) = w_0 \sum_{i=1}^l (2w_i(t) - 1)e^{-w_i(t)}, \quad w_i(t) = \left[\frac{\pi(t - t_{si})}{t_{pi}} \right]^2, \quad (3.22)$$

ili u obliku interpolirane glatke funkcije akcelerograma zemljotresa El Centro skalirane sa g .

Ako se tipovi viskoelastičnog prigušivača označe slovima KZM sa A, a FKZM sa B, model trenja u obliku multifunkcije sa I a obične funkcije sa II i ako se seizmička dejstva označe opadajuća sinusoida sa 1, Rikerova funkcija sa 2 a funkcija akcelerograma zemljotresa El Centro sa 3 onda se relativno jednostavnim oznakama

Slovo_RimskiBroj_ArapskiBroj

moгу označiti kombinacije koje proizilaza iz gornjih varijeteta. Tako na primer B_II_2 predstavlja problem u kome se za viskoelastični element koristi frakcioni Kelvin-Zenerov model, regularizovani Kulonov zakon i seizmička pobuda u obliku Rikerove funkcije. Napominje se da ovde sve moguće kombinacije od slova A i B i rimskog I i II i brojeva 1,2 i 3 mogu biti od interesa za praktičnu primenu. U okvirima ove teze će se prikazati samo neke od njih. Medjutim da bi se procenio efekat upravljanja prvo će se ispitati samo dinamika problema bez upotrebe aktivnog uredjaja. Ta razmatranja izdvojena su u poseban deo, medjutim rezultati numeričkih simulacija će se prikazati zajedno sa rešenjima odgovarajućih problema optimalnog upravljanja.

4

Kretanje bez upravljanja

Zadatak ovog dela je da se utvrdi odziv (disipacija energije) izabranih pasivnih prigušivača na različite seizmičke pobude, tako da će se analizirati kretanje superstrukture u prisustvu frikcionog i viskoelastičnog prigušivača bez mogućnosti aktiviranja upravljačkog uređaja, tj. za $u(t) = 0$, $t \in [0, T]$. Ideja je da se vrednost funkcionala

$$I^0 = \int_0^T (\alpha_1 x^2 + \alpha_2 (x^{(1)})^2) dt, \quad (4.1)$$

kasnije uporede sa (3.14) te da se iz priraštaja

$$\Delta = \frac{100 \cdot (I^0 - I^*)}{I^0}, \quad (4.2)$$

za izabranu kombinaciju viskoelastičnog elementa, modela trenja i seizmičke pobude proceni efekat optimizacije (dat relativnom merom u %), gde je sa I^* označen minimum funkcionala (3.14).

Kako bi se odredila vrednost kriterijuma optimalnosti (4.1) neophodno je odrediti funkcije relativnog pomeranja $x = x(t)$ i relativnu brzinu $x^{(1)}(t)$ iz početnog problema (3.15), (3.16) koji za $u(t) = 0$ postaje

$$x^{(2)} = -w^{(2)} - f - q, \quad x(0) = 0, \quad x^{(1)}(0) = 0, \quad f(0) = 0, \quad (4.3)$$

gde se za seizmičku pobudu $w^{(2)}$ koriste (3.22), (3.21) kao i El Centro zapis u vidu interpolirane glatke funkcije u bezdimenzijskoj formi, za silu u viskoelastičnom prigušivaču $f(t)$ se koriste konstitutivne jednačine u bezdimenzijskoj formi (3.17), (3.18) i (??), dok se sila trenja $q(t)$ uzima u obliku glatke i neglatke viševrednosne funkcije (3.20), (3.19).

4.1 Slučaj A_I: Kelvin-Zenerov model i regularizovano trenje

Kretanje bez upravljanja $u(t) = 0$ sa pasivnim prigušivačima Kelvin-Zenerovog tipa (??) i regularizovanim Kulonovim modelom trenja (3.20) se nakon uvođenja novih promenljivih

$$x_1 = x, \quad x_2 = x^{(1)}, \quad x_3 = f, \quad x_4 = I_0 \quad (4.4)$$

može predstaviti u obliku sistema diferencijalnih jednačina prvog reda

$$x_1^{(1)} = x_2, \quad x_2^{(1)} = -x_3 - w^{(2)} - \mu_T \tanh(kx_2), \quad (4.5)$$

$$x_3^{(1)} = \frac{1}{\tau_f}(x_1 - x_3 + \tau_x x_2), \quad x_4^{(1)} = \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2$$

koje treba rešavati zajedno sa početnim uslovima

$$x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 0, \quad x_3(0) = 0, \quad x_4(0) = 0. \quad (4.6)$$

Dobijeni sistem se numerički integrirani standardnim tehnikama za usvojene vrednosti parametara $\tau_f, \tau_x, \mu_T, k, \alpha_1, \alpha_2$ i izabranu funkciju seizmičke pobude $w^{(2)}$, sa ciljem da se odredi $x_4(T)$.

Napominje se da se ovakav dinamički model relativno jednostavno implementira ali da ima suštinski nedostatak da je za relativnu brzinu jednaku nuli i sila trenja jednaka nuli, tako da ne uključuje prelaze iz faze klizanja u fazu priljublivanja i obrnuto. Zato se razmatra i sledeći problem.

4.2 Slučaj A_II: Kelvin-Zenerov model i trenje kao multifunkcija

Kretanje bez upravljanja $u(t) = 0$ sa pasivnim prigušivačima Kelvin-Zenerovog tipa (??) i neglatkim Kulonovim modelom trenja (3.19). Sada se umesto (4.5) sistem ponaša po sledećem modelu

$$x_1^{(1)} = x_2, \quad x_2^{(1)} = -x_3 - w^{(2)} - q, \quad x_3^{(1)} = \frac{1}{\tau_f}(x_1 - x_3 + \tau_x x_2), \quad x_4^{(1)} = \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2. \quad (4.7)$$

za iste početne uslove (4.6). Primećuje se da ovaj sistem dozvoljava fazu priljublivanja kada su i relativna brzina i relativno ubrzanje bloka jednaki nuli $x_1^{(1)}(t) = 0$, $x_2^{(1)}(t) = 0$ na nekom intervalu vremena $[0, t_1]$. Na tom intervalu vremena se viskoelastični element još uvek nalazi u virginalnom stanju. Naime, pošto prinudna sila kreće od nule i sila trenja kreće od nule to na intervalu $[0, t_1]$ važi $q = -w^{(2)}$ što obezbeđuje uslov priljublivanja. Do relativnog pomeranja superstrukture - bloka u odnosu na substrukturu - bazu dolazi kada prinudna sila postane veća od granične sile trenja tj. $w^{(2)} > |q| = \mu_T$, u ovom slučaju. Neka se to desi u trenutku t_1 , koji odgovara prvom prelasku iz stanja mirovanja u fazu klizanja, a praktično početnom trenutku kretanja. Do ovog trenutka sila trenja je nepoznata reakcija veze jer sprečava kretanje a kao funkcija vremena je jednaka ubrzanju tla, $q(t) = -w^{(2)}(t)$. Nakon dostizanja granične vrednosti sile trenja počinje klizanje u levu ili desnu stranu, a sila trenja dobija ulogu zadate otporne sile čiji smer zavisi od vrednosti relativne brzine $x^{(1)}$, videti [65].

Nakon trenutka t_1 počinje deformacija viskoelastičnog elementa, sila trenja ima konstantnu vrednost, tako da posle izvesnog vremena relativna brzina $x^{(1)}$ ponovo može postati nula što odgovara ili promeni smeru kretanja ili opet ulasku u fazu priljublivanja. Neka se to desi u trenutku t_2 , znači $x^{(1)}(t_2) = 0$. Da bi superstruktura ostala u fazi relativnog mirovanja - priljublivanja - pored uslova $x^{(1)}(t_2) = 0$, neophodno je i da je u trenutku t_2 horizontalna projekcija rezultante spoljašnjih sila bude nula tj. da važi

$$x^{(2)}(t_2) = -f(t_2) - q(t_2) - w^{(2)}(t_2) = 0,$$

gde je $q \leq |\mu_T|$. Ako je $q < |\mu_T|$ sila trenja opet postaje reakcija veze i menja se kao funkcija vremena sve dok ne dostigne graničnu vrednost. Ovo stanje može biti privremenog ili trajnog karaktera u zavisnosti od intenziteta seizmičke pobude i intenziteta sile u viskoelastičnom štapu koje takođe menjaju svoje vrednosti tokom vremena. U viskoelastičnom štapu posle t_2 dolazi do procesa relaksacije. Uslov za ponovni prelazak u fazu klizanja je da je zbir prinudne sile tj. prenosne sile inercije nastale od zemljotresne pobude, i sile u viskoelastičnom štapu po apsolutnoj vrednosti bude veći od granične sile trenja. Da bi se odredili neophodni uslovi da superstruktura u nekom trenutku t_3 nakon trenutnog zaustavljanja u t_2 predje u fazu klizanja u drugom smeru neophodno je definisati Kulonov zakon u funkciji relativnog ubrzanja. To je ostvarivo, jer relativna brzina i

relativno ubrzanje imaju isti znak pri prelasku iz stanja mirovanja kada je $x^{(1)} = 0$ u fazu klizanja kada je $x^{(1)} \neq 0$ (videti [57], [39]). Kulonov zakon zapisan na nivou relativnih brzina i ubrzanja glasi:

$$\left\{ \begin{array}{ll} q = \mu_T \quad \text{za} \quad x^{(1)} > 0, & q = \mu_T \quad \text{za} \quad x^{(2)} > 0, \\ q \in [-\mu_T, \mu_T] \quad \text{za} \quad x^{(1)} = 0, & \Rightarrow \quad q \in [-\mu_T, \mu_T] \quad \text{za} \quad x^{(2)} = 0, \\ q = -\mu_T \quad \text{za} \quad x^{(1)} < 0 & q = -\mu_T \quad \text{za} \quad x^{(2)} < 0 \end{array} \right\}$$

odakle sledi da će iz zaustavnog položaja u trenutku t_3 doći do kretanja u desno ako važi uslov $x^{(2)}(t_3) > 0$, tj kada je

$$-w^{(2)}(t_3) - f(t_3) - \mu_T > 0,$$

a do relativnog kretanja u levo ako važi uslov $x^{(2)}(t_3) < 0$, tj. kada je

$$-w^{(2)}(t_3) - f(t_3) + \mu_T < 0.$$

Ako ni jedan od prethodnih uslova nije ispunjen, sledi da blok ostaje u fazi relativnog mirovanja, relativno ubrzanje $x^{(2)}(t)$ je nula, pa sila trenja $q(t)$ postaje nepoznata reakcija veze koja se iz jednačine kretanja dobija kao

$$q(t) = -w^{(2)}(t) - f(t). \quad (4.8)$$

Ciklusi ovog tipa se mogu ponavljati nekoliko puta sve dok u fazi priljublivanja ne bude ispunjen uslov da sila trenja iz (4.8) po apsolutnoj vrednosti bude manja od svoje granične vrednosti.

Na kraju evo nekoliko napomena. Prvo, izbor sile trenja kao multifunkcije relativne brzine i prekidne funkcije vremena dozvoljava skokovite promene u fazi priljublivanja, videti [25] i [26]. Drugo, u ovoj sekciji viskoelastičan prigušivač se modelira lokalnim izvodima tako da nema uticaja memorijskih efekata. Ti efekti značajno usložnjavaju rešavanje problema, videti [74]. Naime, ako se posmatra kretanje bez upravljanja ali sa frakcionim viskoelastičnim prigušivačima tipa FKZM (3.18) ili FBM (3.6) onda problem postaje složeniji zbog činjenice da je frakcioni izvod nelokalni operator (2.3), tj. diferencijalno-integralni operator koji za određivanje promene u trenutku t zahteva poznavanje svih vrednosti veličine čiji se frakcioni izvod traži od početnog do trenutka t .

Praćenje tih vrednosti je prilično složeno u slučaju da se kretanje odvija po fazama u kojima sila trenja menja znak i svoju fizičku prirodu. Iz tog razloga se i radi pojednostavljenje regularizacijom neglatke funkcije o čemu će biti reči u sledećoj sekciji. Najzad, memorijski efekti se u izrazu za frakcioni izvod mogu uključiti preko momenata funkcije, videti (2.16), što će biti predmet naredne dve sekcije.

4.3 Slučaj B_I: frakcioni Kelvin-Zenerov model i regularizovano trenje

Neka se sila trenja modelira sa glatkom funkcijom relativne brzine (3.20), i neka se viskoelastični element modelira sa konstitutivnom jednačinom za frakcioni Kelvin-Zenerov model (3.18). Frakcioni izvodi u FKZM se mogu izraziti preko ekspanzione formule Atanackovića i Stankovića (2.16), tako da se dinamički problem nakon uvođenja novih promenljivih

$$x_1 = x, \quad x_2 = x^{(1)}, \quad x_3 = f, \quad x_{j+2} = m_{x,j-2}, \quad x_{N+j+1} = m_{f,j-2}, \quad j = 2, 3, \dots, N, \quad x_{2N+2} = I_0, \quad (4.9)$$

može predstaviti u pogodnoj formi u obliku sistema običnih diferencijalnih jednačina prvog reda

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= x_2, \quad x_2^{(1)} = -x_3 - w^{(2)} - \mu_T \tanh(kx_2), \\ x_3^{(1)} &= \frac{\Gamma(2-\alpha)}{B(\alpha, N)t^{1-\alpha}}(x_1 + \tau_{x\alpha}x_1t^{-\alpha}A(\alpha, N) + \tau_{x\alpha}x_2t^{1-\alpha}\frac{B(\alpha, N)}{\Gamma(2-\alpha)} \\ &\quad + \tau_{x\alpha} \sum_{j=2}^N \frac{C_j(\alpha)}{(j-2)!t^{j+\alpha-1}}x_{j+2} - \tau_{f\alpha}x_3t^{-\alpha}A(\alpha, N) \\ &\quad - \tau_{f\alpha} \sum_{j=2}^N \frac{C_j(\alpha)}{(j-2)!t^{j+\alpha-1}}x_{N+j+1} - x_3), \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$x_{j+2}^{(1)} = t^{j-2}x_1, \quad x_{N+j+1}^{(1)} = t^{j-2}x_3, \quad j = 2, 3, \dots, N,$$

$$x_{2N+2}^{(1)} = \alpha_1x_1^2 + \alpha_2x_2^2,$$

koji se numerički integrali zajedno sa početnim uslovima

$$\begin{aligned}
x_1(0) &= 0, & x_2(0) &= 0, & x_3(0) &= 0, \\
x_{j+2}(0) &= 0, & x_{N+j+1}(0) &= 0, & j &= 2, 3, \dots, N, \\
x_{2N+2}(0) &= 0,
\end{aligned} \tag{4.11}$$

za usvojene vrednosti parametara $\tau_{f\alpha}$, $\tau_{x\alpha}$, k , μ_T i N , i za izabranu funkciju seizmičke pobude $w^{(2)}$, da se nadje $x_{2N+2}(T)$.

