UNIVERZITET U NOVOM SADU

FAKULTET TEHNIČKIH NAUKA

Nataša Duraković

Slabe konvergencije pseudoverovatnoća i intervalno-vrednosnih pseudoverovatnoća

-Doktorska disertacija-

Novi Sad, 2020.

„One cannot understand the universality of laws of nature, the relationship of things, without an understanding of mathematics. There is no other way to do it."

Richard P. Feynman

УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ ● ФАКУЛТЕТ ТЕХНИЧКИХ НАУКА
21000 НОВИ САД, Трг Доситеја Обрадовића 6

КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА

Редни број, **РБР**:		
Идентификациони број, **ИБР**:		
Тип документације, **ТД**:	монографска документација	
Тип записа, **ТЗ**:	текстуални штампани материјал	
Врста рада, **ВР**:	докторска дисертација	
Аутор, **АУ**:	Наташа Дураковић	
Ментор, **МН**:	др Славица Медић, др Татјана Грбић	
Наслов рада, **НР**:	Слабе конвергенције псеудовероватноћа и интервално-вредносних псеудовероватноћа	
Језик публикације, **ЈП**:	српски (латиница)	
Језик извода, **ЈИ**:	српски/енглески	
Земља публиковања, **ЗП**:	Република Србија	
Уже географско подручје, **УГП**:	Војводина	
Година, **ГО**:	2020.	
Издавач, **ИЗ**:	ауторски репринт	
Место и адреса, **МА**:	Факултет техничких наука, Трг Доситеја Обрадовића 6, Нови Сад	
Физички опис рада, **ФО**: (поглавља/страна/цитата/табела/слика/графика/прилога)	4/132/96/0/2/0/0	
Научна област, **НО**:	Примењена математика	
Научна дисциплина, **НД**:	Анализа	
Предметна одредница/ Кључне речи, **ПО**:	Полупрстен, псеудовероватноћа, интервалновредносна псеудовероватноћа, g-слаба конвергенција	
УДК		
Чува се, **ЧУ**:	Библиотека Факултета техничких наука, Нови Сад, Трг Доситеја Обрадовића 6	
Важна напомена, **ВН**:		
Извод, **ИЗ**:	Слаба конвергенција низа псеудовероватноћа и низа интервално-вредносних псеудовероватноћа је изучавана. Показани су еквивалентни услови g-слабе конвергенције низа псеудовероватноћа и низа интервално-вредносних псеудовероватноћа.	
Датум прихватања теме, **ДП**:	25.06.2020.	
Датум одбране, **ДО**:		
Чланови комисије, **КО**: Председник:	др Дарко Чапко	
Члан:	др Ивана Штајнер-Папуга	
Члан:	др Драган Јочић	
Члан:	др Сандра Бухмилер	Потпис ментора
Члан, ментор:	др Славица Медић	
Члан, ментор:	др Татјана Грбић	

Образац **Q2.НА.06-05-**Издање 1

UNIVERSITY OF NOVI SAD ● **FACULTY OF TECHNICAL SCIENCES**
21000 NOVI SAD, Trg Dositeja Obradovića 6

KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number, **ANO**:	
Identification number, **INO**:	
Document type, **DT**:	Monograph documentation
Type of record, **TR**:	Textual printed material
Contents code, **CC**:	PhD thesis
Author, **AU**:	Nataša Duraković
Mentor, **MN**:	Slavica Medić, PhD, Tatjana Grbić, PhD
Title, **TI**:	Weak convergence of pseudo-probability measures and interval-valued pseudo-probability measures
Language of text, **LT**:	Serbian (Latin)
Language of abstract, **JA**:	Serbian/English
Country of publication, **CP**:	Republic of Serbia
Locality of publication, **LP**:	Vojvodina
Publication year, **PY**:	2020
Publisher, **PB**:	Author's reprint
Publication place, **PP**:	Faculty of Technical Sciences, Trg Dositeja Obradovića 6, Novi Sad
Physical description, **PD**: (chapters/pages/ref/tables/ pictures/graphs/appendixes)	4/132/96/0/2/0/0
Scientific field, **SF**:	Applied mathematics
Scientific discipline, **SD**:	Analysis
Subject/Key words, **S/KW**:	Semiring, pseudo-probability measure, interval-valued pseudo-probability measure, g-weak convergence
UC	
Holding data, **HD**:	The Library of the Faculty of Technical Sciences, Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 6
Note, **N**:	
Abstract, **AB**:	Weak convergence of a sequence of pseudo-probability measures and a sequence of interval-valued pseudo-probability measures is investigated. The equivalent conditions of g-weak convergence of a sequence of pseudo-probability measures and a sequence of interval-valued pseudo-probability measures are proven.
Accepted by the Scientific Board on, **ASB**:	25/6/2020
Defended on, **DE**:	

Defended board, **D**B:	President:	Darko Čapko, PhD	
	Member:	Ivana Štajner-Papuga, PhD	
	Member:	Dragan Jočić, PhD	
	Member:	Sandra Buhmiler, PhD	Menthor's sign
	Member, Menthor:	Slavica Medić, PhD	
	Member, Menthor:	Tatjana Grbić, PhD	

Sažetak

U disertaciji je u okviru pseudoanalize izučavana slaba konvergencija niza pseudoverovatnoća i slaba konvergencija niza intervalno-vrednosnih pseudoverovatnoća.

Prvo su dati osnovni pojmovi pseudoanalize, kao što su pseudooperacije, poluprsteni, $\oplus$-mera i pseudointegral u odnosu na $\oplus$-meru. U nastavku su dati pojmovi intervalno-vrednosne $\oplus$-mere i pseudointegrala u odnosu na intervalno-vrednosnu $\oplus$-meru, koji su osnova za jedan od glavnih rezultata disertacije.

Definisane su pseudoverovatnoća kao primer $\oplus$-mere i intervalno-vrednosna pseudoverovatnoća kao primer intervalno-vrednosne $\oplus$-mere. Glavni rezultati disertacije su teorema koja daje ekvivalentne uslove g-slabe konvergencije za niz pseudoverovatnoća i teorema koja daje ekvivalentne uslove g-slabe konvergencije za niz intervalno-vrednosnih pseudoverovatnoća. Pored toga, izvedena je ekvivalencija g-slabe konvergencije sa nekim konvergencijama u teoriji mere i pseudoanalizi. Dati su primeri koji ilustruju primenu g-slabe konvergencije u teoriji verovatnoće.

Pored navedenih rezultata, u disertaciji je definisana g-Melinova transformacija i dokazane su neke njene osobine. Pokazana je primena g-Melinove transformacije u teoriji verovatnoće i dokazana je veza sa g-slabom konvergencijom niza pseudoverovatnoća.

Definisan je pseudopolinom sa intervalno-vrednosnim koeficijentima i pokazana je njegova g-integracija.

Pomoću intervalno-vrednosne $\oplus$-mere je definisana pseudometrika, tj. intervalno-vrednosno rastojanje između dve merljive funkcije.

Dat je novi pristup definisanju neaditivnih mera preko tzv. generalizovane pseudoverovatnoće. Ovakav pristup omogućava „merenje” skupova koji nisu elementi familije na kojoj je generalizovana pseudoverovatnoća definisana.

Na kraju je u zaključku sumiran doprinos disertaciji sa istaknutim originalnim rezultatima.

Teza se završava listom citiranih referenci.

Abstract

In the dissertation, in the frame of pseudo-analysis the weak convergence of a sequence of pseudo-probability measures and the weak convergence of a sequence of interval-valued pseudo-probability measures was studied.

First, the basic concepts of pseudo-analysis are given, such as pseudo-operations, semirings, $\oplus$-measure and pseudo-integral with respect to the $\oplus$-measure. Further, the notions of interval-valued $\oplus$-measure and pseudo-integral with respect to the interval-valued $\oplus$-measure, which are the basis for one of the main results of the dissertation, are given.

Pseudo-probability measure, as an example of $\oplus$-measure, and interval-valued pseudo-probability measure, as an example of the interval-valued $\oplus$-measure, are defined. The main results of the dissertation are the theorem which gives equivalent conditions of g-weak convergence of sequence of pseudo-probability measures and the theorem which gives equivalent conditions of g-weak convergence of sequence of interval-valued pseudo-probability measures. In addition, the equivalence of g-weak convergence and some convergences in measure theory and pseudo-analysis is derived. Examples that illustrate the application of g-weak convergence in probability theory are given.

In addition to the above results, in the dissertation the g-Melin transform is given and some of its basic properties are shown. The application of the g-Melin transform in the probability theory is given and the connection with the g-weak convergence of the sequence of pseudo-probability measures is proven.

The pseudo-polynomials with interval-valued coefficients are defined and their g-integration is shown.

Using the definition of interval-valued $\oplus$-measure, pseudo-metrics, i.e. the interval-valued distance between two measurable functions is defined.

A new approach to defining non-additive measures through the so-called generalized pseudo-probability measure is given. This approach allows "measuring" of sets which are not elements of the family on which the generalized pseudo-probability measure is defined.

Finally, in the conclusion, the contribution to the dissertation is summarized, and the original results are highlighted.

The thesis ends with a list of cited references.

Predgovor

Slaba konvergencija niza verovatnosnih mera ima veliki značaj u teoriji verovatnoće jer omogućava formulaciju i dokaz graničnih teorema, koje predstavljaju „most” između teorije verovatnoće kao teorijske matematičke discipline i statistike kao primenjene matematičke discipline.

Verovatnosna mera, tj. verovatnoća, je jedan primer aditivne mere i ima široku primenu u matematičkoj ekonomiji (proceni rizika), teoriji igara i drugim oblastima teorijske i primenjene matematike. Međutim, aditivne mere često ne omogućavaju modelovanje realnih pojava, te je bilo neophodno uvesti nove mere, tzv. neaditivne mere. Deo matematičke analize koji se bazira na neaditivnim merama i integralima definisanim u odnosu na njih se naziva pseudoanaliza ([23, 69]). U okvirima pseudoanalize, kao glavni rezultat ove disertacije, sprovedeno je istraživanje slabe konvergencije niza neaditivnih mera (niza pseudoverovatnoća i niza intervalno-vrednosnih pseudoverovatnoća). Pseudoanaliza ima primenu u rešavanju problema neodređenosti, optimizaciji, teoriji odlučivanja, fazi sistemima, diferencijalnim i diferencnim jednačinama ([68, 71, 72, 73]).

Neki primeri neaditivnih mera su fazi mere ([61, 69, 86, 91]) kao i maksitivne mere (mera mogućnosti i mera neophodnosti) ([69, 70, 91]) i $\oplus$-mere ([69]). Specijalne neaditivne mere, deformisana verovatnoća i pseudoverovatnoća, su primeri $\oplus$-mera koje predstavljaju uopštenje verovatnoće ([34, 62, 63]). Još jedan pristup uopštenju verovatnoće je generalizovana pseudoverovatnoća data u [53].

U odnosu na neaditivne mere definišu se integrali. Primeri integrala baziranih na neaditivnim merama su Šokeov integral, Sugenov integral, Veberov integral, Mirofuši-Sugenov i pseudointegral ([68, 69, 87]). U ovoj disertaciji je korišćen pseudointegral realne funkcije ([68, 69]) i njegova uopštenja (pseudointegral realne funkcije u odnosu na intervalno-vrednosnu $\oplus$-meru i pseudointegral intervalno-vrednosne funkcije u odnosu na $\oplus$-meru) ([35, 38, 39, 40, 56, 85]).

U praktičnim primenama prilikom merenja, često se dobijaju približne vrednosti posmatranih veličina. Zbog toga intervalno-vrednosne funkcije i mere, pa samim tim i intervalno-vrednosna verovatnoća, predstavljaju prirodan matematički okvir za izučavanje neodređenosti. Skupovno-vrednosne funkcije su uopštenje realnih funkcija, čije vrednosti nisu realni brojevi već neprazni podskupovi kompletnih separabilnih metričkih prostora. Za potrebe istraživanja su posmatrana preslikavanja koja za vrednosti uzimaju neprazne zatvorene podskupove skupa realnih brojeva. Prvi integral skupovno-vrednosne funkcije, Aumanov integral ([8]), je definisan 1965. godine. Dalja istraživanja su se bavila uopštenjem Aumanovog integrala za skupovno-vrednosne funkcije u odnosu na neaditivne mere. Primeri integrala skupovno-vrednosne funkcije u odnosu na neaditivne mere su Šokeov integral skupovno-vrednosne funkcije ([44]), fazi integral skupovno-vrednosne funkcije ([96]), (G) fazi integral skupovno-vrednosne funkcije ([94]), pseudointegral skupovno-vrednosne funkcije ([39, 40]).

U okviru pseudoanalize poseban akcenat je stavljen na pseudointegral intervalno-vrednosne funkcije kao specijalan slučaj pseudointegrala skupovno-vrednosne funkcije ([38]).

Intervalno-vrednosna $\oplus$-mera je uopštenje $\oplus$-mere. Intervalno-vrednosna $\oplus$-mera i pseudointegral realne funkcije u odnosu na intervalno-vrednosnu $\oplus$-meru su uvedeni u [85]. Specijalan slučaj intervalno-vrednosne $\oplus$-mere je intervalno-vrednosna pseudoverovatnoća koja je predmet izučavanja ove disertacije. Drugi oblici intervalno-vrednosnih verovatnoća su izučavani u [22, 52, 59, 93].

Pored klasičnih rezultata teorije verovatnoće, u pseudoanalizi je ispitivana slaba konvergencija nizova verovatnosnih mera generisanih zatvorenim slučajnim skupovima ([37]), kao i pseudoslaba konvergencija slučajnih skupova u odnosu na pseudointegral ([36]). U [29] i [66] je pokazana slaba konvergencija niza kapaciteta slučajnih skupova u odnosu na Šokeov integral.

Brojni rezultati su nastali i u okviru teorije velikih devijacija ([21]). U [76] je izučavana konvergencija velikih devijacija u Tihonovom i Skorohodovom prostoru i definisana je idempotentna verovatnoća. Takođe, data je i veza između principa velikih devijacija i poznatih metoda za utvrđivanje slabe konvergencije niza idempotentnih verovatnoća, definisan je princip velikih devijacija za stohastičke procese i sisteme masovnog opsluživanja. U [64] je izučavana konvergencija velikih devijacija niza generisanih pseudomera ka sup-dekompozabilnoj meri.

Potreba za uopštavanjem poznatih rezultata je dovela da se rezultati dalje uopštavaju u okviru pseudoanalize. Kao glavni originalni rezultat ove disertacije, pokazani su uslovi ekvivalentni slaboj konvergenciji niza pseudoverovatnoća i niza intervalno-vrednosnih pseudoverovatnoća, publikovani u

[27] i [34].

Disertacija se sastoji iz četiri poglavlja i organizovana je na sledeći način.

U prvom poglavlju su izloženi osnovni pojmovi pseudoanalize. Navedene su definicije pseudooperacija, poluprstena, $\oplus$-mere i intervalno-vrednosne $\oplus$-mere zasnovane na [35, 69, 85].

U drugom poglavlju su pokazane neke primene pseudointegrala. Data je definicija pseudointegrala u odnosu na $\oplus$-meru zasnovana na [68, 69]. Na osnovu definicije pseudointegrala u odnosu na $\oplus$-meru, u [25] je definisana g-Melinova transformacija i pokazane su neke njene osobine, kao i primena u teoriji verovatnoće. Ovaj rezultat, kao deo originalnih istraživanja, predstavljen je u drugom poglavlju. U nastavku su dati pseudointegral skupovno-vrednosne funkcije u odnosu na $\oplus$-meru i pseudointegral intervalno-vrednosne funkcije u odnosu na $\oplus$-meru definisani u [40], iz kojih je proistekao još jedan originalan rezultat, pseudointegracija g-polinoma sa intervalnim koeficijentima, kao specijalan slučaj pseudointegracije intervalno-vrednosne funkcije, publikovan u [26]. Nakon toga je dat pojam pseudointegrala u odnosu na intervalno-vrednosnu $\oplus$-meru, uveden u [85], koji je osnova za glavni rezultat disertacije. Takođe, predstavljena je intervalno-vrednosna pseudometrika koja je originalni rezultat publikovan u [55].

U trećem poglavlju je definisan pojam pseudoverovatnoće i g-slabe konvergencije niza pseudoverovatnoća. Dokazana je teorema koja daje ekvivalentne uslove g-slabe konvergencije niza pseudoverovatnoća. Pokazana je veza g-slabe konvergencije sa raznim tipovima konvergencije u teoriji verovatnoće. Definisana je generalizovana pseudoverovatnoća i pokazane su neke njene osobine. Pomoću generalizovane pseudoverovatnoće je dat nov pristup neaditivnim skupovnim funkcijama, čiji se značaj ogleda u mogućnosti „merenja” skupova koji nisu elementi familije na kojoj je generalizovana pseudoverovatnoća definisana. Svi rezultati ovog poglavlja su originalni i publikovani su u [33], [34] i [53].

Četvrto poglavlje je posvećeno izučavanju intervalno-vrednosne pseudoverovatnoće. Data je definicija intervalno-vrednosne pseudoverovatnoće i g-slabe konvergencije niza intervalno-vrednosnih pseudoverovatnoća. Pokazani su ekvivalentni uslovi g-slabe konvergencije niza intervalno-vrednosnih pseudoverovatnoća. Dati su primeri koji ilustruju primenu dobijenih rezultata u teoriji verovatnoće. Rezultati ovog poglavlja su originalni i publikovani su u [27].

* * *

Ovom prilikom bih želela da se zahvalim svojim roditeljima Ružici i Jovici, sestri Vesni, mom Davoru kao i svim dragim prijateljima i kolegama. Hvala svima koji su bili uz mene tokom studija i izrade disertacije.

Najveću zahvalnost ipak dugujem svom mentoru Tatjani Grbić, koja osim što mi je bila odličan mentor tokom doktorskih studija, prvenstveno je bila dobar prijatelj, uvek spremna da pomogne kakav god problem da me je snašao u životu. Osim Tanji, zahvalnost dugujem i svom drugom mentoru Slavici Medić, koja nam je sve teške muke pretvarala u slatke muke i uveseljavala svojom neobičnom naravi. Bez nje ništa ne bi bilo isto pa ne bi bilo ni ove disertacije. Čast je i zadovoljstvo raditi sa njima!

Takođe bih se zahvalila svim članovima komisije, a posebno Draganu Jočiću i Ivani Štajner-Papugi, na detaljnom čitanju disertacije, korisnim savetima, sugestijama i komentarima.

Za kraj, posvetila bih ovu disertaciju dvema najbitnijim osobama u mom životu: mom malom veselom anđelku Emiliji koja daje smisao mom životu. Kad sam ljuta, tužna ili me nešto boli, svojim neodoljivim osmehom mi rastopi srce i sve odmah prođe; mojoj mami Ružici koja mi je tokom odrastanja, studija, zaposlenja, početka samostalnog života bila najveća podrška, a u najtežim trenucima jedini oslonac. Hvala ti mama što si bila uz mene i pomogla mi da disertaciju privedem završetku, bez tebe to ne bi bilo moguće...

Oktobar 2020. godine — Nataša Duraković

Sadržaj

Glava 1

Uvodni pojmovi pseudoanalize

U ovom poglavlju su detaljno izloženi osnovni pojmovi iz pseudoanalize ([68, 69, 71]) na kojima se zasnivaju originalni rezultati prikazani u narednim poglavljima.

Date su definicije pseudooperacija i poluprstena. Opisane su tri klase poluprstena i veza između njih ([57, 69]). Data je definicija $\oplus$-mere ([69, 71]).

U nastavku je proširena definicija pseudooperacija na pseudooperacije na skupovima i zatvorenim intervalima ([35, 40]) i definisana je intervalno-vrednosna $\oplus$-mera ([35, 85]).

1.1 Pseudooperacije i poluprsten

Pseudooperacije predstavljaju uopštenje operacija sabiranja i množenja nad skupom realnih brojeva. Definišu se na zatvorenom intervalu $[a,b] \subseteq [-\infty,\infty]$ (u nekim slučajevima posmatraju se poluzatvoreni intervali, da bi se izbegli slučajevi $(+\infty)+(-\infty)$ ili $0\cdot(+\infty)$) (videti [67, 68, 69, 71]).

Neka je $\preceq$ relacija totalnog poretka na intervalu $[a,b]$.

Definicija 1.1 ([69]) *Pseudosabiranje* je binarna operacija $\oplus : [a,b]^2 \to [a,b]$ za koju važi:

1. za svako $x, y \in [a,b]$ je $x \oplus y = y \oplus x$ (komutativnost),
2. za svako $x, y, z \in [a,b]$ takvo da je $x \preceq y$ je $x \oplus z \preceq y \oplus z$ (neopadajuća u odnosu na relaciju totalnog poretka $\preceq$),

3. za svako $x, y, z \in [a, b]$ je $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$ (asocijativnost),
4. postoji $\mathbf{0} \in [a, b]$ tako da za svako $x \in [a, b]$ važi da je $\mathbf{0} \oplus x = x$ ($\mathbf{0}$ je neutralni element za pseudosabiranje).

Neka je $[a, b]_+ = \{x \in [a, b] \mid \mathbf{0} \preceq x\}$.

Definicija 1.2 ([69]) *Pseudomnoženje* je binarna operacija $\odot : [a, b]^2 \to [a, b]$ za koju važi:

1. za svako $x, y \in [a, b]$ je $x \odot y = y \odot x$ (komutativnost),
2. za svako $x, y \in [a, b]$ takvo da je $x \preceq y$ i svako $z \in [a, b]_+$ je $x \odot z \preceq y \odot z$ (pozitivno neopadajuća u odnosu na relaciju totalnog poretka $\preceq$),
3. za svako $x, y, z \in [a, b]$ je $x \odot (y \odot z) = (x \odot y) \odot z$ (asocijativnost),
4. postoji $\mathbf{1} \in [a, b]$ tako da za svako $x \in [a, b]$ važi da je $\mathbf{1} \odot x = x$ ($\mathbf{1}$ je neutralni element za pseudomnoženje).

Operacije $\oplus$ i $\odot$ se jednim imenom nazivaju *pseudooperacije*.

Definicija 1.3 ([69]) *Poluprsten* je struktura $([a, b], \oplus, \odot)$, gde je $[a, b] \subseteq [-\infty, \infty]$, $\oplus$ je pseudosabiranje, $\odot$ je pseudomnoženje i važi:

1. za svako $x \in [a, b]$ je $\mathbf{0} \odot x = \mathbf{0}$,
2. za svako $x, y, z \in [a, b]$ je $x \odot (y \oplus z) = (x \odot y) \oplus (x \odot z)$ (distributivnost $\odot$ u odnosu na $\oplus$).

U zavisnosti od osobina pseudooperacija, razlikuju se tri osnovne klase poluprstena.

Prva klasa poluprstena: ovu klasu čine poluprsteni kod kojih je pseudosabiranje $\oplus$ idempotentna operacija, tj. važi $x \oplus x = x$ za svako $x \in [a, b]$, dok pseudomnoženje $\odot$ nije idempotentna operacija.

Primeri poluprstena kod kojih je operacija $\oplus$ idempotentna operacija, a operacija $\odot$ je proizvoljna neidempotentna binarna operacija na $[a, b]^2$ koja zadovoljava uslove definicije 1.2 i koja je kancelativna na $(a, b)^2$ su poluprsteni $([a, b], \max, \odot)$ i $([a, b], \min, \odot)$.

U poluprstenu $([a, b], \max, \odot)$ neutralni element za operaciju pseudosabiranja je $\mathbf{0} = a$. Operacija max indukuje totalni poredak na sledeći način:

$$x \preceq y \quad \text{ako i samo ako} \quad \max(x, y) = y.$$

Tako dobijeni poredak je uobičajeni poredak na intervalu $[a, b]$.

Slično, u poluprstenu $([a, b], \min, \odot)$ neutralni elemenat za operaciju pseudosabiranja je $\mathbf{0} = b$. Operacija min indukuje totalni poredak na sledeći način:

$$x \preceq y \quad \text{ako i samo ako} \quad \min(x, y) = y.$$

Tako dobijeni poredak je obrnut uobičajenom poretku na intervalu $[a, b]$.

Neki primeri poluprstena prve klase koji se najčešće koriste su dati u narednom primeru (videti [49, 57, 69]).

Primer 1.1 ([69])

a) Poluprsten $((-\infty, +\infty], \min, +)$. Neutralni elementi za pseudooperacije su $\mathbf{0} = +\infty$ i $\mathbf{1} = 0$, a poredak je obrnut uobičajenom poretku.

   Takođe se posmatra i poluprsten $([-\infty, +\infty], \min, +)$, uz konvenciju da je $+\infty + (-\infty) = +\infty$.

b) Poluprsten $([-\infty, +\infty), \max, +)$. Neutralni elementi za pseudooperacije su $\mathbf{0} = -\infty$ i $\mathbf{1} = 0$, a poredak je uobičajeni poredak.

   Takođe se posmatra i poluprsten $([-\infty, +\infty], \max, +)$, uz konvenciju da je $+\infty + (-\infty) = -\infty$.

c) Poluprsten $((0, +\infty], \min, \cdot)$. Neutralni elementi za pseudooperacije su $\mathbf{0} = +\infty$ i $\mathbf{1} = 1$, a poredak je obrnut uobičajenom poretku.

   Takođe se posmatra i poluprsten $([0, +\infty], \min, \cdot)$, uz konvenciju da je $0 \cdot (+\infty) = +\infty$.

d) Poluprsten $([0, +\infty), \max, \cdot)$. Neutralni elementi za pseudooperacije su $\mathbf{0} = 0$ i $\mathbf{1} = 1$, a poredak je uobičajeni poredak.

   Takođe se posmatra i poluprsten $([0, +\infty], \max, \cdot)$, uz konvenciju da je $0 \cdot (+\infty) = 0$. $\diamond$

Druga klasa poluprstena: ovu klasu čine poluprsteni kod kojih su obe pseudooperacije striktne i definisane pomoću strogo monotone i neprekidne bijekcije $g : [a, b] \to [0, \infty]$.

Pseudosabiranje je dato sa

$$x \oplus y = g^{-1}\left(g(x) + g(y)\right). \tag{1.1}$$

Ako je funkcija g strogo monotono rastuća funkcija, tada je neutralni element za pseudosabiranje a i važi $g(a) = 0$ i $g(b) = +\infty$.

U slučaju da je funkcija g strogo monotono opadajuća funkcija, neutralni element za pseudosabiranje je b i važi $g(b) = 0$ i $g(a) = +\infty$.

Uz konvenciju da je $0 \cdot (+\infty) = 0$, pseudomnoženje je dato sa

$$x \odot y = g^{-1}\left(g(x) \cdot g(y)\right). \tag{1.2}$$

Poredak na intervalu $[a, b]$ indukovan operacijom pseudosabiranja $\oplus$ je dat sa

$$x \preceq y \quad \text{ako i samo ako} \quad g(x) \leq g(y).$$

Ako je pseudosabiranje $\oplus$ generisano strogo monotono rastućom funkcijom g, poredak $\preceq$ je uobičajeni poredak, a ako je g strogo monotono opadajuća funkcija, poredak $\preceq$ je obrnut uobičajenom poretku.

Funkcija g se naziva *generator* ili *generatorna funkcija*, a dobijeni poluprsten *g-poluprsten*. Pseudosabiranje $\oplus$ dato sa (1.1) i pseudomnoženje $\odot$ dato sa (1.2) se nazivaju *g-sabiranje* i *g-množenje*, redom.

Neki primeri g-poluprstena su predstavljeni u sledećem primeru (videti [50, 57, 69]).

Primer 1.2 ([50, 69])

a) Poluprsten $([-\infty, +\infty], \oplus, \odot)$, gde je generator $g(x) = e^{-x}$. Uz konvenciju da je $(-\infty) + \infty = +\infty$, pseudosabiranje i pseudomnoženje su dati sa

$$x \oplus y = -\ln(e^{-x} + e^{-y}), \quad x \odot y = x + y.$$

b) Poluprsten $([0, +\infty], \oplus, \odot)$, gde je generator $g(x) = x^{\alpha}$, $\alpha > 0$. Uz konvenciju da je $0 \cdot (+\infty) = 0$, pseudosabiranje i pseudomnoženje su dati sa

$$x \oplus y = (x^{\alpha} + y^{\alpha})^{\frac{1}{\alpha}}, \quad x \odot y = x \cdot y.$$

c) Poluprsten $([0, 1], \oplus, \odot)$, gde je generator $g(x) = 1 - x$. Pseudosabiranje i pseudomnoženje su dati sa

$$x \oplus y = x + y - 1, \quad x \odot y = x + y - xy. \qquad \diamond$$

Treća klasa poluprstena: ovu klasu čine poluprsteni kod kojih su obe pseudooperacije idempotentne, tj. za svako $x \in [a, b]$ je $x \oplus x = x$ i $x \odot x = x$.

Poluprsteni sa ovom osobinom su poluprsten $([a, b], \max, \min)$ i poluprsten $([a, b], \min, \max)$. U prvom slučaju su neutralni elementi pseudooperacija $\oplus$ i $\odot$ redom $\mathbf{0} = a$ i $\mathbf{1} = b$, a poredak je uobičajeni. U drugom slučaju su neutralni elementi pseudooperacija $\oplus$ i $\odot$ redom $\mathbf{0} = b$ i $\mathbf{1} = a$, a poredak je obrnut uobičajenom poretku.

Pored relacije totalnog poretka $\preceq$, može se posmatrati i relacija totalnog poretka $\prec$ definisana sa

$$x \prec y \quad \text{ako i samo ako} \quad x \preceq y \wedge x \neq y.$$

Fokus istraživanja, čiji su rezultati predstavljeni u narednim poglavljima, je na poluprstenima druge klase. Veliki značaj ovih poluprstena se nalazi u činjenici da se, pod određenim pretpostavkama, poluprsteni sa jednom ili obe idempotentne pseudooperacije mogu dobiti kao granična vrednost familije g-poluprstena generisanih generatorom g^λ, $\lambda \in (0,\infty)$ na sledeći način (dokaz je dat u [57]).

Neka je $([a,b],\oplus,\odot)$ poluprsten druge klase gde su pseudooperacije date strogo monotono opadajućim generatorom $g : [a,b] \to [0,\infty]$ sa (1.1) i (1.2). Funkcija g^λ je generator poluprstena $([a,b],\oplus_\lambda,\odot_\lambda)$ gde su pseudooperacije $\oplus_\lambda$ i $\odot_\lambda$ date sa

$$x \oplus_\lambda y = (g^\lambda)^{-1}\left(g^\lambda(x) + g^\lambda(y)\right)$$

i

$$x \odot_\lambda y = (g^\lambda)^{-1}\left(g^\lambda(x) g^\lambda(y)\right)$$

U [57] je pokazano da je $x \odot_\lambda y = x \odot y$.

Tada, ako $\lambda \to +\infty$, svaki poluprsten prve klase $([a,b],\inf,\odot)$, gde je operacija $\odot$ generisana strogo monotono opadajućim generatorom g, se može dobiti kao granica niza poluprstena $([a,b],\oplus_\lambda,\odot)$, tj, važi

$$x \oplus_\lambda y \longrightarrow \inf\{x,y\}.$$

Isti rezultat važi za poluprsten $([a,b],\sup,\odot)$ gde je operacija $\odot$ generisana strogo monotono rastućim generatorom g.

Takođe, isti rezultat važi ako se posmatra poluprsten $([a,b],\inf,\odot)$ prve klase, gde je operacija $\odot$ generisana strogo monotono rastućim generatorom g, ili poluprsten prve klase $([a,b],\sup,\odot)$, gde je operacija $\odot$ generisana strogo monotono opadajućim generatorom g, a $\lambda \to -\infty$ (videti [57]).

Više o klasama poluprstena i vezi između njih se može naći u [57, 69].

1.1.1 Pseudostepen

Koristeći definiciju pseudomnoženja, za svako $x \in [a,b]_+$ može se definisati i pseudostepen $x^{(p)}$, $p \in (0,\infty)$ na sledeći način (videti [75]).

Definicija 1.4 ([75]) Neka je $x \in [a,b]_+$. *Pseudostepen* je dat sa:

1. $x^{(0)} = \mathbf{1}$, $x \neq \mathbf{0}$,

2. za $n \in \mathbb{N}$ je $x^{(n)} = \underbrace{x \odot x \odot x \cdots \odot x}_{n-puta}$,

3. za $n \in \mathbb{N}$ je $x^{(\frac{1}{n})} = \sup\{y \mid y^{(n)} \leq x\}$,

4. za $m, n \in \mathbb{N}$ je $x^{(\frac{m}{n})} = \left(x^{(\frac{1}{n})}\right)^{(m)}$,

5. za $p \in (0, \infty) \backslash \mathbb{Q}$ je $x^{(p)} = \sup\{x^{(r)} \mid r \in (0, p),\ r \in \mathbb{Q}\}$.

Na osnovu neprekidnosti i monotonosti operacije $\odot$ sledi da je pseudostepen dobro definisan za proizvoljan racionalan broj $r = \frac{m}{n} \in (0, \infty)$ nezavisno od reprezentacije $r = \frac{m}{n} = \frac{m_1}{n_1}$, $n, m, n_1, m_1 \in \mathbb{N}$ (videti [75]).

U radu [2] je pokazano da, ako je operacija pseudomnoženja data strogo monotonim generatorom g, za pseudostepen $x^{(n)}$ važi

$$x^{(n)} = g^{-1}(g^n(x)), \tag{1.3}$$

za svako $x \in [a, b]$ i $n \in \mathbb{N}$.

U istom radu je pokazano da je pseudostepen $x^{(p)}$ dobro definisan i za svako $p \in (0, \infty)$ sa

$$x^{(p)} = g^{-1}(g^p(x)).$$

Ako je pseudomnoženje $\odot$ idempotentna operacija, za pseudostepen $x^{(n)}$ važi $x^{(n)} = x$.

Primer 1.3 Za poluprstene druge klase iz primera 1.2, pseudostepen $x^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$, je dat sa

a) $x^{(n)} = nx$.

b) Pseudostepen $x^{(n)}$ je jednak n-tom stepenu realnog broja, tj. $x^{(n)} = x^n$.

c) $x^{(n)} = 1 - (1 - x)^n$. $\diamond$

1.2 Metrika d na intervalu $[a, b]$

Neka je $([a, b], \oplus, \odot)$ poluprsten iz jedne od tri osnovne klase i neka su $([a, b], \oplus)$ i $([a, b], \odot)$ polugrupe koje su kompletne mreže.

Metrika $d : [a, b]^2 \to [0, \infty)$ na intervalu $[a, b]$ je kompatibilna sa $\limsup$ i $\liminf$ i zadovoljava bar jedan od sledećih uslova:

1. $d(x_1 \oplus y_1, x_2 \oplus y_2) \leq d(x_1, x_2) + d(y_1, y_2)$,

2. $d(x_1 \oplus y_1, x_2 \oplus y_2) \leq \max(d(x_1, x_2), d(y_1, y_2))$.

U [69] je pokazano da iz uslova $d(x_1 \oplus y_1, x_2 \oplus y_2) \leq \max(d(x_1, x_2), d(y_1, y_2))$, sledi uslov $d(x_1 \oplus y_1, x_2 \oplus y_2) \leq d(x_1, x_2) + d(y_1, y_2)$ ali obrnuto ne važi.

Neki primeri metrika na poluprstenima koji zadovoljavaju uslov 2. (pa samim tim i uslov 1.) su dati u sledećem primeru, a mogu se naći u [69].

Primer 1.4 ([69])

a) Poluprsten $((-\infty, +\infty], \min, +)$. Metrika d je data sa

$$d(x, y) = |e^{-\max\{x,y\}} - e^{-\min\{x,y\}}|.$$

b) Poluprsten $([-\infty, 0), \max, +)$. Metrika d je data sa

$$d(x, y) = e^{\max\{x,y\}} - e^{\min\{x,y\}}.$$

c) Poluprsten $([-\infty, +\infty], \max, \min)$. Metrika d je data sa

$$d(x, y) = \arctan(\max\{x, y\}) - \arctan(\min\{x, y\}).$$

d) Poluprsten $([a, b], \oplus, \odot)$ druge klase sa generatorom g. Metrika d je data sa

$$d(x, y) = |g(x) - g(y)|. \qquad \diamond$$

1.3 ⊕-mera

Neka je X neprazan skup i $\mathcal{F}$ σ-algebra podskupova od X. Mera je funkcija koja elementima σ-algebre $\mathcal{F}$ dodeljuje nenegativne brojeve i ima osobinu σ-aditivnosti. U praktičnim primenama je osobina σ-aditivnosti (pa i same aditivnosti) često narušena, pa je neophodno uvesti nove „mere” tzv. neaditivne mere. Primer neaditivnih mera su ⊕-mere koje su osnova za predmet istraživanja ove disertacije, a izučavane su u [69, 71].