4.4 Slučaj B_II: Frakcioni Kelvin-Zenerov model i trenje kao multifunkcija

U radovima [75] i proučen je problem B_II_1, ali sa Grunvald-Letnikovom formom frakcionog izvoda. Ovde će se koristiti ASEF pa se dobijeni oscilatorni problem svodi na klasičan sistem diferencijalnih jednačina sa prekidnim desnim stranama tipa Filipova, [39] i [31]. Dakle, uvedu se promenljive

$$x_1 = x, \quad x_2 = x^{(1)}, \quad x_3 = f, \quad x_{j+2} = m_{x,j-2}, \quad x_{N+j+1} = m_{f,j-2}, \quad j = 2, 3, \dots, N, \quad x_{2N+2} = I_0,$$

pa se diferencijalne jednačine kretanja sa frakcionim izvodima sile u viskoelastično štapu i relativnog pomeranja bloka mogu predstaviti u obliku sistema običnih diferencijalnih jednačina prvog reda sa multifunkcijom kao modelom suvog trenja na desnoj strani

$$\begin{aligned}
x_1^{(1)} &= x_2, \quad x_2^{(1)} = -x_3 - w^{(2)} - \mu_T \operatorname{Sgn}(x^{(1)}), \\
x_3^{(1)} &= \frac{\Gamma(2-\alpha)}{B(\alpha, N)t^{1-\alpha}}(x_1 + \tau_{x\alpha}x_1t^{-\alpha}A(\alpha, N) + \tau_{x\alpha}x_2t^{1-\alpha}\frac{B(\alpha, N)}{\Gamma(2-\alpha)} \\
&\quad + \tau_{x\alpha}\sum_{j=2}^N \frac{C_j(\alpha)}{(j-2)!t^{j+\alpha-1}}x_{j+2} - \tau_{f\alpha}x_3t^{-\alpha}A(\alpha, N) \\
&\quad - \tau_{f\alpha}\sum_{j=2}^N \frac{C_j(\alpha)}{(j-2)!t^{j+\alpha-1}}x_{N+j+1} - x_3), \\
x_{j+2}^{(1)} &= t^{j-2}x_1, \quad x_{N+j+1}^{(1)} = t^{j-2}x_3, \quad j = 2, 3, \dots, N, \\
x_{2N+2}^{(1)} &= \alpha_1x_1^2 + \alpha_2x_2^2,
\end{aligned}$$

koji se numerički integrali zajedno sa početnim uslovima

$$\begin{aligned}x_1(0) &= 0, x_2(0) = 0, x_3(0) = 0, \\x_{j+2}(0) &= 0, x_{N+j+1}(0) = 0, \quad j = 2, 3, \dots, N, \\x_{2N+2}(0) &= 0,\end{aligned}$$

za usvojene vrednosti parametara $\tau_{f\alpha}$, $\tau_{x\alpha}$, k , μ_T i N , i za izabranu funkciju seizmičke pobude $w^{(2)}$, da se nadje $x_{2N+2}(T)$. Kombinatorna analiza faza kretanja i prelaska između faza odvija se na isti način kao u slučaju A_II.

5

Rešavanje problema optimizacije

U ovom delu rešavaju se problemi optimalnog upravljanja sa regularizovanim modelom sile trenja, dakle traži se $u(t) \neq 0$, za $t \in [0, T]$ da bi izabrani kriterijum optimalnosti bio u minimumu. Taj model trenja je za dinamiku konstrukcija uobičajen videti npr. [43], pa će se zato koristiti i u modelu zadatka optimalnog upravljanja, videti na primer [46]. Motiv za to je da je ovaj tip problema optimalnog upravljanja relativno jednostavan za implementaciju sa obzirom na izabrani kriterijum optimalnosti. Naime, zadatak optimalnog upravljanja ovde ne uključuje terminalnu konfiguraciju u kojoj bi se na primer zahtevalo potpuno zaustavljanje superstrukture, već samo minimizaciju koja ima za cilj da umanja eventualnu štetu na superstrukturi.

Slučaj potpunog zaustavljanja može da se postigne izborom parametara pasivnih prigušivača i izborom opsega dejstva upravljačkog uređaja i da se dogodi unutar zadatog intervala $[0, T]$ na kome je postavljen problem optimizacije, ali nije predmet ove teze. Problem da regularizovani model Kulonovog trenja nije pogodan za fazu priljublivanja može se rešiti uvodjenjem Karnopovog modela trenja u problem na samom kraju procesa, kada se već relativna brzina bloka dovoljno smanji i to samo da bi se kretanje bloka potpuno zaustavilo. Vreme trajanja primene tog modela je relativno veoma kratko u odnosu na interval $[0, T]$. U krajnjoj liniji, ne samo trenje već i upravljanje može da zaustavi sistem posle zemljotresne pobude, videti [74] gde se MSA kombinuje sa Njutnovim metodom. U principu terminalna konfiguracija značajno usložnjava MSA videti [38] gde se MSA u slučaju da postoji terminalna konfiguracija kombinuje sa metodom kaznene funkcije.

5.1 Slučajevi A_I_1, 2, 3: Kelvin-Zenerov model za tri tipa pobude

Ova tri slučaja se razlikuju za prenosno ubrzanje bloka tj 3 tipa seizmičke pobude. Dakle zadatak je da se nadju funkcija relativnog pomeranja $x = x(t)$ i upravljanje $u = u(t) \in [u_{\min}, u_{\max}]$, koje će tokom kretanja minimizirati kriterijum optimalnosti (3.14), uz diferencijalna ograničenja koja proizilaze iz jednačine kretanja krutog bloka (3.15) sa modelom trenja (3.20), i početne uslove (3.16), gde je konstitutivna jednačina za opisivanje ponašanja viskoelastičnog prigušivača data za Kelvin-Zenerov model sa jednačinom (3.17).

Nakon uvođenja novih promenljivih (4.9), zadatak optimalnog upravljanja se može postaviti u standardnoj Lagranževoj formi: naći funkcije stanja $x_1(t)$ i $x_2(t)$ i upravljanja $u(t)$ tako da određeni integral

$$I = \int_0^T (\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \alpha_3 u^2) dt. \quad (5.1)$$

bude minimalan, gde su diferencijalne jednačine kretanja date u sledećem obliku

$$x_1^{(1)} = x_2, \quad x_2^{(1)} = -x_3 - w^{(2)} - \mu_T \tanh(kx_2) - u, \quad x_3^{(1)} = \frac{1}{\tau_f} (x_1 - x_3 + \tau_x x_2), \quad (5.2)$$

pri čemu je upravljanje stešnjeno ograničenjem

$$u_{\min} \leq u \leq u_{\max}$$

Početno stanje je

$$x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 0, \quad x_3(0) = 0, \quad u(0) = 0.$$

dok je terminalni trenutak T poznat.

Postavljeni problem će se rešavati primenom principa maksimuma L.S. Pontrjagina. U vidu pripreme za primenu ove procedure, gore postavljeni Lagranžev problem je pogodno predstaviti u formi Majerovog problema. Ako se uvede nova promenljiva $x_4(t)$ u sledećem obliku

$$x_4(t) = \int_0^t (\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \alpha_3 u^2) d\xi,$$

diferencijalne jednačine kretanja (5.2) postaju

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= x_2, \quad x_2^{(1)} = -x_3 - w^{(2)} - \mu_T \tanh(kx_2) - u, \\ x_3^{(1)} &= \frac{1}{\tau_f}(x_1 - x_3 + \tau_x x_2), \quad x_4^{(1)} = \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \alpha_3 u^2, \end{aligned} \quad (5.3)$$

dok kriterijum optimalnosti (5.1) prelazi u Majerovu formu

$$x_4(T) \rightarrow \min.$$

Početni uslovi biće

$$x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 0, \quad x_3(0) = 0, \quad x_4(0) = 0. \quad (5.4)$$

Hamiltonova funkcija je

$$\begin{aligned} H &= p_1 x_2 + p_2 (-x_3 - w^{(2)} - \mu_T \tanh(kx_2) - u) + p_3 \frac{1}{\tau_f} (x_1 - x_3 + \tau_x x_2) \\ &\quad + p_4 (\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \alpha_3 u^2), \end{aligned} \quad (5.5)$$

gde su $p_i = p_i(t)$, $i = 1, \dots, 4$, impulsi odnosno konjugovane promenljive. Kanonske jednačine odatle postaju

$$\begin{aligned} p_1^{(1)} &= -\frac{\partial H}{\partial x_1} = -\frac{1}{\tau_f} p_3 - 2\alpha_1 x_1 p_4, \\ p_2^{(1)} &= -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -p_1 + \mu_T k \frac{1}{\cosh^2(kx_2)} p_2 - \frac{\tau_x}{\tau_f} p_3 - 2\alpha_2 x_2 p_4, \\ p_3^{(1)} &= -\frac{\partial H}{\partial x_3} = p_2 + \frac{1}{\tau_f} p_3, \quad p_4^{(1)} = -\frac{\partial H}{\partial x_4} = 0, \end{aligned} \quad (5.6)$$

i treba ih rešavati zajedno sa prirodnim graničnim uslovima, koji za poznato T postaju

$$p_1(T) = 0, \quad p_2(T) = 0, \quad p_3(T) = 0, \quad p_4(T) = 1. \quad (5.7)$$

Optimalno upravljanje na intervalu $t \in [0, T]$ određujemo iz uslova

$$\min_{u \in \Omega} H(t, x_i, p_i, u), \quad (i = 1, \dots, 4), \quad \Omega = [u_{\min}, u_{\max}], \quad (5.8)$$

gde je H funkcija definisana izrazom (5.5). Ovaj važan tip upravljanja se u literaturi prepoznaje pod nazivima *upravljanje sa saturacijom ili kvazineprekidno upravljanje*. Naime,

kako se radi o problemu sa ograničenjima na komponente vektora upravljanja, pored kandidata za optimalno upravljanje

$$u^* = \frac{p_2}{2\alpha_3 p_4}$$

dobijenog iz uslova optimalnosti $\partial H/\partial u = 0$, u slučaju da dobijene vrednosti upravljanja u^* izlaze iz dopuštene oblasti $\Omega = [u_{\min}, u_{\max}]$, kao kandidati za optimalno upravljanje ostaju granične vrednosti upravljanja u_{\min} i u_{\max} , a optimalna strategija upravljanja se zasniva na uslovu (5.8). Ovaj uslov dovodi do sledeće strategije optimalnog upravljanja

$$u = \begin{cases} u_{\min}, & u^* < u_{\min} \\ u^*, & u_{\min} \leq u^* \leq u_{\max} \\ u_{\max}, & u^* > u_{\max} \end{cases}.$$

Nelinearni granični problem (5.3), (5.6), (5.4), (5.7) će se rešavati numerički primenom Krilov-Černousko metode sukcesivnih aproksimacija za usvojene vrednosti parametara τ_f , τ_x , μ_T , k i sve tri navedene funkcije seizmičke pobude $w^{(2)}$.

5.2 Slučajevi B_I_1, 2, 3: frakcioni Kelvin-Zenerov model za tri tipa pobude

Sada je inicijalni problem složeniji jer frakcioni izvodi ulaze u diferencijalne jednačine kretanja ali se primenom ASEF taj problem svodi na sistem običnih diferencijalnih jednačina. Dakle, treba naći funkcije relativnog pomeranja $x = x(t)$ i upravljanja $u = u(t) \in [u_{\min}, u_{\max}]$, koje će tokom kretanja minimizirati kriterijum optimalnosti (3.14), uz diferencijalna ograničenja koja proizilaze iz jednačine kretanja krutog bloka (3.15) sa modelom trenja (3.20), i početne uslove (3.16), gde je konstitutivna jednačina za opisivanje ponašanja viskoelastičnog prigušivača data za frakcioni Kelvin-Zenerov model sa jednačinom (3.18).

Nakon uvođenja promenljivih (4.4), kao i nove promenljive

$$x_{2N+2}(t) = \int_0^t (\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \alpha_3 u^2) d\xi, \quad (5.9)$$

uz primenu ekspanzije formule Atanackovića i Stankovića (2.16), gore definisani Lagranžev zadatak optimalnog upravljanja može se predstaviti u Majerovom obliku. Naime, ta formulacija glasi: naći funkcije stanja $x_1(t)$ i $x_2(t)$ i upravljanja $u(t)$, tako da kriterijum optimalnosti $x_{2N+2}(T)$ bude minimalan, a da pri tome budu zadovoljene diferencijalne jednačine kretanja

$$\begin{aligned}
x_1^{(1)} &= x_2, \quad x_2^{(1)} = -x_3 - w^{(2)} - \mu_T \tanh(kx_2) - u, \\
x_3^{(1)} &= \frac{\Gamma(2-\alpha)}{B(\alpha, N)t^{1-\alpha}\tau_{f\alpha}}(x_1 + \tau_{x\alpha}x_1t^{-\alpha}A(\alpha, N) + \tau_{x\alpha}x_2t^{1-\alpha}\frac{B(\alpha, N)}{\Gamma(2-\alpha)} \\
&\quad + \tau_{x\alpha}\sum_{j=2}^N \frac{C_j(\alpha)}{(j-2)!t^{j+\alpha-1}}x_{j+2} - \tau_{f\alpha}x_3t^{-\alpha}A(\alpha, N) \\
&\quad - \tau_{f\alpha}\sum_{j=2}^N \frac{C_j(\alpha)}{(j-2)!t^{j+\alpha-1}}x_{N+j+1} - x_3), \\
x_{j+2}^{(1)} &= t^{j-2}x_1, \quad x_{N+j+1}^{(1)} = t^{j-2}x_3, \quad j = 2, 3, \dots, N, \quad x_{2N+2}^{(1)}(t) = \alpha_1x_1^2 + \alpha_2x_2^2 + \alpha_3u^2,
\end{aligned} \tag{5.10}$$

početni uslovi (4.11) i još jedan dodatni početni uslov

$$x_{2N+2}(0) = 0.$$

Pri tome je upravljanje stešnjeno ograničenjem

$$u_{\min} \leq u \leq u_{\max},$$

a terminalni trenutak T poznat.

Hamiltonova funkcija je

$$\begin{aligned}
H &= p_1x_2 + p_2(-x_3 - w^{(2)} - \mu_T \tanh(kx_2) - u) + \\
&\quad p_3 \left[\frac{\Gamma(2-\alpha)}{B(\alpha, N)t^{1-\alpha}} \left(x_1 + \tau_{x\alpha}x_1t^{-\alpha}A(\alpha, N) + \tau_{x\alpha}x_2t^{1-\alpha}\frac{B(\alpha, N)}{\Gamma(2-\alpha)} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \tau_{x\alpha}\sum_{j=2}^N \frac{C_j(\alpha)}{(j-2)!t^{j+\alpha-1}}x_{j+2} - \tau_{f\alpha}x_3t^{-\alpha}A(\alpha, N) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \tau_{f\alpha}\sum_{j=2}^N \frac{C_j(\alpha)}{(j-2)!t^{j+\alpha-1}}x_{N+j+1} - x_3 \right) \right] \\
&\quad \sum_{j=2}^N (p_{j+2}x_1 + p_{N+j+1}x_3)t^{j-2} + p_{2N+2}(\alpha_1x_1^2 + \alpha_2x_2^2 + \alpha_3u^2),
\end{aligned} \tag{5.11}$$

gde su $p_i = p_i(t)$, $i = 1, \dots, 2N + 2$ impulsi odnosno konjugovane promenljive. Kanonske jednačine odatle postaju

$$\begin{aligned}
p_1^{(1)} &= -\frac{\partial H}{\partial x_1} = -(1 + \tau_{x\alpha} t^{-\alpha} A(\alpha, N)) \frac{\Gamma(2 - \alpha)}{B(\alpha, N) t^{1-\alpha} \tau_{f\alpha}} p_3 \\
&\quad - \sum_{j=2}^N t^{j-2} p_{j+2} - 2\alpha_1 x_1 p_{2N+2}, \\
p_2^{(1)} &= -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -p_1 + \mu_T k \frac{1}{\cosh^2(kx_2)} p_2 \\
&\quad - \tau_{x\alpha} p_3 \frac{\Gamma(2 - \alpha)}{B(\alpha, N) t^{1-\alpha} \tau_{f\alpha}} - 2\alpha_2 x_2 p_{2N+2}, \\
p_3^{(1)} &= -\frac{\partial H}{\partial x_3} = p_2 + (1 + t^{-\alpha} A(\alpha, N)) \frac{\Gamma(2 - \alpha)}{B(\alpha, N) t^{1-\alpha}} p_3 - \sum_{j=2}^N t^{j-2} p_{N+j+1}, \quad (5.12) \\
p_{j+2}^{(1)} &= -\frac{\partial H}{\partial x_{j+2}} = -p_3 \tau_{x\alpha} \sum_{j=2}^N \frac{C_j(\alpha)}{(j-2)! t^{j+\alpha-1}}, \quad j = 2, 3, \dots, N, \\
p_{N+j+1}^{(1)} &= -\frac{\partial H}{\partial x_{N+j+1}} = p_3 \tau_{f\alpha} \sum_{j=2}^N \frac{C_j(\alpha)}{(j-2)! t^{j+\alpha-1}}, \quad j = 2, 3, \dots, N, \\
p_{2N+2}^{(1)} &= -\frac{\partial H}{\partial x_{2N+2}} = 0
\end{aligned}$$

i treba ih rešavati zajedno sa prirodnim graničnim uslovima, koji za poznato T postaju

$$\begin{aligned}
p_1(T) &= 0, \quad p_2(T) = 0, \quad p_3(T) = 0, \\
p_{j+2}(T) &= 0, \quad p_{N+j+1}(T) = 0, \quad j = 2, 3, \dots, N, \\
p_{2N+2}(T) &= 1.
\end{aligned} \quad (5.13)$$

Optimalno upravljanje na intervalu $t \in [0, T]$ određujemo iz uslova

$$\min_{u \in \Omega} H(t, x_i, p_i, u), \quad (i = 1, \dots, 2N + 2), \quad \Omega = [u_{\min}, u_{\max}],$$

gde je H funkcija definisana izrazom (5.11). Ovaj uslov dovodi do sledeće strategije optimalnog upravljanja

$$u = \left\{ \begin{array}{ll} u_{\min}, & u^* < u_{\min} \\ u^*, & u_{\min} \leq u^* \leq u_{\max} \\ u_{\max}, & u^* > u_{\max} \end{array} \right\},$$

gde je

$$u^* = \frac{p_2}{2\alpha_3 p_{2N+2}}$$

funkcija upravljanja dobijena iz uslova optimalnosti $\partial H/\partial u = 0$ koji važi u slučaju slobodne optimizacije kada vrednosti upravljanja ne izlaze iz dopuštene oblasti upravljanja $\Omega = [u_{\min}, u_{\max}]$. Nelinearni granični problem (5.10), (5.12), (4.11), (5.7) će se rešavati numerički primenom Krilov-Černousko metode sukcesivnih aproksimacija za usvojene vrednosti parametara $\tau_{f\alpha}$, $\tau_{x\alpha}$, k , μ_T i N za sva tri tipa pobude $w^{(2)}$.

6

Rezultati numeričkih simulacija

U ovoj sekciji prikazuju se rezultati numeričke integracije i rešenja zadataka optimalnog upravljanja dobijena metodom sukcesivnih aproksimacija.

Usvojeni parametri za opisivanje ponašanja viskoelastičnog elementa imaju sledeće vrednosti:

A) za obični KZ model

$$\tau_f = 0.1, \quad \tau_x = 1.2, \quad (6.1)$$

B) za FKZ model $\tau_{f\alpha} = 0.1, \quad \tau_{x\alpha} = 1.2, \quad \alpha = 0.78,$

Za modeliranje ponašanja frikcionog prigušivača koriste se sledeće vrednosti parametara

$$\mu_T = 0.1, \quad k = 10. \quad (6.2)$$

Prilikom analize biće korišćeni sledeće vrednosti parametara za seizmičku pobudu:

1) za opadajuću sinusnu pobudu opisanu jednačinom (3.21):

$$U = 1.2; \quad a_g = 0.05; \quad \Omega = 1.0, \quad (6.3)$$

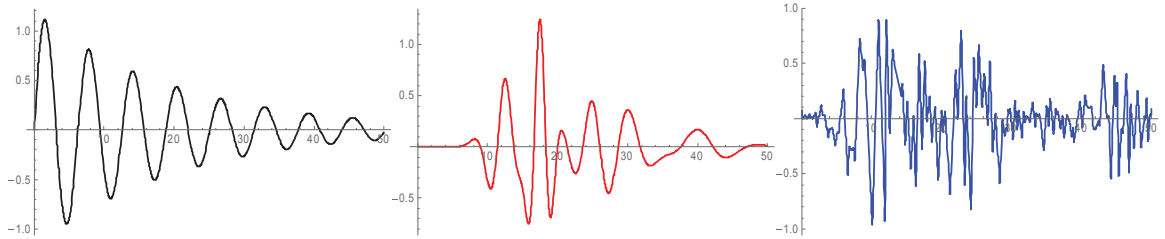
2) za model pobude u vidu Rikerovih talasa opisanih jednačinom (3.22) :

$$\begin{aligned} w_0 &= 0.01, & t_{p1} &= 13.3, & t_{p2} &= 10, & t_{p3} &= 8, & t_{p4} &= 6.7, & t_{p5} &= 5, \\ t_{s1} &= 40, & t_{s2} &= 30, & t_{s3} &= 25, & t_{s4} &= 12.5, & t_{s5} &= 17.5; \end{aligned} \quad (6.4)$$

3) za model pobude u obliku El Centro zemljotresa usvojena je interpolirana funkcija zapisa ubrzanja tla skalirana po amplitudi i periodu oscilovanja

$$\hat{w}^{(2)}(t) = 3w^{(2)}\left(\frac{t}{5}\right), \quad (6.5)$$

gde je $w^{(2)}$ stvarni zapis ubrzanja sa akcelerograma. Na Slici 4. prikazani su grafici usvojenih funkcija seizmičke pobude:



Slika 4. Zemljotresna pobuda: Opadajuća sinusoida (crna), Rikerova pobuda (crvena), El Centro (plava)

U primeni ASEF usvojena je vrednost $N = 15$ za broj članova, dok je $T = 50$ zadata vrednost vremenskog intervala.

Kapacitet upravljačkog uređaja je limitiran vrednostima $u_{\min} = -0.3$, $u_{\max} = 0.3$.

Prva aproksimacija za metod sukcesivnih aproksimacija u svim slučajevima je $u^0(t) = 0$.

U nastavku će za različite slučajeve biti prikazani dijagrami pomeranja $x_1(t)$ i brzine $x_2(t)$ u vremenskom domenu, zatim funkcije prenosne sile inercije (seizmička pobuda)- $w^{(2)}(t)$, sile u viskoelastičnom elementu $f(t)$ i sile trenja $q(t)$ kao i dijagram pomeranje-brzina u parametarskom obliku (fazna trajektorija pomeranje-brzina $x_2(x_1(t))$). U narednim prikazima levo je slučaj bez upravljanja a desno odgovarajuće veličine na optimalnom rešenju, tako da se direktno može pratiti efekat optimizacije.

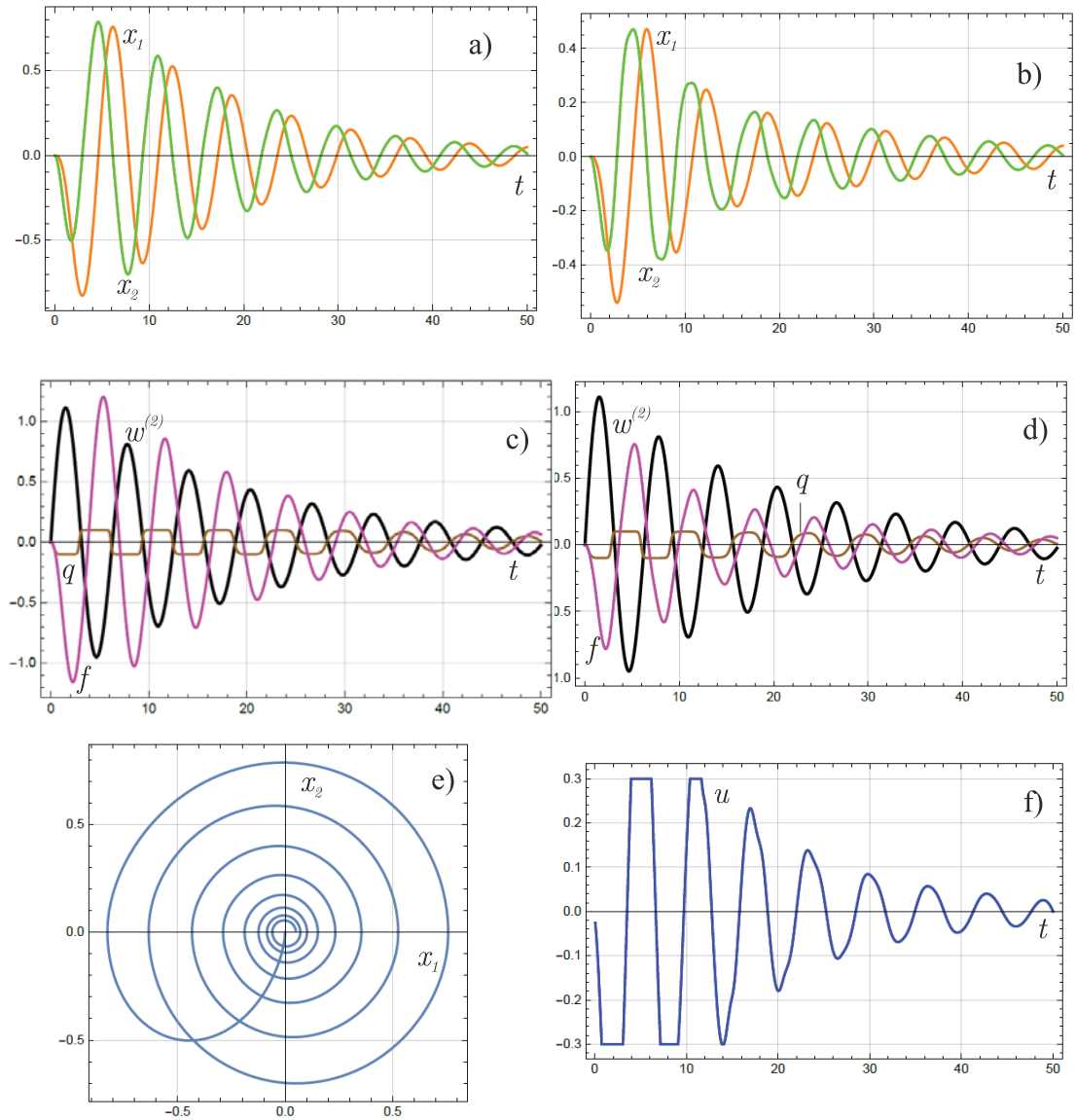
6.1 Slučajevi A_I_1, 2, 3 bez i sa upravljanjem

Prvo se prikazuju rezultati za Kelvin-Zenerov model. Za gore izabrane parametre numeričkom integracijom dobijeno je kretanje sistema za slučaj bez upravljanja $u(t) = 0$, biće

u grafičkim prikazima levo, a zatim i sa upravljanjem $u(t) \neq 0$, što će se radi lakše komparacije prikazati u istom redu desno. Relativno pomeranje $x_1(t)$ i relativna brzina $x_2(t)$ superstrukture, krive redom oranž i zelene boje, prenosna sila inercije $w^{(2)}(t)$, sila trenja $q(t)$ kriva braon boje, i sila u viskoelastičnom štapu $f(t)$ kriva boje magenta, su dobijene iz Košijevog problema za dinamički model (bez upravljanja), a zatim, na slikama desno, te iste veličine dobijene rešavanjem dvotačkastog graničnog problema za postavljeni zadatak optimizacije. Najzad prikazani su i fazni dijagram (za kretanje bez upravljanja) $x_2(x_1)$ i funkcija upravljanja $u(t)$.