Neka je $([a, b], \oplus, \odot)$ poluprsten iz jedne od tri osnovne klase.

Definicija 1.5 ([71]) Skupovna funkcija $\mu : \mathcal{F} \to [a, b]_+$ je ⊕-*mera* ako važi:

1. $\mu(\emptyset) = \mathbf{0}$,
2. $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \bigoplus_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) = \lim_{n\to\infty} \bigoplus_{i=1}^{n} \mu(A_i)$,

za svaki niz $\{A_i : i \in \mathbb{N}\}$ u parovima disjunktnih skupova iz $\mathcal{F}$.

U slučaju kada je pseudosabiranje idempotentna operacija, uslov $\mu(\emptyset) = \mathbf{0}$ i disjunktnost u parovima skupova $\{A_i : i \in \mathbb{N}\}$ u uslovu 2. mogu da budu izostavljeni.

Uslov 2. iz definicije 1.5 se naziva uslov σ-$\oplus$-*aditivnosti* i predstavlja analogon pojmu σ-aditivnosti kod (klasičnih) mera. U specijalnom slučaju, kada je pseudosabiranje $\oplus$ sabiranje realnih brojeva, uslov σ-$\oplus$-aditivnosti se poklapa sa uslovom σ-aditivnosti.

U slučaju g-poluprstena uslov σ-$\oplus$-aditivnosti ima oblik

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{n\to\infty} g^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} g \circ \mu(A_i)\right).$$

Osim $\oplus$-mera, za neaditivne mere se najčešće vezuje pojam fazi mera. Fazi mera je monotona skupovna funkcija $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$, takva da je $\mu(\emptyset) = 0$, gde je $\mathcal{P}(X)$ partitivni skup nepraznog skupa X. Skupovne funkcije sa navedenim osobinama se nazivaju još i kapaciteti i koriste se u definisanju Šokeovog integrala (videti [32, 54]).

Još jedan pristup definisanju fazi mere je dat u [69], gde se pod fazi merom podrazumeva monotona skupovna funkcija $m : \mathcal{F} \to [0, \infty]$, takva da je $m(\emptyset) = 0$ i za skupove $\{E_i : i \in \mathbb{N}\}$ iz $\mathcal{F}$ važi: ako je $E_1 \subset E_2 \subset \cdots$ tada je $m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \lim_{n\to\infty} m(E_i)$, a ako je $E_1 \supset E_2 \supset \cdots$ i postoji s takvo da je $m(E_s) < \infty$, tada je $m\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \lim_{n\to\infty} m(E_i)$. Neki primeri fazi mera su i mera verovanja i mera plauzabilnosti. Više o ovim merama se može naći u [69, 91].

Još neki primeri fazi mera su dekompozabilne mere ([69]). Ukoliko je $\oplus = \sup$, mera je sup-dekompozabilna i tada se dobijaju takozvane maksitivne mere (mera mogućnosti i mera neophodnosti) koje imaju primenu u teoriji mogućnosti, teoriji optimizacije, određivanju Hausdorfove dimenzije fraktala, itd. (videti [49, 69, 70, 91]).

Dualno se mogu definisati i minitivne mere ([81]). Skupovna funkcija $\mu : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ sa osobinom da je $\mu(\emptyset) = 0$ i za $A, B \in \mathcal{F}$ važi $\mu(A \cap B) = \inf\{\mu(A), \mu(B)\}$, se naziva *minitivna mera.*

Na osnovu rezultata iz [69], sledi da svaka funkcija $t : X \to [0, \infty)$ definiše minitivnu meru na sledeći način

$$\mu(A) = \inf_{x\in A} t(x), \quad A \in \mathcal{P}(X),$$

gde je $\mathcal{P}(X)$ partitivni skup skupa X.

U [92] su izučavane *uopštene mere*. Skupovna funkcija $\mu : \mathcal{C} \to [0, \infty]$, gde je $\mathcal{C}$ familija podskupova nepraznog skupa X, je uopštena mera ako je $\mu(\emptyset) = 0$. Dodavanjem dodatnih uslova koje skupovna funkcija μ zadovoljava, dobijaju se nove klase mera kao što su: monotone mere, superaditivne mere, subaditivne mere, itd. (videti [92]).

1.4 Pseudooperacije na skupovima

Deo istraživanja u disertaciji je baziran na radu sa podskupovima od $[a, b]$, te su stoga definicije pseudooperacija proširene na pseudooperacije na nepraznim podskupovima od $[a, b]$, gde je $([a, b], \oplus, \odot)$ poluprsten koji pripada jednoj od tri osnovne klase. Jedna od mogućih primena rada sa podskupovima od $[a, b]$ u poluprstenu, se može naći u izučavanju zatvorenih slučajnih skupova (videti [36, 37]). Rezultati prikazani u ovom delu su dati u [35, 40].

Definicija 1.6 ([35]) Neka je $([a, b], \oplus, \odot)$ poluprsten iz jedne od tri osnovne klase. Neka su A i B dva proizvoljna neprazna podskupa od $[a, b]$ i neka je $\alpha \in [a, b]$.
Pseudosabiranje skupova A i B je dato sa

$$A \oplus B = \{x \oplus y \mid x \in A \text{ i } y \in B\}.$$

Pseudomnoženje skupova A i B je dato sa

$$A \odot B = \{x \odot y \mid x \in A \text{ i } y \in B\}.$$

Pseudomnoženje skupa A sa *skalarom* α je dato sa

$$\alpha \odot A = \{\alpha \odot x \mid x \in A\}.$$

Sledeća definicija i tvrđenje sa dokazom su dati u [40].

Definicija 1.7 ([40]) Neprazan skup $A \subseteq [a, b]$ je *pseudokonveksan* ako za svako $x, y \in A$ i $\alpha, \beta \in [a, b]_+$ za koje je $\alpha \oplus \beta = \mathbf{1}$ važi

$$\alpha \odot x \oplus \beta \odot y \in A.$$

U definiciji se podrazumeva prioritet operacije $\odot$ u odnosu na operaciju $\oplus$, tj. važi $\alpha \odot x \oplus \beta \odot y = (\alpha \odot x) \oplus (\beta \odot y)$.

Tvrđenje 1.1 ([40]) *Svaki interval* $[u,v] \subseteq [a,b]_+$ *je pseudokonveksan skup.*

Za potrebe istraživanja definisane pseudooperacije na skupovima se posmatraju na klasi svih zatvorenih podintervala intervala $[a,b]_+$, tj. na klasi

$$\mathcal{I} = \{[u,v] \mid u \leq v \ \text{ i } \ [u,v] \subseteq [a,b]_+\}. \tag{1.4}$$

Pokazano je (videti [40]) da za $\alpha \in [a,b]_+$ i $A_1, A_2 \in \mathcal{I}$, gde je $A_1 = [u_1, v_1]$ i $A_2 = [u_2, v_2]$ važi

$$A_1 \oplus A_2 = [u_1 \oplus u_2, v_1 \oplus v_2], \quad A_1 \odot A_2 = [u_1 \odot u_2, v_1 \odot v_2]$$

i

$$\alpha \odot A_1 = [\alpha \odot u_1, \alpha \odot v_1].$$

U slučaju poluprstena prve ili treće klase gde je pseudosabiranje $\oplus = \max$ važi

$$A_1 \oplus A_2 = \max\{A_1, A_2\} = [\max\{u_1, u_2\}, \max\{v_1, v_2\}].$$

Slično, ako je $\oplus = \min$ važi

$$A_1 \oplus A_2 = \min\{A_1, A_2\} = [\min\{u_1, u_2\}, \min\{v_1, v_2\}].$$

Ako je dat poluprsten $([a,b], \oplus, \odot)$ druge klase, tj. g-poluprsten, za strogo monotono rastući generator g važi

$$g^{-1}([u,v]) = [g^{-1}(u), g^{-1}(v)],$$

pa je

$$\begin{aligned} A_1 \oplus A_2 &= g^{-1}\left([g(u_1) + g(u_2), g(v_1) + g(v_2)]\right), \\ A_1 \odot A_2 &= g^{-1}\left([g(u_1)g(u_2), g(v_1)g(v_2)]\right), \\ \alpha \odot A_1 &= g^{-1}\left(g(\alpha)[g(u_1), g(v_1)]\right), \end{aligned}$$

dok je za strogo monotono opadajući generator g važi

$$g^{-1}([u,v]) = [g^{-1}(v), g^{-1}(u)],$$

pa je

$$\begin{aligned} A_1 \oplus A_2 &= g^{-1}\left([g(v_1) + g(v_2), g(u_1) + g(u_2)]\right), \\ A_1 \odot A_2 &= g^{-1}\left([g(v_1)g(v_2), g(u_1)g(u_2)]\right), \end{aligned}$$

$$\alpha \odot A_1 \quad = \quad g^{-1}\left(g(\alpha)[g(v_1), g(u_1)]\right).$$

Definicija pseudosabiranja dva intervala $A_1 = [u_1, v_1]$ i $A_2 = [u_2, v_2]$ može da se proširi na pseudosabiranje prebrojivo mnogo intervala $A_n = [u_n, v_n]$, $n \in \mathbb{N}$, na sledeći način:

$$\begin{aligned}\bigoplus_{i=1}^{\infty}[u_i, v_i] &= \lim_{n\to\infty}\bigoplus_{i=1}^{n}[u_i, v_i] = \lim_{n\to\infty}\left[\bigoplus_{i=1}^{n} u_i, \bigoplus_{i=1}^{n} v_i\right] \\ &= \left[\lim_{n\to\infty}\bigoplus_{i=1}^{n} u_i, \lim_{n\to\infty}\bigoplus_{i=1}^{n} v_i\right] = \left[\bigoplus_{i=1}^{\infty} u_i, \bigoplus_{i=1}^{\infty} v_i\right],\end{aligned}$$

u slučaju da $\lim_{n\to\infty}\bigoplus_{i=1}^{n} u_i$ i $\lim_{n\to\infty}\bigoplus_{i=1}^{n} v_i$ postoje.

Za niz $\{[u_n, v_n] : n \in \mathbb{N}\}$ podintervala od $[a, b]_+$ se definiše $\liminf_{n\to\infty}[u_n, v_n]$ i $\limsup_{n\to\infty}[u_n, v_n]$ (videti [48]) na sledeći način:

$$\liminf_{n\to\infty}[u_n, v_n] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\bigcap_{m\geq n}[u_m, v_m]$$

i

$$\limsup_{n\to\infty}[u_n, v_n] = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}\bigcup_{m\geq n}[u_m, v_m].$$

Jasno je da je $\liminf_{n\to\infty}[u_n, v_n]$ skup svih tačaka x iz $[a, b]_+$ takvih da je $x \in [u_n, v_n]$ za sve, osim za konačno mnogo $n \in \mathbb{N}$, dok je $\limsup_{n\to\infty}[u_n, v_n]$ skup svih tačaka x iz $[a, b]_+$ takvih da je $x \in [u_n, v_n]$ za beskonačno mnogo $n \in \mathbb{N}$. Otuda je

$$\liminf_{n\to\infty}[u_n, v_n] = \{x : x = \lim_{n\to\infty} x_n, x_n \in [u_n, v_n]\} \tag{1.5}$$

i

$$\limsup_{n\to\infty}[u_n, v_n] = \{x : x = \lim_{m\in M} x_m, x_m \in [u_m, v_m]\}, \tag{1.6}$$

gde je M beskonačan uređen podskup skupa $\mathbb{N}$.

Ako za niz intervala $\{[u_n, v_n] : n \in \mathbb{N}\}$ važi $\liminf_{n\to\infty}[u_n, v_n] = \limsup_{n\to\infty}[u_n, v_n]$ tada je

$$\lim_{n\to\infty}[u_n, v_n] = \liminf_{n\to\infty}[u_n, v_n] = \limsup_{n\to\infty}[u_n, v_n]. \tag{1.7}$$

Ako limesi $\lim_{n\to\infty} u_n$ i $\lim_{n\to\infty} v_n$ postoje, tada je

$$\lim_{n\to\infty}[u_n, v_n] = \left[\lim_{n\to\infty} u_n, \lim_{n\to\infty} v_n\right]. \tag{1.8}$$

1.5 Metrika D i relacija $\preceq_S$ na zatvorenim podskupovima od $[a,b]$

Neka je $([a,b],\oplus,\odot)$ poluprsten koji pripada jednoj od osnovne tri klase i neka je $\mathcal{C}$ familija zatvorenih podskupova od $[a,b]$.

Funkcija $D:\mathcal{C}^2\to[0,\infty)$ data sa

$$D(A,B)=\max\{d(\inf A,\inf B),d(\sup A,\sup B)\},\quad A,B\in\mathcal{C}, \tag{1.9}$$

gde je d metrika na poluprstenu $([a,b],\oplus,\odot)$ definisana u delu 1.2 je metrika na $\mathcal{C}^2$. Funkcija D je Hausdorfova metrika.

Na osnovu primera 1.4 dobijaju se sledeće metrike.

Primer 1.5 Neka su $A=[u_1,v_1]$ i $B=[u_2,v_2]$, $u_1<v_1$, $u_2<v_2$, podskupovi od $[a,b]$.

a) Neka je $((-\infty,+\infty],\min,+)$ poluprsten sa metrikom d datom sa $d(x,y)=|e^{-\max\{x,y\}}-e^{-\min\{x,y\}}|$.

   Tada je $D(A,B)=\max(|e^{-u_2}-e^{-u_1}|,|e^{-v_2}-e^{-v_1}|)$.

b) Neka je $([-\infty,\infty],\max,\min)$ poluprsten sa metrikom d datom sa $d(x,y)=\arctan(\max\{x,y\})-\arctan(\min\{x,y\})$.

   Tada je $D(A,B)=\max(\arctan u_2-\arctan u_1,\arctan v_2-\arctan v_1)$.

c) Neka je $([0,\infty],\oplus,\odot)$ poluprsten druge klase sa strogo monotono rastućim generatorom $g(x)=x^2$ i metrikom d datom sa $d(x,y)=|x^2-y^2|$.

   Tada je $D(A,B)=\max(u_2^2-u_1^2,v_2^2-v_1^2)$. $\diamond$

Relacija $\preceq_S$ na klasi $\mathcal{C}$ je definisana na sledeći način.

Definicija 1.8 ([40]) Neka su $C,D\in\mathcal{C}$. $C\preceq_S D$ ako važe sledeći uslovi:

1. za svako $x\in C$ postoji $y\in D$ tako da je $x\preceq y$,

2. za svako $y\in D$ postoji $x\in C$ tako da je $x\preceq y$,

gde je $\preceq$ relacija totalnog poretka na intervalu $[a,b]$.

1.6 Intervalno-vrednosna $\oplus$-mera

U okvirima pseudoanalize proučava se intervalno-vrednosna $\oplus$-mera koja je izučavana u [35, 85]. Specijalni slučajevi intervalno-vrednosnih mera su intervalno-vrednosne verovatnoće koje imaju veliku primenu u teoriji neodređenosti i teoriji odlučivanja (videti [52, 65, 90, 93]) i predstavljaju osnovu za istraživanje sprovedeno u disertaciji.

Neka je $([a,b],\oplus,\odot)$ poluprsten koji pripada jednoj od osnovne tri klase, $\mathcal{F}$ σ-algebra podskupova od X i neka je $\mathcal{I}$ klasa svih zatvorenih podintervala intervala $[a,b]_+$ data sa (1.4).

Neka je na intervalu $[a,b]$ data relacija totalnog poretka $\preceq$ (relacija totalnog poretka koja se posmatra može biti uobičajeni poredak ili poredak obrnut uobičajenom poretku).

Definicija 1.9 ([35]) Skupovna funkcija $\Pi : \mathcal{F} \to \mathcal{I}$ je *intervalno-vrednosna $\oplus$-mera* ako važi:

1. $\Pi(\emptyset) = \{\mathbf{0}\} = [\mathbf{0},\mathbf{0}]$,
2. $\Pi(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \bigoplus_{i=1}^{\infty} \Pi(A_i) = \lim_{n\to\infty} \bigoplus_{i=1}^{n} \Pi(A_i)$,

za svaki niz $\{A_i : i \in \mathbb{N}\}$ u parovima disjunktnih skupova iz $\mathcal{F}$.

Ako je $\oplus$ idempotentna operacija, uslov 1. i uslov disjunktnosti u parovima skupova $\{A_i : i \in N\}$ u definiciji 1.9 može da se izostavi.

Monotonost intervalno-vrednosne $\oplus$-mere se definiše u odnosu na poredak $\preceq_S$ dat u odeljku 1.5.

Definicija 1.10 ([35]) Intervalno-vrednosna $\oplus$-mera Π je *monotona u odnosu na poredak $\preceq_S$* ako za $A, B \in \mathcal{F}$ važi

$$A \subseteq B \quad \text{implicira} \quad \Pi(A) \preceq_S \Pi(B).$$

Intervalno-vrednosna $\oplus$-mera predstavlja uopštenje $\oplus$-mere.

Primer 1.6 ([35])

a) Neka je $\mu : \mathcal{F} \to [a,b]_+$ $\oplus$-mera, i neka je za svako $A \in \mathcal{F}$

$$\Pi(A) = [\mu(A), \mu(A)] = \{\mu(A)\}.$$

Tada je Π intervalno-vrednosna $\oplus$-mera.

b) Neka je $\mu : \mathcal{F} \to [a,b]_+$ $\oplus$-mera, gde je $\oplus = \max$, ili je $\oplus$ dato strogo monotono rastućim generatorom g. Neka je za svako $A \in \mathcal{F}$

$$\Pi(A) = [\mathbf{0}, \mu(A)].$$

Tada je Π intervalno-vrednosna $\oplus$-mera. $\diamond$

Sledeća definicija i primer su preuzeti iz [35].

Neka je $\mathcal{M}$ proizvoljna neprazna familija $\oplus$-mera μ, takva da je $(\mathcal{M}, \preceq)$, gusto linearno uređenje sa krajevima $\mu_l, \mu_r \in \mathcal{M}$, tj.

$$\mu_l(A) \preceq \mu(A) \preceq \mu_r(A),$$

za svako $\mu \in \mathcal{M}$ i svako $A \in \mathcal{F}$.

Definicija 1.11 ([35]) Funkcija $\overline{\mu}_{\mathcal{M}} : \mathcal{F} \to \mathcal{I}$ data sa

$$\overline{\mu}_{\mathcal{M}} = [\mu_l, \mu_r],$$

ako je relacija totalnog poretka uobičajeni poredak, ili sa

$$\overline{\mu}_{\mathcal{M}} = [\mu_r, \mu_l],$$

ako je relacija totalnog poretka poredak obrnut uobičajenom poretku, se naziva *intervalno-vrednosna skupovna funkcija* za familiju $\mathcal{M}$.

Kako su μ_l i μ_r $\oplus$-mere, sledi $\mu_l(\emptyset) = \mu_r(\emptyset) = \mathbf{0}$ pa je $\overline{\mu}_{\mathcal{M}}(\emptyset) = \{\mathbf{0}\}$.

Za niz $\{A_i : i \in \mathbb{N}\}$ u parovima disjunktnih skupova iz $\mathcal{F}$, na osnovu σ-$\oplus$-aditivnosti $\oplus$-mera μ_l i μ_r sledi

$$\overline{\mu}_{\mathcal{M}}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \bigoplus_{i=1}^{\infty} \overline{\mu}_{\mathcal{M}}(A_i),$$

pa $\overline{\mu}_{\mathcal{M}}$ zadovoljava uslove definicije 1.9 tj. $\overline{\mu}_{\mathcal{M}}$ je intervalno-vrednosna $\oplus$-mera (videti [27, 35]).

Primer 1.7 ([35]) Neka je $\mathcal{M}_0$ familija $\oplus$-mera koja uključuje i trivijalnu $\oplus$-meru μ_0 oblika $\mu_0(A) = \mathbf{0}$, za svako $A \in \mathcal{F}$. Neka je $(\mathcal{M}_0, \preceq)$ gusto linearno uređen skup.

Ako za familiju $\mathcal{M}_0$ postoji $\mu_r \in \mathcal{M}_0$ tako da za svako $\mu \in \mathcal{M}_0$ i svako $A \in \mathcal{F}$ važi da je $\mu(A) \preceq \mu_r(A)$, tada je intervalno-vrednosna skupovna funkcija $\overline{\mu}_{\mathcal{M}_0}$ oblika

$$\overline{\mu}_{\mathcal{M}_0} = [\mathbf{0}, \mu_r]$$

intervalno-vrednosna $\oplus$-mera. $\diamond$

Glava 2

Pseudointegral i neke njegove primene

Ovo poglavlje se sastoji iz tri tematske celine. U prvoj celini je data definicija pseudointegrala realne funkcije u odnosu na $\oplus$-meru sa osnovnim osobinama ([68, 69, 71]). Na osnovu definicije pseudointegrala u odnosu na $\oplus$-meru, definisana je g-Melinova transformacija i pokazane su njene osobine koje su originalni rezultat disertacije koji je publikovan u [25]. Data je primena g-Melinove transformacije u teoriji verovatnoće, koja je takođe originalni rezultat publikovan u [31].

Druga celina je posvećena izučavanju pseudointegrala skupovno-vrednosne funkcije u odnosu na $\oplus$-meru sa akcentom na specijalnom slučaju, pseudointegralu intervalno-vrednosne funkcije u odnosu na $\oplus$-meru koji su uvedeni u [39, 40], a na osnovu kojih je dobijen originalan rezultat, pseudointegracija g-polinoma sa intervalnim koeficijentima, kao specijalan slučaj pseudointegracije intervalno-vrednosne funkcije. Rezultat je publikovan u [26].

U trećoj celini su izloženi rezultati vezani za pseudointegral realne funkcije u odnosu na intervalno-vrednosnu $\oplus$-meru ([35]), koji su osnova za jedan od glavnih rezultata disertacije dat u poglavlju 4. Takođe, predstavljena je intervalno-vrednosna pseudometrika koja je originalni rezultat publikovan u [55].

2.1 Pseudointegral realne funkcije u odnosu na $\oplus$-meru

Neka je $([a, b], \oplus, \odot)$ poluprsten iz jedne od tri osnovne klase sa relacijom totalnog poretka $\preceq$ i d metrika data u odeljku 1.2. Neka je $\mathcal{F}$ σ-algebra podskupova nepraznog skupa X i neka je μ $\oplus$-mera iz definicije 1.5.

Konstrukcija pseudointegrala realne funkcije u odnosu na $\oplus$-meru je slična konstrukciji Lebegovog integrala i kreće sa definicijom pseudointegrala elementarne funkcije u odnosu na $\oplus$-meru. Rezultati prikazani u ovom delu su iz [40, 69].

Definicija 2.1 ([69]) Za $A \in \mathcal{F}$ funkcija χ_A definisana sa

$$\chi_A(x) = \begin{cases} \mathbf{0} & , \quad x \notin A \\ \mathbf{1} & , \quad x \in A \end{cases} \tag{2.1}$$

se naziva *pseudokarakteristična funkcija* skupa A.

Definicija 2.2 ([69]) Preslikavanje $e : X \to [a, b]$ se naziva *elementarna funkcija* ako je oblika

$$e = \bigoplus_{i=1}^{\infty} a_i \odot \chi_{A_i}, \tag{2.2}$$

gde su $a_i \in [a, b]$, A_i disjunktni skupovi iz $\mathcal{F}$, $i \in \mathbb{N}$, a χ_{A_i} pseudokarakteristična funkcija skupa A_i.

Ako je operacija $\oplus$ idempotentna, uslov disjunktnosti skupova A_i se može izostaviti.

Definicija 2.3 ([69]) Neka je $\varepsilon > 0$ i $B \subset [a, b]$. Podskup $\{l_i^\varepsilon\}$ od B je *ε-mreža* ako za svako $x \in B$ postoji l_i^ε takav da je $d(l_i^\varepsilon, x) \leq \varepsilon$. Ako je $l_i^\varepsilon \preceq x$ tada je $\{l_i^\varepsilon\}$ *donja ε-mreža*. Ako je $l_i^\varepsilon \preceq l_{i+1}^\varepsilon$ tada je $\{l_i^\varepsilon\}$ *monotona ε-mreža*.

Dokaz sledećeg tvrđenja je dat u [69].

Tvrđenje 2.1 ([69]) *Neka je $f : X \to [a, b]$ funkcija merljiva od dole ili je f merljiva i za svako $\varepsilon > 0$ postoji monotona ε-mreža u $f(X)$. Tada postoji niz $\{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$ elementarnih funkcija takvih da za svako $x \in X$ on uniformno konvergira ka funkciji $f(x)$ u metrici d datoj u delu 1.2.*

Definicija 2.4 ([69]) *Pseudointegral elementarne funkcije e* u odnosu na $\oplus$-meru μ je

$$\int_X^{\oplus} e \odot d\mu = \bigoplus_{i=1}^{\infty} a_i \odot \mu\left(A_i\right). \tag{2.3}$$

Neka je $f : X \to [a, b]$ merljiva fukcija u odnosu na σ-algebru $\mathcal{F}$.

Definicija 2.5 ([69]) *Pseudointegral merljive funkcije* $f : X \to [a,b]$ je

$$\int_X^{\oplus} f \odot d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X^{\oplus} \varphi_n \odot d\mu,$$

gde je $\{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$ niz elementarnih funkcija takvih da $d(\varphi_n(x), f(x)) \to 0$ uniformno kada $n \to \infty$, a d je metrika data u delu 1.2.

Ovako definisan pseudointegral ne zavisi od izbora niza $\{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$ (videti [69]).

Definicija 2.6 ([69]) *Pseudointegral merljive funkcije* $f : X \to [a,b]$ *na proizvoljnom nepraznom podskupu* A *skupa* X je dat sa

$$\int_A^{\oplus} f \odot d\mu = \int_X^{\oplus} (f \odot \chi_A) \odot d\mu,$$

gde je χ_A pseudokarakteristična funkcija skupa A data sa (2.1).

Definicija 2.7 ([40]) Funkcija $f : X \to [a,b]$ je *pseudointegrabilna* ako njen pseudointegral postoji kao konačna vrednost u smislu posmatranog poluprstena.

Ograničenost u smislu posmatranog poluprstena i pseudointegrabilnost funkcije funkcije $f : X \to [a,b]$ je ilustrovana sledećim primerom iz [40].

Primer 2.1 ([40])

a) Neka je $([a,b], \oplus, \odot)$ poluprsten prve klase, gde je $[a,b] = [-\infty, \infty]$, $\oplus = \max$, a $\odot$ neidempotentna operacija, uz konvenciju $-\infty + \infty = -\infty$.

   Funkcija $f : X \to [a,b]$ je ograničena ako postoji $M \in [a,b)$ tako da za svako $x \in X$ važi da je $f(x) \preceq M \prec b$, a pseudointegrabilna ako je $\int_X^{\oplus} f \odot d\mu \prec b$.

b) Neka je $([a,b], \oplus, \odot)$ poluprsten prve klase, gde je $[a,b] = [-\infty, \infty]$, $\oplus = \min$, $\odot$ neidempotentna operacija, uz konvenciju $-\infty + \infty = \infty$.

   Funkcija $f : X \to [a,b]$ je ograničena ako postoji $M \in (a,b]$ tako da za svako $x \in X$ važi da je $f(x) \preceq M \prec a$, a pseudointegrabilna ako je $\int_X^{\oplus} f \odot d\mu \prec a$.

c) Neka je $([a,b],\oplus,\odot)$ poluprsten druge klase, gde su pseudooperacije date generatorom $g:[a,b]\to[0,\infty]$, uz konvenciju $0\cdot\infty=0$.

Ako je g strogo monotono rastući generator, funkcija $f:X\to[a,b]$ je ograničena ako postoji $M\in[a,b)$ tako da za svako $x\in X$ važi da je $f(x)\preceq M\prec b$, a pseudointegrabilna ako je $\int_X^{\oplus} f\odot d\mu\prec b$.

Ako je g strogo monotono opadajući generator, funkcija $f:X\to[a,b]$ je ograničena ako postoji $M\in(a,b]$ tako da za svako $x\in X$ važi da je $f(x)\preceq M\prec a$, a pseudointegrabilna ako je $\int_X^{\oplus} f\odot d\mu\prec a$. $\diamond$

Neka su $f_1:X\to[a,b]$ i $f_2:X\to[a,b]$ merljive funkcije. Pseudosabiranje i pseudomnoženje funkcija kao i pseudomnoženje funkcije konstantom se definišu na uobičajen način.

Za svako $x\in X$ i $c\in[a,b]$ je

$$\begin{aligned}(f_1\oplus f_2)(x)&=f_1(x)\oplus f_2(x),\\(f_1\odot f_2)(x)&=f_1(x)\odot f_2(x),\\(c\odot f_1)(x)&=c\odot f_1(x).\end{aligned}\tag{2.4}$$

Za pseudointegral važe osobine date u sledećem tvrđenju, a dokaz je dat u [69].

Tvrđenje 2.2 ([69]) *Neka su operacije $\oplus$ i $\odot$ neprekidne i $\oplus$ beskonačno komutativna i asocijativna operacija. Za neprazne podskupove A,B skupa X važi:*

(i) $\int_A^{\oplus}(f_1\oplus f_2)\odot d\mu=\int_A^{\oplus} f_1\odot d\mu\oplus\int_A^{\oplus} f_2\odot d\mu,$

(ii) $\int_A^{\odot}(c\odot f_1)\odot d\mu=c\odot\int_A^{\oplus} f_1\odot d\mu,\quad c\in[a,b]$

(iii) ako je $f_1\preceq f_2$, *tada je* $\int_A^{\oplus} f_1\odot d\mu\preceq\int_A^{\oplus} f_2\odot d\mu,$

(iv) ako je $A\cap B=\emptyset$, *tada je* $\int_{A\cup B}^{\oplus} f\odot d\mu=\int_A^{\oplus} f\odot d\mu\oplus\int_B^{\oplus} f\odot d\mu.$

Primer 2.2 Neka je $([0,\infty), \min, \odot)$ poluprsten prve klase, gde je operacija pseudomnoženja data generatorom g sa (1.2). Tada, na osnovu rezultata iz [57], pseudointegral merljive funkcije $f : X \to [0,\infty]$ je oblika

$$\int_X^{\oplus} f \odot d\mu = \inf_{x\in X} (f(x) \odot t(x)),$$

gde μ data funkcijom $t : X \to [0,\infty)$ sa $\mu(A) = \inf_{x\in A} t(x)$, za svako $A \in \mathcal{F}$. $\diamond$

Na osnovu rezultata iz [57], za dalje istraživanje je interesantan slučaj g-poluprstena gde je $\mathcal{F}$ Borelova σ-algebra. Kako je pseudosabiranje dato strogo monotonim neprekidnim generatorom g, funkcija $g \circ \mu$ je aditivna mera pa je za merljivu funkciju $f : X \to [a,b]$ pseudointegral oblika

$$\int_X^{\oplus} f \odot d\mu = g^{-1}\left(\int_X (g \circ f) d(g \circ \mu)\right), \tag{2.5}$$

gde je integral sa desne strane jednakosti Lebegov integral (videti [68, 69]).

Ako je $X = [c,d]$ i $\mathcal{F} = \mathcal{B}([c,d])$ Borelova σ-algebra, tada je $g\circ\mu$ Lebegova mera na $[c,d]$ i važi

$$\int_{[c,d]}^{\oplus} f \odot d\mu = g^{-1}\left(\int_c^d g(f(x))dx\right).$$

Pseudointegral dat sa (2.5) se naziva *g-integral*.

Osim pseudointegrala, integrali koji su konstruisani u odnosu na dekompozabilne mere su Veberov integral i Murofuši-Sugenov integral (videti [69]). Više o integralima u odnosu na neaditivne mere i njihovim primenama se može naći u [69, 91]. U literaturi se mogu naći i integrali u odnosu na uopštene mere kao što su Sugenov integral, Šokeov integral, Panov integral, itd. (videti [92]).

2.2 g-Melinova transformacija

Integralne transformacije predstavljaju veoma značajan i koristan alat u mnogim oblastima nauke, posebno u matematici i fizici, a zatim i u hemiji, biologiji, inženjerstvu (videti [20, 47, 88]). Laplasova i Furijeova transformacija su najstarije i najčešće korišćene integralne transformacije.

Imaju primenu u rešavanju diferencijalnih jednačina, integralnih jednačina, pri izračunavanju određenog integrala, sumiranju redova itd. ([20, 47]).

Osim Laplasove i Furijeove transformacije, mnoge druge integralne transformacije, kao što su Hankelova transformacija, Hilbertova transformacija i Stiltjesova transformacija se koriste za rešavanje početnih i rubnih problema kod običnih i parcijalnih diferencijalnih jednačina, i u drugim problemima u matematici ([20, 47, 88]).

Pored navedenih transformacija, u matematici se koristi i Melinova transformacija.

Definicija 2.8 ([20]) Neka je $s \in \mathbb{C}$. *Melinova transformacija* funkcije $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ je definisana sa

$$(\mathcal{M}f)(s) = \int_0^\infty x^{s-1} f(x)\, dx, \tag{2.6}$$

dok je *inverzna Melinova transformacija* funkcije $\tilde{f} = \mathcal{M}f$ definisana sa

$$(\mathcal{M}^{-1}\tilde{f})(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{-s} \tilde{f}(s)\, ds, \tag{2.7}$$

gde je $c = \operatorname{Re} s$ i $x \in \mathbb{R}^+$.

Melinova konvolucija funkcija $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ i $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ je definisana sa

$$(f *_{\mathcal{M}} h)(x) = \int_0^\infty \frac{1}{t} f\left(\frac{x}{t}\right) h(t)\, dt, \tag{2.8}$$

za $x \in \mathbb{R}$.

Melinova transformacija ima značajnu primenu kod rešavanja frakcionih integralnih i diferencijalnih jednačina, prilikom sumiranja redova i asimptotskog razvijanja u red, u ispitivanju gama funkcije i Rimanove zeta funkcije i u teoriji brojeva ([4, 13, 18, 58]). Poseban značaj ima u teoriji verovatnoće u izučavanju proizvoda nezavisnih slučajnih promenljivih ([30]).

Više detalja o Melinovoj transformaciji i primenama se može naći u [16, 20, 30, 41, 45, 46].

U radu [25] je u okvirima pseudoanalize izučavana g-Melinova transformacija. Pokazana su osnovna svojstva koja zadovoljava kao i veza sa Melinovom transformacijom. Takođe, definisane su g-Melinova konvolucija i inverzna g-Melinova transformacija i osobine koje ispunjavaju. Svi rezultati predstavljeni u nastavku su originalni i publikovani u [25].

Neka je $([a,b],\oplus,\odot)$ g-poluprsten.

Definicija 2.9 *g-Melinova transformacija $\mathcal{M}^{\oplus}f:\mathbb{R}\to[a,b]$ funkcije $f:\mathbb{R}^+\to[a,b]$ je*

$$(\mathcal{M}^{\oplus}f)(s)=\int_{\mathbb{R}^+}^{\oplus} g^{-1}(x^{s-1})\odot f\odot d\mu,$$

gde je $s\in\mathbb{R}$.

Na osnovu (2.5) sledi da je

$$(\mathcal{M}^{\oplus}f)(s)=g^{-1}\left(\int_0^{\infty} x^{s-1}g(f(x))\,dx\right). \tag{2.9}$$

Kako se definicija g-Melinove transformacije zasniva na definiciji g-integrala, g-Melinova transformacija funkcije $f:\mathbb{R}^+\to[a,b]$ je definisana na skupu $\mathbb{R}$ dok je Melinova transformacija definisana na skupu $\mathbb{C}$. Dakle, g-Melinova transformacija je uopštenje restrikcije Melinove transformacije na skupu $\mathbb{R}$. Ako se posmatra g-poluprsten kod koga je generator $g(x)=x$, g-Melinova transformacija se poklapa sa restrikcijom Melinove transformacije na skupu $\mathbb{R}$.

Neka je $s\in\mathbb{R}$ i $\mathcal{M}f$ Melinova transformacija funkcije $f:\mathbb{R}^+\to[a,b]$ data sa (2.6). Integral na desnoj strani jednakosti (2.9) je Melinova transformacija funkcije $g\circ f$, pa sledi

$$(\mathcal{M}^{\oplus}f)(s)=g^{-1}\left(\mathcal{M}\left(g\circ f\right)\right)(s)=(g^{-1}\circ\mathcal{M}\circ g\circ f)(s),$$

tj. veza g-Melinove i Melinove transformacije na $\mathbb{R}$ je data sa

$$\mathcal{M}^{\oplus}=g^{-1}\circ\mathcal{M}\circ g. \tag{2.10}$$

U sledećoj lemi je pokazana osobina pseudolinearnosti g-Melinove transformacije.