6.1.1 Slučaj A_I_1

Za slučaj pobude date u obliku opadajuće sinusioide (kriva crne boje) dobijaju se sledeći rezultati.



Slika 5. A_I_1: pomeranje $x_1(t)$ i brzina $x_2(t)$ bez (a) i sa upravljanjem (b);
 pobuda $w^{(2)}(t)$, sila trenja $q(t)$ i sila $f(t)$ bez (c) i sa upravljanjem (d);
 fazni dijagram $x_2(x_1)$ za $u(t) = 0$ (e) i upravljanje $u(t)$ (f).

Napominje da su na slikama a) i b) odnosno c) i d) prikazane iste veličine repek-

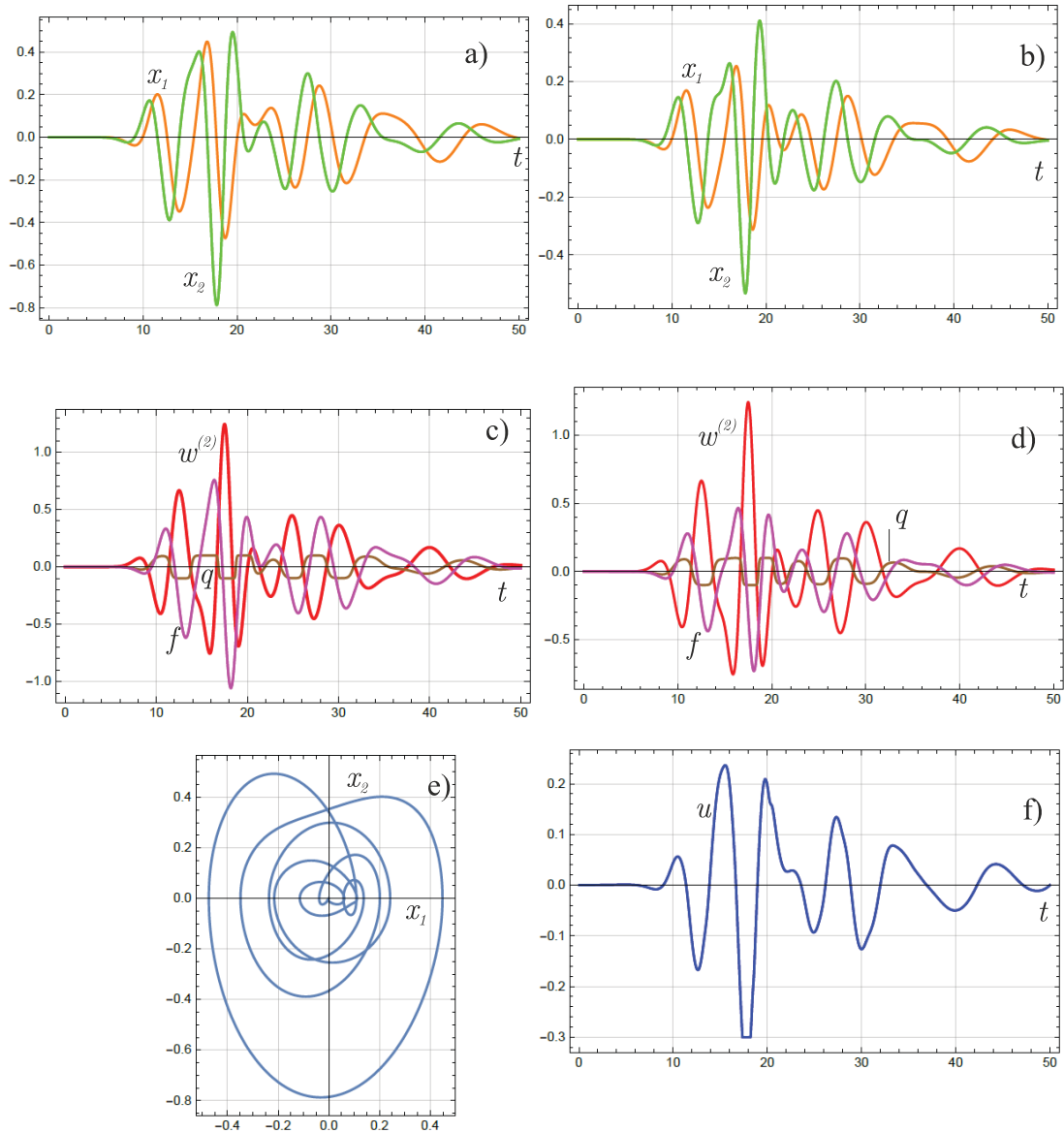
tivno ali na različitim skalama. U narednoj tabeli date su numeričke vrednosti koje mogu da posluže za poredjenje kretanja sa i bez upravljanja i najzad na osnovu kojih se može proceniti efekat optimizacije. Radi se maksimalnoj vrednosti relativnog pomeranja $|x_{1\max}|$, maksimalnoj vrednosti relativne brzine $|x_{2\max}|$, maksimalnoj vrednosti sile u viskoelastičnom štapu, vrednostima kriterijuma optimalnosti za dinamički zadatak I^0 i zadatak optimalnog upravljanja I^* , kao i ovde uvedene mere Δ , date jednačinom (4.2). U Tabeli 2 se daje i broj iteracija za MSA (n_{MSA}).

TABELA 2		
KZM	$u(t) = 0$	$u(t) \neq 0$
$ x_{1\max} $	0.826	0.539
$ x_{2\max} $	0.787	0.470
$ f_{\max} $	1.202	0.755
I^0	7.780	-
I^*	-	3.716
n_{MSA}	-	3
Δ	52.23 %	

Primećuje se da dejstvo aktivnog upravljačkog uređjaja, prema očekivanju, značajno smanjuje i relativno pomeranje i relativnu brzinu, dok isto tako značajno smanjuje silu u pasivnom viskoelastičnom prigušivaču što sigurno doprinosi njegovom dužem veku trajanja. Naime, treba istaći da je u ovom zadatku upravljanje bilo stešneno ograničenjem da po apsolutnoj vrednosti ne prelazi 0.3, te da i ta vrednost značajno smanjuje maksimalnu silu u pasivnom viskoelastičnom prigušivaču sa 1.202 na 0.755. Najzad vidi se i da je kriterijum optimalnosti smanjen za preko 50%. Grafici sile trenja i sile u viskoelastičnom elementu za slučaj bez i sa upravljanja redom prikazane graficima c) i d) određuju silu koja se sa temelja prenosi na superstrukturu.

6.1.2 Slučaj A_I_2

Za pobudu Rikerovog tipa dobijaju se sledeći grafici.



Slika 6. A_I_2: pomeranje $x_1(t)$ i brzina $x_2(t)$ bez (a) i sa upravljanjem (b); pobuda $w^{(2)}(t)$, sila trenja $q(t)$ i sila $f(t)$ bez (c) i sa upravljanjem (d); fazni dijagram $x_2(x_1)$ za $u(t) = 0$ (e) i upravljanje $u(t)$ (f).

U Tabeli 3 prikazane su maksimalne vrednosti atributa kretanja sistema sa i bez

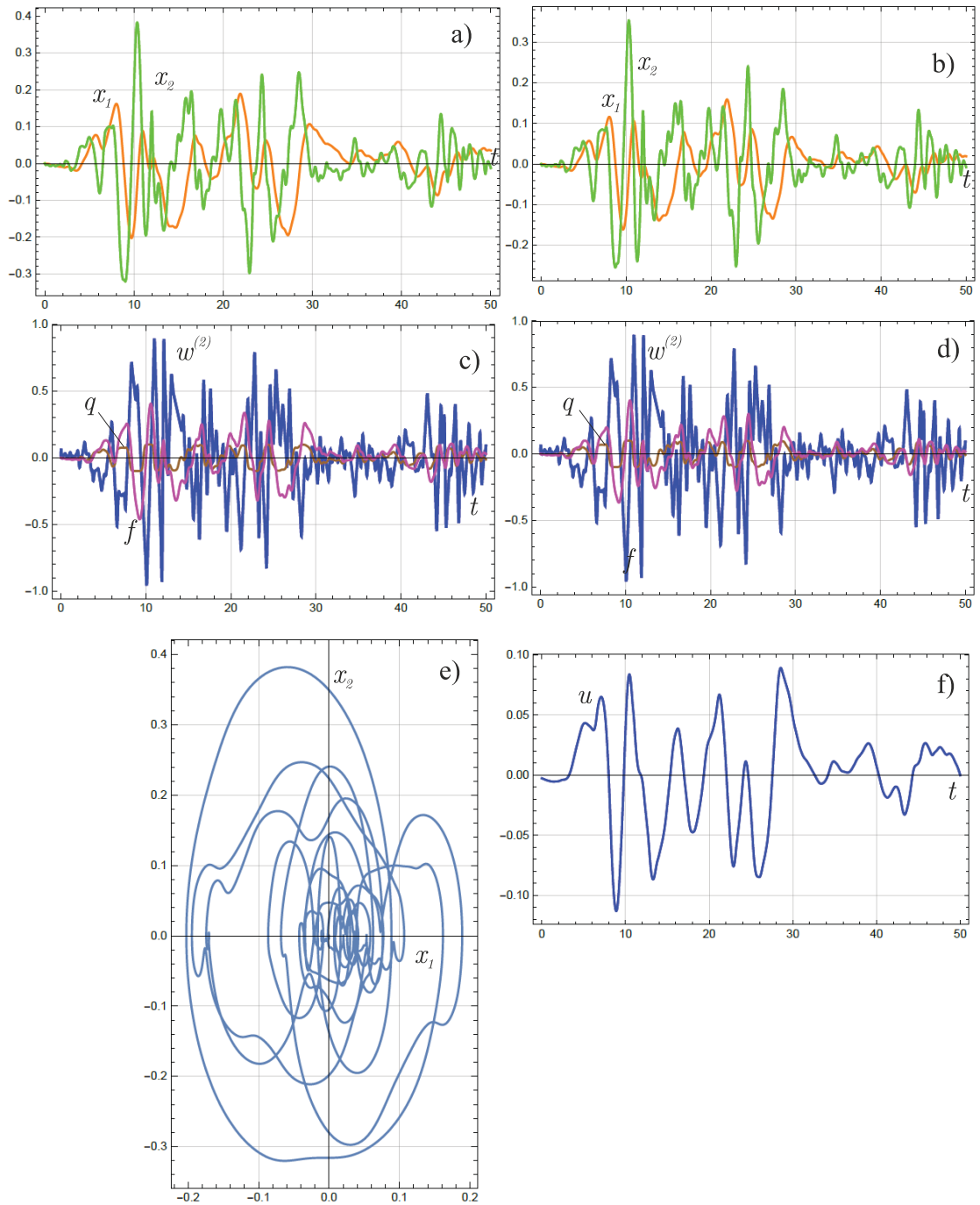
upravljanja.

TABELA 3		
KZM	$u(t) = 0$	$u(t) \neq 0$
$ x_{1 \max} $	0.473	0.312
$ x_{2 \max} $	0.787	0.533
$ f_{\max} $	1.056	0.730
I^0	2.595	-
I^*	-	1.54
n_{MSA}	-	3
Δ	40.66 %	

Za slučaj ove pobude funkcional je smanjen za 40.66 %, a sila u viskoelastičnom štapu za oko 30%.

6.1.3 Slučaj A_I_3

Za slučaj pobude dobijene interpolacijom akceleroograma zemljotresa El Centro dobija se sledeći portret.



Slika 7. A_I_3: pomeranje $x_1(t)$ i brzina $x_2(t)$ bez (a) i sa upravljanjem (b); pobuda $w^{(2)}(t)$, sila trenja $q(t)$ i sila $f(t)$ bez (c) i sa upravljanjem (d); fazni dijagram $x_2(x_1)$ za $u(t) = 0$ (e) i upravljanje $u(t)$ (f).

U Tabeli 4 date su ekstremne vrednosti atributa kretanja i kriterijuma optimalnosti sa i bez upravljanja.

TABELA 4		
KZM	$u(t) = 0$	$u(t) \neq 0$
$ x_{1 \max} $	0.206	0.162
$ x_{2 \max} $	0.382	0.354
$ f_{\max} $	0.461	0.402
I^0	0.806	-
I^*	-	0.627
n_{MSA}	-	9
Δ	22.12 %	

I za ovaj slučaj pobude, iako na prvi pogled nije bilo relativno velikog smanjenja otklona, brzine i sile u viskoelastičnom štapu, dobija se nezanemarljiv efekat optimizacije jer se kriterijum u slučaju sa upravljanjem smanjio za 22.12%. Napominje se da su u svim ovim primerima prisutni pasivni prigušivači frikcionog i celobrojnog tipa. Jasno je da bi bez tih elemenata vrednost kriterijuma optimalnosti bila višestuko veća. Na osnovu Slike 7f primećuje sa je upravljanje znatno manje od maksimalne i minimalne dozvoljene vrednosti.

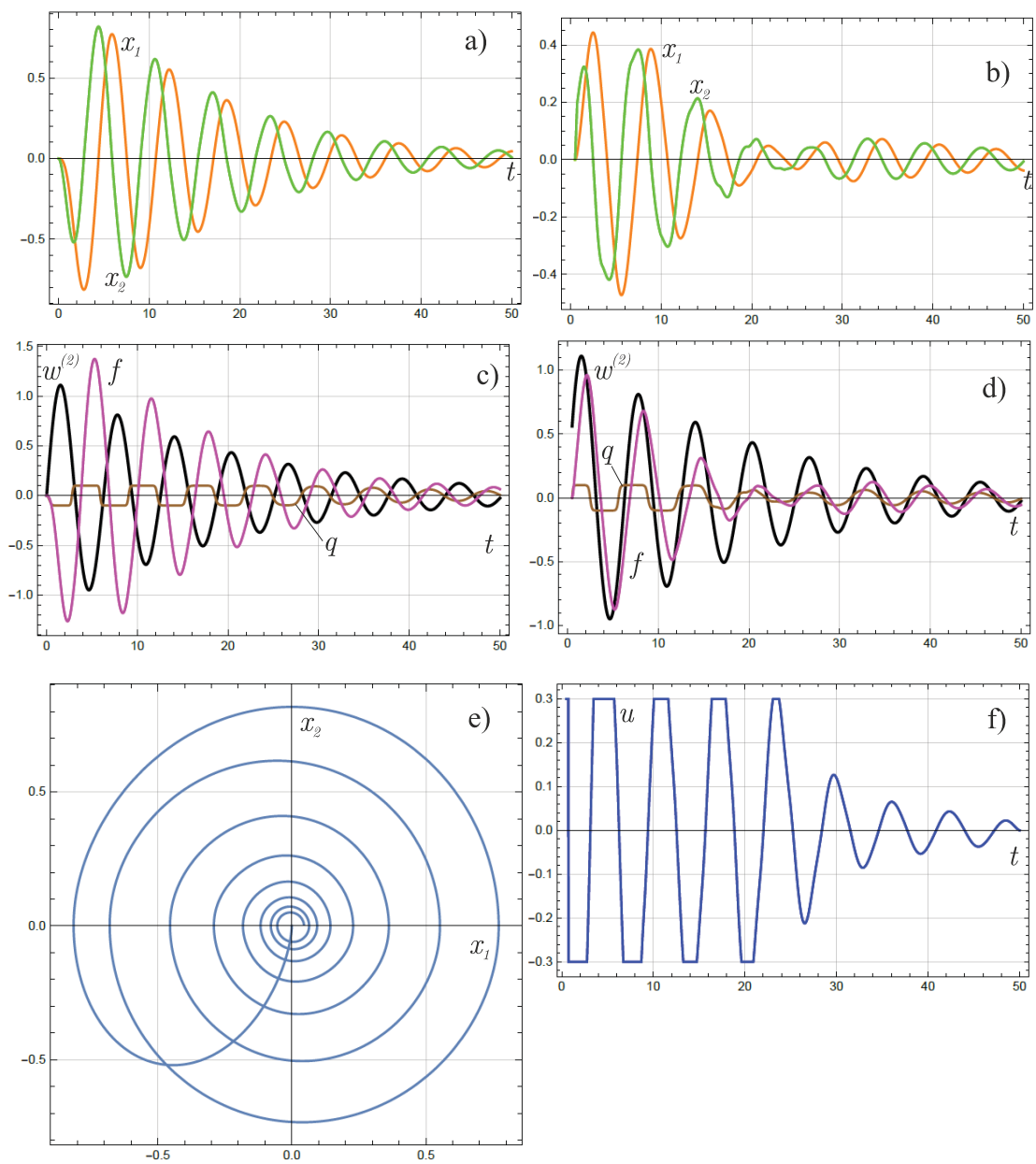
6.2 Slučajevi B_I_1, 2, 3 bez i sa upravljanjem

U prethodna tri primera rešavan je zadatak optimizacije za celobrojni model i materijal koji se modelira KZM. Sada su na redu primeri za FKZM koji dobro opisuje svojstva elastomera i polimera koji se i koriste u građevinskim konstrukcijama. Zato je model kretanja sistema inicijalno dat u obliku diferencijalnih jednačina realnog reda., pa se za primenu istog alata kao u prethodnoj sekciji taj sistem aproksimira sistemom diferencijalnih jednačina celobrojnog reda primenom ASEF sa 15 momenata funkcije pod operatorom fracionog izvoda koji u obzir uzimaju memorijske efekte i za silu i za dilataciju u viskoelastičnom štapu. I sada će se analizirati tri tipa pobude. Pri tome će se zadržati isti oblik prezentacije numeričkih rešenja Košijevog problema (slučaj bez upravljanja) levo i

rešenja dvotačkastog graničnog problema dobijenog primenom Pontrijaginovog principa maksimuma i MSA. Ova sekcija predstavlja centralni doprinos ove teze.

6.2.1 Slučaj B_I_1

Za slučaj pobude date u obliku opadajuće sinusioide (kriva crne boje) i FKZM dobijaju se sledeći rezultati.



Slika 8. B_I_1: pomeranje $x_1(t)$ i brzina $x_2(t)$ bez (a) i sa upravljanjem (b); pobuda $w^{(2)}(t)$, sila trenja $q(t)$ i sila $f(t)$ bez (c) i sa upravljanjem (d); fazni dijagram $x_2(x_1)$ za $u(t) = 0$ (e) i upravljanje $u(t)$ (f).

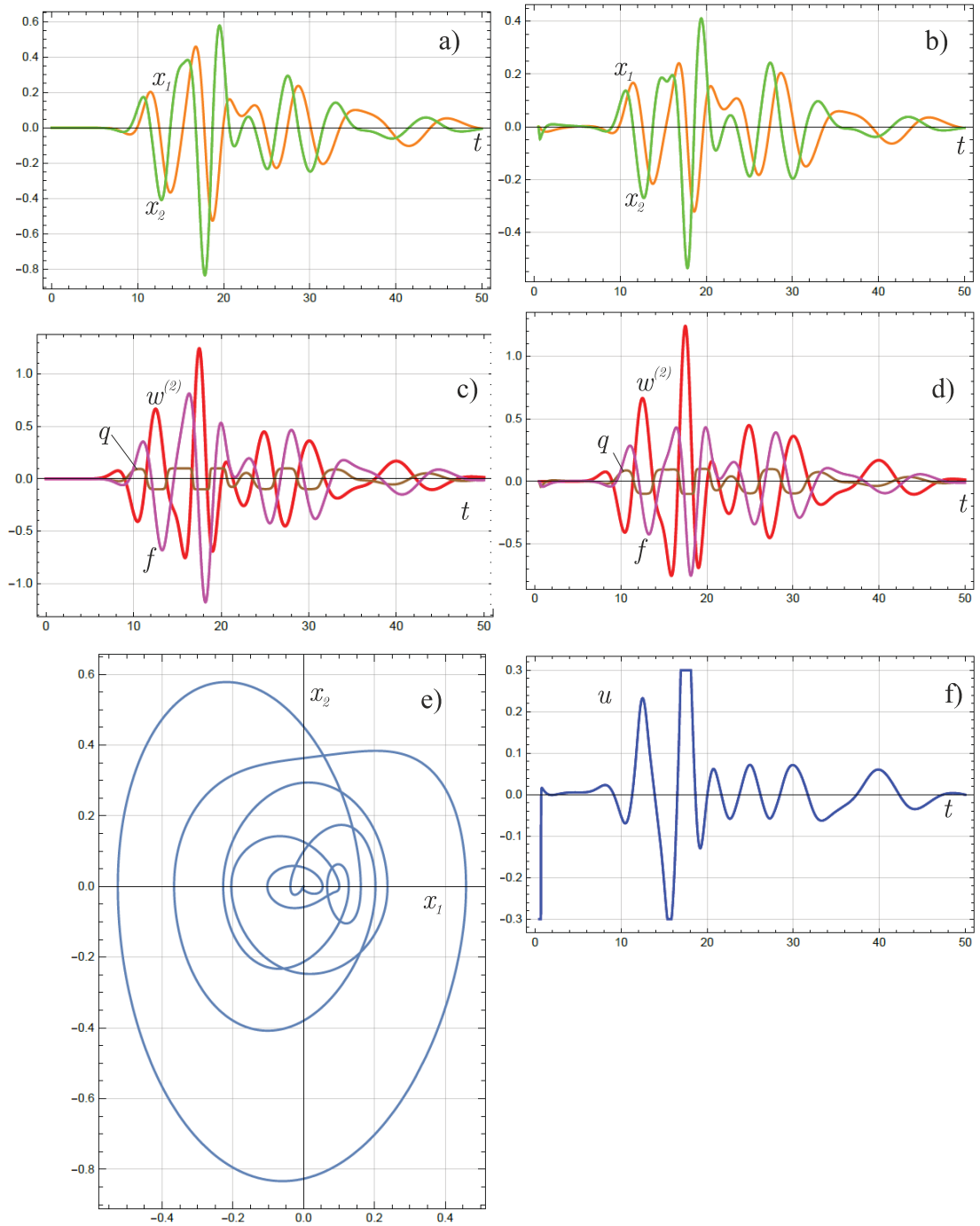
U Tabeli 5 date su ekstremne vrednosti atributa kretanja i kriterijuma optimalnosti u slučaju dejstva oblika opadajuće sinusoide.

TABELA 5		
FKZM	$u(t) = 0$	$u(t) \neq 0$
$ x_{1 \max} $	0.814	0.473
$ x_{2 \max} $	0.818	0.419
$ f_{\max} $	1.374	0.961
I^0	8.075	-
I^*	-	3.788
n_{MSA}	-	9
Δ	53.09 %	

Nešto veće vrednosti za dinamički zadatak u slučaju FKZM u odnosu na vrednosti Tabeli 2 koja se odnosi na KZM su i očekivane, jer se sa smanjenjem reda izvoda smanjuje i disipacija energije kod viskoelastičnog prigušivača, videti [66].

6.2.2 Slučaj B_I_2

Za FKZM i pobudu Rikerovog tipa, numerička rešenja Košijevog i odgovarajućeg graničnog problema daju sledeće grafike.



Slika 9. B_I_2: pomeranje $x_1(t)$ i brzina $x_2(t)$ bez (a) i sa upravljanjem (b); pobuda $w^{(2)}(t)$, sila trenja $q(t)$ i sila $f(t)$ bez (c) i sa upravljanjem (d); fazni dijagram $x_2(x_1)$ za $u(t) = 0$ (e) i upravljanje $u(t)$ (f).

U Tabeli 6 navedene su maksimalne vrednosti pomeranja, brzine i sile u viskoelastičnom

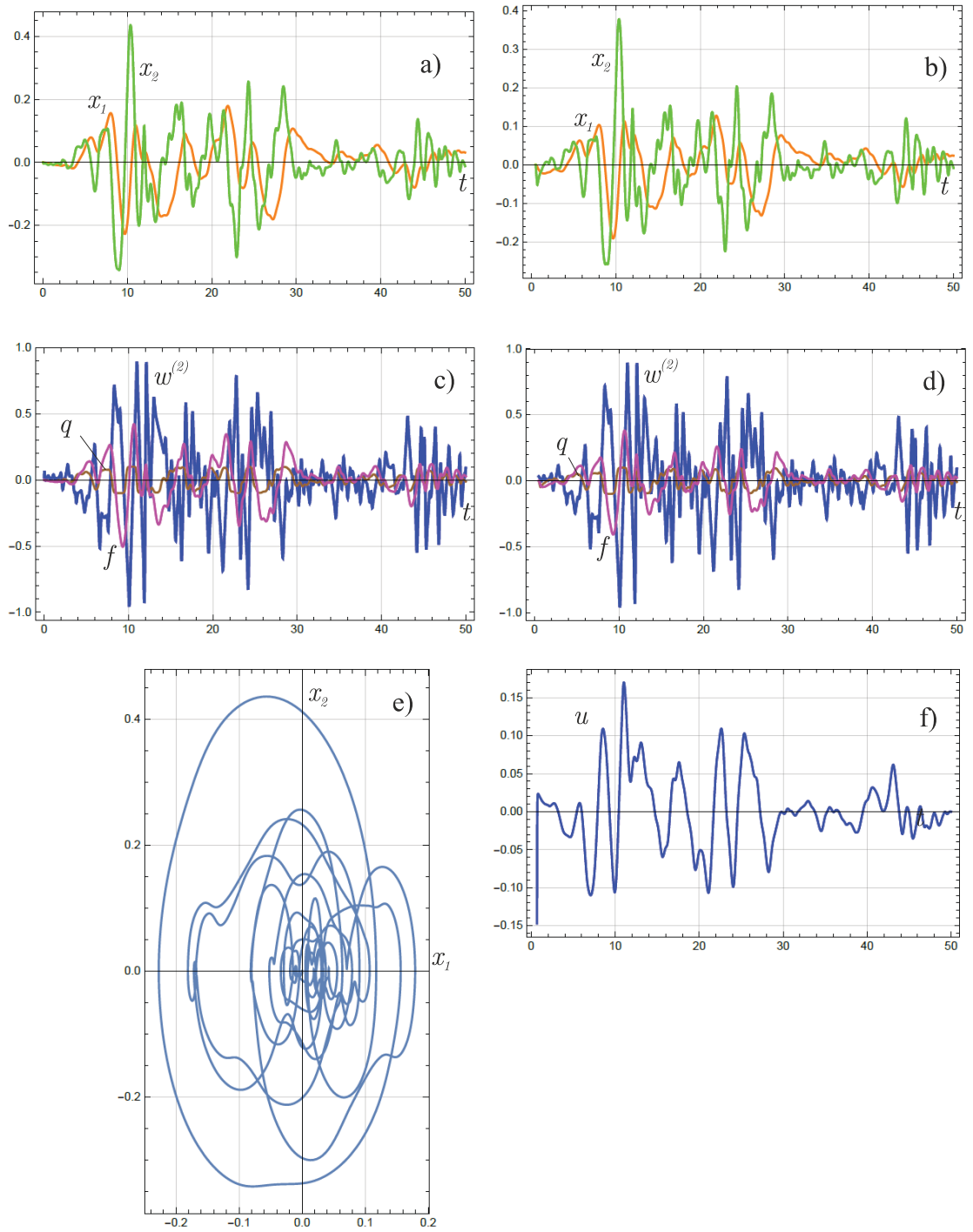
štapu.