Lema 2.1 *Za funkcije $f_1:\mathbb{R}^+\to[a,b]$ i $f_2:\mathbb{R}^+\to[a,b]$ i $\lambda\in[a,b]$ važi:*

(i) $\mathcal{M}^{\oplus}(\lambda\odot f_1)=\lambda\odot(\mathcal{M}^{\oplus}f_1)$,

(ii) $\mathcal{M}^{\oplus}(f_1\oplus f_2)=(\mathcal{M}^{\oplus}f_1)\oplus(\mathcal{M}^{\oplus}f_2)$.

Dokaz. (i) Koristeći (2.4) u slučaju g-poluprstena važi

$$(\lambda \odot f_1)(x) = g^{-1}\left(g(\lambda) \cdot (g \circ f_1)(x)\right). \tag{2.11}$$

Na osnovu jednakosti (2.11) i jednakosti (2.9) se dobija

$$\begin{aligned}
(\mathcal{M}^{\oplus}(\lambda \odot f_1))(s) &= g^{-1}\left(\int_0^\infty x^{s-1} g(\lambda \odot f_1(x))\, dx\right) \\
&= g^{-1}\left(\int_0^\infty x^{s-1} g(\lambda) g(f_1(x))\, dx\right) \\
&= \lambda \odot g^{-1}\left(\int_0^\infty x^{s-1} g(f_1(x))\, dx\right) \\
&= \lambda \odot (\mathcal{M}^{\oplus} f_1)(s).
\end{aligned}$$

(ii) Slično, koristeći (2.4) u slučaju g-poluprstena važi

$$(f_1 \oplus f_2)(x) = g^{-1}\left((g \circ f_1)(x) + (g \circ f_2)(x)\right), \tag{2.12}$$

pa se na osnovu jednakosti (2.12) i jednakosti (2.9) dobija

$$\begin{aligned}
(\mathcal{M}^{\oplus}(f_1 \oplus f_2))(s) &= g^{-1}\left(\int_0^\infty x^{s-1} g((f_1 \oplus f_2)(x))\, dx\right) \\
&= g^{-1}\left(\int_0^\infty x^{s-1}\left(g(f_1(x)) + g(f_2(x))\right) dx\right) \\
&= g^{-1}\left(\int_0^\infty x^{s-1} g(f_1(x))\, dx\right) \oplus g^{-1}\left(\int_0^\infty x^{s-1} g(f_2(x))\, dx\right) \\
&= (\mathcal{M}^{\oplus} f_1)(s) \oplus (\mathcal{M}^{\oplus} f_2)(s).
\end{aligned}$$

□

U matematičkoj analizi Melinova transformacija se može primeniti na široku klasu funkcija. Međutim, u slučaju nekih elementarnih funkcija, kao što je stepena funkcija $f(x) = x^s$, $s \in \mathbb{R}$, integral u Melinovoj transformaciji divergira, pa Melinova transformacija stepene funkcije ne postoji.

U sledećem primeru je pokazano da se pogodnim odabirom generatora g može izračunati g-Melinova transformacija stepene funkcije.

Primer 2.3 Neka je $([-\infty, \infty], \oplus, \odot)$ g-poluprsten sa generatorom $g(x) = e^{-x}$ i funkcija $f(x) = x^s$, $s \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. g-Melinova transformacija funkcije f je

$$(\mathcal{M}^{\oplus} x^s)(s) = g^{-1}\left(\int\limits_0^{\infty} x^{s-1} g(x^s)\, dx\right) = g^{-1}\left(\int\limits_0^{\infty} x^{s-1} e^{x^s}\, dx\right).$$

Smenom promenljive u poslednjem integralu se dobija

$$(\mathcal{M}^{\oplus} x^s)(s) = g^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) = \ln |s|. \qquad \diamond$$

U nastavku je data definicija g-Melinove konvolucije i veza sa Melinovom konvolucijom koje su deo originalnog rezultata predstavljenog u [25].

Definicija 2.10 *g-Melinova konvolucija* $f \star_{\mathcal{M}} h : \mathbb{R} \to [a, b]$ funkcija $f : \mathbb{R}^+ \to [a, b]$ i $h : \mathbb{R}^+ \to [a, b]$ je

$$(f \star_{\mathcal{M}} h)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^+}^{\oplus} g^{-1}\left(\frac{1}{t}\right) \odot f\left(\frac{x}{t}\right) \odot h(t) \odot d\mu,$$

gde $x \in \mathbb{R}$.

Neka je $x \in \mathbb{R}$ i $f *_{\mathcal{M}} h$ Melinova konvolucija funkcija $f : \mathbb{R}^+ \to [a, b]$ i $h : \mathbb{R}^+ \to [a, b]$ data sa (2.8). Na osnovu definicije g-integrala (2.5) i definicije 2.10, se dobija da je

$$(f \star_{\mathcal{M}} h)(x) = g^{-1}\left(\int\limits_0^{\infty} \frac{1}{t}(g \circ f)\left(\frac{x}{t}\right)(g \circ h)(t)\, dt\right). \tag{2.13}$$

Kako integral na desnoj strani jednakosti (2.13) predstavlja Melinovu konvoluciju funkcija $g \circ f$ i $g \circ h$, dobija se veza g-Melinove i Melinove konvolucije

$$f \star_{\mathcal{M}} h = g^{-1}\left((g \circ f) *_{\mathcal{M}} (g \circ h)\right).$$

U sledećem primeru je izračunata g-Melinova konvolucija funkcija za koje Melinova konvolucija ne postoji.

Primer 2.4 Neka je $([-\infty, \infty], \oplus, \odot)$ g-poluprsten sa generatorom $g(x) = e^{-x}$ i neka su date funkcije $f(x) = \ln x$ i $h(x) = x$. Melinova konvolucija funkcija f i h je

$$(f *_{\mathcal{M}} h)(x) = \int\limits_0^{\infty} \frac{1}{t} \ln \frac{x}{t} t\, dt = \int\limits_0^{\infty} \ln \frac{x}{t}\, dt.$$

Kako integral sa desne strane jednakosti divergira, Melinova konvolucija datih funkcija ne postoji.

S druge strane, g-Melinova konvolucija funkcija f i h je

$$\begin{aligned}(f \star_{\mathcal{M}} h)(x) &= g^{-1}\left(\int_0^\infty \frac{1}{t} e^{-\ln\frac{x}{t}} e^{-t}\,dt\right) = g^{-1}\left(\int_0^\infty \frac{1}{x} e^{-t}\,dt\right)\\ &= g^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \ln|x|. \qquad \diamond\end{aligned}$$

Integralne transformacije imaju dobro poznatu osobinu da transformacija konvolucije funkcija za rezultat daje proizvod transformacija datih funkcija. U sledećoj teoremi je pokazano da je g-Melinova transformacija g-Melinove konvolucije funkcija f i h jednaka pseudoproizvodu g-Melinovih transformacija funkcija f i h.

Teorema 2.1 *Neka su* $f : \mathbb{R}^+ \to [a,b]$ *i* $h : \mathbb{R}^+ \to [a,b]$*. Tada je*

$$\mathcal{M}^{\oplus}(f \star_{\mathcal{M}} h) = (\mathcal{M}^{\oplus} f) \odot (\mathcal{M}^{\oplus} h).$$

Dokaz. Iz jednakosti (2.9), jednakosti (2.13) i Fubinijeve teoreme sledi

$$\begin{aligned}\left(\mathcal{M}^{\oplus}(f \star_{\mathcal{M}} h)(x)\right)(s) &= g^{-1}\left(\int_0^\infty x^{s-1} g(f \star_{\mathcal{M}} h)(x)\,dx\right)\\ &= g^{-1}\left(\int_0^\infty x^{s-1} \int_0^\infty \frac{1}{t}(g\circ f)\left(\frac{x}{t}\right)(g\circ h)(t)\,dt\,dx\right)\\ &= g^{-1}\left(\int_0^\infty (g\circ h)(t) \int_0^\infty (tu)^{s-1}(g\circ f)(u)\,du\,dt\right)\\ &= g^{-1}\left(\int_0^\infty t^{s-1}(g\circ h)(t)\,dt \int_0^\infty u^{s-1}(g\circ f)(u)\,du\right)\\ &= g^{-1}\left(g((\mathcal{M}^{\oplus} h)(s)) \cdot g((\mathcal{M}^{\oplus} f)(s))\right)\\ &= (\mathcal{M}^{\oplus} f)(s) \odot (\mathcal{M}^{\oplus} h)(s).\end{aligned}$$

$\square$

U nastavku je definisan operator $\left(\mathcal{M}^{\oplus}\right)^{-1}$ za koji važi

$$\left(\mathcal{M}^{\oplus}\right)^{-1} \circ \mathcal{M}^{\oplus} f = f.$$

Neka je $\mathcal{M}^{\oplus} f = \tilde{f}$ g-Melinova transformacija funkcije $f : \mathbb{R}^+ \to [a, b]$ i $\mathcal{M}^{-1}$ inverzna Melinova transformacija funkcije f data sa (2.7). Tada, za

$$\left(\mathcal{M}^{\oplus}\right)^{-1}(\tilde{f}) = (g^{-1} \circ \mathcal{M}^{-1} \circ g)(\tilde{f}), \tag{2.14}$$

važi

$$\begin{aligned}
\left(\mathcal{M}^{\oplus}\right)^{-1} \circ (\mathcal{M}^{\oplus} f) &= (g^{-1} \circ \mathcal{M}^{-1} \circ g) \circ (\mathcal{M}^{\oplus} f) \\
&= (g^{-1} \circ \mathcal{M}^{-1} \circ g) \circ \left(g^{-1} \circ \mathcal{M} \circ g\right)(f) \\
&= f,
\end{aligned}$$

kada desna strana jednakosti (2.14) postoji.

Dakle, ako je $\mathcal{M}^{\oplus} f = \tilde{f}$ g-Melinova transformacija funkcije f onda je $\left(\mathcal{M}^{\oplus}\right)^{-1} \tilde{f} = f$.

Iz definicije g-Melinove transformacije (2.9) sledi da je $g \circ \tilde{f}$ definisano tako da je $(g \circ \tilde{f})(s) = \int\limits_0^{\infty} x^{s-1}(g \circ f)(x)\, dx$, tj.

$$g \circ \tilde{f} = \mathcal{M}(g \circ f).$$

Tada je $\mathcal{M}^{-1}(g \circ \tilde{f}) = g \circ f$, tj. $g^{-1} \circ \mathcal{M}^{-1} \circ g \circ \tilde{f} = f$, pa iz (2.14) sledi

$$\left(\mathcal{M}^{\oplus}\right)^{-1} \tilde{f} = f.$$

Definicija 2.11 Operator $\left(\mathcal{M}^{\oplus}\right)^{-1}$ dat sa (2.14) se naziva *inverzna g-Melinova transformacija* za g-Melinovu transformaciju $\mathcal{M}^{\oplus}$.

Operator $\left(\mathcal{M}^{\oplus}\right)^{-1}$ zadovoljava osobinu pseudolinearnosti, što je pokazano u sledećoj lemi.

Lema 2.2 *Neka je $\lambda \in [a, b]$, $f_1 : \mathbb{R}^+ \to [a, b]$, $f_2 : \mathbb{R}^+ \to [a, b]$, $\tilde{f}_1 = \mathcal{M}^{\oplus} f_1$ i $\tilde{f}_2 = \mathcal{M}^{\oplus} f_2$. Tada je*

(*i*) $\left(\mathcal{M}^{\oplus}\right)^{-1}(\lambda \odot \tilde{f}_1) = \lambda \odot \left(\left(\mathcal{M}^{\oplus}\right)^{-1} \tilde{f}_1\right)$,

(*ii*) $\left(\mathcal{M}^{\oplus}\right)^{-1}(\tilde{f}_1 \oplus \tilde{f}_2) = \left(\left(\mathcal{M}^{\oplus}\right)^{-1} \tilde{f}_1\right) \oplus \left(\left(\mathcal{M}^{\oplus}\right)^{-1} \tilde{f}_2\right)$.

Dokaz. Iz jednakosti (2.11), jednakosti (2.12) i jednakosti (2.14) i osobine linearnosti inverzne Melinove transformacije sledi

$$
\begin{aligned}
(i)\quad \left(\mathcal{M}^{\oplus}\right)^{-1}(\lambda \odot \tilde{f}_1) &= (g^{-1} \circ \mathcal{M}^{-1} \circ g)(\lambda \odot \tilde{f}_1) \\
&= g^{-1} \circ \mathcal{M}^{-1}(g(\lambda) \cdot g(\tilde{f}_1)) \\
&= g^{-1}\left(g(\lambda)(\mathcal{M}^{-1} g(\tilde{f}_1)\right) \\
&= \lambda \odot g^{-1}\left(\mathcal{M}^{-1} g(\tilde{f}_1)\right) \\
&= \lambda \odot \left(\left(\mathcal{M}^{\oplus}\right)^{-1} \tilde{f}_1\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(ii)\quad \left(\mathcal{M}^{\oplus}\right)^{-1}(\tilde{f}_1 \oplus \tilde{f}_2) &= (g^{-1} \circ \mathcal{M}^{-1} \circ g)(\tilde{f}_1 \oplus \tilde{f}_2) \\
&= g^{-1} \circ \mathcal{M}^{-1}(g(\tilde{f}_1) + g(\tilde{f}_2)) \\
&= g^{-1}\left(\left(\mathcal{M}^{-1} g(\tilde{f}_1)\right) + \left(\mathcal{M}^{-1} g(\tilde{f}_2)\right)\right) \\
&= g^{-1}\left(\mathcal{M}^{-1} g(\tilde{f}_1)\right) \oplus g^{-1}\left(\mathcal{M}^{-1} g(\tilde{f}_2)\right) \\
&= \left(\left(\mathcal{M}^{\oplus}\right)^{-1} \tilde{f}_1\right) \oplus \left(\left(\mathcal{M}^{\oplus}\right)^{-1} \tilde{f}_2\right).
\end{aligned}
$$

□

2.2.1 Primena g-Melinove transformacije i g-Melinove konvolucije u teoriji verovatnoće

U nastavku je pokazana primena g-Melinove transformacije i g-Melinove konvolucije u teoriji verovatnoće. Primerom je ilustrovana veza između g-Melinove konvolucije i funkcije gustine proizvoda nezavisnih slučajnih promenljivih neprekidnog tipa. Rezultati su originalni i publikovani u [31].

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ prostor verovatnoće i $([a,b], \oplus, \odot)$ g-poluprsten. Neka je X nenegativna slučajna promenljiva neprekidnog tipa na prostoru verovatnoće $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ data funkcijom gustine φ_X.

Definicija 2.12 ([30]) *Melinova transformacija slučajne promenljive X* je data sa

$$(\mathcal{M}X)(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} \varphi_X(x)\, dx, \quad s \in \mathbb{C}, \tag{2.15}$$

ukoliko integral sa desne strane jednakosti (2.15) konvergira.

Na osnovu (2.9) se dobija defincija g-Melinove transformacije slučajne promenljive.

Definicija 2.13 *g-Melinova transformacija slučajne promenljive X* je data sa

$$(\mathcal{M}^{\oplus}X)(s) = g^{-1}\left(\int_0^{\infty} x^{s-1} g(\varphi_X(x))\,dx\right), \quad s \in \mathbb{R}.$$

Primer 2.5 Neka je $([0,\infty], \oplus, \odot)$ g-poluprsten, gde je generator $g(x) = x^2$.

(a) Neka je X slučajna promenljiva sa uniformnom raspodelom na intervalu (a, b), $0 < a < b$. Funkcija gustine slučajne promenljive X je $\varphi_X(x) = \dfrac{1}{b-a}$, $x \in (a, b)$.

Tada je g-Melinova transformacija slučajne promenljive X

$$\begin{aligned}(\mathcal{M}^{\oplus}X)(s) &= g^{-1}\left(\int_{a^2}^{b^2} x^{s-1}\left(\frac{1}{b-a}\right)dx\right) \\ &= \frac{1}{b-a}\sqrt{\frac{b^{2s}-a^{2s}}{s}},\end{aligned}$$

za $s \in \mathbb{R}$.

(b) Neka je X slučajna promenljiva sa eksponencijalnom raspodelom sa parametrom $\lambda > 0$. Funkcija gustine slučajne promenljive X je $\varphi_X(x) = \lambda\, e^{-\lambda\, x}$, $x > 0$.

Tada je g-Melinova transformacija slučajne promenljive X

$$\begin{aligned}(\mathcal{M}^{\oplus}X)(s) &= g^{-1}\left(\int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-2\lambda\, x}\,dx\right) \\ &= \sqrt{2^{1-s}\lambda^{3-s}\int_0^{\infty} x^{s-1}e^{-x}\,dx} \\ &= \sqrt{2^{1-s}\lambda^{3-s}\Gamma(s)},\end{aligned}$$

za $s \in \mathbb{R}$, gde je $\Gamma(\cdot)$ Gama funkcija. $\diamond$

Neka su X i Y slučajne promenljive neprekidnog tipa na prostoru verovatnoće $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ date funkcijama gustine φ_X i φ_Y, redom.

Definicija 2.14 ([30]) *Melinova konvolucija slučajnih promenljivih* X i Y je data sa

$$(X *_{\mathcal{M}} Y)(x) = \int_0^{\infty} \frac{1}{t}\varphi_X\left(\frac{x}{t}\right)\varphi_Y(t)\,dt.$$

Za dve nezavisne slučajne promenljive neprekidnog tipa, poznato je da je funkcija gustine proizvoda tih slučajnih promenljivih jednaka njihovoj Melinovoj konvoluciji (videti [28]), tj. ako su X i Y nezavisne slučajne promenljive i $Z = XY$, tada je

$$\varphi_Z(x) = (X *_{\mathcal{M}} Y)(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

gde je φ_Z funkcija gustine slučajne promenljive Z.

Neka je $([a, b], \oplus, \odot)$ g-poluprsten. Na osnovu (2.13) se dobija definicija g-Melinove konvolucije slučajnih promenljivih.

Definicija 2.15 *g-Melinova konvolucija slučajnih promenljivih* X i Y je data sa

$$(X \star_{\mathcal{M}} Y)(x) = g^{-1}\left(\int_0^\infty \frac{1}{t}(g \circ \varphi_X)\left(\frac{x}{t}\right)(g \circ \varphi_Y)(t)\, dt\right).$$

U sledećem primeru je pokazana veza između Melinove konvolucije slučajne promenljive sa normalnom raspodelom i slučajne promenljive sa eksponencijalnom raspodelom i g-Melinove konvolucije slučajnih promenljivih čije su funkcije gustina polinomne funkcije.

Primer 2.6 Neka je $([-\infty, \infty], \oplus, \odot)$ g-poluprsten, gde je generator $g(x) = e^{-x}$. Neka su X i Y nezavisne slučajne promenljive date funkcijama gustine $\varphi_X(x) = \dfrac{x^2}{2}$, $x \in (0, \sqrt[3]{6})$ i $\varphi_Y(y) = y$, $y \in (0, \sqrt{2})$.

g-Melinova konvolucija slučajnih promenljivih X i Y je

$$(X \star_{\mathcal{M}} Y)(x) = g^{-1}\left(\int_0^\infty \frac{1}{t} e^{-\frac{x^2}{2t^2}} e^{-t}\, dt\right). \tag{2.16}$$

Integral na desnoj strani jednakosti (2.16) je Melinova konvolucija slučajne promenljive sa standardizovanom normalnom raspodelom i slučajne promenljive sa eksponencijalnom raspodelom sa parametrom $\lambda = 1$.

Sada sledi da je

$$g\left((X \star_{\mathcal{M}} Y)(x)\right) = \sqrt{2\pi}\, \varphi_Z(x),$$

gde je φ_Z funkcija gustine slučajne promenljive $Z = UV$, gde su U i V nezavisne slučajne promenljive sa standardizovanom normalnom raspodelom i eksponencijalnom raspodelom sa parametrom $\lambda = 1$, redom. $\diamond$

2.3 Pseudointegral skupovno-vrednosne funkcije u odnosu na $\oplus$-meru

Integral skupovno-vrednosne funkcije je prvi put izučavan u radu [8]. Po autoru je danas poznat pod nazivom Aumanov integral i zasniva se na klasičnom Lebegovom integralu. Još neki integrali skupovno-vrednosnih funkcija u odnosu na neaditivne mere, kao što su pseudointegral, Šokeov i Sugenov tip integrala, $\perp$-integral, (G) fazi integral, su predstavljeni u [40, 44, 94, 95, 96].

Značaj izučavanja skupovno-vrednosnih funkcija pa samim tim i integracije takvih funkcija se nalazi u širokoj primeni u ekonomiji, stohastici, slučajnim skupovima, optimizaciji itd. (videti [3, 7, 60]).

U nastavku su dati rezultati iz [39, 40]. Definisan je pseudointegral skupovno-vrednosne funkcije sa osobinama koje zadovoljava.

Neka je $([a,b], \oplus, \odot)$ poluprsten koji pripada jednoj od tri osnovne klase. Neka je X neprazan skup, $\Sigma = \mathcal{P}(X)$ i μ $\oplus$-mera.

Neka je $\mathcal{C}$ klasa svih zatvorenih podskupova od $[a,b]_+$.

Definicija 2.16 ([39]) *Skupovno-vrednosna funkcija F* je funkcija koja preslikava skup X u $\mathcal{C} \setminus \{\emptyset\}$.

U daljem radu će biti posmatrane merljive skupovno-vrednosne funkcije.

Definicija 2.17 ([40]) Skupovno-vrednosna funkcija $F : X \to \mathcal{C} \setminus \{\emptyset\}$ je *merljiva* ako je grafik $\mathrm{Gr}(F)$ merljiv skup, tj. ako važi

$$\mathrm{Gr}(F) = \{(x,r) \in X \times [a,b]_+ \mid r \in F(x)\} \in \Sigma \times \mathcal{B}_{[a,b]_+},$$

gde je $\mathcal{B}([a,b]_+)$ Borelova σ-algebra na $[a,b]_+$.

Neka je $L^1_\oplus(\mu)$ familija funkcija $f : X \to [a,b]_+$ koje su merljive, pseudointegrabilne i ograničene u smislu posmatranog poluprstena.

Definicija 2.18 ([39]) Neka je F merljiva skupovno-vrednosna funkcija. *Pseudointegral skupovno-vrednosne funkcije F na skupu $A \in \Sigma$* je

$$\int_A^{\oplus} F \odot d\mu = \left\{ \int_A^{\oplus} f \odot d\mu \mid f \in \mathrm{S}(F) \right\},$$

gde je

$$\mathrm{S}(F) = \{f \in L^1_\oplus(\mu) \mid f(x) \in F(x) \text{ za skoro svako } x \in X\}.$$

Funkcija $f \in \mathrm{S}(F)$ se naziva *skoro siguran selektor* skupovno-vrednosne funkcije F, a $\mathrm{S}(F)$ je skup skoro sigurnih selektora merljive funkcije F.

U sledećem primeru je dat oblik pseudointegrala skupovno-vrednosne funkcije za različite poluprstene. Primer je zasnovan na primerima iz [40].

Primer 2.7 a) Neka je $([a,b],\oplus,\odot)$ poluprsten prve klase, gde je pseudosabiranje $\oplus = \min$, a pseudomnoženje $\odot$ nije idempotentna operacija. Na osnovu [67, 68, 69] $\oplus$-mera μ je data sa $\mu(A) = \inf\limits_{x\in A} t(x)$ za svako $A \in \Sigma$, gde je $t : \mathbb{R} \to [a,b]$ proizvoljna funkcija.

Tada je pseudointegral skupovno-vrednosne funkcije F oblika

$$\int_A^{\oplus} F \odot d\mu = \left\{ \inf_{x\in A} \left(f(x) \odot t(x)\right) \mid f \in \mathrm{S}(F) \right\}.$$

b) Neka je $([a,b],\oplus,\odot)$ poluprsten druge klase, gde su pseudooperacije date generatorom $g : [a,b] \to [0,\infty]$, sa (1.1) i (1.2).

Tada je pseudointegral skupovno-vrednosne funkcije F oblika

$$\int_A^{\oplus} F \odot d\mu = \left\{ g^{-1}\left(\int_A g \circ f \, d(g \circ \mu) \right) \Big| f \in \mathrm{S}(F) \right\}.$$

Ako se posmatra poluprsten druge klase $([0,\infty],\oplus,\odot)$ sa generatorom $g(x) = x^{\frac{1}{2}}$, dobija se

$$\int_A^{\oplus} F \odot d\mu = \left\{ \left(\int_A (f(x))^2 \; dx \right)^{\frac{1}{2}} \Big| f \in \mathrm{S}(F) \right\}.$$

c) Neka je $([a,b],\oplus,\odot)$ poluprsten treće klase, gde je pseudosabiranje $\oplus = \max$, a pseudomnoženje $\odot = \min$. Na osnovu [67, 68, 69] $\oplus$-mera μ je data funkcijom $t : \mathbb{R} \to [a,b]$ sa $\mu(A) = \sup\limits_{x\in A} t(x)$, za svako $A \in \Sigma$.

Tada je pseudointegral skupovno-vrednosne funkcije F oblika

$$\int_A^{\oplus} F \odot d\mu = \left\{ \sup_{x\in A} \left(\min(f(x), t(x))\right) \mid f \in \mathrm{S}(F) \right\}. \qquad \diamond$$

Definicija 2.19 ([39]) Skupovno-vrednosna funkcija $F : X \to \mathcal{C} \setminus \{\emptyset\}$ je *pseudointegrabilna* na nekom skupu $A \in \Sigma$ ako je

$$\int_A^{\oplus} F \odot d\mu \neq \emptyset.$$

Definicija 2.20 ([39]) Skupovno-vrednosna funkcija F je *pseudointegrabilno ograničena* ako postoji funkcija $h \in L^1_{\oplus}(\mu)$ takva da:

1. $\bigoplus\limits_{\alpha \in F(x)} \alpha \preceq h(x),$ za idempotentno pseudosabiranje,

2. $\sup\limits_{\alpha \in F(x)} \alpha \preceq h(x),$ za pseudosabiranje dato strogo monotono rastućim generatorom g,

3. $\inf\limits_{\alpha \in F(x)} \alpha \preceq h(x),$ za pseudosabiranje dato strogo monotono opadajućim generatorom g.

Dovoljan uslov za pseudointegrabilnost skupovno-vrednosne funkcije je dat u sledećem tvrđenju koje je dokazano u [39].

Tvrđenje 2.3 ([39]) *Ako je F pseudointegrabilno ograničena skupovno-vrednosna funkcija, tada je F pseudointegrabilna.*

Osobine pseudointegrala skupovno-vrednosne funkcije su date u narednom tvrđenju (videti [39]).

Tvrđenje 2.4 ([39]) *Neka je F pseudointegrabilna skupovno-vrednosna funkcija, F_1 i F_2 pseudointegrabilno ograničene skupovno-vrednosne funkcije i neka su $A, B \in \Sigma$. Tada važi:*

(i) ako je $A \subset B$, tada je $\int_A^{\oplus} F \odot d\mu \preceq_S \int_B^{\oplus} F \odot d\mu,$

(ii) ako je $F_1 \preceq_S F_2$, tada je $\int_X^{\oplus} F_1 \odot d\mu \preceq_S \int_X^{\oplus} F_2 \odot d\mu,$

(iii) ako su A i B disjunktni skupovi iz Σ, tada je

$$\int_{A \cup B}^{\oplus} F \odot d\mu = \int_A^{\oplus} F \odot d\mu \oplus \int_B^{\oplus} F \odot d\mu$$

(u slučaju da je $\oplus$ idempotentna operacija, uslov disjunktnosti može da se izostavi),

(iv) *ako je* $\mu(A) = \mathbf{0}$, *tada je* $\int_A^{\oplus} F \odot d\mu = \{\mathbf{0}\}$,

(v) *ako je* $\mathbf{0} \prec \alpha$, *tada je* $\int_X^{\oplus} (\alpha \odot F) \odot d\mu = \alpha \odot \int_X^{\oplus} F \odot d\mu$,

gde je $\preceq_S$ *relacija data u odeljku 1.5.*

2.3.1 Pseudointegral intervalno-vrednosne funkcije u odnosu na $\oplus$-meru

Intervalno-vrednosne funkcije imaju primenu u raznim oblastima nauke i tehnike (u kompjuterskoj grafici, optimizaciji, slučajnim skupovima, fazi slučajnim promenljivim itd.)(videti [1, 77]). Sve veća mogućnost njihove primene dovela je do potrebe za izučavanjem intervalno-vrednosnih funkcija, pa samim tim i do integracije takvih funkcija.

Specijalan slučaj skupovno-vrednosnih funkcija predstavljenih u odeljku 2.3 su intervalno-vrednosne funkcije. Pseudointegral intervalno-vrednosne funkcije je izučavan u [40].

Neka je $\mathcal{I}$ klasa svih zatvorenih podintervala intervala $[a, b]_+$ data sa (1.4).

Definicija 2.21 ([40]) *Intervalno-vrednosna funkcija* F je funkcija koja preslikava skup X u $\mathcal{I}$.

U radu [40] su izučavane intervalno-vrednosne funkcije koje su merljive u smislu definicije 2.17.

Kako je kodomen intervalno-vrednosne funkcije F interval, intervalno-vrednosna funkcija F ima reprezentaciju

$$F(x) = [l(x), r(x)], \tag{2.17}$$

gde su $l : X \to [a, b]_+$ i $r : X \to [a, b]_+$ *granične funkcije.*

Jasno je da su granične funkcije merljive kao i da $l(x), r(x) \in F(x)$, za svako $x \in X$. Međutim, u opštem slučaju ograničenost i pseudointegrabilnost graničnih funkcija ne moraju biti zadovoljeni (videti [40]). Dovoljan uslov za ograničenost i pseudointegrabilnost graničnih funkcija je dat u sledećem tvrđenju dokazanom u [40].

Tvrđenje 2.5 ([40]) *Ako je intervalno-vrednosna funkcija $F : X \to \mathcal{I}$ pseudointegrabilno ograničena, tada njene granične funkcije pripadaju klasi* $\mathrm{S}(F)$.

Na osnovu prethodnog tvrđenja može se zaključiti da za granične funkcije pseudointegrabilno ograničene intervalno-vrednosne funkcije F važi

$$l(x) = \inf_{f \in \mathrm{S}(F)} f(x) \quad \text{i} \quad r(x) = \sup_{f \in \mathrm{S}(F)} f(x).$$

Pseudosabiranje i pseudomnoženje dve intervalno vrednosne funkcije, kao i pseudomnoženje intervalno-vrednosne funkcije konstantom je definisano na sledeći način.

Neka su F_1 i F_2 intervalno-vrednosne funkcije date graničnim funkcijama sa $F_1(x) = [l_1(x), r_1(x)]$ i $F_2(x) = [l_2(x), r_2(x)]$ i $\alpha \in [a,b]_+$. Tada je

$$(F_1 \oplus F_2)(x) = F_1(x) \oplus F_2(x),$$
$$(F_1 \odot F_2)(x) = F_1(x) \odot F_2(x)$$

i

$$(\alpha \odot F_1)(x) = \alpha \odot F_1(x).$$

Na osnovu reprezentacije (2.17) intervalno-vrednosne funkcije i osobina pseudosabiranja i pseudomnoženja intervala iz dela 1.4 sledi

$$(F_1 \oplus F_2)(x) = [l_1(x) \oplus l_2(x), r_1(x) \oplus r_2(x)],$$
$$(F_1 \odot F_2)(x) = [l_1(x) \odot l_2(x), r_1(x) \odot r_2(x)]$$

i

$$(\alpha \odot F_1)(x) = [\alpha \odot l_1(x), \alpha \odot r_1(x)].$$

Kako su intervalno-vrednosne funkcije specijalan slučaj skupovno-vrednosnih funkcija, sve definicije i tvrđenja koja važe za pseudointegral skupovno-vrednosne funkcije važe i za pseudointegral intervalno-vrednosne funkcije.

Još neke osobine pseudointegrala intervalno-vrednosne funkcije su date u nastavku.

Posledica 2.1 ([40]) *Neka je F intervalno-vrednosna funkcija. Tada je* $\int_X^{\oplus} F \odot d\mu$ *pseudokonveksan podskup od* $[a,b]_+$.

Lema 2.3 ([40]) *Neka je F intervalno-vrednosna funkcija data graničnim funkcijama l i r ograničenim u smislu datog poluprstena. Tada je*

$$\int_X^{\oplus} F \odot d\mu \subseteq \left[\int_X^{\oplus} l \odot d\mu, \int_X^{\oplus} r \odot d\mu \right].$$

Lema 2.4 ([40]) *Neka je F intervalno-vrednosna funkcija data graničnim funkcijama l i r ograničenim u smislu datog poluprstena. Tada se sve vrednosti iz otvorenog intervala $\left(\int_X^{\oplus} l \odot d\mu, \int_X^{\oplus} r \odot d\mu \right)$ mogu predstaviti kao pseudo-konveksna kombinacija $\alpha \odot \int_X^{\oplus} l \odot d\mu \oplus \beta \odot \int_X^{\oplus} r \odot d\mu$, gde je $\alpha, \beta \in [a,b]_+$ i $\alpha \oplus \beta = \mathbf{1}$.*

Na osnovu prethodne dve leme i tvrđenja 2.5 je pokazana sledeća teorema.

Teorema 2.2 ([40]) *Neka je F pseudointegrabilno ograničena intervalno-vrednosna funkcija sa graničnim funkcijama l i r. Tada je*

$$\int_X^{\oplus} F \odot d\mu = \left[\int_X^{\oplus} l \odot d\mu, \int_X^{\oplus} r \odot d\mu \right].$$

Neka je $([a,b], \oplus, \odot)$ poluprsten druge klase, gde su pseudooperacije date generatorom $g : [a,b] \to [0, \infty]$, sa (1.1) i (1.2) i neka je F intervalno-vrednosna funkcija data graničnim funkcijama $l : X \to [a,b]_+$ i $r : X \to [a,b]_+$ sa $F(x) = [l(x), r(x)]$.

Tada, na osnovu rezultata iz [40], *g-integral intervalno-vrednosne funkcije* F je dat sa

$$\int_X^{\oplus} F \odot d\mu = \left[g^{-1} \left(\int_X (g \circ l) d(g \circ \mu) \right), g^{-1} \left(\int_X (g \circ r) d(g \circ \mu) \right) \right].$$

Ako je generator g strogo monotono rastuća funkcija sledi

$$\int_X^{\oplus} F \odot d\mu = g^{-1} \left(\left[\int_X (g \circ l) d(g \circ \mu), \int_X (g \circ r) d(g \circ \mu) \right] \right).$$

Ako je generator g strogo monotono opadajuća funkcija sledi

$$\int_X^{\oplus} F \odot d\mu = g^{-1}\left(\left[\int_X (g\circ r)d(g\circ\mu), \int_X (g\circ l)d(g\circ\mu)\right]\right).$$

2.4 g-integral pseudopolinoma sa intervalnim koeficijentima

U ovom delu je prikazan specijalan slučaj pseudointegrala intervalno-vrednosne funkcije, g-integral pseudopolinoma sa intervalnim koeficijentima. Date su definicije pseudopolinoma i pseudopolinoma sa intervalnim koeficijentima kao jedan oblik uopštenja polinoma. Takođe, predstavljen je g-integral pseudopolinoma sa intervalnim koeficijentima i dokazana su neka njegova svojstva. Rezultati su dati u slučaju poluprstena druge klase, tj. g-poluprstena. U ostalim slučajevima, na osnovu rezultata iz [57], pod određenim pretpostavkama poluprsteni prve i treće klase se mogu dobiti kao granična vrednost familije g-poluprstena.

Svi rezultati ovog odeljka su originalni i publikovani su u [26].

Neka je $([0,\infty],\oplus,\odot)$ poluprsten druge klase gde su pseudooperacije date strogo monotonim generatorom $g:[0,\infty]\to[0,\infty]$.

Definicija 2.22 *Pseudopolinom $p_{(n)}(x)$ pseudostepena n, $n\in\mathbb{N}$* je definisan sa

$$p_{(n)}(x) = a_n \odot x^{(n)} \oplus a_{n-1}\odot x^{(n-1)} \oplus \cdots \oplus a_1 \odot x^{(1)} \oplus a_0,$$

gde $a_k\in[0,\infty]$, $k\in\{0,1,\ldots,n\}$ i $a_n\neq \mathbf{0}$.

Neka je $\mathcal{I}$ klasa svih zatvorenih podintervala intervala $[0,\infty]$.