TABELA 6		
FKZM	$u(t) = 0$	$u(t) \neq 0$
$ x_{1 \max} $	0.525	0.322
$ x_{2 \max} $	0.834	0.537
$ f_{\max} $	1.177	0.754
I^0	2.818	-
I^*	-	1.607
n_{MSA}	-	10
Δ	42.97 %	

I u ovom slučaju efekat optimizacije je smanjenje kriterijuma optimalnosti za oko 40% kao i u slučaju A_I_2. Komentar o disipaciji energije pri prelazu od prvog izvoda $\alpha = 1$, tj. KZM na $\alpha = 0.78$ što odgovara FKZM je isti kao u prethodnom slučaju.

6.2.3 Slučaj B_I_3

Za slučaj FKZM i pobude dobijene interpolacijom akceleroograma zemljotresa El Centro dobija zazadatak dinamike i zadatak optimalnog upravljanja dobijaju se sledeći rezultati.



Slika 10. B_I_3: pomeranje $x_1(t)$ i brzina $x_2(t)$ bez (a) i sa upravljanjem (b); pobuda $w^{(2)}(t)$, sila trenja $q(t)$ i sila $f(t)$ bez (c) i sa upravljanjem (d); fazni dijagram $x_2(x_1)$ za $u(t) = 0$ (e) i upravljanje $u(t)$ (f).

U Tabeli 7 date su numeričke vrednosti za ekstreme pomeranja, brzine i sile u viskoelastičnom prigušivaču kao i vrednosti funkcionala za zadatke bez i sa upravljanja.

TABELA 7		
FKZM	$u(t) = 0$	$u(t) \neq 0$
$ x_{1 \max} $	0.227	0.191
$ x_{2 \max} $	0.436	0.378
$ f_{\max} $	0.505	0.406
I^0	0.845	-
I^*	-	0.636
n_{MSA}	-	6
Δ	24.73 %	

Rezultati ove sekcije su potpuno originalni i predstavljaju glavni doprinos ove teze.

6.3 Diskusija i komentari dobijenih rezultata

6.3.1 O efektima pasivnih prigušivača

Uticaj pasivnih prigušivača se može proceniti analizom kretanja superstrukture za slučaj kada je ona kruto vezana za temelj. Tada bi se integracijom pobude dobila brzina a još jednom integracijom i pomeranje superstrukture, pa bi se mogao izračunati funkcional (4.1). Za slučaj opadajuće sinusoide dobija se vrednost 14.215, što znači da pasivno prigušenje smanji ovaj funkcional za oko 50%, videti Tabelu 1. Dodatnom smanjenju doprinosi i dejstvo koje se ostvaruje aktivnim uredjajem tako da se pasivnim i aktivnim elementima efekat ovog sistema seizmičke zaštite na ovom primeru može proceniti snižavanjem izabrane mere za 73.5%. Slično se za slučaj Rikerove pobude bez pasivnih prigušivača vrednost funkcionala (4.1) od 5.488 što navodi na sličan zaključak kao malopre. Medjutim za slučaj pobude tipa zemljotresa El Centro zbog velikih nagiba i velike učestanosti kretanje superstrukture bez pasivnog prigušenja dovodi do vrednosti funkcionala (4.1) koja je skoro 2000 puta veća od one sa ovde izabranim parametrima pasivnih prigušivača.

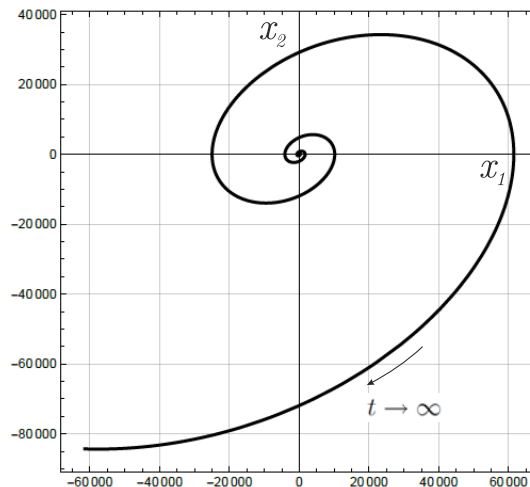
Jedan od ciljeva ove teze bio je da se razvije model za kvantifikaciju efekata pasivnih prigušivača. Za neke druge vrednosti parametara u konstitutivnoj aksiomi lako se može

doći do te kvantifikacije što u praktičnim primenama i određuje izbor materijala elastomera/polimera za pasivni prigušivač.

Jasno je da zbog različite prirode izabраниh seizmickih pobuda nema smisla porediti rezultate na primer A_I_1 sa A_I_2 ili A_I_3.

6.3.2 O restrikcijama u konstitutivnoj aksiomi

U svom nastanku frakcioni račun se prvo koristio za fitovanje krivih. Medjutim u primeni na konstitutivne aksiome celobrojne i frakcione viskoelastičnosti tim aksiomama se nameće uslov energijske konzistentnosti. Svaki proces deformacije je strogo disipativan. Medjutim, u problemima identifikacije vrednosti parametara u modelu, često se te vrednosti dobijaju kao rešenja nelinearnih sistema jednačina, koji mogu da imaju i višestruka rešenja. Nisu sva rešenja termodinamički konzistentna. Tako na primer ako se naruši uslov $(3.4)_2$ i u Kelvin-Zenerov model stavi $\tau_f = 1.2 > 0.1 = \tau_x$ onda energija sistema stalno raste a da nije izvršen nikakav rad što je praktično nemoguće. Za ilustraciju na Sl. 11 prikazano je kretanje u faznoj ravni za taj slučaj. Vidi se da se radi o divergiranju funkcija x_1 u x_2 kada $t \rightarrow \infty$.



Slika 11. Fazni portret kretanja pri narušavanju ograničenja koja diktira drugi zakon termodinamike.

Ova napomena je veoma važna jer za svaki model viskoelastičnog tela postoje ograničenja koja sprečavaju ovakvu nekonzistentnost, tj obezbeđuju disipaciju energije *ab initio*. U

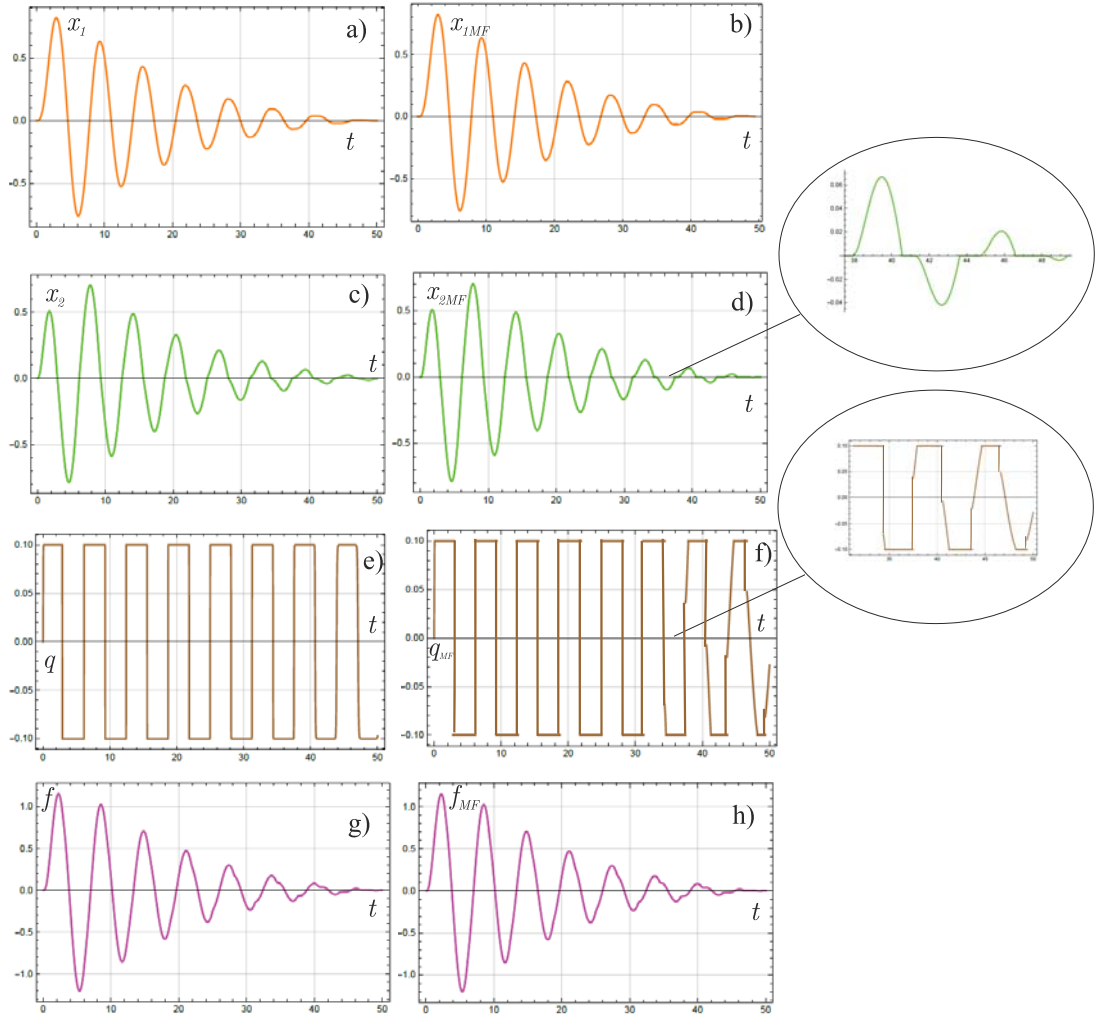
radovima [50] i [51] su data termodinamička ograničenja za koeficijente klasičnog i frakcionog Brugersovog modela viskoelastičnog tela, koje se u analizi unutrašnjeg trenja inženjerskih konstrukcija koriste umesto Kelvin-Zenerovog tipa. Tako se na primer za parametre identifikovane u radu [19] za četiri slučaja sleganja tla pri izradi tankova za naftu može proveriti da navedene vrednosti zadovoljavaju ograničenja 2.7.

Interesantno bi bilo uporediti disipaciju energije za Burgersov tip pasivnog viskoelastičnog prigušivača za ovde postavljen problem ali to prevazilazi okvire ovog rada i može biti jedan od pravaca za dalja istraživanja.

6.3.3 O izabranom modelu frikcionog prigušivača

Problemi kretanja mehaničkih sistema u kojima desne strane u diferencijalnim jednačinama kretanja sadrže multifunkcije zahtevaju poseban tretman videti [26]. U ovde postavljenom problemu sila trenja $q(t)$ modelirana je regularizovanim Kulonovim zakonom, jer to značajno pojednostavljuje problem. Zato se nameće pitanje šta bi bilo u slučaju da se umesto glatkog/regularizovanog modela suvog trenja ovde upotrebi model koji uključuje multifunkcije. U tom slučaju kretanje se razlaže na faze prema smeru relativne brzine pri čemu se dozvoljava i faza priljublivanja u kojoj se sila trenja $q(t)$ određuje kao funkcija vremena iz jednačina kretanja uz uslov da su i relativna brzina i relativno ubrzanje jednaki nuli na nekom intervalu vremena. Pri tome je u izračunavanju funkcionala 4.1 oblast integracije potrebno podeliti na podoblasti za svaku od faza. Tako se na primer može uporediti kretanje za slučaj A_I_1 opisan u Sekciji 4.1 i slučaj A_II_1 opisan u Sekciji 4.2. Rezultat poredjenja dat na Slici 12 i u Tabeli 8.

Na Slici 12 prikazani su atributi kretanja sistema za ova dva slučaja. Detalj sa Slike 12 d) prikazuje faze priljublivanja kada su i relativna brzina i relativno ubrzanje jednaki nuli. Treba napomenuti da se priljublivanje pojavljuje samo za slučaj kada se sila trenja modelira multifunkcijom i to, za ovaj tip pobude, u periodu kada se već brzina značajno smanji. Na Slici 12 b) primetna je konstantnost pomeranja u periodima priljublivanja, dok se na Slici 12 f) za te periode prikazuje zavisnost sile trenja od vremena. Izdvojeni detalji to još bolje ilustruju.



Slika 12. Komparacija rezultata za slučaj regularizovanog modela trenja (levo) i sile trenja kao multifunkcije (desno).

U Tabeli 8 daje se uobiajena komparacija maksimalnih vrednosti atributa kretanja i vrednosti funkcionala kao mere odstupanja od položaja relativne ravnoteže.

TABELA 8		
KZM	Model trenja q	
$u(t) = 0$	Regularizovani (A_I_1)	Multifunkcija (A_II_1)
$ x_{1\max} $	0.8194	0.8192
$ x_{2\max} $	0.7861	0.7861
$ f_{\max} $	1.2002	1.2002
I^0	7.6077	7.7409

Iz vrednosti prikazanih u Tabeli 8 zaključuje se da odstupanja maksimalnih vrednosti relativnog pomeranja, relativne brzine i sile u viskoelastičnom štapu gotovo i da nema, dok se vrednosti funkcionala (4.1) razlikuju za manje od 2%. To i opravdava upotrebu regularizovanog modela trenja za probleme dinamike.

Kada se uzme u obzir da je razlika u predviđanjima modela relativno mala a razlika u broju operacija u primeni Pontrjaginovog principa maksimuma prilično velika, upotreba regularizovanog modela trenja se čini opravdanom i u problemima optimizacije. Poslednje bi još više bilo izraženo kada bi se uradila komparacija slučajeva B_I_1 i B_II_1. Najzad i činjenica da su radovi u kojima se prikazuju rešenja problema optimalnog upravljanja u prisustvu suvog trenja veoma retki, a da, prema saznanju autora, radova iz optimizacije u kojima se optimizira kretanje sistema koje se opisuje i uz pomoć frakcionih izvoda i uz pomoć multifunkcija gledano u odnosu na promenjive stanja, nema, opravdava ovde korišćen regularizovani model, ali i otvara nove pravce za dalja istraživanja.

7

Zaključna razmatranja

7.1 Uradjeno

U ovoj tezi proučen je problem seizmičke zaštite bazno izolovanog objekta pomoću pasivnog frakcionog viskoelastičnog prigušivača, pasivnog frikcionog prigušivača i aktivnog upravljačkog uređaja ograničenih performansi. Kvantifikacija efekata pasivnih prigušivača i aktivnog uređaja je uradjena na osnovu upoređivanja atributa kretanja rešenja Košijevog problema za zadatak dinamike sa rešenjem dvotačkastog graničnog problema za zadatak optimizacije. Oba problema su rešavana numerički. U oba slučaja je sistem frakcionih diferencijalnih jednačina, zamenjen ekvivalentnim sistemom diferencijalnih jednačina celobrojnog reda. Pri tome se koristila ekspanziona formula Atanackovića i Stankovića koja levi Riman-Ljuvilov frakcioni izvod funkcije reda manjeg od 1, menja funkcijom, njenim izvodom i konačnim brojem momenata te funkcije. Sila trenja je modelirana kao glatka funkcija koja regularizuje Kulonov zakon suvog trenja koji je dat u obliku multifunkcije. Analizirana su tri tipa seizmičke pobude opadajuća sinusoida, Rikerova talasna funkcija i interpolirani akceleroگرام zemljotresa El Centro. Kriterijum optimalnosti motivisan je teorijom linearnih regulatora u obliku da se relativno pomeranje, relativna brzina i dejstvo upravljačkog uređaja minimiziraju na specificiranom vremenskom intervalu. Problem optimalnog upravljanja postavljen je u okvir Pontrjaginovog Principa Maksimuma i rešavan metodom sukcesivnih aproksimacija koji su predložili Krilov i Černousko.

Sa obzirom na frakcionu viskoelastičnost ispitivan je frakcioni Kelvin-Zenerov model u prisustvu ograničenja na parametre u modelu koja su posledica entropijske nejednakosti. Pored toga postavljene su osnove za primenu frakcionog Burgersovog modela kao alternative za realizaciju pasivnog viskoelastičnog prigušivača. U okviru rada na tezi formulisana su ograničenja na parametre frakcionog Burgersovog modela koja obezbeđuju energijsku konzistentnost problema. Rezultati prikazani u Tabeli 1, publikovani u referencama [52], [53] i [54] predstavljaju originalni doprinos teze i već su publikovani.

Rezultati prikazani na slikama 5 - 10 i u tabelama 2 - 7 su takodje originalni doprinos teze čije se publikovanje očekuje. Kao rezultat dejstva upravljačkog uređaja izabrani kriterijum optimizacije je značajno smanjen i to između 20 i 50% što direktno utiče na smanjenje negativnih efekata zemljotresne pobude. Sila u viskoelastičnom elementu se pri tome smanjuje u intervalu od 20 do 30% što može da utiče na radni vek tog elementa.

Važnost ograničenja koja diktira entropijska nejednakost ilustrovana je na primeru Kelvin-Zenerovog modela. Pokazano je da narušavanje ograničenja vodi ka nestabilnosti koju nikakva optimizacija ne može da uredi, videti Sliku 11. Na primeru Kelvin-Zenerovog modela pokazana je i razlika u ponašanju sistema koja proizilazi iz zamene regularizovanog modela suvog trenja modelom koji uključuje trenje kao multifunkciju, videti Sliku 12 i Tabelu 8. Kada se u obzir uzmu relativno mala razlika u ponašanju koja se kvantitativno izražava relativno malim razlikama u atributima kretanja i kriterijumu odstupanja od relativne ravnoteže, a kvalitativno u pojavi faza priljublivanja u drugom slučaju i složenost problema optimalnog upravljanja koju taj drugi model trenja prouzrokuje, izabrani model se čini opravdanim. U krajnjoj liniji taj regularizovani model i dominira u radovima koji se odnose na problematiku kretanja mehaničkih sistema u prisustvu suvog trenja.

Navedeni rezultati, dobijeni u okviru izrade ove teze mogu biti od interesa za projektovanje realnih građevinskih konstrukcija u regijama sklonim zemljotresu.

7.2 Otvoreni problemi

Tokom izrade ove teze identifikovano je nekoliko otvorenih problema sa kojima se može nastaviti ovde započeto istraživanje.

Kao prvi, nameće se problem izmene kriterijuma optimalnosti tj. da se umesto mini-

mizacije funkcionala (5.1) na specificiranom intervalu vremena, zahteva zaustavljanje kretanja u minimalnom vremenu. Ovaj problem „seizmičke brahistohrone” zahteva uvođenje terminalne konfiguracije a time i dopunu metoda sukcesivnih aproksimacija na primer metodom kaznene funkcije što može a ne mora da garantuje konvergenciju ka optimalnom rešenju. Pri tome se mora voditi računa i o tehnički ograničenim performansama aktivnog uredjaja.

Drugi problem tiče se primene rezultata neglatke mehanike koja se značajno razvila u poslednjim dekadama. To vodi ka problemima optimizacije u modelima koji uključuju neglatke i nelokalne operatore, tj. frakcione viskoelastične prigušivače sa modelima trenja koji uključuju multifunkcije. Pri tome se kao problem pojavljuje povezivanje memorijskih efekata sa različitim fazama kretanja koje prouzrokuju prelazi iz klizanja u priljublivanje i iz priljublivanja u klizanje.

Kao treći problem postavlja se zamena frakcionog Kelvin-Zenerovog modela, jednim od mogućih frakcionih modela Burgersovog tipa, za koji je priprema već uradjena, videti Tabelu 1. Taj problem sa sa aspekta dinamike i teorije optimalnog upravljanja dovodi do modela kretanja koji uključuju integro diferencijalne jednačine odnosno integrale tipa konvolucije, da bi se problem zadržao u okvirima Njutnovske mehanike u kojoj sila ne zavisi od ubrzanja, videti [55], [58], [68].

Najzad, logičan nastavak je analiza sistema sa više stepeni slobode, kao na primer u [45] što značajno povećava obim posla i usložnjava numeričke simulacije jer se u prisustvu suvog trenja pojavljuje kombinatorna analiza. Naime, svaki blok/sprat bi se u odnosu na onaj ispod njega mogao klizati u jednu ili drugu stranu ili pak biti u stanju relativne ravnoteže. Tako bi za 5 blokova/spratova, prema [57] to dovelo do $3^5 = 243$ moguće kombinacije. Može se pretpostaviti i da se superstruktura modelira kao rasporedjena masa, tj. kao sistem sa beskonačno mnogo stepeni slobode, čime se u model uključuju parcijalne diferencijalne jednačine, videti na primer [62], i problem postaje još zahtevniji.

Iskorak u bilo kom od ova četiri navedena pravca daljih istraživanja može doprineti boljem razumevanju problema seizmičke zaštite.

Literatura

- [1] Abbas, A., Masad, E., Papagiannakis, T., Harman, T.: Micromechanical modeling of the viscoelastic behavior of asphalt mixtures using the discrete-element method. *Int. J. Geomech.* 7, 131–139 (2007)
- [2] Adam, Maher, Guenther Schmid, and Nawawi Chouw. "Investigation of ground motions and structural responses in near field due to incident waves." *Proceedings of the 12th World Conference on Earthquake Engineering.* 2000
- [3] Alekseev, V. M., Tikhomirov, V. M., & Fomin, S. V. *Optimal control*, 1979.
- [4] Andersson S., Söderberg A., Björklund S., K.L. Friction models for sliding, dry and mixed lubricated contacts, *Tribology International.* 2007;580-587
- [5] Atanacković TM, Stanković B., An expansion formula for fractional derivatives and its application, *Fractional calculus and applied analysis.* 2004(7);365-378.
- [6] Atanackovic, T. M., & Stankovic, B. (2008). On a numerical scheme for solving differential equations of fractional order. *Mechanics Research Communications*, 35(7), 429-438.
- [7] Atanacković, T. M., Pilipović, S., Stanković, B., & Zorica, D. (2014). *Fractional calculus with applications in mechanics.* Wiley-ISTE.
- [8] Atanackovic, T.M., Konjik, S., Oparnica, L., Zorica, D.: Thermodynamical restrictions and wave propagation for a class of fractional order viscoelastic rods. *Abstr. Appl. Anal.* 2011, ID975694–1–32 (2011)

- [9] Atanackovic, T.M., Pilipovic, S., Stankovic, B., Zorica, D.: *Fractional Calculus with Applications in Mechanics: Wave Propagation. Impact and Variational Principles.* Wiley-ISTE, London (2014)
- [10] Atanackovic, T.M., Pilipovic, S., Stankovic, B., Zorica, D.: *Fractional Calculus with Applications in Mechanics: Vibrations and Diffusion Processes.* Wiley-ISTE, London (2014)
- [11] Bagley, R.L., Torvik, P.J.: On the fractional calculus model of viscoelastic behavior. *J. Rheol.* 30, 133–155 (1986)
- [12] Berger, E. J. Friction modeling for dynamic system simulation. *Appl. Mech. Rev.* 2002., 55(6), 535-577.
- [13] Barbat A, Rodellar J, Ryan E, Molinares N. Active control of nonlinear base-isolated buildings. *Journal of Engineering Mechanics (ASCE)* 1995;121(6):676-684
- [14] Bazhlekova, E., Tsocheva, K.: Fractional Burgers' model: thermodynamic constraints and completely monotonic relaxation function. *Comptes rendus de l'Académie bulgare des Sciences* 69, 825–834 (2016)
- [15] Carotti, A. T. T. I. L. I. O., & Chiappulini, R. (1991). Active protection of large structures under seismic loads: artificial damping and stiffness supplied by a hydro-mechanical servodrive. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 10(2), 110-126.
- [16] Celauro, C., Fecarotti, C., Pirrotta, A., Collop, A.C.: Experimental validation of a fractional model for creep/recovery testing of asphalt mixtures. *Constr. Build. Mater.* 36, 458–466 (2012)
- [17] Coulomb CA (1785), *Theorie des machines simples*, *Memoirs de Mathematique et de Physique de l'Academie Royale*, 161–342.
- [18] Danca, Marius-F. Continuous Approximations of a Class of Piecewise Continuous Systems. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2015, 25.11: 1550146

- [19] Dey, A., & Basudhar, P. K. (2012). Parameter estimation of four-parameter viscoelastic Burger model by inverse analysis: case studies of four oil-refineries. *Interaction and multiscale mechanics*, 5(3), 211-228.
- [20] Dupont, P., Armstrong, B. & Hayward, V. [2000] Elasto-Plastic Friction Model: Contact Compliance and Stiction, *Proceedings of American Control Conference*, (Illinois, USA), 1072-1077.
- [21] Dupont, P., Hayward, V., Armstrong, B. & Altpeter, F. [2002] Single State Elasto-Plastic Models, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47, 787-792
- [22] Eich-Soelner, E. & Fuhrer, C. [1998] *Numerical Methods in Multibody Dynamics*, (B. G. Teubner, Stuttgart)
- [23] Findley, W.N., Lai, J.S., Onaran, K.: *Creep and Relaxation of Nonlinear Viscoelastic Materials—With an Introduction to Linear Viscoelasticity*. Dover Publications, New York (1976)
- [24] Fisco, N. R., & Adeli, H. (2011). Smart structures: part I—active and semi-active control. *Scientia Iranica*, 18(3), 275-284.
- [25] Glocker, Christoph. *Set-valued force laws: dynamics of non-smooth systems*. Vol. 1. Springer Science & Business Media, 2013.
- [26] Grahovac, N.M., Spasic D.T. "Multivalued fractional differential equations as a model for an impact of two bodies." *Journal of Vibration and Control* 20, no. 7 (2014): 1017-1032.
- [27] Grahovac, N., Spasic, D., Zigić M., Okuka A., "Dynamic response of a structure to earthquake excitation." 5 th International conference Contemporary achievements in civil engineering April 2017. Subotica, SERBIA.
- [28] Guida, D., Nilvetti, F., & Pappalardo, C. M. "Optimal Control Design by Adjoint-Based Optimization for Active Mass Damper with Dry Friction." *Programme and Proceedings of COMPDYN 2013 4th International Conference on Computational Methods in Structural Dynamics and Earthquake Engineering*. 2013

- [29] Guida, D., Nilvetti, F., & Pappalardo, C. M. (2009). Dry friction influence on cart pendulum dynamics. *International Journal of Mechanics*, 3(2), 31-38.
- [30] Heymans, N.: Hierarchical models for viscoelasticity dynamic behaviour in the linear range. *Rheol. Acta* 35, 508–519 (1996)
- [31] Hinze, M., Schmidt, A., & Leine, R. I. (2020). Lyapunov stability of a fractionally damped oscillator with linear (anti-) damping. *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 1(ahead-of-print).
- [32] Housner GW, Bergman LA, Caughey TK, Chassiakos AG, Claus RO, Masri SF, Skelton RE, Soong TT, Spencer BF, Yao JTP. Structural control: past, present, and future. *Journal of Engineering Mechanics (ASCE)* 1997;123(9):897-971
- [33] Jelacic, Z. D., & Petrovacki, N. (2009). Optimality conditions and a solution scheme for fractional optimal control problems. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 38(6), 571-581.
- [34] Karnopp D (1985), Computer simulation of stick-slip friction in mechanical dynamic systems, *ASME J. Dyn. Syst., Meas., Control* 107(1), 100–103..
- [35] Khan, M., Ali, S. H., & Qi, H. (2009). On accelerated flows of a viscoelastic fluid with the fractional Burgers' model. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 10(4), 2286-2296.
- [36] Kost, G., Tellkamp, T., Kamil, H., Gantayat, A., & Weber, F. Automated generation of spectrum-compatible artificial time histories. *Nuclear Engineering and Design*, 45(1), 243-249, 1978
- [37] Krylov I.A., Chernousko F.L., On the method of successive approximations for the solution of problems of optimal control, *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 1963(2);1371-1382.
- [38] Krylov, I. A. E., & Chernousko, F. L. (1972). An algorithm for the method of successive approximations in optimal control problems. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 12(1), 15-38.