Definicija 2.23 *Pseudopolinom $P_{(n)}(x)$ pseudostepena n, $n\in\mathbb{N}$ sa intervalnim koeficijentima* je definisan sa

$$P_{(n)}(x) = A_n \odot x^{(n)} \oplus A_{n-1}\odot x^{(n-1)} \oplus \cdots \oplus A_1 \odot x^{(1)} \oplus A_0,$$

gde $A_k=[a_{k_l},a_{k_r}]\in\mathcal{I}$, $k\in\{0,1,\ldots,n\}$ i $A_n\neq\{\mathbf{0}\}$.

Na osnovu definicije pseudomnoženja (1.2) i definicije pseudostepena (1.3) se može pokazati sledeća lema.

Lema 2.5 *Neka je $([0,\infty],\odot,\oplus)$ g-poluprsten i $k,m,p\in\mathbb{N}$. Tada je*

$$(i)\ \ a_k \odot x^{(k)} = g^{-1}\left(g(a_k)\cdot g^k(x)\right),$$

$$(ii)\quad a_m \odot x^{(m)} \oplus a_p \odot x^{(p)} = g^{-1}\left(g(a_m)\cdot g^m(x) + g(a_p)\cdot g^p(x)\right).$$

U narednoj lemi je pokazan sličan rezultat za pseudopolinome sa intervalnim koeficijentima.

Lema 2.6 *Neka je* $([0,\infty],\odot,\oplus)$ *g-poluprsten i* $k,m,p\in\mathbb{N}$*. Za strogo monotono rastući generator* g *važi:*

$$\begin{aligned}(i)\quad A_k\odot x^{(k)} &= g^{-1}\left(g([a_{k_l},a_{k_r}])\cdot g^k(x)\right)\\ &= \left[a_{k_l}\odot g^{-1}\left(g^k(x)\right), a_{k_r}\odot g^{-1}\left(g^k(x)\right)\right].\end{aligned}$$

$$(ii)\quad A_m\odot x^{(m)}\oplus A_p\odot x^{(p)} = g^{-1}\left(g(A_m)\cdot g^m(x)+g(A_p)\cdot g^p(x)\right).$$

gde $A_k, A_m, A_p \in \mathcal{I}$, *i* $A_k = [a_{k_l}, a_{k_r}]$.

Dokaz. (i) Na osnovu definicije operacije $\odot$ dobija se

$$\begin{aligned}A_k\odot x^{(k)} &= g^{-1}(g(A_k)\cdot g(x^{(k)}))\\ &= g^{-1}\left(g([a_{k_l},a_{k_r}])\cdot g(g^{-1}(g^k(x)))\right)\\ &= g^{-1}\left(g([a_{k_l},a_{k_r}])\cdot g^k(x)\right)\\ &= g^{-1}\left([g(a_{k_l})\cdot g^k(x), g(a_{k_r})\cdot g^k(x)]\right)\\ &= \left[g^{-1}\left(g(a_{k_l})\cdot g^k(x)\right), g^{-1}\left(g(a_{k_r})\cdot g^k(x)\right)\right]\\ &= \left[a_{k_l}\odot g^{-1}\left(g^k(x)\right), a_{k_r}\odot g^{-1}\left(g^k(x)\right)\right].\end{aligned}$$

(ii) Slično, iz definicije operacija $\oplus$ i $\odot$ dobija se

$$\begin{aligned}A_m\odot x^{(m)}\oplus A_p\odot x^{(p)} &= g^{-1}\left(g(A_m\odot x^{(m)}) + g(A_p\odot x^{(p)})\right)\\ &= g^{-1}\left(g\left(g^{-1}\left(g(A_m)\cdot g(x^{(m)})\right)\right)\right.\\ &\quad\left.+g\left(g^{-1}\left(g(A_p)\cdot g(x^{(p)})\right)\right)\right)\\ &= g^{-1}\left(g(A_m)\cdot g(x^{(m)}) + g(A_p)\cdot g(x^{(p)})\right)\\ &= g^{-1}\left(g(A_m)\cdot g^m(x)+g(A_p)\cdot g^p(x)\right).\end{aligned}$$

□

Sličan rezultat se može pokazati i za poluprsten druge klase sa strogo monotono opadajućim generatorom g.

Za $\alpha \odot x^{(n)} \oplus \beta \odot x^{(n)}$, $\alpha, \beta \in (0, \infty]$ i svaki strogo monoton generator g, važi

$$\begin{aligned} \alpha \odot x^{(n)} \oplus \beta \odot x^{(n)} &= (\alpha \oplus \beta) \odot x^{(n)} \\ &= g^{-1}(g(\alpha \oplus \beta) \cdot g(x^{(n)})) \\ &= g^{-1}((g(\alpha) + g(\beta)) \cdot g^{n}(x)) \end{aligned} \tag{2.18}$$

Za g-množenje pseudostepena $x^{(m)}$ i $x^{(n)}$ važi

$$\begin{aligned} x^{(m)} \odot x^{(n)} &= g^{-1}(g(x^{(m)}) \cdot g(x^{(n)})) \\ &= g^{-1}(g^{m}(x) \cdot g^{n}(x)) \\ &= g^{-1}(g^{m+n}(x)) \\ &= x^{(m+n)}. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Lema 2.7 *Neka je* $([0, \infty], \odot, \oplus)$ *g-poluprsten sa strogo monotono rastućim generatorom* g *i neka su* $m, n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in (0, \infty]$. *Za pseudopolinom pseudostepena* m $p_{(m)}(x)$ *i pseudopolinom pseudostepena* n $q_{(n)}(x)$ *važi:*

(i) $p_{(m)}(x) \oplus q_{(n)}(x)$ *pseudopolinom pseudostepena* $\max\{m, n\}$;

(ii) $\alpha \odot p_{(m)}(x)$ *pseudopolinom pseudostepena* m;

(iii) $p_{(m)}(x) \odot q_{(n)}(x)$ *pseudopolinom pseudostepena* $m + n$.

Dokaz. Dokaz sledi direktno iz (2.18) i (2.19). □

Slično tvrđenje važi i za pseudopolinome sa intervalnim koeficijentima.

Na osnovu rezultata iz [68] i definicije pseudostepena, sledi tvrđenje sledeće leme.

Lema 2.8 *Neka je* $([0, \infty], \odot, \oplus)$ *g-poluprsten. Tada je*

$$\int_X^{\oplus} \left(a_k \odot x^{(k)}\right) \odot d\mu = g^{-1}\left(g(a_k) \int_X g^{k}(x) d(g \circ \mu)\right).$$

Lema 2.9 *Neka je* $([0, \infty], \odot, \oplus)$ *g-poluprsten sa strogo monotono rastućim generatorom* g. *Tada je*

$$\begin{aligned} &\int_X^{\oplus} (A_k \odot x^{(k)}) \odot d\mu \\ &= \left[g^{-1}\left(g(a_{k_l}) \int_X g^{k}(x) d(g \circ \mu)\right), g^{-1}\left(g(a_{k_r}) \int_X g^{k}(x) d(g \circ \mu)\right)\right], \end{aligned}$$

gde $A_k = [a_{k_l}, a_{k_r}] \in \mathcal{I}$, $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

Dokaz. Koristeći rezultate leme 2.6 i definiciju g-integrala intervalno-vrednosne funkcije, za strogo monotono rastući generator g se dobija

$$\begin{aligned}
&\int_X^{\oplus} (A_k \odot x^{(k)}) \odot d\mu \\
&\quad = g^{-1}\left(\left[\int_X g \circ g^{-1}\left(g(a_{k_l})\, g^k(x)\right) d(g\circ\mu),\right.\right. \\
&\qquad\qquad \left.\left.\int_X g \circ g^{-1}\left(g(a_{k_r})\, g^k(x)\right) d(g\circ\mu)\right]\right) \\
&\quad = g^{-1}\left(\left[\int_X g(a_{k_l})\, g^k(x) d(g\circ\mu), \int_X g(a_{k_r})\, g^k(x) d(g\circ\mu)\right]\right) \\
&\quad = \left[g^{-1}\left(\int_X g(a_{k_l})\, g^k(x) d(g\circ\mu)\right), g^{-1}\left(\int_X g(a_{k_r})\, g^k(x) d(g\circ\mu)\right)\right] \\
&\quad = \left[g^{-1}\left(g(a_{k_l}) \int_X g^k(x) d(g\circ\mu)\right), g^{-1}\left(g(a_{k_r}) \int_X g^k(x) d(g\circ\mu)\right)\right].
\end{aligned}$$

□

Sličan rezultat važi i za poluprsten druge klase sa strogo monotono opadajućim generatorom g.

Na osnovu leme 2.9 i osobina g-integrala intervalno-vrednosne funkcije ([40, 38, 39]) sledi naredna teorema.

Teorema 2.3 *Neka je* $([0,\infty], \odot, \oplus)$ *g-poluprsten i neka je*

$$P_{(n)}(x) = A_n \odot x^{(n)} \oplus \cdots \oplus A_1 \odot x^{(1)} \oplus A_0,$$

pseudopolinom pseudostepena n, $n \in \mathbb{N}$ sa intervalnim koeficijentima, gde je $A_k = [a_{k_l}, a_{k_r}] \in \mathcal{I}$, $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ i $A_n \neq \{\mathbf{0}\}$. Tada je g-integral pseudopolinoma $P_{(n)}(x)$ dat sa

$$\int_X^{\oplus} P_{(n)}(x) \odot d\mu = A_n \odot \int_X^{\oplus} x^{(n)} \odot d\mu \oplus \cdots \oplus A_0 \odot \int_X^{\oplus} d\mu.$$

U nastavku su dati primeri kojima je ilustrovana pseudointegracija pseudopolinoma sa intervalnim koeficijentima.

Primer 2.8 Neka je $([0,\infty], \oplus, \odot)$ g-poluprsten sa generatorom $g(x) = e^x$. Tada je $x \oplus y = \ln(e^x + e^y)$, $x \odot y = x + y$ i $x^{(n)} = nx$, za $n \in \mathbb{N}$.

Za pseudopolinom sa intervalnim koeficijentima

$$P_{(3)}(x) = [0,2] \oplus \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right] \odot x^{(1)} \oplus [0,1] \odot x^{(2)}$$

važi
$$\begin{aligned} P_{(3)}(x) &= [0,2] \oplus \left[\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}\right] \odot x^{(1)} \oplus [0,1] \odot x^{(2)} \\ &= [0,2] \oplus \left[\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}\right] \odot x \oplus [0,1] \odot 2x \\ &= [0,2] \oplus \left[\tfrac{1}{2}+x, \tfrac{3}{2}+x\right] \oplus [2x, 1+2x] \\ &= \left[\ln(1+e^{\frac{1}{2}+x}), \ln(e^2+e^{\frac{3}{2}+x})\right] \oplus [2x, 1+2x] \\ &= \left[\ln(1+e^{\frac{1}{2}+x}+e^{2x}), \ln(e^2+e^{\frac{3}{2}+x}+e^{1+2x})\right]. \end{aligned}$$

Dakle, g-integral pseudopolinoma sa intervalnim koeficijentima $P_{(3)}(x)$ nad intervalom $[0,1]$ je

$$\begin{aligned} &\int_{[0,1]}^{\oplus} \left([0,2] \oplus \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right] \odot x^{(1)} \oplus [0,1] \odot x^{(2)}\right) \odot d\mu \\ &= \ln\left(\left[\int_0^1 e^{\ln(1+e^{\frac{1}{2}+x}+e^{2x})}dx, \int_0^1 e^{\ln(e^2+e^{\frac{3}{2}+x}+e^{1+2x})}dx\right]\right) \\ &= \ln\left(\left[\tfrac{1}{2}+e^{\frac{3}{2}}+\tfrac{1}{2}e^2-e^{\frac{1}{2}}, e^2+e^{\frac{5}{2}}+\tfrac{1}{2}e^3-e^{\frac{3}{2}}-\tfrac{e}{2}\right]\right) \\ &= \ln([7.027, 23.773]) \\ &= [1.9498, 3.16855]. \end{aligned}$$ ◇

Primer 2.9 Neka je $([0,\infty], \oplus, \odot)$ g-poluprsten sa generatorom $g(x) = x^2$. Tada je $x \oplus y = (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$, $x \odot y = x \cdot y$ i $x^{(n)} = x^n$, za $n \in \mathbb{N}$.

Za pseudopolinom sa intervalnim koeficijentima $P_{(3)}(x)$ iz primera 2.8 važi

$$\begin{aligned} P_{(3)}(x) &= [0,2] \oplus \left[\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}\right] \odot x^{(1)} \oplus [0,1] \odot x^{(2)} \\ &= [0,2] \oplus \left[\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}\right] \odot x \oplus [0,1] \odot x^2 \\ &= [0,2] \oplus \left[\tfrac{x}{2}, \tfrac{3x}{2}\right] \oplus [0, x^2] \\ &= \left[(\tfrac{x^2}{4})^{\frac{1}{2}}, (4+\tfrac{9x^2}{4})^{\frac{1}{2}}\right] \oplus [0, x^2] \\ &= \left[\tfrac{x}{2}, (4+\tfrac{9x^2}{4}+x^4)^{\frac{1}{2}}\right]. \end{aligned}$$

Dakle, g-integral pseudopolinoma sa intervalnim koeficijentima $P_{(3)}(x)$ nad intervalom $[0,1]$ je

$$\int\limits_{[0,1]}^{\oplus} \left([0,2] \oplus \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right] \odot x^{(1)} \oplus [0,1] \odot x^{(2)} \right) \odot d\mu$$
$$= \left(\left[\int\limits_0^1 \frac{x^2}{4} dx, \int\limits_0^1 (4 + \frac{9x^2}{4} + x^4) dx \right] \right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \left(\left[\tfrac{1}{12}, \tfrac{297}{60} \right] \right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= [0.2887, 2.2249] . \qquad \diamond$$

2.5 Pseudointegral realne funkcije u odnosu na intervalno-vrednosnu $\oplus$-meru

Pseudointegral realne funkcije $f : X \to [a,b]$, gde je $([a,b], \oplus, \odot)$ poluprsten koji pripada jednoj od tri osnovne klase, u odnosu na intervalno-vrednosnu $\oplus$-meru je proširenje pseudointegrala realne funkcije f u odnosu na $\oplus$-meru. Slično konstrukciji pseudointegrala u odnosu na $\oplus$-meru i konstrukcija pseudointegrala u odnosu na intervalno-vrednosnu $\oplus$-meru počinje definicijom pseudointegrala elementarne funkcije u odnosu na intervalno-vrednosnu $\oplus$-meru.

U nastavku se posmatra intervalno-vrednosna $\oplus$-mera $\overline{\mu}_{\mathcal{M}}$ data definicijom 1.11, a definicije i tvrđenja sa dokazima su dati u [35].

Definicija 2.24 ([35]) *Pseudointegral elementarne funkcije* e date sa (2.2), u odnosu na intervalno-vrednosnu $\oplus$-meru $\overline{\mu}_{\mathcal{M}}$, je

$$\int\limits_X^{\oplus} e \odot d\overline{\mu}_{\mathcal{M}} = \bigoplus_{i=1}^{\infty} a_i \odot \overline{\mu}_{\mathcal{M}} (A_i) ,$$

gde su A_i disjunktni skupovi iz σ-algebre $\mathcal{F}$ podskupova od X.

Tvrđenje 2.6 ([35]) *Ako je e elementarna funkcija data sa (2.2), tada važi*

$$\int\limits_X^{\oplus} e \odot d\overline{\mu}_{\mathcal{M}} = \left[\int\limits_X^{\oplus} e \odot d\mu_l, \int\limits_X^{\oplus} e \odot d\mu_r \right] ,$$

gde su $\int\limits_X^{\oplus} e \odot d\mu_l$, $\int\limits_X^{\oplus} e \odot d\mu_r$ *pseudointegrali elementarne funkcije e dati sa (2.3),* $\overline{\mu}_{\mathcal{M}}$ *intervalno-vrednosna ⊕-mera iz definicije 1.11, a relacija totalnog poretka je uobicajeni poredak.*

Definicija 2.25 ([35]) *Pseudointegral merljive funkcije* $f : X \to [a, b]$ *u odnosu na intervalno-vrednosnu ⊕-meru* $\overline{\mu}_{\mathcal{M}}$ iz definicije 1.11 je

$$\int\limits_X^{\oplus} f \odot d\overline{\mu}_{\mathcal{M}} = \lim_{n\to\infty} \int\limits_X^{\oplus} \varphi_n \odot d\overline{\mu}_{\mathcal{M}},$$

gde je $\{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$ niz elementarnih funkcija takvih da $d(\varphi_n(x), f(x)) \to 0$ uniformno, kada $n \to \infty$, gde je d metrika data u delu 1.2.

Definicija 2.26 ([35]) *Pseudointegral merljive funkcije f u odnosu na intervalno-vrednosnu ⊕-meru* $\overline{\mu}_{\mathcal{M}}$ *na proizvoljnom nepraznom podskupu A skupa X* je dat sa

$$\int\limits_A^{\oplus} f \odot d\overline{\mu}_{\mathcal{M}} = \int\limits_X^{\oplus} (f \odot \chi_A) \odot d\overline{\mu}_{\mathcal{M}},$$

gde je χ_A pseudokarakteristična funkcija skupa A data sa (2.1).

U [35] je pokazano sledeće tvrđenje.

Tvrđenje 2.7 ([35]) *Ako je* $f : X \to [a, b]$ *merljiva funkcija, tada je*

$$\int\limits_X^{\oplus} f \odot d\overline{\mu}_{\mathcal{M}} = \left[\int\limits_X^{\oplus} f \odot d\mu_l, \int\limits_X^{\oplus} f \odot d\mu_r \right],$$

gde je $\overline{\mu}_{\mathcal{M}}$ *intervalno-vrednosna ⊕-mera iz definicije 1.11, a relacija totalnog poretka je uobicajeni poredak.*

Dakle, pseudointegral funkcije f u odnosu na intervalno-vrednosnu ⊕-meru $\overline{\mu}_{\mathcal{M}} = [\mu_l, \mu_r]$ je interval kod koga je leva granica jednaka pseudointegralu funkcije f u odnosu na ⊕-meru μ_l, a desna pseudointegralu funkcije f u odnosu na ⊕-meru μ_r.

Još neke osobine pseudointegrala u odnosu na intervalno-vrednosnu ⊕-meru $\overline{\mu}_{\mathcal{M}}$, prikazane u nastavku, dokazane su u [35].

Tvrđenje 2.8 ([35]) *Neka su* $f, f_1, f_2 : X \to [a, b]$ *merljive funkcije,* $\alpha \in [a, b]_+$ *i A podskup skupa X iz* $\mathcal{F}$*. Tada važi:*

$$(i)\quad \int_X^{\oplus} (f_1 \oplus f_2) \odot d\overline{\mu}_{\mathcal{M}} = \int_X^{\oplus} f_1 \odot d\overline{\mu}_{\mathcal{M}} \oplus \int_X^{\oplus} f_2 \odot d\overline{\mu}_{\mathcal{M}};$$

$$(ii)\quad \int_X^{\oplus} (\alpha \odot f) \odot d\overline{\mu}_{\mathcal{M}} = \alpha \odot \int_X^{\oplus} f \odot d\overline{\mu}_{\mathcal{M}};$$

$$(iii)\quad \int_A^{\oplus} \alpha \odot d\overline{\mu}_{\mathcal{M}} = \alpha \odot \overline{\mu}_{\mathcal{M}}(A);$$

$$(iv)\quad \textit{ako } f_1 \preceq f_2 \textit{ onda } \int_X^{\oplus} f_1 \odot d\overline{\mu}_{\mathcal{M}} \preceq_S \int_X^{\oplus} f_2 \odot d\overline{\mu}_{\mathcal{M}}.$$

Primer 2.10 ([35]) Ako je $\overline{\mu}_{\mathcal{M}_0}$ intervalno-vrednosna $\oplus$-mera iz primera 1.7, a poluprsten je takav da pseudosabiranje generiše uobičajen poredak na intervalu, tada je pseudointegral u odnosu na meru $\overline{\mu}_{\mathcal{M}_0}$ oblika

$$\int_X^{\oplus} f \odot d\overline{\mu}_{\mathcal{M}_0} = \left[\mathbf{0}, \int_X^{\oplus} f \odot d\mu_r\right]. \qquad \diamond$$

Koristeći definiciju pseudointegrala funkcije f u odnosu na intervalno-vrednosnu $\oplus$-meru $\overline{\mu}_{\mathcal{M}}$, pokazano je (videti [35]) da se može konstruisati nova skupovno-vrednosna funkcija $\overline{\mu}^f_{\mathcal{M}}$ data na sledeći način

$$\overline{\mu}^f_{\mathcal{M}}(A) = \int_A^{\oplus} f \odot d\overline{\mu}_{\mathcal{M}} = \left[\int_A^{\oplus} f \odot d\mu_l, \int_A^{\oplus} f \odot d\mu_r\right], \quad A \subseteq X.$$

Za ovako definisanu skupovno-vrednosnu funkciju važi da je intervalno-vrednosna $\oplus$-mera koja je monotona u odnosu na poredak $\preceq_S$ iz definicije 1.8.

2.6 Intervalno-vrednosna pseudometrika

U ovom delu je predstavljen originilni rezultat publikovan u [55]. Pomoću intervalno-vrednosne $\oplus$-mere je definisana pseudometrika, tj. intervalno-vrednosno rastojanje između dve merljive funkcije.

Neka je (X, Σ, m) prostor mere, gde je $m : \Sigma \to [0, \infty)$ nenegativna mera i neka je $\mathcal{L}^p(m)$ skup svih m-merljivih funkcija f, takvih da je $|f|^p$

m-integrabilna funkcija. U realnoj analizi se rastojanje $d : \mathcal{L}^p(m)^2 \to [0, \infty)$ između dve m-integrabilne funkcije f_1 i f_2 definiše pomoću L^p norme (videti [14]), tj.

$$d(f_1, f_2) = \|f_1 - f_2\|_p = \left(\int\limits_X |f_1 - f_2|^p \, dm \right)^{\frac{1}{p}} .$$

Međutim, za dve funkcije f_1 i f_2 koje su jednake skoro svuda u odnosu na meru m, jasno je da je $d(f_1, f_2) = 0$, pa ovako definisana funkcija d nije metrika na $\mathcal{L}^p(m)$.

Prethodni problem se može izbeći ako se posmatra klasa ekvivalencije funkcija iz $\mathcal{L}^p(m)$ koje su jednake skoro svuda u odnosu na meru m sa funkcijom $f \in \mathcal{L}^p(m)$. Neka je F klasa ekvivalencije funkcija iz $\mathcal{L}^p(m)$ koje su jednake skoro svuda u odnosu na meru m sa funkcijom $f \in \mathcal{L}^p(m)$. Neka je L^p skup svih klasa ekvivalencije funkcija jednakih skoro svuda u odnosu na meru m. Tada se definiše rastojanje između dve klase F_1 i F_2 na sledeći način:

$$D(F_1, F_2) = d(f_1, f_2),$$

gde je $f_1 \in F_1$ i $f_2 \in F_2$. Ovako definisano rastojanje je metrika na prostoru L^p (videti [14]).

Prethodni rezultat je u [83] uopšten za subaditivne mere, a u [75] je umesto Lebegovog integrala posmatran pseudointegral u odnosu na $\oplus$-meru.

Pseudo L^p prostor definisan u [75] je jedno uopštenje L^p prostora u okviru pseudoanalize. Pokazano je (videti [2]) da ako f_1 i f_2 pripadaju pseudo L^p prostoru, tada i $f_1 \oplus f_2$ takođe pripada pseudo L^p prostoru. Ako f_1 pripada pseudo L^p prostoru, f_2 pripada pseudo L^q prostoru i $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, za $p, q \in (1, \infty)$, tada $f_1 \odot f_2$ pripada pseudo L^1 prostoru. Prethodni rezultat je pokazan za poluprstene druge klase, gde je g strogo monotono rastući generator i za poluprstene prve klase kod kojih je pseudosabiranje $\oplus = \sup$, a pseudomnoženje je dato strogo monotono rastućim generatorom g.

U nastavku je data definicija pseudometrike na proizvoljnom nepraznom podskupu intervala $[a, b]$, sa vrednostima u poluprstenu i definicija rastojanja između merljivih funkcija, koje su uvedene u [75].

Neka je $([a, b], \oplus, \odot)$ g-poluprsten, gde je g strogo monotono rastući generator ili poluprsten prve klase gde je pseudosabiranje $\oplus = \sup$, a pseudomnoženje je dato strogo monotono rastućim generatorom g. Neka je na $[a, b]$ data relacija totalnog poretka $\preceq$.

Na nepraznom podskupu A intervala $[a, b]$ definiše se pseudometrika na sledeći način.

Definicija 2.27 ([75]) Funkcija $d_\oplus : A \times A \to [a,b]_+$ je *pseudometrika* na A ako važi:

(PM1) $d_\oplus(x,y) = \mathbf{0}$ ako i samo ako $x = y$, za svako $x, y \in A$,

(PM2) $d_\oplus(x,y) = d_\oplus(y,x)$, za svako $x, y \in A$,

(PM3) postoji $c \in [a,b]_+$ tako da za svako $x, y, z \in A$ važi $d_\oplus(x,y) \preceq c \odot (d_\oplus(x,z) \oplus d_\oplus(z,y))$.

Ako je $([a,b], \oplus, \odot)$ g-poluprsten, gde je g strogo monotono rastući generator, funkcija $d_\oplus : [a,b] \times [a,b] \to [a,b]$ data sa

$$d_\oplus(x,y) = g^{-1}(|g(x) - g(y)|), \tag{2.20}$$

zadovoljava uslove definicije 2.27, odnosno $d_\oplus$ je pseudometrika na $[a,b]$. Jasno je da je tada $c = \mathbf{1}$.

U [75] je pokazano da ako je $([a,b], \oplus, \odot)$ poluprsten kod koga je $x \oplus y = \sup(x,y)$, a pseudomnoženje je dato strogo monotono rastućim generatorom g, funkcija data sa (2.20) je pseudometrika na $[a,b]$ i $c = g^{-1}(2)$.

U [75] se za dve merljive funkcije $f_1 : X \to [a,b]$ i $f_2 : X \to [a,b]$ i $p \in (0,\infty)$ definiše funkcija

$$\mathrm{D}_{p,\oplus}(f_1,f_2) = \left(\int_X^{\oplus} (d_\oplus(f_1,f_2))_\odot^{(p)} \odot d\mu \right)_\odot^{\left(\frac{1}{p}\right)}. \tag{2.21}$$

Specijalno, ako je $p = 1$ a pseudointegral je g-integral dat sa (2.5), tada je

$$\mathrm{D}_{1,\oplus}(f_1,f_2) = g^{-1}\left(\int_X g \circ d_\oplus(f_1,f_2) d(g \circ \mu) \right).$$

Skup svih merljivih funkcija $f : X \to [a,b]$ takvih da je $\mathrm{D}_{p,\oplus}(f,\mathbf{0})$ konačna vrednost u smislu posmatranog poluprstena se označava sa $\mathcal{L}_\oplus^p$.

Nedostatak funkcije date sa (2.21) je ilustrovan sledećim primerom.

Primer 2.11 Neka su funkcije $f_1 : X \to [a,b]$ i $f_2 : X \to [a,b]$ takve da je $f_2(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in (a,b) \\ C, & x = a \text{ ili } x = b. \end{cases}$

Iako je $f_1 \neq f_2$, jasno je da je za funkcije f_1 i f_2 $\mathrm{D}_{1,\oplus}(f_1,f_2) = \mathbf{0}$, pa funkcija $\mathrm{D}_{1,\oplus}$ ne zadovoljava uslov (PM1) definicije 2.27, odnosno, $\mathrm{D}_{1,\oplus}$ nije pseudometrika na prostoru merljivih funkcija. $\diamond$

Da bi se izbegao problem iz prethodnog primera, kao i u teoriji mere potrebno je definisati klase ekvivalencije funkcija jednakih skoro svuda u odnosu na posmatranu $\oplus$-meru.

Definicija 2.28 ([75]) Dve merljive funkcije $f_1 : X \to [a,b]$ i $f_2 : X \to [a,b]$ su *jednake skoro svuda u odnosu na $\oplus$-meru μ na X*, u oznaci $f_1 = f_2$ μ-s.s., ako je

$$\mu\left(x \in X : f_1(x) \neq f_2(x)\right) = \mathbf{0}.$$

Neka je F skup svih merljivih funkcija iz X u $[a,b]$ koje su jednake skoro svuda sa funkcijom $f : X \to [a,b]$ u odnosu na $\oplus$-meru μ, tj. F je klasa ekvivalencije kojoj pripada merljiva funkcija f. Skup svih klasa ekvivalencije se označava sa $\mathrm{L}^p_{\oplus}$ i naziva se pseudo L^p prostor (videti [75]).

Kao i u klasičnoj teoriji mere, u [75] je za dve klase ekvivalencije F_1 i F_2, definisana funkcija

$$\mathrm{D}_{p,\oplus}(F_1, F_2) = \mathrm{D}_{p,\oplus}(f_1, f_2),$$

gde su $f_1 \in F_1$, $f_2 \in F_2$. Ovako definisana funkcija zadovoljava uslove (PM1), (PM2) i (PM3), tj. $\mathrm{D}_{p,\oplus}$ je pseudometrika na skupu klasa ekvivalencije $\mathrm{L}^p_{\oplus}$.

Na osnovu rezultata iz [75], u [55] je posmatran g-integral dat sa (2.5), pri čemu je g strogo monotono rastući generator, a rastojanje između funkcija je definisano u odnosu na intervalno-vrednosnu $\oplus$-meru iz definicije 1.11. Rezultati iz [55] su originalni i predstavljeni su u nastavku.

Neka je $([a,b], \oplus, \odot)$ g-poluprsten, gde je g strogo monotono rastući generator i $A \subset [a,b]$.

Definicija 2.29 Funkcija $D_{\oplus} : A \times A \to \mathcal{I}$ je *intervalno-vrednosna pseudometrika* na A ako važi:

(IPM1) $D_{\oplus}(x,y) = [\mathbf{0}, \mathbf{0}]$ ako i samo ako $x = y$, za svako $x, y \in A$,

(IPM2) $D_{\oplus}(x,y) = D_{\oplus}(y,x)$, za svako $x, y \in A$,

(IPM3) za svako $x, y, z \in A$ važi

$$D_{\oplus}(x,y) \preceq_s D_{\oplus}(x,z) \oplus D_{\oplus}(z,y).$$

Neka je $ID_{\oplus}$ intervalno-vrednosna funkcija definisana sa

$$ID_{\oplus}(f_1, f_2) = \left[\int_X^{\oplus} d_{\oplus}(f_1, f_2) \odot d\mu_l, \int_X^{\oplus} d_{\oplus}(f_1, f_2) \odot d\mu_r \right],$$

gde je $\overline{\mu}_{\mathcal{M}} = [\mu_l, \mu_r]$ intervalno-vrednosna $\oplus$-mera iz definicije 1.11 određena familijom $\oplus$-mera $\mathcal{M}$.

Na osnovu primera 2.11 sledi da u pseudo L^p prostoru postoje funkcije f_1 i f_2 takve da je $f_1 \neq f_2$ i $ID_{\oplus}(f_1, f_2) = [\mathbf{0}, \mathbf{0}]$. Dakle, za funkcije f_1 i f_2 jednake skoro svuda u odnosu na $\oplus$-meru $\mu \in \mathcal{M}$, uslov (IPM1) iz definicije 2.29 ne važi, pa funkcija $ID_{\oplus}$ nije intervalno-vrednosna pseudometrika.

Koristeći rezultate iz [75], funkcija $ID_{\oplus}(F_1, F_2)$ se definiše sa

$$ID_{\oplus}(F_1, F_2) = ID_{\oplus}(f_1, f_2),$$

gde su $f_1 \in F_1$ i $f_2 \in F_2$, a F_i je skup merljivih funkcija jednakih skoro svuda u odnosu na $\oplus$-meru $\mu \in \mathcal{M}$ sa funkcijom f_i, za $i = 1, 2$.

Za krajeve intervala intervalno-vrednosne funkcije $ID_{\oplus}(F_1, F_2)$ važi

$$\begin{aligned}
\int_X^{\oplus} d_{\oplus}(f_1, f_2) \odot d\mu_l &= g^{-1}\left(\int_X g \circ d_{\oplus}(f_1, f_2) d(g \circ \mu_l)\right) \\
&= g^{-1}\left(\int_X g\left(g^{-1}\left(|g(f_1) - g(f_2)|\right)\right) d(g \circ \mu_l)\right) \\
&= g^{-1}\left(\int_X |g(f_1) - g(f_2)| d(g \circ \mu_l)\right)
\end{aligned}$$

i

$$\int_X^{\oplus} d_{\oplus}(f_1, f_2) \odot d\mu_r = g^{-1}\left(\int_X |g(f_1) - g(f_2)| d(g \circ \mu_r)\right),$$

tj.

$$\begin{aligned}
&ID_{\oplus}(F_1, F_2) = \\
&\quad\left[g^{-1}\left(\int_X |g(f_1) - g(f_2)| d(g \circ \mu_l)\right), g^{-1}\left(\int_X |g(f_1) - g(f_2)| d(g \circ \mu_r)\right)\right].
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Primer 2.12 Neka je $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ niz slučajnih promenljivih na prostoru verovatnoće $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ i $([a, b], \oplus, \odot)$ g-poluprsten, gde je generator g strogo monotono rastuća funkcija. Neka je $\mathcal{M} = \{\mu_n : \mu_n = g^{-1} \circ P_n = g^{-1} \circ P \circ X_n^{-1}\}$ familija $\oplus$-mera μ_n takvih da je $(\mathcal{M}, \preceq)$ gusto linearno uređenje sa krajevima $\mu_l = g^{-1} \circ P \circ X_l^{-1}$ i $\mu_r = g^{-1} \circ P \circ X_r^{-1}$.

Za merljive funkcije $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ važi

$$ID_{\oplus}(f_1, f_2) = \left[\int_X^{\oplus} d_{\oplus}(f_1, f_2) \odot d\mu_l, \int_X^{\oplus} d_{\oplus}(f_1, f_2) \odot d\mu_r\right]$$

gde su

$$\begin{aligned} \int_X^{\oplus} d_{\oplus}(f_1, f_2) \odot d\mu_l &= g^{-1}\left(E\left(|g \circ f_1(X_l) - g \circ f_2(X_l)|\right)\right) \\ &= g^{-1}\left(\int_{-\infty}^{\infty} |g(f_1(x)) - g(f_2(x))|\varphi_l(x)dx\right) \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} \int_X^{\oplus} d_{\oplus}(f_1, f_2) \odot d\mu_r &= g^{-1}\left(E\left(|g \circ f_1(X_r) - g \circ f_2(X_r)|\right)\right) \\ &= g^{-1}\left(\int_{-\infty}^{\infty} |g(f_1(x)) - g(f_2(x))|\varphi_r(x)dx\right) \end{aligned}$$

a φ_l i φ_r funkcije gustine slučajnih promenljivih X_l i X_r redom i $E(\cdot)$ matematičko očekivanje slučajne promenljive. $\diamond$

Neka je $([a, b], \oplus, \odot)$ g-poluprsten, gde je g strogo monotono rastući generator.

Teorema 2.4 *Neka su $f_1 : X \to [a, b]$ i $f_2 : X \to [a, b]$ merljive funkcije. Intervalno-vrednosna funkcija $ID_{\oplus}(f_1, f_2)$ je intervalno-vrednosna pseudometrika.*

Dokaz. Jasno je da uslovi (IPM1) i (IPM2) važe.

Na osnovu definicije relacije $\preceq_S$ iz odeljka 1.5 dokaz uslova (IPM3) se sastoji iz dva koraka.

Prvi korak: potrebno je pokazati da za svako $x \in ID_{\oplus}(f_1, f_2)$ postoji $y \in ID_{\oplus}(f_1, f_3) \oplus ID_{\oplus}(f_3, f_2)$, tako da je $x \preceq y$.

Neka je $x \in ID_{\oplus}(f_1, f_2)$. Na osnovu jednakosti (2.22) sledi

$$x \leq g^{-1}\left(\int_X |g(f_1) - g(f_2)| d(g \circ \mu_r)\right).$$

Neka je $f_3 : X \to [a,b]$ merljiva funkcija. Kako je g strogo monotono rastući generator sledi

$$g^{-1}\left(\int\limits_X |g(f_1)-g(f_2)|d(g\circ\mu_r)\right) \\ \leq g^{-1}\left(\int\limits_X (|g(f_1)-g(f_3)|+|g(f_3)-g(f_2)|)d(g\circ\mu_r)\right),$$

pa za $y = g^{-1}\left(\int\limits_X (|g(f_1)-g(f_3)|+|g(f_3)-g(f_2)|)d(g\circ\mu_r)\right)$ važi da je $x \leq y$ tj. $x \preceq y$. Na osnovu rezultata odeljka 1.4 je $y \in ID_\oplus(f_1,f_3) \oplus ID_\oplus(f_3,f_2)$.