- [39] Leine, R. I., & Nijmeijer, H. (2013). Dynamics and bifurcations of non-smooth mechanical systems (Vol. 18). Springer Science & Business Media.
- [40] Lekszycki, T., Bucci, S., Del Vescovo, D., Turco, E., & Rizzi, N. L. (2017). A comparison between different approaches for modelling media with viscoelastic properties via optimization analyses. *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 97(5), 515-531.
- [41] Mainardi, F.: *Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity*. Imperial College Press, London (2010)
- [42] Makris, N. (2019). Seismic isolation: Early history. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 48(2), 269-283.
- [43] Markou A.A. & Manolis, G.D., A fractional derivative Zener model for the numerical simulation of base isolated structures, *Bull Earthquake Eng* DOI 10.1007/s10518-015-9801-7.
- [44] Marynowski, K., & Kapitaniak, T. (2002). Kelvin–Voigt versus Bürgers internal damping in modeling of axially moving viscoelastic web. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 37(7), 1147-1161.
- [45] Nagarajaiah, S., 3D BASIS Origins, Novel Developments and Its Impact in Real Projects around the World, book chapter in *Computational Methods, Seismic Protection, Hybrid Testing and Resilience in Earthquake Engineering*, Gian Paolo Cimellaro Satish Nagarajaiah, Sashi K. Kunnath Eds., Springer, 2015.
- [46] Nagarajaiah, S., Feng, M. Q., & Shinozuka, M. (1993). Control of structures with friction controllable sliding isolation bearings. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 12(2), 103-112.
- [47] Narasimhan S., Nagarajaiah S., Johnson EA, Gavin HP. Smart base-isolated benchmark building. Part I: problem definition. *Structural Control and Health Monitoring*. 2006; 13(2-3), 573-588

- [48] Nguyen, S. T., Dormieux, L., Pape, Y. L., & Sanahuja, J. (2011). A Burger model for the effective behavior of a microcracked viscoelastic solid. *International Journal of Damage Mechanics*, 20(8), 1116-1129.
- [49] Nomikos, P., Rahmamejad, R., & Sofianos, A. (2011). Supported axisymmetric tunnels within linear viscoelastic Burgers rocks. *Rock Mechanics and Rock Engineering*, 44(5), 553-564.
- [50] Okuka A.S., Grahovac N.M., Žigić M.M., Spasić D.T.. A seismic protection system comprising an active device, fractional damping and dry friction. Poster, International Conference of Fractional Differentiation and its Application-Novı Sad, Serbia, 2016.
- [51] Okuka A.S., Spasić D.T.. On active protection combined with both passive fractional damping and dry friction, 2016.
- [52] Okuka, A. S., Zorica, D. (2018). Formulation of thermodynamically consistent fractional Burgers models. *Acta Mechanica*, 229(8), 3557-3570.
- [53] Okuka, A. S., Zorica, D. (2020). Fractional Burgers models in creep and stress relaxation tests. *Applied Mathematical Modelling*, 77, 1894-1935.
- [54] Oparnica, L., Zorica, D., Okuka, A. S. (2019). Fractional Burgers wave equation. *Acta Mechanica*, 230(12), 4321-4340.
- [55] Parietti, F., Baud-Bovy, G., Gatti, E., Riener, R., Guzzella, L., & Vallery, H. (2011). Series viscoelastic actuators can match human force perception. *IEEE/ASME transactions on mechatronics*, 16(5), 853-860.
- [56] Persson, B. N. (2013). *Sliding friction: physical principles and applications*. Springer Science & Business Media.
- [57] Pfeiffer, F., & Glocker, C. *Multibody dynamics with unilateral contacts*. John Wiley & Sons, 1996

- [58] Rao LG & Allison JT, GENERALIZED VISCOELASTIC MATERIAL DESIGN WITH INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS AND DIRECT OPTIMAL CONTROL, Proceedings of the ASME 2015 International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference IDETC/CIE 2015 August 2-5, 2015, Boston, Massachusetts, USA DETC2015-46768
- [59] Richard, C., Cutkosky, M. R., & MacLean, K. (1999). Friction identification for haptic display. Proc. of Haptic Interfaces for Virtual Environments and Teleoperator Systems (HAPTICS), 14-19.
- [60] Shakib, H., & Datta, T. K. Inelastic response of torsionally coupled system to an ensemble of nonstationary random ground motion. Engineering Structures, 1993, 15(1), 13-20.
- [61] Shin, G., & Song, O. A time-domain method to generate artificial time history from a given reference response spectrum. Nuclear Engineering and Technology, 2016, 48(3), 831-839
- [62] Skaar, S. B., & Tucker, D. (1983, December). The optimal control of flexible systems using a convolution integral description of motion. In The 22nd IEEE Conference on Decision and Control (pp. 825-829). IEEE.
- [63] Soong, T. T., & Spencer, B. F. (2000). Active, semi-active and hybrid control of structures. Bulletin of the New Zealand Society for Earthquake Engineering, 33(3), 387-402.
- [64] Spasic, D. T. (2014). A thermodynamically consistent rheological model for engineering applications. Advanced Topics on Applications of Fractional Calculus on Control Problems, System Stability and Modeling, 107.
- [65] Spasic DT, A new approach in modeling and simulation for engineering problems, COMETA2018, Sarajevo, 2018.
- [66] Spasic, D. T., & Charalambakis, N. C. (2002). Forced vibrations with fractional type of dissipation. In Proceedings of the International Conference on Non-

smooth/Nonconvex Mechanics with Applications in Engineering, Thessaloniki (Vol. 323), 323-330.

- [67] Spasic, D.T., Kovincic, N. I., & Dankuc, D. V. (2016). A new material identification pattern for the fractional Kelvin–Zener model describing biomaterials and human tissues. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 37, 193-199.
- [68] Spasic, D.T, Privatna korespodencija, 2020.
- [69] Sugimoto, N., & Kakutani, T. (1985). ‘Generalized Burgers’ equation’for nonlinear viscoelastic waves. *Wave motion*, 7(5), 447-458.
- [70] Torunbalci, N., Seismic isolation and energy dissipating systems in earthquake resistant design. *Proceedings in 13th World Conference on Earthquake Engineering*, Vancouver, Canada, 2004, Paper ■ 3273
- [71] Vujanović B.D., Spasić D.T., *Metodi optimizacije, 3.,prerađeno i dopunjeno izdanje*, Fakultet tehničkih nauka Novi Sad, 2009.
- [72] Warn, GP., Ryan, KL., A review of seismic isolation for buildings: historical development and research, *Buildings*. 2012(2);300-325.
- [73] Yang JN, Li Z., Wu JC.& Hsu I., Control of sliding-isolated buildings using dynamic linearization. *Engineering Structures*. 1994;16(6):437-444
- [74] Zigic MM, Grahovac NM, Spasic DT., An optimal control problem for sliding isolated seismically excited structure with passive fractional damping. *International Conference of Fractional Differentiation and its Application-Catania Italy*, 2012
- [75] Zigic M.: Seismic response of a column like structure with both fractional and dry friction type of dissipation (in Serbian). Ph.D. thesis, Faculty of Technical Sciences Novi Sad, Serbia, 2012.
- [76] Zigic M, Spasic DT, N.M. Grahovac, A.S. Okuka. "Dynamic of a structure with viscoelastic and friction dampers." 4 th International conference Contemporary achievements in civil engineering 22. April 2016. Subotica, SERBIA

Овај Образац чини саставни део докторске дисертације, односно докторског уметничког пројекта који се брани на Универзитету у Новом Саду. Попуњен Образац укоричити иза текста докторске дисертације, односно докторског уметничког пројекта.

План третмана података

Назив пројекта/истраживања
Оптимално управљање кретањем сеизмички побуђене и базно изоловане суперструктуре у присуству пасивних пригушивача-докторска дисертација
Назив институције/институција у оквиру којих се спроводи истраживање
а) Факултет Техничких наука, Нови Сад, Универзитет у Новом Саду б) в)
Назив програма у оквиру ког се реализује истраживање
Оптимално управљање кретањем сеизмички побуђене и базно изоловане суперструктуре у присуству пасивних пригушивача-докторска дисертација
1. Опис података
1.1 Врста студије <i>Укратко описати тип студије у оквиру које се подаци прикупљају</i> У овој студији нису прикупљани подаци
1.2 Врсте података а) квантитативни б) квалитативни
1.3. Начин прикупљања података а) анкете, упитници, тестови б) клиничке процене, медицински записи, електронски здравствени записи в) генотипови: навести врсту _____ г) административни подаци: навести врсту _____

д) узорци ткива: навести врсту _____

ђ) снимци, фотографије: навести врсту _____

е) текст, навести врсту _____

ж) мапа, навести врсту _____

з) остало: описати _____

1.3 Формат података, употребљене скале, количина података

1.3.1 Употребљени софтвер и формат датотеке:

а) Excel фајл, датотека _____

б) SPSS фајл, датотека _____

в) PDF фајл, датотека _____

г) Текст фајл, датотека _____

д) JPG фајл, датотека _____

е) Остало, датотека _____

1.3.2. Број записа (код квантитативних података)

а) број варијабли _____

б) број мерења (испитаника, процена, снимака и сл.) _____

1.3.3. Поновљена мерења

а) да

б) не

Уколико је одговор да, одговорити на следећа питања:

а) временски размак између поновљених мера је _____

б) варијабле које се више пута мере односе се на _____

в) нове верзије фајлова који садрже поновљена мерења су именоване као _____

Напомене: _____

Да ли формати и софтвер омогућавају дељење и дугорочну валидност података?

а) Да

б) Не

Ако је одговор не, образложити _____

2. Прикупљање података

2.1 Методологија за прикупљање/генерисање података

2.1.1. У оквиру ког истраживачког нацрта су подаци прикупљени?

а) експеримент, навести тип _____

б) корелационо истраживање, навести тип _____

ц) анализа текста, навести тип _____

д) остало, навести шта _____

2.1.2 Навести врсте мерних инструмената или стандарде података специфичних за одређену научну дисциплину (ако постоје).

2.2 Квалитет података и стандарди

2.2.1. Третман недостајућих података

а) Да ли матрица садржи недостајуће податке? Да Не

Ако је одговор да, одговорити на следећа питања:

а) Колики је број недостајућих података? _____

б) Да ли се кориснику матрице препоручује замена недостајућих података? Да Не

в) Ако је одговор да, навести сугестије за третман замене недостајућих података

2.2.2. На који начин је контролисан квалитет података? Описати

2.2.3. На који начин је извршена контрола уноса података у матрицу?

3. Третман података и пратећа документација

3.1. Третман и чување података

3.1.1. Подаци ће бити депоновани у _____ репозиторијум.

3.1.2. URL адреса _____

3.1.3. DOI _____

3.1.4. Да ли ће подаци бити у отвореном приступу?

а) Да

б) Да, али после ембарга који ће трајати до _____

в) Не

Ако је одговор не, навести разлог _____

3.1.5. Подаци неће бити депоновани у репозиторијум, али ће бити чувани.

Образложење

3.2 Метаподаци и документација података

3.2.1. Који стандард за метаподатке ће бити примењен? _____

3.2.1. Навести метаподатке на основу којих су подаци депоновани у репозиторијум.

Ако је потребно, навести методе које се користе за преузимање података, аналитичке и процедуралне информације, њихово кодирање, детаљне описе варијабли, записа итд.

3.3 Стратегија и стандарди за чување података

3.3.1. До ког периода ће подаци бити чувани у репозиторијуму? _____

3.3.2. Да ли ће подаци бити депоновани под шифром? Да Не

3.3.3. Да ли ће шифра бити доступна одређеном кругу истраживача? Да Не

3.3.4. Да ли се подаци морају уклонити из отвореног приступа после извесног времена?

Да Не

Образложити

4. Безбедност података и заштита поверљивих информација

Овај одељак МОРА бити попуњен ако ваши подаци укључују личне податке који се односе на учеснике у истраживању. За друга истраживања треба такође размотрити заштиту и сигурност података.

4.1 Формални стандарди за сигурност информација/података

Истраживачи који спроводе испитивања с људима морају да се придржавају Закона о заштити података о личности (https://www.paragraf.rs/propisi/zakon_o_zastiti_podataka_o_licnosti.html) и одговарајућег институционалног кодекса о академском интегритету.

4.1.2. Да ли је истраживање одобрено од стране етичке комисије? Да Не

Ако је одговор Да, навести датум и назив етичке комисије која је одобрила истраживање

4.1.2. Да ли подаци укључују личне податке учесника у истраживању? Да Не

Ако је одговор да, наведите на који начин сте осигурали поверљивост и сигурност информација везаних за испитанике:

- a) Подаци нису у отвореном приступу
 - b) Подаци су анонимизирани
 - ц) Остало, навести шта
-
-

5. Доступност података

5.1. Подаци ће бити

- a) јавно доступни
- b) доступни само уском кругу истраживача у одређеној научној области
- ц) затворени

Ако су подаци доступни само уском кругу истраживача, навести под којим условима могу да их користе:

Ако су подаци доступни само уском кругу истраживача, навести на који начин могу приступити подацима:

5.4. Навести лиценцу под којом ће прикупљени подаци бити архивирани.

6. Улоге и одговорност

6.1. Навести име и презиме и мејл адресу власника (аутора) података

6.2. Навести име и презиме и мејл адресу особе која одржава матрицу с подацима

6.3. Навести име и презиме и мејл адресу особе која омогућује приступ подацима другим истраживачима