Drugi korak: potrebno je pokazati još da za svako $y \in ID_\oplus(f_1,f_3) \oplus ID_\oplus(f_3,f_2)$ postoji $x \in ID_\oplus(f_1,f_2)$ tako da je $x \preceq y$.

Neka je $f_3 : X \to [a,b]$ merljiva funkcija i $y \in ID_\oplus(f_1,f_3) \oplus ID_\oplus(f_3,f_2)$. Tada je

$$g^{-1}\left(\int\limits_X (|g(f_1)-g(f_3)|+|g(f_3)-g(f_2)|)d(g\circ\mu_l)\right) \leq y.$$

Kako je g strogo monotono rastući generator sledi

$$g^{-1}\left(\int\limits_X |g(f_1)-g(f_2)|d(g\circ\mu_l)\right) \\ \leq g^{-1}\left(\int\limits_X (|g(f_1)-g(f_3)|+|g(f_3)-g(f_2)|)d(g\circ\mu_l)\right).$$

Za $x = g^{-1}\left(\int\limits_X |g(f_1)-g(f_2)|d(g\circ\mu_l)\right)$ je $x \leq y$ (tj. $x \preceq y$) i $x \in ID_\oplus(f_1,f_2)$.

Dakle, važi uslov (IPM3), pa je funkcija $ID_\oplus(f_1,f_2)$ intervalno-vrednosna pseudometrika. □

Glava 3

Pseudoverovatnoća i generalizovana pseudoverovatnoća

Slabe konvergencije nizova funkcija raspodele i verovatnosnih mera zauzimaju značajno mesto u teoriji verovatnoće i statistici. Imaju primenu u teoriji velikih devijacija i centralnim graničnim teoremama ([9, 11, 21]). Predstavljaju osnovu za ispitivanje gustine i relativne kompaktnosti familija ograničenih pozitivnih mera u poljskim prostorima, a u metričkim prostorima za veze sa konvergencijom u odnosu na Prokhorovljevu metriku ([5]).

U opštijem obliku u matematičkoj analizi u teoriji lokalno konveksnih topološko-vektorskih prostora slaba konvergencija nizova ima značaj u izučavanju slabe topologije ([80, 82]).

U nastavku su dati poznati rezultati teorije verovatnoće (definicija i ekvivalentni uslovi slabe konvergencije niza verovatnoća)(videti [10, 12]), koji predstavljaju osnovu za glavne rezultate ove disertacije.

Neka su P i $\{P_n : n \in \mathbb{N}\}$ verovatnoće, definisane na merljivom prostoru $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, gde je $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ Borelova σ-algebra podskupova od $\mathbb{R}$.

Definicija 3.1 ([12]) Niz $\{P_n : n \in \mathbb{N}\}$ *slabo konvergira* ka P, u oznaci $P_n \xrightarrow{\mathrm{w}} P$ ako i samo ako za svaku ograničenu i neprekidnu funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ važi

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} f\, dP_n = \int\limits_{\mathbb{R}} f\, dP.$$

Za skup A takav da za rub ∂A važi $P(\partial A) = 0$ se kaže da je P-*neprekidan* skup.

U literaturi je formulisano i dokazano nekoliko ekvivalentnih uslova slabe konvergencije niza verovatnoća (videti [10, 12, 15]) koji su prikazani u sledećoj teoremi.

Teorema 3.1 ([12]) *Neka je P verovatnoća i $\{P_n : n \in \mathbb{N}\}$ niz verovatnoća na prostoru $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(*i*) $P_n \xrightarrow{\text{w}} P$,

(*ii*) $\limsup_{n\to\infty} P_n(F) \leq P(F)$, *za svaki zatvoren skup* F,

(*iii*) $\liminf_{n\to\infty} P_n(G) \geq P(G)$, *za svaki otvoren skup* G,

(*iv*) $\lim_{n\to\infty} P_n(A) = P(A)$, *za svaki Borelov skup* A *takav da je* $P(\partial A) = 0$.

Pored uslova datih u teoremi 3.1, u literaturi se mogu naći i drugi uslovi ekvivalentni slaboj konvergenciji niza verovatnoća koji uključuju niz odgovarajućih slučajnih promenljivih i njihovo matematičko očekivanje (videti [10, 12]).

Neka su X i $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ slučajne promenljive koje odgovaraju verovatnoćama P i $\{P_n : n \in \mathbb{N}\}$, redom.

Niz slučajnih promenljivih $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ *konvergira u raspodeli (slabo konvergira)* ka slučajnoj promenljivoj X, u oznaci $X_n \xrightarrow{D} X$, ako za svaku ograničenu neprekidnu funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ važi

$$\lim_{n\to\infty} E(f(X_n)) = E(f(X)),$$

gde je $E(\cdot)$ matematičko očekivanje slučajne promenljive.

Poznato je (videti [10, 12]) da je

$$P_n \xrightarrow{\text{w}} P \Leftrightarrow X_n \xrightarrow{D} X. \tag{3.1}$$

U sledećoj teoremi su dati uslovi ekvivalentni slaboj konvergenciji niza slučajnih promenljivih koji su na osnovu (3.1) uslovi ekvivalentni i slaboj konvergenciji odgovarajućeg niza verovatnoća.

Teorema 3.2 ([10]) *Neka je X slučajna promenljiva i $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ niz slučajnih promenljivih na prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(*i*) $X_n \xrightarrow{D} X$,

(*ii*) $\limsup_{n\to\infty} P(X_n \in F) \leq P(X \in F)$, *za svaki zatvoren skup* F, (*iii*) $\liminf_{n\to\infty} P(X_n \in G) \geq P(X \in G)$, *za svaki otvoren skup* G,

(*iv*) $\lim_{n\to\infty} P(X_n \in A) = P(X \in A)$, *za svaki Borelov skup* A *takav da je* $P(X \in \partial A) = 0$.

3.1 Pseudoverovatnoća

Pseudoverovatnoća je jedno od mogućih uopštenja pojma klasične verovatnoće. Izučavana je u [34, 62, 63, 78, 79].

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ prostor verovatnoće i $([0,\infty], \oplus, \odot)$ g-poluprsten sa generatorom $g : [0,\infty] \to [0,\infty]$, za koji važi $[0,1] \subset \mathrm{Range}\,(\mathrm{g}^{-1})$.

Definicija 3.2 Funkcija $p : \mathcal{F} \to [0,\infty]$ definisana sa

$$p(A) = (g^{-1} \circ \mathcal{P})(A), \quad A \in \mathcal{F}$$

se naziva *pseudoverovatnoća*.

Za pseudoverovatnoću p iz definicije 3.2 važi:

1. $p(\emptyset) = g^{-1}(0) = \mathbf{0}$,
2. za niz $\{A_i : i \in \mathbb{N}\}$ u parovima disjunktnih skupova iz $\mathcal{F}$

$$\begin{aligned} p\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) &= g^{-1}\left(\sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{P}(A_i)\right) = g^{-1}\left(\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} g \circ g^{-1} \circ \mathcal{P}(A_i)\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} g^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} g \circ p(A_i)\right) = \bigoplus_{i=1}^{\infty} p(A_i). \end{aligned}$$

Dakle, ispunjeni su uslovi definicije 1.5 pa je funkcija p $\oplus$-mera.

Bitno svojstvo pseudoverovatnoće p je

$$p(\Omega) = g^{-1}(1) = \mathbf{1}.$$

Može se primetiti da pseudoverovatnoća p, iako zadovoljava uslov σ-$\oplus$-aditivnosti, u opštem slučaju ne zadovoljava i uslov σ-aditivnosti, osim kada je generator $g(x) = x$ i tada je pseudoverovatnoća zapravo verovatnoća.

Primer 3.1 Neka je $([0,\infty], \oplus, \odot)$ g-poluprsten sa generatorom $g(x) = \sqrt{x}$. Neka je $\Omega = \mathbb{N}$ i $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ partitivni skup skupa prirodnih brojeva. Funkcija p definisana tako da je $p(\emptyset) = \mathbf{0}$ i za $\emptyset \neq A \in \mathcal{F}$,

$$p(A) = \left(\sum_{i_k \in A} \mathcal{P}_{i_k}\right)^2,$$

gde je $\mathcal{P}_{i_k} = \frac{1}{2^{i_k}}$, je pseudoverovatnoća na prostoru $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$. $\diamond$

Primer 3.2 Neka je $([0,\infty],\oplus,\odot)$ g-poluprsten sa generatorom g i P verovatnoća na prostoru $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Na osnovu definicije 3.2 sledi da je

$$p = g^{-1} \circ P$$

pseudoverovatnoća. $\diamond$

Još jedan primer neaditivnih funkcija su deformisane verovatnoće koje se mogu naći u [6, 17, 42]. Skupovna funkcija ν na prostoru $(\Omega,\mathcal{F})$ je *deformisana verovatnoća* ako postoji verovatnoća $\mathcal{P}$ na prostoru $(\Omega,\mathcal{F})$ i neopadajuća fukcija $f:[0,1]\to[0,1]$ takva da je $f(0)=0$, $f(1)=1$ i $\nu(A)=f(\mathcal{P}(A))$, $A\in\mathcal{F}$. Funkcija f se naziva *funkcija distorzije* i ne mora da bude strogo monotono rastuća funkcija. Ako je u g-poluprstenu funkcija g generator za koji važi $g^{-1}(0)=\mathbf{0}$ i $g^{-1}(1)=\mathbf{1}$, tada je pseudoverovatnoća $p=g^{-1}\circ\mathcal{P}$ i deformisana verovatnoća.

Deformisana verovatnoća ima primenu u matematičkoj ekonomiji (posebno u teoriji rizika), u teoriji odlučivanja, kao i u mnogim drugim oblastima teorijske i primenjene matematike (videti [6, 17, 42]).

Za dalji rad je neophodno uvesti pojam p-neprekidnog skupa, koji predstavlja analogon P-neprekidnog skupa iz teorije verovatnoće.

Neka je $(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{P})$ prostor verovatnoće i p pseudoverovatnoća iz definicije 3.2.

Definicija 3.3 Skup $A\in\mathcal{F}$ je *p-neprekidan* skup ako za rub ∂A skupa A važi

$$p(\partial A)=\mathbf{0}.$$

Kako je $p(\partial A)=(g^{-1}\circ\mathcal{P})(\partial A)$ i $g^{-1}(0)=\mathbf{0}$, sledi

$$p(\partial A)=\mathbf{0}\Leftrightarrow\mathcal{P}(\partial A)=0,$$

tj. skup A je p-neprekidan skup ako i samo ako je $\mathcal{P}$-neprekidan skup.

3.2 Slaba konvergencija niza pseudoverovatnoća

U nastavku su prikazani originalni rezultati iz [34].

Neka je $([0,\infty],\oplus,\odot)$ g-poluprsten. Neka je $p=g^{-1}\circ P$ pseudoverovatnoća i $\{p_n : n\in\mathbb{N}\}$, gde je $p_n=g^{-1}\circ P_n$, $n\in\mathbb{N}$, niz pseudoverovatnoća na prostoru $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Definicija 3.4 Niz pseudoverovatnoća $\{p_n : n \in \mathbb{N}\}$ *g-slabo konvergira* ka psudoverovatnoći p, u oznaci $p_n \xrightarrow{g\text{-w}} p$, ako i samo ako za svaku ograničenu (u smislu posmatranog g-poluprstena) neprekidnu funkciju $f : \mathbb{R} \to [0,\infty]$ važi

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} f \odot dp_n = \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} f \odot dp.$$

Ekvivalencija slabe konvergencije niza verovatnoća i g-slabe konvergencije odgovarajućeg niza pseudoverovatnoća je pokazana u sledećoj teoremi i predstavlja originalni rezultat rada [34].

Teorema 3.3 *Neka je* $([0,\infty], \oplus, \odot)$ *g-poluprsten. Neka je* P *verovatnoća i* $\{P_n : n \in \mathbb{N}\}$ *niz verovatnoća na prostoru* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$*. Za pseudoverovatnoću* $p = g^{-1} \circ P$ *i niz pseudoverovatnoća* $\{p_n : n \in \mathbb{N}\}$ *gde je* $p_n = g^{-1} \circ P_n$, $n \in \mathbb{N}$, *važi*

$$p_n \xrightarrow{g\text{-w}} p \Leftrightarrow P_n \xrightarrow{\text{w}} P.$$

Dokaz. Neka je $f : \mathbb{R} \to [0,\infty]$ ograničena funkcija (ograničena u smislu posmatranog g-poluprstena) sa osobinom da je $g \circ f : \mathbb{R} \to [0,\infty]$ takođe ograničena funkcija. Na osnovu definicije g-slabe konvegencije i neprekidnosti i monotonosti funkcije g^{-1} sledi

$$\begin{aligned}
p_n \xrightarrow{g\text{-w}} p \quad &\Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} f \odot dp_n = \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} f \odot dp \\
&\Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} g^{-1}\left(\int_{\mathbb{R}} (g\circ f) d(g \circ p_n)\right) = g^{-1}\left(\int_{\mathbb{R}} (g\circ f) d(g\circ p)\right) \\
&\Leftrightarrow \quad g^{-1}\left(\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} (g\circ f) dP_n\right) = g^{-1}\left(\int_{\mathbb{R}} (g\circ f) dP\right) \\
&\Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} (g\circ f) dP_n = \int_{\mathbb{R}} (g\circ f) dP.
\end{aligned}$$

Kako je $g \circ f$ neprekidna i ograničena funkcija jasno je da iz slabe konvergencije niza verovatnoća sledi g-slaba konvergencija odgovarajućeg niza psudoverovatnoća.

Za $f = g^{-1} \circ h$, gde je h neprekidna i ograničena funkcija, jednakost

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} (g \circ f) dP_n = \int_{\mathbb{R}} (g \circ f) dP$$

postaje

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} h dP_n = \int_{\mathbb{R}} h dP,$$

tj. iz g-slabe konvergencije niza psudoverovatnoća sledi slaba konvergencija niza odgovarajućih verovatnoća. □

U sledećem tvrđenju je dat poznat rezultat teorije verovatnoće (videti [10]).

Tvrđenje 3.1 ([10]) *Niz verovatnoća* $\{P_n : n \in \mathbb{N}\}$ *slabo konvergira ka verovatnoći* P *ako i samo ako za svaku ograničenu i neprekidnu realnu funkciju* h, *niz* $\{P_n \circ h^{-1} : n \in \mathbb{N}\}$ *slabo konvergira ka* $P \circ h^{-1}$.

Na osnovu tvrđenja 3.1 može se zaključiti da je, ako je generator g posmatranog poluprstena ograničena funkcija, g-slaba konvergencija niza pseudoverovatnoća $\{g^{-1} \circ P_n : n \in \mathbb{N}\}$ ka pseudoverovatnoći $g^{-1} \circ P$ je ekvivalentna slaboj konvergenciji niza $\{P_n \circ g^{-1} : n \in \mathbb{N}\}$ ka $P \circ g^{-1}$.

Lema 3.1 *Za niz* $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ *elemenata g-poluprstena* $([0,\infty], \oplus, \odot)$ *i neprekidnu strogo monotono rastuću funkciju* $h : [0,\infty] \to [0,\infty]$ *važi:*

(i) $\limsup_{n\to\infty} h(x_n) = h(\limsup_{n\to\infty} x_n)$,

(ii) $\liminf_{n\to\infty} h(x_n) = h(\liminf_{n\to\infty} x_n)$.

Dokaz. Na osnovu definicije $\limsup_{n\to\infty}$ i $\liminf_{n\to\infty}$, a kako je h strogo monotono rastuća i neprekidna funkcija, sledi

$$\begin{aligned} (i)\ \limsup_{n\to\infty} h(x_n) &= \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} h(x_k) = \lim_{n\to\infty} h(\sup_{k\geq n} x_k) = h(\lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} x_k) \\ &= h(\limsup_{n\to\infty} x_n), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (ii)\ \liminf_{n\to\infty} h(x_n) &= \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} h(x_k) = \lim_{n\to\infty} h(\inf_{k\geq n} x_k) = h(\lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} x_k) \\ &= h(\liminf_{n\to\infty} x_n). \end{aligned}$$

□

Lema 3.2 *Za niz* $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ *elemenata g-poluprstena* $([0,\infty],\oplus,\odot)$ *i neprekidnu strogo monotono opadajuću funkciju* $h : [0,\infty] \to [0,\infty]$ *važi:*

(i) $\limsup\limits_{n\to\infty} h(x_n) = h(\liminf\limits_{n\to\infty} x_n)$,

(ii) $\liminf\limits_{n\to\infty} h(x_n) = h(\limsup\limits_{n\to\infty} x_n)$.

Dokaz. Na osnovu definicije $\limsup\limits_{n\to\infty}$ i $\liminf\limits_{n\to\infty}$, a kako je h strogo monotono opadajuća i neprekidna funkcija, sledi

$$
\begin{aligned}
(i)\ \limsup_{n\to\infty} h(x_n) &= \lim_{n\to\infty}\sup_{k\geq n} h(x_k) = \lim_{n\to\infty} h(\inf_{k\geq n} x_k) = h(\lim_{n\to\infty}\inf_{k\geq n} x_k)\\
&= h(\liminf_{n\to\infty} x_n),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(ii)\ \liminf_{n\to\infty} h(x_n) &= \lim_{n\to\infty}\inf_{k\geq n} h(x_k) = \lim_{n\to\infty} h(\sup_{k\geq n} x_k) = h(\lim_{n\to\infty}\sup_{k\geq n} x_k)\\
&= h(\limsup_{n\to\infty} x_n).
\end{aligned}
$$

□

Za najmanju tačku nagomilavanja $\liminf x_n$ i najveću tačku nagomilavanja $\limsup x_n$ niza $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ elemenata g-poluprstena $([0,\infty],\oplus,\odot)$, važi

$$\liminf_{n\to\infty} x_n \preceq \limsup_{n\to\infty} x_n, \tag{3.2}$$

gde je $\preceq$ relacija totalnog poretka na intervalu $[0,\infty]$.

Lema 3.3 *Za niz* $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$*elemenata g-poluprstena* $([0,\infty],\oplus,\odot)$*, gde je generator g strogo monotono opadajuća funkcija i neprekidnu strogo monotono opadajuću funkciju* $h : [0,\infty] \to [0,\infty]$ *važi:*

(i) $\limsup\limits_{n\to\infty} h(x_n) \leq h(\limsup\limits_{n\to\infty} x_n)$,

(ii) $h(\liminf\limits_{n\to\infty} x_n) \leq \liminf\limits_{n\to\infty} h(x_n)$.

Dokaz. Kako je generator poluprstena strogo monotono opadajuća funkcija, za niz $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ elemenata g-poluprstena, na osnovu nejednakosti (3.2) važi $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n \leq \liminf\limits_{n\to\infty} x_n$. Kako je h strogo monotono opadajuća funkcija, sledi

$$h(\limsup_{n\to\infty} x_n) \geq h(\liminf_{n\to\infty} x_n). \tag{3.3}$$

Na osnovu leme 3.2 i nejednakosti (3.3) dobija se

(i) $\limsup_{n\to\infty} h(x_n) = h(\liminf_{n\to\infty} x_n) \leq h(\limsup_{n\to\infty} x_n)$.
(ii) $\liminf_{n\to\infty} h(x_n) = h(\limsup_{n\to\infty} x_n) \geq h(\liminf_{n\to\infty} x_n)$. $\square$

Glavni rezultat rada [34], ekvivalentni uslovi g-slabe konvergencije niza pseudoverovatnoća, dat je u sledećoj teoremi.

Teorema 3.4 *Neka je p pseudoverovatnoća i $\{p_n : n \in \mathbb{N}\}$ niz pseudo verovatnoća na prostoru $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(i) $p_n \xrightarrow{g\text{-w}} p$,

(ii) $\limsup_{n\to\infty} p_n(F) \preceq p(F)$, *za svaki zatvoren skup F,*

(iii) $p(G) \preceq \liminf_{n\to\infty} p_n(G)$, *za svaki otvoren skup G,*

(iv) $\lim_{n\to\infty} p_n(A) = p(A)$, *za svaki p-neprekidan skup A.*

Dokaz. $(i) \Rightarrow (ii)$: Kako je na osnovu teoreme 3.3 g-slaba konvergencija niza pseudoverovatnoća ekvivalentna sa slabom konvergencijom odgovarajućeg niza verovatnoća, iz teoreme 3.1 sledi da je uslov (i) ekvivalentan uslovu $\limsup_{n\to\infty} P_n(F) \leq P(F)$, za svaki zatvoren skup F.

Ako je g strogo monotono rastući generator, tada je

$$g^{-1}\left(\limsup_{n\to\infty} P_n(F)\right) \leq g^{-1}(P(F)), \tag{3.4}$$

a ako je g strogo monotono opadajući generator, tada je

$$g^{-1}\left(\limsup_{n\to\infty} P_n(F)\right) \geq g^{-1}(P(F)). \tag{3.5}$$

Neka je g strogo monotono rastući generator. Na osnovu leme 3.1 sledi

$$\limsup_{n\to\infty} g^{-1}(P_n(F)) = g^{-1}\left(\limsup_{n\to\infty} P_n(F)\right). \tag{3.6}$$

Iz jednakosti (3.6) i nejednakosti (3.4) se dobija

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty} p_n(F) &= \limsup_{n\to\infty} g^{-1}(P_n(F)) = g^{-1}\left(\limsup_{n\to\infty} P_n(F)\right) \\ &\leq g^{-1}(P(F)) = p(F). \end{aligned}$$

Neka je g strogo monotono opadajući generator. Za niz verovatnosnih mera $\{P_n(F) : n \in \mathbb{N}\}$ važi $\liminf_{n\to\infty} P_n(F) \leq \limsup_{n\to\infty} P_n(F)$, pa kako je g strogo monotono opadajući generator, sledi

$$g^{-1}\left(\liminf_{n\to\infty} P_n(F)\right) \geq g^{-1}\left(\limsup_{n\to\infty} P_n(F)\right). \tag{3.7}$$

Na osnovu leme 3.2 je

$$\limsup_{n\to\infty} g^{-1}(P_n(F)) = g^{-1}\left(\liminf_{n\to\infty} P_n(F)\right). \tag{3.8}$$

Iz jednakosti (3.8), nejednakosti (3.7) i nejednakosti (3.5) se dobija

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} p_n(F) &= \limsup_{n\to\infty} g^{-1}(P_n(F)) = g^{-1}\left(\liminf_{n\to\infty} P_n(F)\right)\\ &\geq g^{-1}\left(\limsup_{n\to\infty} P_n(F)\right) \geq g^{-1}(P(F)) = p(F).\end{aligned}$$

Dakle, za svaki zatvoren skup F važi $\limsup\limits_{n\to\infty} p_n(F) \preceq p(F)$.

$(ii) \Rightarrow (i)$: Neka je g strogo monotono rastući generator. Tada je uslov $\limsup\limits_{n\to\infty} p_n(F) \preceq p(F)$ ekvivalentan sa $\limsup\limits_{n\to\infty} p_n(F) \leq p(F)$, za svaki zatvoren skup F. Kako je g strogo monotono rastući generator, dobija se

$$g\left(\limsup_{n\to\infty} p_n(F)\right) \leq g(p(F)). \tag{3.9}$$

Na osnovu leme 3.1 i nejednakosti (3.9) sledi

$$\limsup_{n\to\infty} P_n(F) = \limsup_{n\to\infty} (g\circ p_n)(F) = g\left(\limsup_{n\to\infty} p_n(F)\right) \leq g(p(F)) = P(F).$$

Neka je g strogo monotono opadajući generator. Uslov $\limsup\limits_{n\to\infty} p_n(F) \preceq p(F)$ je ekvivalentan sa $\limsup\limits_{n\to\infty} p_n(F) \geq p(F)$, za svaki zatvoren skup F. Kako je g strogo monotono opadajući generator, dobija se

$$g\left(\limsup_{n\to\infty} p_n(F)\right) \leq g(p(F)). \tag{3.10}$$

Koristeći lemu 3.3 i nejednakost (3.10) dobija se

$$\limsup_{n\to\infty} P_n(F) = \limsup_{n\to\infty} (g\circ p_n)(F) \leq g\left(\limsup_{n\to\infty} p_n(F)\right) \leq g(p(F)) = P(F).$$

Dakle, za strogo monotono rastući i strogo monotono opadajući generator i svaki zatvoren skup F važi

$$\limsup_{n\to\infty} p_n(F) \preceq p(F) \Rightarrow \limsup_{n\to\infty} P_n(F) \leq P(F).$$

Kako je na osnovu teoreme 3.1 uslov $\limsup\limits_{n\to\infty} P_n(F) \leq P(F)$ ekvivalentan slaboj konvergenciji niza verovatnoća, koja je na osnovu teoreme 3.3 ekvivalentna g-slaboj konvergenciji odgovarajućeg niza pseudoverovatnoća, sledi tvrđenje.

$(i) \Rightarrow (iii)$: Kako je na osnovu teoreme 3.3 g-slaba konvergencija niza pseudoverovatnoća ekvivalentna sa slabom konvergencijom odgovarajućeg niza verovatnoća, iz teoreme 3.1 sledi da je uslov (i) ekvivalentan uslovu $\liminf_{n\to\infty} P_n(G) \geq P(G)$, za svaki otvoren skup G.

Ako je g strogo monotono rastući generator, tada je

$$g^{-1}\left(\liminf_{n\to\infty} P_n(G)\right) \geq g^{-1}(P(G)), \tag{3.11}$$

a ako je g strogo monotono opadajući generator, tada je

$$g^{-1}\left(\liminf_{n\to\infty} P_n(G)\right) \leq g^{-1}(P(G)). \tag{3.12}$$

Neka je g strogo monotono rastući generator. Na osnovu leme 3.1 sledi

$$\liminf_{n\to\infty} g^{-1}(P_n(G)) = g^{-1}\left(\liminf_{n\to\infty} P_n(G)\right). \tag{3.13}$$

Iz jednakosti (3.13) i nejednakosti (3.11) se dobija

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty} p_n(G) &= \liminf_{n\to\infty} g^{-1}(P_n(G)) = g^{-1}\left(\liminf_{n\to\infty} P_n(G)\right)\\ &\geq g^{-1}(P(G)) = p(G).\end{aligned}$$

Neka je g strogo monotono opadajući generator. Za niz verovatnosnih mera $\{P_n(G) : n \in \mathbb{N}\}$ važi $\liminf_{n\to\infty} P_n(G) \leq \limsup_{n\to\infty} P_n(G)$, pa kako je g strogo monotono opadajući generator, sledi

$$g^{-1}\left(\liminf_{n\to\infty} P_n(G)\right) \geq g^{-1}\left(\limsup_{n\to\infty} P_n(G)\right). \tag{3.14}$$

Na osnovu leme 3.2 je

$$\liminf_{n\to\infty} g^{-1}(P_n(G)) = g^{-1}\left(\limsup_{n\to\infty} P_n(G)\right). \tag{3.15}$$

Iz jednakosti (3.15), nejednakosti (3.14) i nejednakosti (3.12) se dobija

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty} p_n(G) &= \liminf_{n\to\infty} g^{-1}(P_n(G)) = g^{-1}\left(\limsup_{n\to\infty} P_n(G)\right)\\ &\leq g^{-1}\left(\liminf_{n\to\infty} P_n(G)\right) \leq g^{-1}(P(G)) = p(G).\end{aligned}$$

Dakle, za svaki otvoren skup G važi $p(G) \preceq \liminf_{n\to\infty} p_n(G)$,

$(iii) \Rightarrow (i)$: Neka je g strogo monotono rastući generator. Tada je uslov $p(G) \preceq \liminf_{n\to\infty} p_n(G)$ ekvivalentan sa $\liminf_{n\to\infty} p_n(G) \geq p(G)$, za svaki otvoren skup G. Kako je g strogo monotono rastući generator, dobija se

$$g\left(\liminf_{n\to\infty} p_n(G)\right) \geq g(p(G)). \tag{3.16}$$

Na osnovu leme 3.1 i nejednakosti (3.16) sledi

$$\liminf_{n\to\infty} P_n(G) = \liminf_{n\to\infty} g(p_n(G)) = g\left(\liminf_{n\to\infty} p_n(G)\right) \geq g(p(G)) = P(G).$$

Neka je g strogo monotono opadajući generator. Tada je uslov $p(G) \preceq \liminf_{n\to\infty} p_n(G)$ ekvivalentan sa $\liminf_{n\to\infty} p_n(G) \leq p(G)$, za svaki otvoren skup G. Kako je g strogo monotono opadajući generator, dobija se

$$g\left(\liminf_{n\to\infty} p_n(G)\right) \geq g(p(G)). \tag{3.17}$$

Koristeći lemu 3.3 i nejednakost (3.17) dobija se

$$\liminf_{n\to\infty} P_n(G) = \liminf_{n\to\infty} g(p_n(G)) \geq g\left(\liminf_{n\to\infty} p_n(G)\right) \geq g(p(G)) = P(G).$$

Dakle, za strogo monotono rastući i strogo monotono opadajući generator i svaki otvoren skup G važi

$$p(G) \preceq \liminf_{n\to\infty} p_n(G) \Rightarrow P(G) \geq \liminf_{n\to\infty} P_n(G).$$

Kako je na osnovu teoreme 3.1 uslov $\liminf_{n\to\infty} P_n(G) \geq P(G)$ ekvivalentan slaboj konvergenciji niza verovatnoća, koja je na osnovu teoreme 3.3 ekvivalentna g-slaboj konvergenciji odgovarajućeg niza pseudoverovatnoća, sledi tvrđenje.

$(i) \Rightarrow (iv)$: Kako je $p(\partial A) = \mathbf{0} \Leftrightarrow P(\partial A) = 0$, iz teoreme 3.1 se dobija

$$\lim_{n\to\infty} P_n(A) = P(A).$$

Sada jasno sledi

$$\lim_{n\to\infty} p_n(A) = \lim_{n\to\infty} g^{-1}(P_n)(A) = g^{-1}\left(\lim_{n\to\infty} P_n(A)\right) = g^{-1}(P(A)) = p(A).$$

$(iv) \Rightarrow (i)$: Neka je A Borelov skup takav da je $p(\partial A) = \mathbf{0}$. Kako je

$$g^{-1}(P(A)) = p(A) = \lim_{n\to\infty} p_n(A) = \lim_{n\to\infty} g^{-1}(P_n(A)) = g^{-1}\left(\lim_{n\to\infty} P_n(A)\right)$$

dobija se

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} P_n(A),$$

gde je $P(\partial A) = 0$, $P_n = g \circ p_n$, $n \in \mathbb{N}$ i $P = g \circ p$. Na osnovu teoreme 3.1 sledi $P_n \xrightarrow{\mathrm{w}} P$. Kako teorema 3.3 daje ekvivalenciju slabe konvergencije niza verovatnoća i g-slabe konvergencije odgovarajućeg niza pseudoverovatnoća, sledi tvrđenje, čime je dokaz završen. $\square$

Primer 3.3 Neka je $([0,\infty],\oplus,\odot)$ g-poluprsten sa strogo monotono rastućim generatorom $g(x)=x^{\alpha}$, $\alpha>0$.

Tada je $g^{-1}(x)=\sqrt[\alpha]{x}$ pa je niz pseudoverovatnoća $\{p_n : n\in\mathbb{N}\}$ dat sa $p_n=\sqrt[\alpha]{P_n}$, $n\in\mathbb{N}$, a pseudoverovatnoća p sa $p=\sqrt[\alpha]{P}$.

Kako je generator g strogo monotono rastuća funkcija, totalni poredak $\preceq$ na intervalu $[0,\infty]$ je uobičajeni poredak $\leq$.

Uslovi ekvivalentni g-slaboj konvergenciji niza pseudoverovatnoća iz teoreme 3.4 su tada oblika:

$$\begin{aligned} p_n \xrightarrow{g\text{-w}} p \quad &\Leftrightarrow \quad \limsup_{n\to\infty} \sqrt[\alpha]{P_n(F)} \leq \sqrt[\alpha]{P(F)}, \text{ za svaki zatvoren skup } F \\ &\Leftrightarrow \quad \sqrt[\alpha]{P(G)} \leq \liminf_{n\to\infty} \sqrt[\alpha]{P_n(G)}, \text{ za svaki otvoren skup } G \\ &\Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[\alpha]{P_n(A)} = \sqrt[\alpha]{P(A)}, \text{ za svaki } p\text{-neprekidan skup } A. \end{aligned}$$

$\diamond$

3.2.1 Neki ekvivalentni uslovi g-slabe konvergencije

Neka je $(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{P})$ prostor verovatnoće.

Definicija 3.5 ([10]) Niz slučajnih promenljivih $\{X_n : n\in\mathbb{N}\}$ na prostoru verovatnoće $(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{P})$ *konvergira u verovatnoći* $\mathcal{P}$ ka slučajnoj promenljivoj X, u oznaci $X_n\xrightarrow{\mathcal{P}}X$, ako za svako $\varepsilon>0$ važi

$$\lim_{n\to\infty}\mathcal{P}(\{\omega\in\Omega : |X_n(\omega)-X(\omega)|\geq\varepsilon\})=0.$$

Poznato je da je konvergencija u verovatnoći niza slučajnih promenljivih $\{X_n : n\in\mathbb{N}\}$ ekvivalentna slaboj konvergenciji niza verovatnoća $\{P_n : n\in\mathbb{N}\}$ ka verovatnoći P, gde je $P_n=\mathcal{P}\circ X_n^{-1}$ i $P=\mathcal{P}\circ X^{-1}$, tj.

$$X_n\xrightarrow{\mathcal{P}}X \Leftrightarrow P_n\xrightarrow{\text{w}}P. \tag{3.18}$$

U nastavku je izvedeno nekoliko ekvivalentnih uslova raznih vrsta konvergencija na g-poluprstenu. Rezultat je originalan i publikovan je u [27].

Neka je $([0,\infty],\oplus,\odot)$ g-poluprsten. Na osnovu teoreme 3.3 slaba konvergencija niza verovatnoća $\{P_n : n\in\mathbb{N}\}$ je ekvivalentna g-slaboj konvergenciji odgovarajućeg niza pseudoverovatnoća $\{p_n : n\in\mathbb{N}\}$, tj.

$$P_n\xrightarrow{\text{w}}P \Leftrightarrow p_n\xrightarrow{g\text{-w}}p, \tag{3.19}$$

gde je $p_n=g^{-1}\circ P_n$ i $p=g^{-1}\circ P$.

Dakle, na osnovu ekvivalencija datih sa (3.18) i (3.19) dobija se da je konvergencija u verovatnoći niza slučajnih promenljivih $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ ekvivalentna g-slaboj konvergenciji odgovarajućeg niza pseudoverovatnoća, tj.

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{P}} X \Leftrightarrow p_n \xrightarrow{g\text{-w}} p.$$

Definicija 3.6 Niz slučajnih promenljivih $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ na prostoru verovatnoće $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ *konvergira u pseudoverovatnoći* ka slučajnoj promenljivoj X, u oznaci $X_n \xrightarrow{g\text{-}\mathcal{P}} X$, ako za svako $\varepsilon > 0$ važi

$$\lim_{n\to\infty} g^{-1} \circ \mathcal{P}(\{\omega \in \Omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| \geq \varepsilon\}) = \mathbf{0}.$$

Kako je uslov $\lim\limits_{n\to\infty} g^{-1} \circ \mathcal{P}(\{\omega \in \Omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| \geq \varepsilon\}) = \mathbf{0}$ ekvivalentan uslovu $\lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{P}(\{\omega \in \Omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| \geq \varepsilon\} = 0$, sledi da je konvergencija u pseudoverovatnoći niza slučajnih promenljivih $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ ekvivalentna konvergenciji u verovatnoći posmatranog niza slučajnih promenljivih, tj.

$$X_n \xrightarrow{g\text{-}\mathcal{P}} X \Leftrightarrow X_n \xrightarrow{\mathcal{P}} X. \tag{3.20}$$

Dakle, na osnovu ekvivalencija datih sa (3.18), (3.19) i (3.20) može se zaključiti da je

$$X_n \xrightarrow{g\text{-}\mathcal{P}} X \Leftrightarrow X_n \xrightarrow{\mathcal{P}} X \Leftrightarrow P_n \xrightarrow{\text{w}} P \Leftrightarrow p_n \xrightarrow{g\text{-w}} p. \tag{3.21}$$

U [51] je posmatrana konvergencija u meri μ merljivih funkcija $X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ i $X : \Omega \to \mathbb{R}$, gde je μ neaditivna monotona mera na merljivom prostoru $(\Omega, \mathcal{F})$.

Naime, niz merljivih funkcija $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ *konvergira u meri* μ ka funkciji X, u oznaci $X_n \xrightarrow{\mu} X$, ako za svako $\varepsilon > 0$ važi

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\{|X_n - X| \geq \varepsilon\}) = 0. \tag{3.22}$$

Dakle, ako se za niz merljivih funkcija uzme niz slučajnih promenljivih $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$, i ako je generator g strogo monotono rastuća funkcija, konvergencija u pseudoverovatnoći se poklapa sa konvergencijom u meri datoj sa (3.22). Tada, na osnovu (3.21), sledi da je g-slaba konvergencija niza pseudoverovatnoća ekvivalentna konvergenciji u neaditivnoj meri $\mu = g^{-1} \circ$

$\mathcal{P} = p$ niza slučajnih promenljivih $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ ka slučajnoj promenljivoj X, tj.

$$p_n \xrightarrow{g\text{-w}} p \Leftrightarrow X_n \xrightarrow{p} X.$$

g-slaba konvergencija niza pseudoverovatnoća $\{p_n : n \in \mathbb{N}\}$ je ekvivalentna i konvergenciji u $\oplus$-meri odgovarajućeg niza slučajnih promenljivih $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ u pseudo-L^1 prostoru u smislu definicije iz [75].

Na osnovu [75], za strogo monotono rastući generator $g : [0, \infty] \to [0, \infty]$ i $\varepsilon > 0$, *konvergencija u $\oplus$-meri* niza slučajnih promenljivih $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ ima oblik

$$\lim_{n \to \infty} \mathcal{P}(\{\omega \in \Omega : |g \circ X_n(\omega) - g \circ X(\omega)| \geq \varepsilon\}) = 0,$$

tj.

$$g \circ X_n \xrightarrow{\mathcal{P}} g \circ X,$$

gde je $g \circ X$ je slučajna promenljiva na prostoru verovatnoće $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$, a $\{g \circ X_n : n \in \mathbb{N}\}$ niz slučajnih promenljivih na prostoru verovatnoće $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$.

Kako je g neprekidna funkcija, sledi da je

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{P}} X \Leftrightarrow g \circ X_n \xrightarrow{\mathcal{P}} g \circ X.$$

Sada je, na osnovu niza ekvivalencija datih sa (3.21), g-slaba konvergencija niza pseudoverovatnoća $\{p_n : n \in \mathbb{N}\}$ ekvivalentna konvergenciji u $\oplus$-meri odgovarajućeg niza slučajnih promenljivih $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$, tj.

$$p_n \xrightarrow{g\text{-w}} p \Leftrightarrow g \circ X_n \xrightarrow{\mathcal{P}} g \circ X.$$

Na slici 3.1 su šematski prikazane dobijene ekvivalencije raznih vrsta konvergencija. Na slici 3.2 su šematski prikazane dobijene veze g-slabe konvergencije i konvergencije u neaditivnoj meri datoj u [51].

$$\begin{tikzcd}
P_n \xrightarrow{\mathrm{w}} P \arrow[rr, Leftrightarrow] \arrow[dr, Leftrightarrow] \arrow[ddr, Leftrightarrow] & & X_n \xrightarrow{\mathcal{P}} X \arrow[dl, Leftrightarrow] \arrow[ddl, Leftrightarrow] \\
& p_n \xrightarrow{g\text{-w}} p \arrow[d, Leftrightarrow] & \\
& X_n \xrightarrow{g\text{-}\mathcal{P}} X &
\end{tikzcd}$$

Slika 3.1 Razne vrste konvergencija i g-slaba konvergencija

$$\begin{tikzcd}
p_n \xrightarrow{g\text{-w}} p \arrow[r, Leftrightarrow] \arrow[d, Leftrightarrow] & X_n \xrightarrow{p} X \arrow[dl, Leftrightarrow] \\
g \circ X_n \xrightarrow{\mathcal{P}} g \circ X &
\end{tikzcd}$$

Slika 3.2 g-slaba konvergencija i konvergencija u neaditivnoj meri

3.2.2 g-Melinova transformacija i g-slaba konvergencija

U nastavku je pokazana veza između konvergencije niza g-Melinovih transformacija slučajnih promenljivih definisanih u odeljku 2.2.1 i g-slabe konvergencije odgovarajućeg niza pseudoverovatnoća. Rezultat je originalan i publikovan u [31].

Neka je $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ niz nenegativnih slučajnih promenljivih neprekidnog tipa na prostoru verovatnoće $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ i neka je X nenegativna slučajna promenljiva neprekidnog tipa na istom prostoru verovatnoće. Neka su F_{X_n} i F_X funkcije raspodele slučajnih promenljivih X_n i X, redom.

Definicija 3.7 ([12]) Niz funkcija raspodele $\{F_{X_n} : n \in \mathbb{N}\}$ *slabo konvergira* ka funkciji raspodele F_X, u oznaci $F_{X_n} \xrightarrow{\text{w}} F_X$, ako za svaku ograničenu neprekidnu funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ važi

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x)\, dF_{X_n}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, dF_X(x). \tag{3.23}$$

Uslov (3.23) je ekvivalentan uslovu

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x),$$

u svakoj tački x neprekidnosti funkcije F_X, (videti [10]), tj.

$$F_{X_n} \xrightarrow{\text{w}} F_X \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x), \tag{3.24}$$

u svakoj tački x neprekidnosti funkcije F_X.

Neka je $([a, b], \oplus, \odot)$ g-poluprsten. U nastavku je posmatrana restrikcija Melinove transformacije na skup $\mathbb{R}$, zbog veze sa g-Melinovom transformacijom datom sa (2.10), koja je definisana za $s \in \mathbb{R}$.

Neka su $\mathcal{M}X_n$, $\mathcal{M}X$ i $\mathcal{M}^{\oplus}X_n$, $\mathcal{M}^{\oplus}X$ Melinove transformacije i g-Melinove transformacije slučajnih promenljivih X_n i X, redom. Neka sve Melinove transformacije $\mathcal{M}X_n$, $\mathcal{M}X$ slučajnih promenljivih X_n i X postoje, tj. integrali oblika (2.15) konvergiraju.

Poznato je da ako su sve Melinove transformacije $\mathcal{M}X_n$, $\mathcal{M}X$ neprekidne u nuli, tada, za $s \in \mathbb{R}$ i svaku tačku x neprekidnosti funkcije F_X važi

$$\lim_{n\to\infty}(\mathcal{M}X_n)(s) = (\mathcal{M}X)(s) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x),$$

(videti [30]).

Dakle, iz ekvivalencije date sa (3.24) sledi da za $s \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty}(\mathcal{M}X_n)(s) = (\mathcal{M}X)(s) \Leftrightarrow F_{X_n} \xrightarrow{\text{w}} F_X. \tag{3.25}$$

Lema 3.4 *Neka je $s \in \mathbb{R}$. Tada, $\lim_{n\to\infty}(\mathcal{M}X_n)(s) = (\mathcal{M}X)(s)$ ako i samo ako $\lim_{n\to\infty}(\mathcal{M}^{\oplus}X_n)(s) = (\mathcal{M}^{\oplus}X)(s)$.*

Dokaz. Kako je g neprekidna funkcija, iz veze g-Melinove i Melinove transformacije date sa (2.10), sledi tvrđenje. □

U sledećoj teoremi je pokazana veza između konvergencije niza g-Melinovih transformacija slučajnih promenljivih i g-slabe konvergencije niza pseudoverovatnoća.

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ prostor verovatnoće i $([a,b], \oplus, \odot)$ g-poluprsten. Neka su p_n i p pseudoverovatnoće, gde je $p_n = g^{-1} \circ P_n$, $p = g^{-1} \circ P$, a g je generator posmatranog poluprstena.

Teorema 3.5 *Niz g-Melinovih transformacija $\{\mathcal{M}^{\oplus}X_n : n \in \mathbb{N}\}$ slučajnih promenljivih X_n konvergira ka g-Melinovoj transformaciji $\mathcal{M}^{\oplus}X$ slučajne promenljive X ako i samo ako odgovarajući niz pseudoverovatnoća $\{p_n : n \in \mathbb{N}\}$ g-slabo konvergira ka pseudoverovatnoći p.*

Dokaz. Na osnovu ekvivalencije date sa (3.25) i leme 3.4, za $s \in \mathbb{R}$ sledi

$$\lim_{n\to\infty}(\mathcal{M}^{\oplus}X_n)(s) = (\mathcal{M}^{\oplus}X)(s) \Leftrightarrow F_{X_n} \xrightarrow{\text{w}} F_X. \tag{3.26}$$

Kako je slaba konvergencija niza funkcija raspodele ekvivalentna slaboj konvergenciji odgovarajućeg niza verovatnoća (videti [10]), tj.

$$F_{X_n} \xrightarrow{\text{w}} F_X \Leftrightarrow P_n \xrightarrow{\text{w}} P,$$

iz ekvivalencija datih sa (3.19) i (3.26) se dobija

$$\lim_{n\to\infty}(\mathcal{M}^{\oplus}X_n)(s) = (\mathcal{M}^{\oplus}X)(s) \Leftrightarrow p_n \stackrel{g\text{-w}}{\longrightarrow} p,$$

pa sledi tvrđenje. $\square$

Primer 3.4 Neka je $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ niz slučajnih promenljivih sa eksponencijalnom raspodelom sa parametrima $\lambda_n > 0$ i X slučajna promenljiva sa eksponencijalnom raspodelom sa parametrom $\lambda > 0$, tako da $\lambda_n \to \lambda$, $n \to \infty$. Funkcije gustine slučajnih promenljivih X_n i X su redom date sa $\varphi_{X_n}(x) = \lambda_n\, e^{-\lambda_n x}$, $x > 0$ i $\varphi_X(x) = \lambda\, e^{-\lambda x}$, $x > 0$, a funkcije raspodele slučajnih promenljivih X_n i X su redom date sa $F_{X_n}(x) = 1 - e^{-\lambda_n x}$, $x > 0$ i $F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, $x > 0$.

Neka je $([0,\infty], \oplus, \odot)$ g-poluprsten, gde je generator $g(x) = x^2$.

Za Borelove skupove $B = [a, b)$, $a < b$ važi

$$P_n(B) = F_{X_n}(b) - F_{X_n}(a) = e^{-\lambda_n a} - e^{-\lambda_n b} \quad \text{i} \quad P(B) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}.$$

Odgovarajuće pseudoverovatnoće su

$$p_n = \sqrt{e^{-\lambda_n a} - e^{-\lambda_n b}} \quad \text{i} \quad p = \sqrt{e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}}.$$

Iz primera 2.5 sledi da je g-Melinova transformacija slučajnih promenljivih X_n

$$\begin{aligned}(\mathcal{M}^{\oplus}X_n)(s) &= g^{-1}\left(\int_0^{\infty} x^{s-1}e^{-2\lambda_n x}\,dx\right) \\ &= \sqrt{2^{1-s}\lambda_n^{3-s}\Gamma(s)}.\end{aligned}$$

Slično, g-Melinova transformacija slučajne promenljive X je

$$(\mathcal{M}^{\oplus}X)(s) = \sqrt{2^{1-s}\lambda^{3-s}\Gamma(s)}.$$

Kako $\lambda_n \to \lambda$, $n \to \infty$, jasno je da je

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(\mathcal{M}^{\oplus}X_n)(s) &= \lim_{n\to\infty}\sqrt{2^{1-s}\lambda_n^{3-s}\Gamma(s)} \\ &= \sqrt{2^{1-s}\lambda^{3-s}\Gamma(s)} \\ &= (\mathcal{M}^{\oplus}X)(s),\end{aligned}$$

pa iz teoreme 3.5 sledi da odgovarajući niz pseudoverovatnoća

$$\{p_n : n \in \mathbb{N}\} = \left\{\sqrt{e^{-\lambda_n a} - e^{-\lambda_n b}} : n \in \mathbb{N}\right\}$$

g-slabo konvergira ka pseudoverovatnoći $p = \sqrt{e^{-\lambda\, a} - e^{-\lambda\, b}}$.

Iz teoreme 3.5 takođe sledi i obrnuto tvrđenje, tj. iz g-slabe konvergencije niza pseudoverovatnoća

$$\{p_n : n \in \mathbb{N}\} = \left\{\sqrt{e^{-\lambda_n\, a} - e^{-\lambda_n\, b}} : n \in \mathbb{N}\right\},$$

ka pseudoverovatnoći $p = \sqrt{e^{-\lambda\, a} - e^{-\lambda\, b}}$, sledi konvergencija niza g-Melinovih transformacija

$$\{(\mathcal{M}^{\oplus} X_n)(s) : n \in \mathbb{N}\} = \left\{\sqrt{2^{1-s}\lambda_n^{3-s}\Gamma(s)} : n \in \mathbb{N}\right\}$$

slučajnih promenljivih X_n, ka g-Melinovoj transformaciji

$$(\mathcal{M}^{\oplus} X)(s) = \sqrt{2^{1-s}\lambda^{3-s}\Gamma(s)}$$

slučajne promenljive X. $\diamond$

3.3 Generalizovana pseudoverovatnoća

U ovom odeljku je predstavljen nov pristup neaditivnim skupovnim funkcijama. Pojam neaditivne mere je proširen pomoću funkcije raspodele slučajne promenljive i nekomutativnih i neasocijativnih operacija sa dva parametra.

U teoriji verovatnoće i pseudoanalizi, verovatnoća, deformisana verovatnoća i pseudoverovatnoća su definisane na familiji skupova koja zadovoljava uslove σ-algebre. Jedno uopštenje pseudoverovatnoće date u odeljku 3.1 je generalizovana pseudoverovatnoća koja se definiše na familiji podintervala zatvorenog intervala $[c, d]$ u $\mathbb{R}$ koja nije σ-algebra ni poluprsten podskupova od $[c, d]$. Značaj ovakvog pristupa se ogleda u tome što je tada moguće „izmeriti” intervale oblika $(e, f] \subset [c, d]$ koji nisu elementi posmatrane familije podintervala od $[c, d]$ na kojoj se generalizovana pseudoverovatnoća definiše. Dalje, u prostoru pseudoverovatnoće mera skupa iz posmatrane σ-algebre zavisi isključivo od verovatnoće datog skupa i neprekidne i strogo monotone bijekcije g, dok u novom pristupu prikazanom u nastavku, mera proizvoljnog intervala zavisi od verovatnoće datog intervala, neprekidne i strogo monotone bijekcije g i parametra $\varepsilon > 0$.

U nastavku su date definicije uopštenih g-operacija uvedenih u [73] koje su neophodne za uvođenje pojma generalizovane pseudoverovatnoće. Definicija generalizovane pseudoverovatnoće, primeri i osobine koje zadovoljava su deo originalnog rezultata publikovanog u [53].

3.3.1 Uopštene g-operacije

Uopštene g-operacije su uopštenje sabiranja i množenja realnih brojeva. Definicije su slične definicijama g-operacija iz odeljka 1.1 i mogu se naći u [73, 74]. Karakteristika ovako definisanih operacija je da ne moraju da budu ni komutativne ni asocijativne. Imaju primenu u nelinearnim parcijalnim diferencijalnim jednačinama ([73]) i Laplasovoj transformaciji ([84]). U [74], neasocijativno pseudosabiranje i pseudomnoženje su korišćeni za konstrukciju pseudomere i pseudointegrala.

Definicija 3.8 ([74]) Neka su $\varepsilon, \gamma > 0$ i $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ strogo monotona neprekidna bijekcija. Operacije $\oplus_\varepsilon, \odot_\gamma : \mathbb{R}^{+2} \to \mathbb{R}^+$, definisane sa

$$x \oplus_\varepsilon y = g^{-1}(\varepsilon g(x) + g(y)), \tag{3.27}$$

$$x \odot_\gamma y = g^{-1}(g(x)^\gamma g(y)) \tag{3.28}$$

se nazivaju *uopšteno pseudosabiranje* i *uopšteno pseudomnoženje*, redom.

Funkcija g se naziva *generator uopštenih psudooperacija.*

Uopšteno pseudosabiranje i uopšteno pseudomnoženje se se jednim imenom nazivaju *uopštene pseudooperacije.*

Primer 3.5 a) Ako je $g(x) = x^\alpha$, $g^{-1}(x) = x^{\frac{1}{\alpha}}$, tada su uopštene psudooperacije date sa $x \oplus_\varepsilon y = (\varepsilon \cdot x^\alpha + y^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ i $x \odot_\gamma y = x^\gamma y$.

b) Ako je $g(x) = \ln(x+1)$, $g^{-1}(x) = e^x - 1$, tada su uopštene psudooperacije date sa $x \oplus_\varepsilon y = (x+1)^\varepsilon (y+1) - 1$ i $x \odot_\gamma y = e^{(\ln(x+1))^\gamma \ln(y+1)} - 1$. ◇

Za $\varepsilon = 1$ i $\gamma = 1$, uopštene pseudooperacije date sa (3.27) i (3.28) su g-operacije date sa (1.1) i (1.2).

Očigledno je da uopštene pseudooperacije nisu komutativne ni asocijativne. Naime, za $g(x) = x$ i $\varepsilon \neq 1$ je $1 \oplus_\varepsilon 2 = \varepsilon + 2 \neq 2\varepsilon + 1 = 2 \oplus_\varepsilon 1$ i $(1 \oplus_\varepsilon 2) \oplus_\varepsilon 3 = \varepsilon^2 + 2\varepsilon + 3 \neq 3\varepsilon + 3 = 1 \oplus_\varepsilon (2 \oplus_\varepsilon 3)$.

Kako operacija uopštenog pseudosabiranja $\oplus_\varepsilon$ nije asocijativna, potrebno je uvesti oznake

$$\bigoplus_{i=1}^{n}{}_{\varepsilon}\, \alpha_i = (((\alpha_1 \oplus_\varepsilon \alpha_2) \oplus_\varepsilon \alpha_3) \oplus_\varepsilon \dots) \oplus_\varepsilon \alpha_n$$

i

$$\alpha_1 \oplus_\varepsilon \bigoplus_{i=2}^{n}{}_{\varepsilon}\, \alpha_i = \alpha_1 \oplus_\varepsilon ((\alpha_2 \oplus_\varepsilon \alpha_3) \oplus_\varepsilon \dots \oplus_\varepsilon \alpha_n).$$

Levi neutralni element za uopšteno pseudosabiranje je $\mathbf{0}_l = g^{-1}(0)$, a levi neutralni element za uopšteno pseudomnoženje je $\mathbf{1}_l = g^{-1}(1)$. Ne postoji desni neutralni element za uopšteno pseudosabiranje ni desni neutralni element za uopšteno pseudomnoženje.

Za $x \in \mathbb{R}^+$, levi inverzni element za uopšteno pseudosabiranje, u oznaci $-x_l$ je

$$-x_l = g^{-1}\left(-\frac{1}{\varepsilon}g(x)\right),$$

a za $x \neq \mathbf{0}_l$ levi inverzni element za uopšteno pseudomnoženje, u oznaci $x_l^{(-1)}$ je

$$x_l^{(-1)} = g^{-1}\left(\left(\frac{1}{g(x)}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right).$$

U [74] je pokazano da je uopšteno pseudomnoženje distributivno sa leve strane u odnosu na uopšteno pseudosabiranje, tj. $x \odot_\gamma (y \oplus_\varepsilon z) = (x \odot_\gamma y) \oplus_\varepsilon (x \odot_\gamma z)$.

Koristeći definiciju uopštenog pseudomnoženja dobija se da je *uopšteni pseudostepen* $x^{(n)}$ dat sa

$$x^{(n)} = \underbrace{(((x \odot_\gamma x) \odot_\gamma x) \odot_\gamma \dots) \odot_\gamma x}_{n-puta},$$

za $x \in \mathbb{R}^+$ i $n \in \mathbb{N}$.

Na osnovu definicije uopštenog pseudostepena sledi

$$x^{(n)} = g^{-1}(g(x)^{\gamma^{n-1}+\dots+\gamma+1}).$$

Na osnovu [74], za uopšteno pseudosabiranje elemenata α_i, $i = 1, \dots, n$ važi

$$\bigoplus_{i=1}^{n}{}_{\varepsilon}\, \alpha_i = g^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon^{n-i} g(\alpha_i)\right), \quad \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}^+, \tag{3.29}$$

a za uopšteno pseudosabiranje uopštenih pseudoproizvoda $\alpha_i \odot_\gamma \beta_i$, $i = 1, \dots, n$ elemenata α_i i β_i, $i = 1, \dots, n$ važi

$$\bigoplus_{i=1}^{n}{}_{\varepsilon}(\alpha_i \odot_\gamma \beta_i) = g^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon^{n-i} g(\alpha_i)^{\gamma} g(\beta_i)\right), \quad \alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}^+. \tag{3.30}$$

Lema 3.5 *Za uopšteno pseudosabiranje i* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}^+$ *važi*

$$\bigoplus_{i=s}^{s+k}{}_{\varepsilon}\, \alpha_i = g^{-1}\left(\sum_{i=0}^{k} \varepsilon^{k-i} g(\alpha_{s+i})\right), \quad k \geq 1.$$

Dokaz. Za $k = 1$ važi $\alpha_s \oplus_\varepsilon \alpha_{s+1} = g^{-1}(\varepsilon g(\alpha_s) + g(\alpha_{s+1}))$.

Neka tvrđenje važi za neko $k \in \mathbb{N}$, tj. neka je

$$\bigoplus_{i=s}^{s+k}{}_{\varepsilon}\, \alpha_i = g^{-1}\left(\sum_{i=0}^{k} \varepsilon^{k-i} g(\alpha_{s+i})\right).$$

Tada je

$$\begin{aligned}
\bigoplus_{i=s}^{s+k+1}{}_{\varepsilon}\, \alpha_i &= \left(\bigoplus_{i=s}^{s+k}{}_{\varepsilon}\, \alpha_i\right) \oplus_\varepsilon \alpha_{s+k+1} \\
&= g^{-1}\left(\sum_{i=0}^{k} \varepsilon^{k-i} g(\alpha_{s+i})\right) \oplus_\varepsilon \alpha_{s+k+1} \\
&= g^{-1}\left(\sum_{i=0}^{k} \varepsilon^{k+1-i} g(\alpha_{s+i}) + g(\alpha_{s+k+1})\right) \\
&= g^{-1}\left(\sum_{i=0}^{k} \varepsilon^{k+1-i} g(\alpha_{s+i}) + \varepsilon^{k+1-(k+1)} g(\alpha_{s+k+1})\right) \\
&= g^{-1}\left(\sum_{i=0}^{k+1} \varepsilon^{k+1-i} g(\alpha_{s+i})\right),
\end{aligned}$$

čime je dokaz završen. □

3.3.2 Generalizovana pseudoverovatnoća

Generalizovana pseudoverovatnoća je jedno uopštenje $\oplus$-mere date definicijom 1.5.

Konstrukcija generalizovane pseudoverovatnoće date u nastavku je deo originalnog rezultata iz [53].

Za zatvoren interval $[c, d] \subset \mathbb{R}^+$, $c < d$, skup

$$\mathcal{P}_n = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}, \text{gde je } c = x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n = d,$$

je *n-particija intervala* $[c, d]$.

Neka je

$$\mathcal{C}_{[c,d]}^{\mathcal{P}_n} = \{[x_0, x_1], (x_1, x_2], \ldots, (x_{n-1}, x_n], [c, d]\}.$$

Neka je X slučajna promenljiva na prostoru verovatnoće $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$.
Funkcija raspodele $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ slučajne promenljive X je definisana sa

$$F(x) = \mathcal{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}).$$

Za funkciju raspodele F važi

$$\mathcal{P}(a < X \leq b) = F(b) - F(a) \quad \text{i} \quad \mathcal{P}(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a^-),$$

za svako $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, pri čemu je $F(a^-) = F(a) - \mathcal{P}(X = a)$.

Slučajna promenljiva X indukuje verovatnoću $\mathcal{P}_X$ na prostoru $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, gde je $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ Borelova σ-algebra podskupova od $\mathbb{R}$. Za verovatnoću $\mathcal{P}_X$ važi

$$\mathcal{P}_X((a,b]) = F(b) - F(a) \quad \text{i} \quad \mathcal{P}_X([a,b]) = F(b) - F(a^-),$$

za svako $(a,b], [a,b] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (videti [12]).

Definicija 3.9 Preslikavanje $m_n : \mathcal{C}^{\mathcal{P}_n}_{[c,d]} \to [0, \infty]$ dato sa:

1. $m_n([c,d]) = g^{-1}(F(d) - F(c^-))$,
2. $m_n([x_0, x_1]) = g^{-1}\left(\dfrac{F(x_1) - F(x_0^-)}{\varepsilon^{n-1}}\right)$,
3. $m_n((x_i, x_{i+1}]) = g^{-1}\left(\dfrac{F(x_{i+1}) - F(x_i)}{\varepsilon^{n-(i+1)}}\right)$, za $i \in \{1, \ldots, n-1\}$

se naziva $g_{(F,\mathcal{P}_n)}$*-generalizovana pseudoverovatnoća.*

Ako je X slučajna promenljiva sa uniformnom raspodelom na intervalu $[0,1]$, tada se $\oplus$-mera iz definicije 3.9 poklapa sa $\oplus$-merom iz rada [74] za datu n-particiju.

Trebalo bi naglasiti da $g_{(F,\mathcal{P}_n)}$-generalizovana psudoverovatnoća zavisi od $n \in \mathbb{N}$ i n-particije $\mathcal{P}_n$ intervala $[c,d]$. Ukoliko je očigledno koja je particija intervala $[c,d]$ posmatrana, umesto termina $g_{(F,\mathcal{P}_n)}$-generalizovana pseudoverovatnoća će biti korišćen termin *generalizovana pseudoverovatnoća.*

3.3.3 Osobine generalizovane pseudoverovatnoće

Neke osobine $g_{(F,\mathcal{P}_n)}$-generalizovane pseudoverovatnoće su date u nastavku i deo su originalnog rezultata iz [53].

Dodavanje tačke n-particiji $\mathcal{P}_n = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$

Neka je $\mathcal{P}_{n+1} = \mathcal{P}_n \cup \{y\}$ $(n+1)$-particija intervala $[c, d]$, gde je $x_i < y \leq x_{i+1}$ za neko $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Neka je $m_{n+1} : \mathcal{C}_{[c,d]}^{\mathcal{P}_{n+1}} \to [0, \infty]$ $g_{(F,\mathcal{P}_{n+1})}$-generalizovana pseudoverovatnoća, gde je $\mathcal{C}_{[c,d]}^{\mathcal{P}_{n+1}}$ klasa podintervala intervala $[c, d]$ određena $(n+1)$-particijom $\mathcal{P}_{n+1}$.

Ako je $x_0 < y \leq x_1$, tada je

$$m_{n+1}([x_0, y]) = g^{-1}\left(\frac{F(y) - F(x_0^-)}{\varepsilon^n}\right) \tag{3.31}$$

i

$$m_{n+1}((y, x_1]) = g^{-1}\left(\frac{F(x_1) - F(y)}{\varepsilon^{n-1}}\right). \tag{3.32}$$

Ako je $x_i < y \leq x_{i+1}$ za neko $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ tada je

$$m_{n+1}((x_i, y]) = g^{-1}\left(\frac{F(y) - F(x_i)}{\varepsilon^{(n+1)-(i+1)}}\right) \tag{3.33}$$

i

$$m_{n+1}((y, x_{i+1}]) = g^{-1}\left(\frac{F(x_{i+1}) - F(y)}{\varepsilon^{(n+1)-(i+2)}}\right). \tag{3.34}$$

Lema 3.6 *Neka je $\mathcal{P}_n = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ n-particija intervala $[c, d]$ i $x_i < y \leq x_{i+1}$ za neko $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Ako je $x_i < y \leq x_{i+1}$ za neko $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ tada je*

$$m_n((x_i, x_{i+1}]) = m_{n+1}((x_i, y]) \oplus_\varepsilon m_{n+1}((y, x_{i+1}]),$$

i ako je $x_0 < y \leq x_1$ tada je

$$m_n([x_0, x_1]) = m_{n+1}([x_0, y]) \oplus_\varepsilon m_{n+1}((y, x_1]),$$

gde je $m_{n+1} : \mathcal{C}_{[c,d]}^{\mathcal{P}_{n+1}} \to [0, \infty]$ $g_{(F,\mathcal{P}_{n+1})}$-generalizovana pseudoverovatnoća i $m_n : \mathcal{C}_{[c,d]}^{\mathcal{P}_n} \to [0, \infty]$ $g_{(F,\mathcal{P}_n)}$-generalizovana pseudoverovatnoća.

Dokaz. Neka je $x_i < y \leq x_{i+1}$ za neko $i \in \{1, \ldots, n-1\}$. Tada na osnovu jednakosti (3.27), jednakosti (3.33), jednakosti (3.34) i definicije 3.9 sledi

$$\begin{aligned}
& m_{n+1}((x_i, y]) \oplus_\varepsilon m_{n+1}((y, x_{i+1}]) \\
= \ & g^{-1}\left(\frac{F(y) - F(x_i)}{\varepsilon^{(n+1)-(i+1)}}\right) \oplus_\varepsilon g^{-1}\left(\frac{F(x_{i+1}) - F(y)}{\varepsilon^{(n+1)-(i+2)}}\right) \\
= \ & g^{-1}\left(\varepsilon\frac{F(y) - F(x_i)}{\varepsilon^{n-i}} + \frac{F(x_{i+1}) - F(y)}{\varepsilon^{n-i-1}}\right) \\
= \ & g^{-1}\left(\frac{F(x_{i+1}) - F(x_i)}{\varepsilon^{n-(i+1)}}\right) \\
= \ & g^{-1}\left(\frac{F(x_{i+1}) - F(x_i)}{\varepsilon^{n-(i+1)}}\right) \\
= \ & m_n((x_i, x_{i+1}]).
\end{aligned}$$

Ako je $x_0 < y \leq x_1$, sličnim postupkom na osnovu jednakosti (3.27), jednakosti (3.31), jednakosti (3.32) i definicije 3.9 sledi jednakost $m_n([x_0, x_1]) = m_{n+1}([x_0, y]) \oplus_\varepsilon m_{n+1}((y, x_1])$. □

Ako $x_i < y \leq x_{i+1}$ za neko $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ veza između mere $m_n : \mathcal{C}_{[c,d]}^{\mathcal{P}_n} \to [0, \infty]$ i mere $m_{n+1} : \mathcal{C}_{[c,d]}^{\mathcal{P}_{n+1}} \to [0, \infty]$ je data sa

$$\begin{aligned}
m_{n+1}([x_0, x_1]) &= g^{-1}\left(\frac{F(x_1) - F(x_0^-)}{\varepsilon^{n+1-1}}\right) = g^{-1}\left(\frac{F(x_1) - F(x_0^-)}{\varepsilon^{n}}\right) \\
&= g^{-1}\left(\frac{F(x_1) - F(x_0^-)}{\varepsilon^{n-1}} \cdot \frac{1}{\varepsilon}\right) \\
&= g^{-1}\left(g(m_n([x_0, x_1])) \cdot \frac{1}{\varepsilon}\right).
\end{aligned}$$

Za intervale $(x_k, x_{k+1}]$, $1 \leq k < i$ važi

$$\begin{aligned}
m_{n+1}((x_k, x_{k+1}]) &= g^{-1}\left(\frac{F(x_{k+1}) - F(x_k)}{\varepsilon^{n+1-(k+1)}}\right) = g^{-1}\left(\frac{F(x_{k+1}) - F(x_k)}{\varepsilon^{n-k}}\right) \\
&= g^{-1}\left(\frac{F(x_{k+1}) - F(x_k)}{\varepsilon^{n-(k+1)}} \cdot \frac{1}{\varepsilon}\right) \\
&= g^{-1}\left(g(m_n((x_k, x_{k+1}])) \cdot \frac{1}{\varepsilon}\right),
\end{aligned}$$

a za intervale $(x_k, x_{k+1}]$, $i+1 \leq k < n$ važi

$$\begin{aligned}
m_{n+1}((x_k, x_{k+1}]) &= g^{-1}\left(\frac{F(x_{k+1}) - F(x_k)}{\varepsilon^{n+1-(k+2)}}\right) = g^{-1}\left(\frac{F(x_{k+1}) - F(x_k)}{\varepsilon^{n-(k+1)}}\right) \\
&= m_n((x_k, x_{k+1}]).
\end{aligned}$$

Ako je $x_0 < y \leq x_1$, za intervale $(x_k, x_{k+1}]$, $1 \leq k < n$ važi

$$m_{n+1}((x_k, x_{k+1}]) = m_n((x_k, x_{k+1}]).$$

Uklanjanje tačke n-particije $\mathcal{P}_n = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$

Neka je $(n-1)$-particija $\mathcal{P}_{n-1}$ dobijena od n-particije $\mathcal{P}_n$ izostavljanjem tačke x_i, tj. $\mathcal{P}_{n-1} = \mathcal{P}_n \setminus \{x_i\}$, za neko $i \in \{1, \ldots, n-1\}$.

Ako je tačka x_1 uklonjena iz n-particije $\mathcal{P}_n$, tada za interval $[x_0, x_2]$ važi

$$m_{n-1}([x_0, x_2]) = g^{-1}\left(\frac{F(x_2) - F(x_0^-)}{\varepsilon^{n-2}}\right), \tag{3.35}$$

gde je $m_{n-1} : \mathcal{C}_{[c,d]}^{\mathcal{P}_{n-1}} \to [0, \infty]$ $g_{(F, \mathcal{P}_{n-1})}$-generalizovana pseudoverovatnoća.

Ako je tačka x_i za neko $i \in \{2, \ldots, n-1\}$ uklonjena iz n-particije $\mathcal{P}_n$, tada za intervale $(x_{i-1}, x_{i+1}]$, $2 \leq i < n-1$ važi

$$m_{n-1}((x_{i-1}, x_{i+1}]) = g^{-1}\left(\frac{F(x_{i+1}) - F(x_{i-1})}{\varepsilon^{(n-1)-i}}\right), \tag{3.36}$$

gde je $m_{n-1} : \mathcal{C}_{[c,d]}^{\mathcal{P}_{n-1}} \to [0, \infty]$ $g_{(F, \mathcal{P}_{n-1})}$-generalizovana pseudoverovatnoća.

Lema 3.7 *Neka je $\mathcal{P}_n = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ n-particija intervala $[c, d]$ i $\mathcal{P}_{n-1} = \mathcal{P}_n \setminus \{x_i\}$, $i \in \{1, \ldots, n-1\}$. Neka su $m_n : \mathcal{C}_{[c,d]}^{\mathcal{P}_n} \to [0, \infty]$ i $m_{n-1} : \mathcal{C}_{[c,d]}^{\mathcal{P}_{n-1}} \to [0, \infty]$ generalizovane pseudoverovatnoće.*

Ako je tačka x_i za neko $i \in \{2, \ldots, n-1\}$ uklonjena iz n-particije $\mathcal{P}_n$, tada je

$$m_{n-1}((x_{i-1}, x_{i+1}]) = m_n((x_{i-1}, x_i]) \oplus_\varepsilon m_n((x_i, x_{i+1}]).$$

Ako je tačka x_1 uklonjena iz n-particije $\mathcal{P}_n$, tada je

$$m_{n-1}([x_0, x_2]) = m_n([x_0, x_1]) \oplus_\varepsilon m_n((x_1, x_2]).$$

Dokaz. Ako je tačka x_i za neko $i \in \{2, \ldots, n-1\}$ uklonjena iz n-particije $\mathcal{P}_n$, tada iz jednakosti (3.27) i jednakosti (3.36) sledi

$$\begin{aligned}
& m_n((x_{i-1}, x_i]) \oplus_\varepsilon m_n((x_i, x_{i+1}]) \\
= \; & g^{-1}\left(\frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{\varepsilon^{n-i}}\right) \oplus_\varepsilon g^{-1}\left(\frac{F(x_{i+1}) - F(x_i)}{\varepsilon^{n-(i+1)}}\right) \\
= \; & g^{-1}\left(\varepsilon\frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{\varepsilon^{n-i}} + \frac{F(x_{i+1}) - F(x_i)}{\varepsilon^{n-i-1}}\right) \\
= \; & g^{-1}\left(\frac{F(x_{i+1}) - F(x_{i-1})}{\varepsilon^{n-i-1}}\right) \\
= \; & m_{n-1}((x_{i-1}, x_{i+1}]).
\end{aligned}$$

U slučaju kada je tačka x_1 uklonjena iz n-particije $\mathcal{P}_n$, dokaz jednakosti $m_{n-1}([x_0,x_2]) = m_n([x_0,x_1]) \oplus_\varepsilon m_n((x_1,x_2])$ sledi iz jednakosti (3.35) i definicije uopštenog pseudosabiranja. $\square$

Ako je tačka x_i za neko $i \in \{2,\dots,n-1\}$ uklonjena iz n-particije $\mathcal{P}_n$, veza između generalizovanih pseudoverovatnoća $m_n : \mathcal{C}_{[c,d]}^{\mathcal{P}_n} \to [0,\infty]$ i $m_{n-1} : \mathcal{C}_{[c,d]}^{\mathcal{P}_{n-1}} \to [0,\infty]$ je data na sledeći način.

Za interval $[x_0,x_1]$ važi

$$\begin{aligned} m_{n-1}([x_0,x_1]) &= g^{-1}\left(\frac{F(x_1)-F(x_0^-)}{\varepsilon^{n-2}}\right) = g^{-1}\left(\frac{F(x_1)-F(x_0^-)}{\varepsilon^{n-1}}\cdot\varepsilon\right) \\ &= g^{-1}\left(g(m_n([x_0,x_1]))\cdot\varepsilon\right). \end{aligned}$$

Za intervale $(x_k,x_{k+1}]$, $1 \le k < i-1$ važi

$$\begin{aligned} m_{n-1}((x_k,x_{k+1}]) &= g^{-1}\left(\frac{F(x_{k+1})-F(x_k)}{\varepsilon^{n-1-(k+1)}}\right) \\ &= g^{-1}\left(\frac{F(x_{k+1})-F(x_k)}{\varepsilon^{n-k-2}}\right) \\ &= g^{-1}\left(\frac{F(x_{k+1})-F(x_k)}{\varepsilon^{n-(k+1)}}\cdot\varepsilon\right) \\ &= g^{-1}\left(g(m_n((x_k,x_{k+1}]))\cdot\varepsilon\right), \end{aligned}$$

a za intervale $(x_k,x_{k+1}]$, $i+1 \le k < n$ važi

$$\begin{aligned} m_{n-1}((x_k,x_{k+1}]) &= g^{-1}\left(\frac{F(x_{k+1})-F(x_k)}{\varepsilon^{n-1-k}}\right) \\ &= g^{-1}\left(\frac{F(x_{k+1})-F(x_k)}{\varepsilon^{n-(k+1)}}\right) \\ &= m_n((x_k,x_{k+1}]). \end{aligned}$$

Ako je tačka x_1 uklonjena iz n-particije $\mathcal{P}_n$, tada za intervale $(x_k,x_{k+1}]$, $2 \le k < n$ važi

$$m_{n-1}((x_k,x_{k+1}]) = m_n((x_k,x_{k+1}]).$$

U nastavku je uopšten rezultat uklanjanja jedne tačke n-particije $\mathcal{P}_n$ i prikazan je postupak uklanjanja dve ili više uzastopnih tačaka posmatrane n-particije $\mathcal{P}_n$.

Uklanjanje dve uzastopne tačke n-particije $\mathcal{P}_n = \{x_0,x_1,\dots,x_n\}$

Neka je $\mathcal{P}_n$ n-particija intervala $[c,d]$ i $\mathcal{P}_{n-2} = \mathcal{P}_n \setminus \{x_i,x_{i+1}\}$, za neko $i \in \{1,\dots,n-2\}$. Kako uopšteno pseudosabiranje nije asocijativno, neophodno je razmotriti dva slučaja u zavisnosti od toga koja je tačka prva uklonjena iz n-particije $\mathcal{P}_n$.

U nastavku je posmatran slučaj kada je prvo uklonjena tačka x_i, a zatim tačka x_{i+1}. Slučaj kada je prvo uklonjena tačka x_{i+1}, a zatim tačka x_i je sličan, te je izostavljen.

Neka je $m_{n-2} : \mathcal{C}_{[c,d]}^{\mathcal{P}_{n-2}} \to [0,\infty]$ $g_{(F,\mathcal{P}_{n-2})}$-generalizovana pseudoverovatnoća.

Ako su tačke x_i i x_{i+1} za neko $i \in \{2,\ldots,n-2\}$ redom uklonjene iz n-particije $\mathcal{P}_n$, tada za intervale $(x_{i-1},x_{i+2}]$, $2 \leq i < n-1$ važi

$$m_{n-2}((x_{i-1},x_{i+2}]) = g^{-1}\left(\frac{F(x_{i+2}) - F(x_{i-1})}{\varepsilon^{(n-2)-i}}\right).$$

Ako su tačke x_1 i x_2 redom uklonjene iz n-particije $\mathcal{P}_n$, tada za interval $[x_0,x_3]$ važi

$$m_{n-2}([x_0,x_3]) = g^{-1}\left(\frac{F(x_3) - F(x_0^-)}{\varepsilon^{n-3}}\right).$$

Lema 3.8 *Neka je $\mathcal{P}_{n-2} = \mathcal{P}_n \setminus \{x_i,x_{i+1}\}$, gde $i \in \{1,\ldots,n-2\}$ i $\mathcal{P}_n = \{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$. Neka su $m_n : \mathcal{C}_{[c,d]}^{\mathcal{P}_n} \to [0,\infty]$ i $m_{n-2} : \mathcal{C}_{[c,d]}^{\mathcal{P}_{n-2}} \to [0,\infty]$ generalizovane pseudoverovatnoće.*

Ako su tačke x_i i x_{i+1} za neko $i \in \{2,\ldots,n-2\}$ uklonjene iz n-particije $\mathcal{P}_n$, tada za intervale $(x_{i-1},x_{i+2}]$, $2 \leq i < n-1$ važi

$$m_{n-2}((x_{i-1},x_{i+2}]) = m_n((x_{i-1},x_i]) \oplus_\varepsilon m_n((x_i,x_{i+1}]) \oplus_\varepsilon m_n((x_{i+1},x_{i+2}]).$$

Ako su tačke x_1 i x_2 uklonjene iz n-particije $\mathcal{P}_n$, tada za interval $[x_0,x_3]$ važi

$$m_{n-2}([x_0,x_3]) = m_n([x_0,x_1]) \oplus_\varepsilon m_n((x_1,x_2]) \oplus_\varepsilon m_n((x_2,x_3]).$$

Dokaz. Za intervale $(x_{i-1},x_{i+2}]$ gde je $1 \leq i < n-1$, i za $g_{(F,\mathcal{P}_n)}$-generalizovanu pseudoverovatnoću m_n važi

$$\begin{aligned}
& m_n((x_{i-1},x_i]) \oplus_\varepsilon m_n((x_i,x_{i+1}]) \oplus_\varepsilon m_n((x_{i+1},x_{i+2}]) \\
= \; & g^{-1}\left(\varepsilon^2 g(m_n((x_{i-1},x_i])) + \varepsilon g(m_n((x_i,x_{i+1}])) + g(m_n((x_{i+1},x_{i+2}]))\right) \\
= \; & g^{-1}\left(\varepsilon^2 \frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{\varepsilon^{n-i}} + \varepsilon \frac{F(x_{i+1}) - F(x_i)}{\varepsilon^{n-(i+1)}} + \frac{F(x_{i+2}) - F(x_{i+1})}{\varepsilon^{n-(i+2)}}\right) \\
= \; & g^{-1}\left(\frac{F(x_{i+1}) - F(x_{i-1})}{\varepsilon^{n-2-i}}\right) \\
= \; & m_{n-2}((x_{i-1},x_{i+2}]).
\end{aligned}$$

Jednakost $m_{n-2}([x_0,x_3]) = m_n([x_0,x_1]) \oplus_\varepsilon m_n((x_1,x_2]) \oplus_\varepsilon m_n((x_2,x_3])$, gde su tačke x_1 i x_2 uklonjene iz n-particije, se slično dokazuje. $\square$

Uklanjanje k, $1 \leq k \leq n-1$ uzastopnih tačaka n-particije $\mathcal{P}_n = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$

Neka je $\mathcal{P}_n$ n-particija intervala $[c,d]$ i neka je $\mathcal{P}_{n-k}$ $(n-k)$-particija intervala $[c,d]$ dobijena od n-particije $\mathcal{P}_n$ uklanjanjem tačaka $x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k-1}$ za neko $i \in \{1, \ldots, n-k\}$ rastućim poretkom (prvo je uklonjena tačka x_i, zatim tačka $x_{i+1}, \ldots$ i poslednja je uklonjena tačka x_{i+k-1}).

Za intervale $(x_{i-1}, x_{i+k}]$, gde $2 \leq i < n-k$ važi

$$m_{n-k}((x_{i-1}, x_{i+k}]) = g^{-1}\left(\frac{F(x_{i+k}) - F(x_{i-1})}{\varepsilon^{n-k-i}}\right),$$

a za interval $[x_0, x_{k+1}]$ važi

$$m_{n-k}([x_0, x_{k+1}]) = g^{-1}\left(\frac{F(x_{k+1}) - F(x_0^-)}{\varepsilon^{n-k-1}}\right),$$

gde je $m_{n-k} : \mathcal{C}_{[c,d]}^{\mathcal{P}_{n-k}} \to [0,\infty]$ generalizovana pseudoverovatnoća.

Lema 3.9 *Neka je $\mathcal{P}_{n-k} = \mathcal{P}_n \setminus \{x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k-1}\}$, $i \in \{1, \ldots, n-2\}$ i $\mathcal{P}_n = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$. Neka su $m_n : \mathcal{C}_{[c,d]}^{\mathcal{P}_n} \to [0,\infty]$ i $m_{n-k} : \mathcal{C}_{[c,d]}^{\mathcal{P}_{n-k}} \to [0,\infty]$ generalizovane pseudoverovatnoće.*

Za intervale $(x_{i-1}, x_{i+k}]$, gde $2 \leq i < n-k$ važi

$$m_{n-k}((x_{i-1}, x_{i+k}]) = \bigoplus_{s=i}^{i+k}{}_{\varepsilon}\, m_n((x_{s-1}, x_s]),$$

a za interval $[x_0, x_{k+1}]$ važi

$$m_{n-k}([x_0, x_{k+1}]) = m_n([x_0, x_1]) \bigoplus_{s=2}^{k+1}{}_{\varepsilon}\, m_n((x_{s-1}, x_s]).$$

Dokaz. Za $2 \leq i < n-k$ važi

$$\begin{aligned}
\bigoplus_{s=i}^{i+k}{}_{\varepsilon}\, m_n((x_{s-1}, x_s]) &= g^{-1}\left(\sum_{s=0}^{k} \varepsilon^{k-s} g(m_n((x_{i+s-1}, x_{i+s}]))\right) \\
&= g^{-1}\left(\sum_{s=0}^{k} \varepsilon^{k-s} \frac{F(x_{i+s}) - F(x_{i+s-1})}{\varepsilon^{n-(i+s)}}\right) \\
&= g^{-1}\left(\sum_{s=0}^{k} \frac{F(x_{i+s}) - F(x_{i+s-1})}{\varepsilon^{n-k-i}}\right) \\
&= g^{-1}\left(\frac{F(x_{i+k}) - F(x_{i-1})}{\varepsilon^{n-k-i}}\right) \\
&= m_{n-k}((x_{i-1}, x_{i+k}]).
\end{aligned}$$

Slično se može pokazati i jednakost

$$m_{n-k}([x_0, x_{k+1}]) = m_n([x_0, x_1]) \bigoplus_{s=2}^{k+1}{}_{\varepsilon}\, m_n((x_{s-1}, x_s]). \qquad \square$$

Svaka $\oplus$-mera μ iz definicije 1.5 zadovoljava uslov σ-$\oplus$-aditivnosti, tj. za svaki niz $\{A_i : i \in \mathbb{N}\}$ u parovima disjunktnih skupova iz $\mathcal{F}$ važi $\mu\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \bigoplus\limits_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$. Koristeći definiciju $\oplus$-mere, pokazano je da ona zadovoljava i uslov $\oplus$-aditivnosti, tj. $\mu\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right) = \bigoplus\limits_{i=1}^{n} \mu(A_i)$ za u parovima disjunktne skupove $A_1, A_2, \ldots, A_n$ iz $\mathcal{F}$ (videti [69]).

U nastavku su razmatrana još neka svojstva generalizovane pseudoverovatnoće. Rezultati su originalni i publikovani u [53].

Teorema 3.6 *Neka je $\mathcal{P}_n = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ n-particija intervala $[c, d] \subset \mathbb{R}^+$. Tada je:*

(i) $m_n(\emptyset) = \mathbf{0_l}$, $n \geq 2$,

(ii) $m_n([c, d]) = m_n([x_0, x_1]) \oplus_{\varepsilon} \bigoplus\limits_{i=1}^{n-1}{}_{\varepsilon}\, m_n((x_i, x_{i+1}])$,

gde je $m_n : \mathcal{C}_{[c,d]}^{\mathcal{P}_n} \to [0, \infty]$ generalizovana pseudoverovatnoća.

Dokaz. (i) Neka je $\mathcal{P}_n$, $n \geq 2$ n-particija intervala $[c, d]$, i neka postoji $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ takvo da je $x_i = x_{i+1}$.

Tada je, $(x_i, x_{i+1}] = \emptyset$ i

$$m_n((x_i, x_{i+1}]) = g^{-1}\left(\frac{F(x_{i+1}) - F(x_i)}{\varepsilon^{n-(i+1)}}\right) = g^{-1}(0) = \mathbf{0}_l.$$

Ako postoji $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ takvo da je $x_i \neq x_{i+1}$, neka je $\mathcal{P}_{n+1} = \mathcal{P}_n \cup \{y\}$ $(n+1)$-particija intervala $[c, d]$, gde je $y \in (x_i, x_{i+1}]$ za neko $i \in \{1, \ldots, n-1\}$.

Tada za generalizovane pseudoverovatnoće $m_n : \mathcal{C}_{[c,d]}^{\mathcal{P}_n} \to [0, \infty]$ i $m_{n+1} : \mathcal{C}_{[c,d]}^{\mathcal{P}_{n+1}} \to [0, \infty]$ važi

$$m_n((x_i, x_{i+1}]) = m_{n+1}((x_i, y]) \oplus_{\varepsilon} m_{n+1}((y, x_{i+1}]).$$

Ako je $y = x_{i+1}$, onda je $\mathcal{P}_{n+1} = \mathcal{P}_n$ i interval $(y, x_{i+1}]$ je prazan skup. Dakle, $\emptyset \in \mathcal{C}_{[c,d]}^{\mathcal{P}_{n+1}}$ i važi

$$m_{n+1}(\emptyset) = g^{-1}\left(\frac{F(x_{i+1}) - F(x_{i+1})}{\varepsilon^{n+1-(i+1)}}\right) = g^{-1}(0) = \mathbf{0}_l,$$

gde je $m_{n+1} : \mathcal{C}_{[c,d]}^{\mathcal{P}_{n+1}} \to [0, \infty]$ i $\mathcal{C}_{[c,d]}^{\mathcal{P}_{n+1}} = \mathcal{C}_{[c,d]}^{\mathcal{P}_n} \cup \{\emptyset\}$.

Ako je $n = 1$, početna 1-particija $\mathcal{P}_1 = \{x_0, x_1\}$ je proširena dodavanjem tačke y, gde je $x_0 < y \leq x_1$. Za $y = x_1$ slično se dobija da je $m_2(\emptyset) = \mathbf{0}_l$.

Kako jednakost $m_{n+1}(\emptyset) = \mathbf{0}_l$ važi za svako $n \in \mathbb{N}$, za $n \geq 2$ se dobija $m_n(\emptyset) = \mathbf{0}_l$.

Može se primetiti da za $n = 1$ i interval $[c, d]$, $c < d$ važi $c = x_0 < x_1 = d$ i $\mathcal{C}_{[c,d]}^{\mathcal{P}_1} = \{[c, d]\}$. Kako $\emptyset \notin \mathcal{C}_{[c,d]}^{\mathcal{P}_1}$, $m_1(\emptyset)$ se ne može izračunati.

(ii) Na osnovu definicije 3.9 sledi $m_n([c, d]) = g^{-1}(F(d) - F(c^-))$.

S druge strane, koristeći definiciju 3.9 i jednakost (3.29) dobija se

$$
\begin{aligned}
&m_n([x_0, x_1]) \oplus_\varepsilon \bigoplus_{i=1}^{n-1}{}_\varepsilon\, m_n((x_i, x_{i+1}]) = \\
&= g^{-1}\left(\varepsilon^{n-1} g(m_n([x_0, x_1])) + \sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon^{n-1-i} g(m_n((x_i, x_{i+1}]))\right) \\
&= g^{-1}\left(\varepsilon^{n-1} \frac{F(x_1) - F(x_0^-)}{\varepsilon^{n-1}} + \sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon^{n-1-i} g\left(g^{-1}\left(\frac{F(x_{i+1}) - F(x_i)}{\varepsilon^{n-1-i}}\right)\right)\right) \\
&= g^{-1}\left(F(x_1) - F(x_0^-) + \sum_{i=1}^{n-1} (F(x_{i+1}) - F(x_i))\right) \\
&= g^{-1}\left(F(x_n) - F(x_0^-)\right) \\
&= g^{-1}(F(d) - F(c^-)).
\end{aligned}
$$

□

Mera intervala $(e, f] \subset [c, d]$

Neka je $\mathcal{P}_n = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ n-particija intervala $[c, d] \subset \mathbb{R}^+$ i neka je $m_n : \mathcal{C}_{[c,d]}^{\mathcal{P}_n} \to [0, \infty]$ generalizovana pseudoverovatnoća. U nastavku je izračunata generalizovana pseudoverovatnoća intervala $(e, f] \subset [c, d]$. Razmatrana su četiri moguća slučaja.

a) $(e, f] = (x_{i-1}, x_{i+k}]$, za neko $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ i $k \in \{0, \ldots, n-i\}$:
Ako je $k = 0$, tada je $(e, f] = (x_{i-1}, x_i] \in \mathcal{C}_{[c,d]}^{\mathcal{P}_n}$ pa iz definicije 3.9 sledi

$$m_n((x_{i-1}, x_i]) = g^{-1}\left(\frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{\varepsilon^{n-i}}\right).$$

Ako je $k \neq 0$, tada je $(e, f] = (x_{i-1}, x_i] \cup \ldots \cup (x_{i+k-1}, x_{i+k}]$ i svi intervali $(x_{i-1}, x_i], \ldots, (x_{i+k-1}, x_{i+k}]$ pripadaju familiji $\mathcal{C}_{[c,d]}^{\mathcal{P}_n}$.

Na osnovu leme 3.9 sledi

$$m_{n-k}((x_{i-1}, x_{i+k}]) = \bigoplus_{s=i}^{i+k}{}_{\varepsilon}\, m_n((x_{s-1}, x_s]), \tag{3.37}$$

gde je $\mathcal{P}_{n-k} = \mathcal{P}_n \setminus \{x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k-1}\}$ i $m_{n-k} : \mathcal{C}_{[c,d]}^{\mathcal{P}_{n-k}} \to [0, \infty]$ je generalizovana pseudoverovatnoća.

b) $e \in (x_{i-1}, x_i]$ i $f = x_{i+k} \in \mathcal{P}_n$, za neko $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ i $k \in \{0, \ldots, n-i\}$:

Neka je $\mathcal{P}_{n+1} = \mathcal{P}_n \cup \{e\} = \{x_0, \ldots, x_{i-1}, e, x_i, \ldots, x_n\}$ $(n+1)$-particija dobijena dodavanjem tačke e n-particiji $\mathcal{P}_n$ i neka je $m_{n+1} : \mathcal{C}_{[c,d]}^{\mathcal{P}_{n+1}} \to [0, \infty]$ generalizovana pseudoverovatnoća, gde je

$\mathcal{C}_{[c,d]}^{\mathcal{P}_{n+1}} = \{[x_0, x_1], \ldots, (x_{i-1}, e], (e, x_{i+1}], \ldots, (x_{n-1}, x_n], [c, d]\}$.

Primenom jednakosti (3.37) na interval $(e, f]$ dobija se

$$\begin{aligned} &m_{n+1-k}((e, f]) \\ &\quad = m_{n+1}((e, x_i]) \oplus_{\varepsilon} m_{n+1}((x_i, x_{i+1}]) \oplus_{\varepsilon} \cdots \oplus_{\varepsilon} m_{n+1}((x_{i+k-1}, f]), \end{aligned}$$

gde je $\mathcal{P}_{n+1-k} = \mathcal{P}_{n+1} \setminus \{x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k-1}\}$ i $m_{n+1-k} : \mathcal{C}_{[c,d]}^{\mathcal{P}_{n+1-k}} \to [0, \infty]$ generalizovana pseudoverovatnoća.

c) $e = x_{i-1} \in \mathcal{P}_n$ i $f \in (x_{i+k-1}, x_{i+k}]$, za neko $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ i $k \in \{0, \ldots, n-i\}$:

Tada je

$\mathcal{P}_{n+1} = \mathcal{P}_n \cup \{f\} = \{x_0, \ldots, x_{i-1}, x_i, \ldots, x_{i+k-1}, f, x_{i+k}, \ldots, x_n\}$,

$\mathcal{C}_{[c,d]}^{\mathcal{P}_{n+1}} = \{[x_0, x_1], \ldots, (x_{i+k-1}, f], (f, x_{i+k}], \ldots, (x_{n-1}, x_n], [c, d]\}$

i $m_{n+1} : \mathcal{C}_{[c,d]}^{\mathcal{P}_{n+1}} \to [0, \infty]$ posmatrana generalizovana pseudoverovatnoća.

Na osnovu jednakosti (3.37) za interval $(e, f]$ važi

$$\begin{aligned} m_{n+1-k}((e, f]) &= m_{n+1}((e, x_i]) \\ &\oplus_{\varepsilon} \cdots \oplus_{\varepsilon} m_{n+1}((x_{i+k-2}, x_{i+k-1}]) \oplus_{\varepsilon} m_{n+1}((x_{i+k-1}, f]), \end{aligned}$$

gde je $\mathcal{P}_{n+1-k} = \mathcal{P}_{n+1} \setminus \{x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k-1}\}$ i $m_{n+1-k} : \mathcal{C}_{[c,d]}^{\mathcal{P}_{n+1-k}} \to [0, \infty]$ je generalizovana pseudoverovatnoća.

d) $e \in (x_{i-1}, x_i]$ i $f \in (x_{i+k-1}, x_{i+k}]$, za neko $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ i $k \in \{0, \ldots, n-i\}$:

Neka je $\mathcal{P}_{n+1} = \mathcal{P}_n \cup \{e\} = \{x_0, \ldots, x_{i-1}, e, x_i, \ldots, x_n\}$ $(n+1)$-particija i $m_{n+1} : \mathcal{C}_{[c,d]}^{\mathcal{P}_{n+1}} \to [0, \infty]$ generalizovana pseudoverovatnoća na skupu $\mathcal{C}_{[c,d]}^{\mathcal{P}_{n+1}} = \{[x_0, x_1], \ldots, (x_{i-1}, e], (e, x_{i+1}], \ldots, (x_{n-1}, x_n], [c, d]\}$.

Neka je $\mathcal{P}_{n+2} = \mathcal{P}_{n+1} \cup \{f\} = \{x_0, \ldots, x_{i-1}, e, x_i, \ldots, x_{i+k-1}, f, x_{i+k}, \ldots, x_n\}$ $(n+2)$-particija i $m_{n+2} : \mathcal{C}_{[c,d]}^{\mathcal{P}_{n+2}} \to [0, \infty]$ generalizovana pseudoverovatnoća.

Pošto se između tačaka e i f nalazi k tačaka, iz jednakosti (3.37) sledi

$$\begin{aligned} m_{n+2-k}((e, f]) = {} & m_{n+2}((e, x_i]) \oplus_\varepsilon m_{n+2}((x_i, x_{i+1}]) \\ & \oplus_\varepsilon \cdots \oplus_\varepsilon m_{n+2}((x_{i+k-2}, x_{i+k-1}]) \oplus_\varepsilon m_{n+2}((x_{i+k-1}, f]), \end{aligned}$$

gde je $\mathcal{P}_{n+2-k} = \mathcal{P}_{n+2} \setminus \{x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k-1}\}$ i $m_{n+2-k} : \mathcal{C}_{[c,d]}^{\mathcal{P}_{n+2-k}} \to [0, \infty]$.

Mera skupa $\{x_0\}$ i intervala $(x_0, x_1]$

Neka je $\mathcal{P}_n = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ n-particija intervala $[c, d] \subset \mathbb{R}^+$ i neka je $m_n : \mathcal{C}_{[c,d]}^{\mathcal{P}_n} \to [0, \infty]$ generalizovana pseudoverovatnoća.

Posmatra se $(n+1)$-particija $\mathcal{P}_{n+1} = \mathcal{P}_n \cup \{y\}$, gde je $x_0 \leq y \leq x_1$ i generalizovana pseudoverovatnoća $m_{n+1} : \mathcal{C}_{[c,d]}^{\mathcal{P}_{n+1}} \to [0, \infty]$.

Za $y = x_0$ skup $\{x_0\} = [x_0, x_0] \in \mathcal{C}_{[c,d]}^{\mathcal{P}_{n+1}}$. Na osnovu definicije 3.9 sledi

$$m_{n+1}(\{x_0\}) = g^{-1}\left(\frac{F(x_0) - F(x_0^-)}{\varepsilon^n}\right). \tag{3.38}$$

Za generalizovane pseudoverovatnoće $m_{n+1} : \mathcal{C}_{[c,d]}^{\mathcal{P}_{n+1}} \to [0, \infty]$ i m_n :

$\mathcal{C}_{[c,d]}^{\mathcal{P}_n} \to [0,\infty]$ iz jednakosti (3.27), jednakosti (3.38) i leme 3.6 se dobija

$$\begin{aligned}
& m_{n+1}([x_0,x_0]) \oplus_\varepsilon m_{n+1}((x_0,x_1]) = m_n([x_0,x_1]) \\
\Leftrightarrow\ & g^{-1}\left(\varepsilon g(m_{n+1}([x_0,x_0])) + g(m_{n+1}((x_0,x_1]))\right) = g^{-1}\left(\frac{F(x_1)-F(x_0^-)}{\varepsilon^{n-1}}\right) \\
\Leftrightarrow\ & \varepsilon g(m_{n+1}([x_0,x_0])) + g(m_{n+1}((x_0,x_1])) = \frac{F(x_1)-F(x_0^-)}{\varepsilon^{n-1}} \\
\Leftrightarrow\ & g(m_{n+1}((x_0,x_1])) = \frac{F(x_1)-F(x_0^-)}{\varepsilon^{n-1}} - \varepsilon g(m_{n+1}([x_0,x_0])) \\
\Leftrightarrow\ & g(m_{n+1}((x_0,x_1])) = \frac{F(x_1)-F(x_0^-)}{\varepsilon^{n-1}} - \varepsilon\frac{F(x_0)-F(x_0^-)}{\varepsilon^{n}} \\
\Leftrightarrow\ & g(m_{n+1}((x_0,x_1])) = \frac{F(x_1)-F(x_0^-)-F(x_0)+F(x_0^-)}{\varepsilon^{n-1}} \\
\Leftrightarrow\ & m_{n+1}((x_0,x_1]) = g^{-1}\left(\frac{F(x_1)-F(x_{0^-}))}{\varepsilon^{n-1}}\right).
\end{aligned}$$

3.3.4 Primeri generalizovane pseudoverovatnoće

Primer 3.6 Neka je $X : \Omega \to \mathbb{R}$ slučajna promenljiva diskretnog tipa sa skupom vrednosti $\mathcal{R}_X = \{0,1,\ldots,n\}$. Neka je raspodela verovatnoća od X data sa $p(i) = P(X=i) = \frac{1}{n+1}$. Funkcija raspodele slučajne promenljive X je $F(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty,0) \\ \frac{i+1}{n+1}, & x \in [i,i+1), \quad i = 0,1,\ldots,n \\ 1, & x \in [n,\infty) \end{cases}$.

Za n-particiju $\mathcal{P}_n = \{0,1,\ldots,n\}$ intervala $[0,n]$ i familiju intervala $\mathcal{C}_{[0,n]}^{\mathcal{P}_n} = \{[0,1],(1,2],\ldots,(n-1,n],[0,n]\}$, na osnovu definicije 3.9 sledi

$$m_n([0,n]) = g^{-1}(F(n)-F(0^-)) = g^{-1}(1-0) = \mathbf{1}_l$$

i

$$m_n([0,1]) = g^{-1}\left(\frac{F(1)-F(0^-)}{\varepsilon^{n-1}}\right) = g^{-1}\left(\frac{p(1)}{\varepsilon^{n-1}}\right) = g^{-1}\left(\frac{1}{(n+1)\varepsilon^{n-1}}\right).$$

Za $1 \le i < n-1$ je

$$\begin{aligned}
m_n((i,i+1]) &= g^{-1}\left(\frac{F(i+1)-F(i)}{\varepsilon^{n-(i+1)}}\right) \\
&= g^{-1}\left(\frac{p(i+1)}{\varepsilon^{n-(i+1)}}\right) = g^{-1}\left(\frac{1}{(n+1)\varepsilon^{n-(i+1)}}\right).
\end{aligned}$$

Za strogo monotono rastuću funkciju g i $0 < \varepsilon < 1$ se dobija

$$m_n([0,1]) > m_n((1,2]) > \ldots > m_n((n-1,n]),$$

a za $\varepsilon > 1$ važi

$$m_n([0,1]) < m_n((1,2]) < \ldots < m_n((n-1,n]).$$

Slično, za strogo monotono opadajuću funkciju g i $0 < \varepsilon < 1$ se dobija

$$m_n([0,1]) < m_n((1,2]) < \ldots < m_n((n-1,n]),$$

a za $\varepsilon > 1$ važi

$$m_n([0,1]) > m_n((1,2]) > \ldots > m_n((n-1,n]).$$

Ako je $\varepsilon = 1$ a g strogo monotono rastuća ili strogo monotono opadajuća funkcija, u oba slučaja je

$$m_n((i,i+1]) = g^{-1}\left(\frac{1}{n+1}\right), \quad i \in \{0,1,\ldots,n-1\}$$

i

$$m_n([0,1]) = m_n((1,2]) = \ldots = m_n((n-1,n]). \qquad \diamond$$

Neka je X nenegativna slučajna promenljiva ($X(\omega) \geq 0$, za svako $\omega \in \Omega$) na prostoru verovatnoće $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sa matematičkim očekivanjem $E(X)$ i disperzijom $D(X)$.

Ako je skup vrednosti $\mathcal{R}_X$ slučajne promenljive X ograničen skup, proizvoljan zatvoren podskup skupa $\mathbb{R}^+$ koji sadrži $\mathcal{R}_X$ se može uzeti za interval $[c,d]$ (videti primer 3.6).

Ako skup $\mathcal{R}_X$ nije ograničen, primenom nejednakosti Čebiševa, za unapred zadat parametar $\alpha > 0$, može se pokazati da je

$$P\left(E(X) - \alpha\sqrt{D(X)} < X < E(X) + \alpha\sqrt{D(X)}\right) \geq 1 - \frac{1}{\alpha^2},$$

tj. interval $\left[E(X) - \alpha\sqrt{D(X)}, E(X) + \alpha\sqrt{D(X)}\right]$ sadrži $\left(1 - \frac{1}{\alpha^2}\right) \cdot 100\%$ vrednosti slučajne promenljive X.

U zavisnosti od željene preciznosti, bira se interval $[c,d]$ i parametar α, tako da je

$$[E(X) - \alpha\sqrt{D(X)}, E(X) + \alpha\sqrt{D(X)}] \subseteq [c,d].$$

Za parametar α se najčešće uzimaju vrednosti $\alpha = 3$, $\alpha = 4$, $\alpha = 5$, itd. (videti [89]).

Primer 3.7 Poasonova raspodela sa parametrom $\lambda > 0$ je diskretna raspodela sa prebrojivim skupom vrednosti $\mathcal{R}_X = \{0, 1, 2, \ldots\}$ i raspodelom verovatnoća datom sa $p(i) = P(X = i) = \dfrac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}$. Matematičko očekivanje i disperzija Poasonove raspodele su jednaki parametru λ.

Poznato je da je $P(\lambda - 3\sqrt{\lambda} < X < \lambda + 3\sqrt{\lambda}) = 0.997$, tj. 99.7% podataka je sadržano u opsegu od tri standardne devijacije od srednje vrednosti. Na primer, za $\lambda = 4$ je $P(-2 < X < 10) = 0.997$. Kako je $X \geq 0$ sledi da je $P(X \in [0, 10]) = 0.997$, pa se interval $[0, 10]$ može uzeti za $[c, d]$.

Za 5-particiju $\mathcal{P}_5 = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$ odgovarajuća familija intervala je $\mathcal{C}_{[0,10]}^{\mathcal{P}_5} = \{(2k, 2(k+1)] : k = 1, 2, 3, 4\} \cup \{[0, 2], [0, 10]\}$.

Sada je $m_5([0, 10]) = g^{-1}\left(e^{-4} \displaystyle\sum_{j=0}^{10} \frac{4^j}{j!}\right)$, a kako je fukcija g bijekcija i $e^{-4} \sum\limits_{j=0}^{10} \frac{4^j}{j!} \neq 1$, sledi da je $m_5([0, 10]) \neq \mathbf{1}_l$.

Za interval $[0, 2]$ je

$$m_5([0, 2]) = g^{-1}\left(e^{-4} \sum_{j=0}^{2} \frac{4^j}{j!}\right),$$

a za intervale $(2i, 2(i+1)]$, $i = 1, 2, 3, 4$ važi

$$m_5((2i, 2(i+1)]) = g^{-1}\left(\frac{4^{2(i+1)}}{(2(i+1))!} e^{-4} + \frac{4^{2i+1}}{(2i+1)!} e^{-4}\right).$$

Za računanje generalizovane pseudoverovatnoće intervala $(2, 6]$, potrebno je ukloniti tačku 4 iz 5-particije $\mathcal{P}_5 = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$.

Na osnovu jednakosti (3.36) sledi

$$m_4((2, 6]) = m_5((2, 4]) \oplus m_5((4, 6]) = g^{-1}(F(6) - (\varepsilon - 1)F(4) - \varepsilon F(2)).$$

Sada, za interval $[0, 2]$ sledi

$$m_4([0, 2]) = g^{-1}\left(g(m_5([0, 2])) \cdot \varepsilon\right) = g^{-1}\left(e^{-4} \sum_{j=0}^{2} \frac{4^j}{j!} \cdot \varepsilon\right),$$

i za $k = 3, 4$, sledi

$$m_4((2k, 2(k+1)]) = m_5((2k, 2(k+1)]).$$

Za računanje generalizovane pseudoverovatnoće intervala $(2, 5]$, potrebno je dodati tačku 5 5-particiji $\mathcal{P}_5 = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$.

Tada je

$$m_6((2,5]) = m_6((2,4]) \oplus m_6((4,5]),$$

pri čemu je

$$\begin{aligned} m_6((2,4]) &= g^{-1}\left(g(m_5((2,4])) \cdot \frac{1}{\varepsilon}\right) = g^{-1}\left(\frac{F(4)-F(2)}{\varepsilon^{5-2}} \cdot \frac{1}{\varepsilon}\right) \\ &= g^{-1}\left(\frac{2 \cdot 4^3 \cdot e^{-4}}{3!\varepsilon^4}\right) \end{aligned}$$

i $m_6((4,5]) = m_5((4,5])$. $\diamond$

Primer 3.8 Neka je X slučajna promenljiva sa uniformnom raspodelom na intervalu $[0, 4]$ i neka je $\mathcal{P}_4 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ 4-particija intervala $[0, 4]$. Za elemente familije intervala $\mathcal{C}_{[0,4]}^{\mathcal{P}_4} = \{[0, 1], (1, 2], (2, 3], (3, 4], [0, 4]\}$ važi:

$$m_4([0,4]) = g^{-1}\left(F(4) - F(0^-)\right) = g^{-1}(1) = \mathbf{1}_l,$$

$$m_4([0,1]) = g^{-1}\left(\frac{F(1)-F(0)^-}{\varepsilon^{4-1}}\right) = g^{-1}\left(\frac{1}{4\varepsilon^{4-1}}\right)$$

i

$$m_4((i,i+1]) = g^{-1}\left(\frac{F(i+1)-F(i)}{\varepsilon^{4-(i+1)}}\right) = g^{-1}\left(\frac{1}{4\varepsilon^{4-(i+1)}}\right),$$

gde je $i = 1, 2, 3$.

Da bi se izračunala generalizovana pseudoverovatnoća intervala $(1.5, 2.5]$, potrebno je početnoj 4-particiji $\mathcal{P}_4$ dodati tačke 1.5 i 2.5, tj. posmatra se 6-particija $\mathcal{P}_6 = \{0, 1, 1.5, 2, 2.5, 3, 4\}$ i generalizovana pseudoverovatnoća $m_6 : \mathcal{C}_{[0,4]}^{\mathcal{P}_6} \to [0, \infty]$.

Između tačaka 1.5 i 2.5 se nalazi jedna tačka 4-particije $\mathcal{P}_4$, pa je

$$m_5((1.5, 2.5]) = m_6((1.5, 2]) \oplus m_6((2, 2.5]).$$

Vrednosti $m_6((1.5, 2])$ i $m_6((2, 2.5])$ se mogu izračunati pomoću definicije 3.9 na uobičajen način. $\diamond$

Za slučajnu promenljivu X diskretnog tipa, sa skupom vrednosti $\mathcal{R}_X = \{x_0, x_1, \ldots\}$ i verovatnoćama $p(x_i) = P(X = x_i)$, za $\varepsilon = 1$ i $g(x) = x$ važi

$$m_n([x_0, x_1]) = p(x_1) + p(x_0)$$

i

$$m_n((x_i, x_{i+1}]) = p(x_{i+1}), \quad (x_i, x_{i+1}] \in \mathcal{C}_{[c,d]}^{\mathcal{P}_n},$$

gde je $[c, d]$ interval koji sadrži skoro sve vrednosti slučajne promenljive X.

Ako je X slučajna promenljiva i $\varepsilon = 1$, važi

$$m_n([x_0, x_1]) = g^{-1} \circ P_X([x_0, x_1])$$

i

$$m_n((x_i, x_{i+1}]) = g^{-1} \circ P_X((x_i, x_{i+1}]) \quad (x_i, x_{i+1}] \in \mathcal{C}_{[c,d]}^{\mathcal{P}_n},$$

pa je generalizovana pseudoverovatnoća m_n restrikcija pseudoverovatnoće definisane u odeljku 3.1 na familiji $\mathcal{C}_{[x_0,x_n]}^{\mathcal{P}_n}$.

Uopštena pseudoaritmetička sredina slučajnih promenljivih $X_1, X_2, \ldots, X_n$ je

$$S_n = n^* \odot_\gamma \bigoplus_{k=1}^{n}{}_\varepsilon X_k,$$

gde je $n^* = g^{-1}\left(\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right)$.

Iz jednakosti (3.29) sledi da je

$$\bigoplus_{k=1}^{n}{}_\varepsilon X_k = g^{-1}\left(\sum_{k=1}^{n} \varepsilon^{n-k} g(X_k)\right).$$

Na osnovu jednakosti (3.28) dobija se

$$S_n = g^{-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \varepsilon^{n-k} g(X_k)\right).$$

3.3.5 Uopšteno matematičko očekivanje u odnosu na generalizovanu pseudoverovatnoću

Neka je X slučajna promenljiva sa konačnim skupom vrednosti $\mathcal{R}_X = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, $0 \leq x_0 < x_1 < \ldots < x_n$, i $m_{n+1} : \mathcal{C}_{[c,d]}^{\mathcal{P}_{n+1}} \to [0, \infty]$, generalizovana pseudoverovatnoća, gde je $\mathcal{C}_{[c,d]}^{\mathcal{P}_{n+1}} = \{[x_0, x_0], [x_0, x_1], \ldots, (x_{n-1}, x_n], [c, d]\}$.

Definicija 3.10 *Uopšteno matematičko očekivanje* slučajne promenljive X u odnosu na generalizovanu pseudoverovatnoću m_{n+1}, u oznaci $\mathrm{GE}(X)$, je

$$\mathrm{GE}(X) = \bigoplus_{k=0}^{n}{}_\varepsilon x_k^* \odot_\gamma m_{n+1}(A_k), \tag{3.39}$$

gde je $A_0 = [x_0, x_0]$, $A_k = (x_{k-1}, x_k]$ i $x_k^* = g^{-1}\left((g(x_k))^{\frac{1}{\gamma}}\right)$, $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

Na osnovu jednakosti (3.30) i definicije 3.9 sledi

$$\begin{aligned}
\mathrm{GE}(X) &= g^{-1}\left(\sum_{k=0}^{n} \varepsilon^{n-k} g(x_k^*)^{\gamma} g(m_n(A_k))\right) \\
&= g^{-1}\left(\varepsilon^n g(x_0) g \circ g^{-1}\left(\frac{F(x_0)-F(x_0^-)}{\varepsilon^n}\right)\right. \\
&\qquad \left. + \sum_{k=1}^{n} \varepsilon^{n-k}\ g(x_k)\ g \circ g^{-1}\left(\frac{F(x_k)-F(x_{k-1})}{\varepsilon^{n-k}}\right)\right) \\
&= g^{-1}\left(g(x_0)\left(F(x_0)-F(x_0^-)\right)\right. \\
&\qquad \left. + \sum_{k=1}^{n} g(x_k)\ (F(x_k)-F(x_{k-1}))\right),
\end{aligned}$$

gde je F funkcija raspodele slučajne promenljive X.

Neka je X nenegativna slučajna promenljiva diskretnog tipa sa prebrojivim skupom vrednosti tako da su skoro sve vrednosti [1] slučajne promenljive sadržane u intervalu $[c, d]$. Neka su $x_0, x_1, \ldots, x_n$ različite vrednosti slučajne promenljive X iz intervala $[c, d]$. Tada je uopšteno matematičko očekivanje slučajne promenljive X u odnosu na generalizovanu pseudoverovatnoću $m_{n+1} : \mathcal{C}_{[c,d]}^{\mathcal{P}_{n+1}} \to [0, \infty]$ dato sa (3.39).

Neka je X slučajna promenljiva neprekidnog tipa sa konačnom disperzijom, za koju $\left(1 - \dfrac{1}{\alpha^2}\right) \cdot 100\%$ vrednosti pripada intervalu $[c, d]$. Neka je $\mathcal{P}_n = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ n-particija intervala $[c, d]$. Tada je uopšteno matematičko očekivanje slučajne promenljive X u odnosu na generalizovanu pseudoverovatnoću m_n dato sa (3.39) i važi

$$\begin{aligned}
\mathrm{GE}(X) &= g^{-1}\left(g\left(\frac{x_0 + x_0}{2}\right)\ (F(x_0) - F(x_0^-))\right. \\
&\qquad \left. + \sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right)\ (F(x_{k+1}) - F(x_k))\right).
\end{aligned}$$

Kako je X slučajna promenljiva neprekidnog tipa, važi $F(x_0) = F(x_0^-)$ pa sledi

$$\mathrm{GE}(X) = g^{-1}\left(\sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right)\ (F(x_{k+1}) - F(x_k))\right).$$

[1] U statističkim istraživanjima se obično uzima da je procenat vrednosti koje su sadržane u traženom intervalu 95% ili 99% svih vrednosti.

U ovom slučaju je $x_k^* = g^{-1}\left(\left(g\left(\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right)\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right)$ i uopšteno matematičko očekivanje slučajne promenljive neprekidnog tipa u odnosu na generalizovanu pseudoverovatnoću je predstavljeno sredinama intervala $(x_k, x_{k+1}]$.

Glava 4

Intervalno-vrednosna pseudoverovatnoća

Intervalno-vrednosna verovatnoća predstavlja koristan alat prilikom rada sa mernim instrumentima kada se javlja tzv. merna nesigurnost ([90]). U praktičnim primenama procene se rade na osnovu konačnih uzoraka. Kako odabir jedne raspodele za procenu ne daje uvek najbolje rezultate, korišćenjem intervalno-vrednosnih verovatnoća dobija se širi opseg za rad, pa tako i bolji rezultati. U literaturi se može naći više pristupa definisanju intervalno-vrednosnih verovatnoća.

U [22] je uveden pojam donje i gornje verovatnoće pomoću viševrednosnih preslikavanja. Ako je $(X, \mathcal{F}, \mu)$ prostor verovatnoće i Γ viševrednosno preslikavanje skupa X u neprazan prostor S, na osnovu verovatnosne mere (verovatnoće) μ i preslikavanja Γ, definišu se donja P_* i gornja P^* verovatnoća na podskupovima od S i klasa verovatnosnih mera $\mathcal{P}$ za koje je

$$P_*(T) \leq \mathcal{P}(T) \leq P^*(T),$$

za specijalne podskupove T od S. Kod ovakvog pristupa nedostak je što donja i gornja verovatnoća ne zadovoljavaju uslov σ-aditivnosti, tj. P_* i P^* nisu verovatnosne mere.

Sličan pristup definisanju i aproksimiranju donje i gornje verovatnoće pomoću merljivih selektora se može naći u [59]. Viševrednosno preslikavanje $\Gamma : \Omega \to \mathcal{P}(X)$ se naziva slučajan skup, gde je X neprazan skup i $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ prostor verovatnoće. Merljivo preslikavanje $f : \Omega \to X$ je selektor slučajnog skupa Γ ako za svako $\omega \in \Omega$ važi $f(\omega) \in \Gamma(\Omega)$. Ako je $(X, \mathcal{F}')$ merljiv prostor, za $A \in \mathcal{F}'$, slučajan skup Γ generiše skupovno-vrednosnu skupovnu funkciju

$$\mathcal{P}_\Gamma(A) = \{\mathcal{P}_f(A) : f \text{ je merljivi selektor slučajnog skupa } \Gamma\}.$$

Za donju i gornju verovatnoću $P^*(A)$ i $P_*(A)$ definisanu na isti način kao u [22] ispitivani su uslovi pod kojima važi jednakost

$$\mathcal{P}_\Gamma(A) = [P_*(A), P^*(A)].$$

Još jedan koncept donje i gornje verovatnoće je izučavan u [19]. Na prostoru $(\Omega, \mathcal{F})$, skupovne funkcije $\underline{P}, \overline{P} : \mathcal{F} \to [0,1]$ sa osobinom da obe preslikavaju prazan skup u 0 i skup Ω u 1, pri čemu $\underline{P}$ zadovoljava uslov super-aditivnosti a $\overline{P}$ zadovoljava uslov sub-aditivnosti i važi

$$\underline{P}(A) + \overline{P}(\Omega \setminus A) = 1, \quad A \in \mathcal{F},$$

se nazivaju redom donja i gornja verovatnosna funkcija. Jasno je da je $\underline{P}(A) \leq \overline{P}(A)$, za svako $A \in \mathcal{F}$.

U [93] su na merljivom prostoru $(\Omega, \mathcal{F})$ definisane R-verovatnoća i F-verovatnoća. R-verovatnoća je intervalno-vrednosna skupovna funkcija definisana kao interval $[L(A), U(A)]$, gde su L i U neaditivne skupovne funkcije i $0 \leq L(A) \leq U(A) \leq 1$, za svako $A \in \mathcal{F}$. Skup $\mathcal{M}$ verovatnosnih mera $\mathcal{P}$ takvih da je $L(A) \leq \mathcal{P}(A) \leq U(A), A \in \mathcal{F}$ je neprazan. R-verovatnoća je F-verovatnoća ako su funkcije L i U definisane sa

$$L(A) = \inf_{\mathcal{P} \in \mathcal{M}} \mathcal{P}(A) \quad \text{i} \quad U(A) = \sup_{\mathcal{P} \in \mathcal{M}} \mathcal{P}(A).$$

R-verovatnoća i F-verovatnoća su neaditivne intervalno-vrednosne funkcije za koje važi $[L(\emptyset), U(\emptyset)] = [0,0]$ i $[L(\Omega), U(\Omega)] = [1,1]$.

Na osnovu rezultata iz [93], u [43] i [52] je uvedena opštija intervalno-vrednosna verovatnosna mera, u oznaci i_m, koja omogućava definisanje intervalno-vrednosnih integrala i diferencijala i predstavlja začetak intervalne teorije mere. Na merljivom prostoru $(X, \mathcal{F})$ definiše se funkcija $i_m : \mathcal{F} \to Int_{[0,1]}$, gde je $Int_{[0,1]} = \{[a,b] : 0 \leq a \leq b \leq 1\}$ koja zadovoljava uslove:

1. $i_m(\emptyset) = [0,0]$,
2. $i_m(X) = [1,1]$,
3. $i_m(A) = [A^l, A^u] \subseteq [0,1]$, za svako $A \in \mathcal{F}$,
4. za svaku particiju $\{A_k : k \in K\} \cup \{B_j : j \in J\}$ skupa X gde je $A = \bigcup_{k \in K} A_k$ i $A^C = \bigcup_{j \in J} B_j$,

$$i_m(A) \subseteq \left[\max\left\{1 - \sum_{j \in J} B_j^u, \sum_{k \in K} A_k^l\right\}, \min\left\{1 - \sum_{j \in J} B_j^l, \sum_{k \in K} A_k^u\right\}\right].$$

Za ovako definisanu intervalno-vrednosnu verovatnosnu meru je pokazana veza sa merom mogućnosti i merom neophodnosti, merom verovanja, fazi intervalima, slučajnim skupovima, i drugim pojmovima teorije neodređenosti.

U [27] je u okvirima pseudoanalize izučavana intervalno-vrednosna skupovna funkcija nazvana intervalno-vrednosna pseudoverovatnoća kao jedan oblik intervalno-vrednosne $\oplus$-mere definisane u odeljku 1.6. Cilj istraživanja je definisanje intervalno-vrednosne skupovne funkcije oblika $[p_l, p_r]$ (ili $[p_r, p_l]$, u zavisnosti od totalnog uređenja na posmatranom poluprstenu), gde su krajevi intervala pseudoverovatnoće definisane u odeljku 3.1.

Svi rezultati rada [27] su originalni i predstavljeni su u nastavku.

4.1 Definicija intervalno-vrednosne pseudoverovatnoće

Pojam intervalno-vrednosne pseudoverovatnoće se uvodi na sledeći način.

Neka je $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ Borelova σ-algebra podskupova od $\mathbb{R}$, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ prostor verovatnoće i $[a,b]_+ = \{x \in [a,b] \mid \mathbf{0} \preceq x\}$.

Posmatraju se pseudoverovatnoće $p : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [a,b]_+$ takve da je

$$p = g^{-1} \circ P_X = g^{-1} \circ \mathcal{P} \circ X^{-1},$$

gde je X slučajna promenljiva na prostoru verovatnoće $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$.

Neka je $\mathcal{R}_X$ skup vrednosti slučajne promenljive X i $\mathcal{B}(\mathcal{R}_X)$ Borelova σ-algebra podskupova od $\mathcal{R}_X$.

Neka je $\mathcal{M}_d$ neprazna familija pseudoverovatnoća $p = g^{-1} \circ \mathcal{P} \circ X^{-1}$ takvih da je $(\mathcal{M}_d, \preceq)$ gusto linearno uređenje sa krajevima $p_l, p_r \in \mathcal{M}_d$.

Neka je $\mathcal{B}(\mathcal{R})$ presek σ-algebri $\mathcal{B}(\mathcal{R}_X)$, gde je X slučajna promenljiva za koju je $p = g^{-1} \circ \mathcal{P} \circ X^{-1}$ za $p \in \mathcal{M}_d$.

Za svako $p \in \mathcal{M}_d$ i svako $A \in \mathcal{B}(\mathcal{R})$ važi

$$p_l(A) \preceq p(A) \preceq p_r(A).$$

Kako je $(\mathcal{M}_d, \preceq)$ gusto linearno uređenje sa krajevima $p_l, p_r \in \mathcal{M}_d$, gde je $\mathcal{M}_d$ neprazna familija pseudoverovatnoća, za svako $A \in \mathcal{B}(\mathcal{R})$ važi:

i) $p_1(A) \preceq p_2(A)$ ili $p_2(A) \preceq p_1(A)$, za svako $p_1, p_2 \in \mathcal{M}_d$,

ii) za svako $p_1, p_2, p_3 \in \mathcal{M}_d$ tako da je $p_1(A) \preceq p_2(A)$ i $p_2(A) \preceq p_3(A)$ važi $p_1(A) \preceq p_3(A)$,

iii) za svako $p_1, p_2 \in \mathcal{M}_d$ tako da je $p_1(A) \preceq p_2(A)$ postoji $p_3 \in \mathcal{M}_d$ tako da je $p_1(A) \preceq p_3(A) \preceq p_2(A)$,

iv) ne postoje mere $p_*, p^* \in \mathcal{M}_d \setminus \{p_l, p_r\}$ takve da je $p_*(A) \preceq p_l(A)$ i $p_r(A) \preceq p^*(A)$.

Neka je $([a,b], \oplus, \odot)$ g-poluprsten.

Definicija 4.1 *Intervalno-vrednosna pseudoverovatnoća* $\overline{p} : \mathcal{B}(\mathcal{R}) \to \mathcal{I}$ određena familijom $\mathcal{M}_d$ pseudoverovatnoća i generatorom g je:

1. intervalno-vrednosna $\oplus$-mera $\overline{p} = [p_l, p_r]$, ako je generator g strogo monotono rastuća funkcija,

2. intervalno-vrednosna $\oplus$-mera $\overline{p} = [p_r, p_l]$, ako je generator g strogo monotono opadajuća funkcija.

Svaka intervalno-vrednosna pseudoverovatnoća $\overline{p}$ je intervalno-vrednosna $\oplus$-mera $\overline{\mu}_{\mathcal{M}}$, pa važi:

1. $\overline{p}(\emptyset) = [\mathbf{0}, \mathbf{0}]$,

2. $\overline{p}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \bigoplus_{i=1}^{\infty} \overline{p}(A_i)$,

za niz $\{A_i : i \in \mathbb{N}\}$ u parovima disjunktnih skupova iz $\mathcal{B}(\mathcal{R})$.

U nastavku su data dva primera intervalno-vrednosne pseudoverovatnoće.

Primer 4.1 Neka je X slučajna promenljiva sa uniformnom raspodelom na intervalu $(0,1)$ i neka je $X_n = \left(1 + \frac{1}{2n}\right) X$, $n \in \mathbb{N}$ niz slučajnih promenljivih. Slučajna promenljiva X_n ima uniformnu raspodelu na intervalu $\left(0, 1 + \frac{1}{2n}\right]$, tj. $X_n : \mathcal{U}\left(0, 1 + \frac{1}{2n}\right)$.

Za interval $(a,b] \subseteq (0,1]$ važi

$$P_{X_n}((a,b]) = P(X_n^{-1}((a,b])) = \frac{2n}{2n+1}(b-a), \quad n \in \mathbb{N}$$

i

$$P_X((a,b]) = P(X^{-1}((a,b])) = b - a.$$

Za svako $n \in \mathbb{N}$ i $(a,b] \subseteq (0,1]$ sledi da je

$$P_{X_n}((a,b]) \leq P_{X_{n+1}}((a,b]) \quad \text{i} \quad P_{X_n}((a,b]) \leq P_X((a,b]).$$

Neka je g strogo monotono rastući generator i $\mathcal{M}_d = \{p, p_1, p_2, \dots\}$ familija pseudoverovatnoća, gde je $p = g^{-1} \circ P_X$ i $p_n = g^{-1} \circ P_{X_n}$.

Tada, za $p_l = p_1$ i $p_r = p$, funkcija

$$\overline{p} = [p_1, p]$$

je intervalno-vrednosna pseudoverovatnoća.

U nastavku se posmatra $\oplus$-mera p_n na prostoru $((0,1], \mathcal{B}(\mathcal{R}))$.
Za skup $(0,1]$ važi

$$\overline{p}((0,1]) = [p_1((0,1]), p((0,1])] = \left[g^{-1}\left(\frac{2}{3}\right), g^{-1}(1)\right] = \left[g^{-1}\left(\frac{2}{3}\right), \mathbf{1}\right].$$

Slično, za $X : \mathcal{U}\,(0,1)$, $X_n = (1+\frac{1}{2n})X$, $n \in \mathbb{N}$ i $Y_n = (1+\frac{1}{n})X$, $n \in \mathbb{N}$ i strogo monotono rastući generator g važi

$$\overline{p}((0,1]) = \left[g^{-1}\left(\frac{1}{2}\right), g^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right].$$

Može se primetiti da pseudoverovatnoće iz familije $\mathcal{M}_d$ ne moraju da budu pseudoverovatnoće na prostoru $((0,1], \mathcal{B}(\mathcal{R}))$, iako su $\oplus$-mere na prostoru $((0,1], \mathcal{B}(\mathcal{R}))$.

Važi da je p_n pseudoverovatnoća na prostoru $((0, 1+\frac{1}{2n}], \mathcal{B}(\mathcal{R}_{X_n}))$ i da je p pseudoverovatnoća na prostoru $((0,1], \mathcal{B}(\mathcal{R}_X))$. $\diamond$

Primer 4.2 Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ prostor verovatnoće, $\mathcal{I}$ familija data sa (1.4) i $F : \Omega \to (\mathcal{I}, \Sigma(\mathcal{I}))$ merljiva intervalno-vrednosna funkcija, gde je $\Sigma(\mathcal{I})$ σ-algebra na skupu $\mathcal{I}$.

Može se primetiti da je F specijalan slučaj zatvorenog slučajnog skupa, tj. F je zatvoren slučajan skup sa vrednostima u $\mathcal{I}$. Na osnovu rezultata iz [24], sledi $F = [f_l, f_r]$.

Familija $\mathcal{M}_d$ je data sa

$$\mathcal{M}_d = \{g^{-1} \circ \mathcal{P} \circ f_n^{-1} : f_n, n \in \mathbb{N}, \text{ su merljivi selektori funkcije } F\}.$$

Neka je $\mathcal{B}(\mathcal{R})$ presek σ-algebri $\mathcal{B}(\mathcal{R}_{f_n})$, gde su f_n, $n \in \mathbb{N}$, merljivi selektori intervalno-vrednosne funkcije F.

Za svako $x \geq 0$, posmatraju se skupovi

$$A_{l,x} = \{\omega \in \Omega : f_l(\omega) \leq x\} \quad \text{i} \quad A_{r,x} = \{\omega \in \Omega : f_r(\omega) \leq x\}.$$

Kako je $f_l(\omega) \leq f_r(\omega)$, sledi $A_{r,x} \subseteq A_{l,x}$ pa je $\mathcal{P}(A_{r,x}) \leq \mathcal{P}(A_{l,x})$, tj.

$$\mathcal{P} \circ f_r^{-1}\{\omega \in \Omega : f_r(\omega) \leq x\} \leq \mathcal{P} \circ f_l^{-1}\{\omega \in \Omega : f_l(\omega) \leq x\}.$$

Ako je g strogo montono rastući generator, tada je

$$[g^{-1} \circ \mathcal{P} \circ f_r^{-1}, g^{-1} \circ \mathcal{P} \circ f_l^{-1}]$$

intervalno-vrednosna pseudoverovatnoća.

Slično, ako je g strogo monotono opadajući generator, tada je

$$[g^{-1} \circ \mathcal{P} \circ f_l^{-1}, g^{-1} \circ \mathcal{P} \circ f_r^{-1}]$$

intervalno-vrednosna pseudoverovatnoća. $\diamond$

4.2 Slaba konvergencija niza intervalno-vrednosnih pseudoverovatnoća

U ovom odeljku je prikazan originalni rezultat rada [27]. Data je definicija g-slabe konvergencije niza intervalno-vrednosnih pseudoverovatnoća kao i ekvivalentni uslovi g-slabe konvergencije niza intervalno-vrednosnih pseudoverovatnoća.

Neka je $([a,b], \oplus, \odot)$ g-poluprsten.

Definicija 4.2 Niz intervalno-vrednosnih pseudoverovatnoća $\{\overline{p}_n : n \in \mathbb{N}\}$, *$g$-slabo konvergira* ka intervalno-vrednosnoj pseudoverovatnoći $\overline{p}$, u oznaci $\overline{p}_n \xrightarrow{g\text{-w}} \overline{p}$, ako i samo ako za svaku ograničenu (u smislu posmatranog g-poluprstena) neprekidnu funkciju $f : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ važi

$$D\left(\int_{\mathbb{R}}^{\oplus} f \odot d\overline{p}_n, \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} f \odot d\overline{p}\right) \to 0, \quad n \to \infty,$$

gde je D metrika data sa (1.9).

Ako je generator g strogo monotono rastuća funkcija, $\overline{p}_n = [p_{n,l}, p_{n,r}]$ i $\overline{p} = [p_l, p_r]$, a ako je generator g strogo monotono opadajuća funkcija, $\overline{p}_n = [p_{n,r}, p_{n,l}]$ i $\overline{p} = [p_r, p_l]$.

Može se primetiti da $D\left(\int_{\mathbb{R}}^{\oplus} f \odot d\overline{p}_n, \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} f \odot d\overline{p}\right) \to 0, n \to \infty$ ako i samo ako $d\left(\int_{\mathbb{R}}^{\oplus} f \odot dp_{n,l}, \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} f \odot dp_l\right) \to 0, n \to \infty$ i $d\left(\int_{\mathbb{R}}^{\oplus} f \odot dp_{n,r}, \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} f \odot dp_r\right) \to 0, n \to \infty$, tj. ako i samo ako

$$p_{n,l} \xrightarrow{g\text{-w}} p_l \quad \text{i} \quad p_{n,r} \xrightarrow{g\text{-w}} p_r.$$

Dakle, ispitivanje slabe konvergencije niza $\{\overline{p}_n : n \in \mathbb{N}\}$ intervalno-vrednosnih pseudoverovatnoća svodi se na ispitivanje slabe konvergencije dva niza pseudoverovatnoća, $\{p_{n,l} : n \in \mathbb{N}\}$ i $\{p_{n,r} : n \in \mathbb{N}\}$.

Definicija 4.3 Neka je $\overline{p}$ intervalno-vrednosna pseudoverovatnoća. Skup A je $\overline{p}$-neprekidan skup ako za rub ∂A skupa A važi $\overline{p}(\partial A) = \{\mathbf{0}\}$.

Uslov $\overline{p}(\partial A) = [p_l(\partial A), p_r(\partial A)] = \{\mathbf{0}\}$ u prethodnoj definiciji je ekvivalentan uslovima

$$p_l(\partial A) = \mathbf{0} \quad \text{i} \quad p_r(\partial A) = \mathbf{0},$$

tj. skup A je $\overline{p}$-neprekidan skup ako i samo ako je skup A p_l-neprekidan i p_r-neprekidan skup.

Dalje se posmatra g-poluprsten kod kog je generator g strogo monotono rastuća funkcija.

U radu [34] pokazano je da je, u slučaju poluprstena sa strogo monotono rastućim generatorom g, g-slaba konvergencija niza pseudoverovatnoća $\{p_n : n \in \mathbb{N}\}$ ka pseudoverovatnoći p ekvivalentna sa

$$\limsup_{n\to\infty} p_n(F) \le p(F) \quad \text{i} \quad p(G) \le \liminf_{n\to\infty} p_n(G),$$

za svaki zatvoren skup F i svaki otvoren skup G.

Za intervalno-vrednosne pseudoverovatnoće $\overline{p}_n = [p_{n,l}, p_{n,r}]$ posmatrane u ovom delu rada pretpostavlja se da ako niz pseudoverovatnoća $\{p_{n,l} : n \in \mathbb{N}\}$ g-slabo ne konvergira ka pseudoverovatnoći p_l. onda nijedan njegov podniz $\{p_{m,l}(F) : m \in M\}$ g-slabo ne konvergira ka pseudoverovatnoći p_l, tj. da ako postoji zatvoren skup F takav da je $p_l(F) < \limsup_{n\to\infty} p_{n,l}(F)$, tada i za svaki podniz $\{p_{m,l}(F) : m \in M\}$ niza $\{p_{n,l}(F) : n \in \mathbb{N}\}$, gde je M beskonačan (uređen) podskup skupa $\mathbb{N}$, važi $p_l(F) < \limsup_{m\in M} p_{m,l}(F)$, tj.

$$p_l(F) < \limsup_{n\to\infty} p_{n,l}(F) \Rightarrow p_l(F) < \limsup_{m\in M} p_{m,l}(F), \tag{4.1}$$

za svaki podniz $\{p_{m,l} : m \in M\} \subset \{p_{n,l} : n \in \mathbb{N}\}$.

Takođe, pretpostavlja se da ako niz pseudoverovatnoća $\{p_{n,l} : n \in \mathbb{N}\}$ g-slabo ne konvergira ka pseudoverovatnoći p_l, tj. ako postoji otvoren skup G takav da je $\liminf_{n\to\infty} p_{n,l}(G) < p_l(G)$, tada važi $\liminf_{n\to\infty}[p_{n,l}(G), p_{n,r}(G)] \cap [\liminf_{n\to\infty} p_{n,l}(G), p_l(G)] \neq \emptyset$. tj.

$$\begin{aligned} & \liminf_{n\to\infty} p_{n,l}(G) < p_l(G) \\ \Rightarrow \quad & \liminf_{n\to\infty}[p_{n,l}(G), p_{n,r}(G)] \cap [\liminf_{n\to\infty} p_{n,l}(G), p_l(G)] \neq \emptyset. \end{aligned} \tag{4.2}$$

U daljem radu je pretpostavljeno i da je $\limsup_{n\to\infty} \overline{p}_n(F) \neq \emptyset$, za svaki zatvoren skup F, kao i da je $\liminf_{n\to\infty} \overline{p}_n(G) \neq \emptyset$, za svaki otvoren skup G.

Lema 4.1 *Neka je* $([a,b],\oplus,\odot)$ *g-poluprsten, gde je g strogo monotono rastući generator i neka je* $\{\overline{p}_n : n \in \mathbb{N}\}$, $\overline{p}_n = [p_{n,l}, p_{n,r}]$, *niz intervalno-vrednosnih pseudoverovatnoća. Za svaki zatvoren skup F važi:*

(*i*) $\limsup_{n\to\infty} p_{n,l}(F) \in \limsup_{n\to\infty} [p_{n,l}(F), p_{n,r}(F)]$,

(*ii*) $\limsup_{n\to\infty} p_{n,r}(F) \in \limsup_{n\to\infty} [p_{n,l}(F), p_{n,r}(F)]$.

Dokaz. (*i*) Neka je $x = \limsup_{n\to\infty} p_{n,l}(F)$. Tada postoji podniz $\{p_{m,l}(F) : m \in M\}$ niza $\{p_{n,l}(F) : n \in \mathbb{N}\}$ takav da je

$$x = \lim_{m\in M} p_{m,l}(F),$$

gde je M beskonačan (uređen) podskup skupa $\mathbb{N}$.

Kako je $p_{m,l}(F) \in [p_{m,l}(F), p_{m,r}(F)]$ na osnovu (1.6) sledi

$$x \in \limsup_{n\to\infty} [p_{n,l}(F), p_{n,r}(F)],$$

tj.

$$\limsup_{n\to\infty} p_{n,l}(F) \in \limsup_{n\to\infty} [p_{n,l}(F), p_{n,r}(F)].$$

(*ii*) Dokaz tvrđenja je sličan dokazu (*i*). □

Lema 4.2 *Neka je* $([a,b],\oplus,\odot)$ *g-poluprsten, gde je g strogo monotono rastući generator. Neka je* $\{\overline{p}_n : n \in \mathbb{N}\}$, $\overline{p}_n = [p_{n,l}, p_{n,r}]$, *niz intervalno-vrednosnih pseudoverovatnoća. Tada za svako* $x \in \limsup_{n\to\infty} [p_{n,l}(F), p_{n,r}(F)]$ *postoji beskonačan (uređen) podskup* M_x *skupa* $\mathbb{N}$ *takav da*

$$x \in [\limsup_{m\in M_x} p_{m,l}(F), \limsup_{m\in M_x} p_{m,r}(F)],$$

za svaki zatvoren skup F.

Dokaz. Za $x \in \limsup_{n\to\infty} [p_{n,l}(F), p_{n,r}(F)]$ na osnovu (1.6) sledi

$$x = \lim_{m\in M_x} p_m(F),$$

gde je $p_m(F) \in [p_{m,l}(F), p_{m,r}(F)]$ i M_x je beskonačan (uređen) podskup skupa $\mathbb{N}$. Kako je

$$p_{m,l}(F) \leq p_m(F) \leq p_{m,r}(F),$$

sledi

$$\limsup_{m \in M_x} p_{m,l}(F) \leq \limsup_{m \in M_x} p_m(F) \leq \limsup_{m \in M_x} p_{m,r}(F).$$

Niz $\{p_m(F) : m \in M_x\}$ je konvergentan niz, te je

$$\limsup_{m \in M_x} p_m(F) = \lim_{m \in M_x} p_m(F) = x,$$

pa je

$$\limsup_{m \in M_x} p_{m,l}(F) \leq x \leq \limsup_{m \in M_x} p_{m,r}(F),$$

tj. $x \in [\limsup_{m \in M_x} p_{m,l}(F), \limsup_{m \in M_x} p_{m,r}(F)]$. □

Posledica 4.1 *Neka je $([a,b], \oplus, \odot)$ g-poluprsten, gde je g strogo monotono rastući generator. Neka je $\{\overline{p}_n : n \in \mathbb{N}\}$, $\overline{p}_n = [p_{n,l}, p_{n,r}]$ niz intervalno-vrednosnih pseudoverovatnoća. Za svaki zatvoren skup F važi*

$$\begin{aligned} &\limsup_{n \to \infty} [p_{n,l}(F), p_{n,r}(F)] \\ \subseteq &\bigcup_{x \in \limsup_{n \to \infty} [p_{n,l}(F), p_{n,r}(F)]} [\limsup_{m \in M_x} p_{m,l}(F), \limsup_{m \in M_x} p_{m,r}(F)], \end{aligned}$$

gde je za svako $x \in \limsup_{n \to \infty} [p_{n,l}(F), p_{n,r}(F)]$ skup M_x beskonačan (uređen) podskup skupa $\mathbb{N}$ određen u lemi 4.2.

Za svaki beskonačan (uređen) podskup M skupa $\mathbb{N}$ važi $\limsup_{m \in M} p_{m,r}(F) \leq \limsup_{n \to \infty} p_{n,r}(F)$, pa sledi

$$[\limsup_{m \in M} p_{m,l}(F), \limsup_{m \in M} p_{m,r}(F)] \subseteq [\limsup_{m \in M} p_{m,l}(F), \limsup_{n \to \infty} p_{n,r}(F)].$$

Ako važe sve pretpostavke iz posledice 4.1, onda je

$$\begin{aligned} &\limsup_{n \to \infty} [p_{n,l}(F), p_{n,r}(F)] \\ \subseteq &\bigcup_{x \in \limsup_{n \to \infty} [p_{n,l}(F), p_{n,r}(F)]} [\limsup_{m \in M_x} p_{m,l}(F), \limsup_{n \to \infty} p_{n,r}(F)]. \end{aligned}$$

Lema 4.3 *Neka je* $([a,b],\oplus,\odot)$ *g-poluprsten, gde je g strogo monotono rastući generator. Neka je* $\{\overline{p}_n : n \in \mathbb{N}\}$, $\overline{p}_n = [p_{n,l}, p_{n,r}]$ *niz intervalno-vrednosnih pseudoverovatnoća. Za svaki otvoren skup G važi*

$$\liminf_{n\to\infty}[p_{n,l}(G), p_{n,r}(G)] \subseteq [\liminf_{n\to\infty} p_{n,l}(G), \liminf_{n\to\infty} p_{n,r}(G)].$$

Dokaz. Za $x \in \liminf_{n\to\infty}[p_{n,l}(G), p_{n,r}(G)]$ na osnovu (1.5) sledi

$$x = \lim_{n\to\infty} p_n(G),$$

gde je $p_n(G) \in [p_{n,l}(G), p_{n,r}(G)]$. Iz

$$p_{n,l}(G) \leq p_n(G) \leq p_{n,r}(G),$$

sledi

$$\liminf_{n\to\infty} p_{n,l}(G) \leq \liminf_{n\to\infty} p_n(G) \leq \liminf_{n\to\infty} p_{n,r}(G).$$

Niz $\{p_n(G) : n \in \mathbb{N}\}$ je konvergentan niz, te je

$$\liminf_{n\to\infty} p_n(G) = \lim_{n\to\infty} p_n(G) = x,$$

pa je

$$\liminf_{n\to\infty} p_{n,l}(G) \leq x \leq \liminf_{n\to\infty} p_{n,r}(G),$$

tj. $x \in [\liminf_{n\to\infty} p_{n,l}(G), \liminf_{n\to\infty} p_{n,r}(G)]$. □

Lema 4.4 *Neka je* $([a,b],\oplus,\odot)$ *g-poluprsten, gde je g strogo monotono rastući generator. Neka je* $\{p_n : n \in \mathbb{N}\}$ *niz pseudoverovatnoća i c element g-poluprstena. Za svaki otvoren skup G važi*

$$\liminf_{n\to\infty}[c, p_n(G)] = [c, \liminf_{n\to\infty} p_n(G)].$$

Dokaz. Direktno iz leme 4.3 sledi da je

$$\liminf_{n\to\infty}[c, p_n(G)] \subseteq [c, \liminf_{n\to\infty} p_n(G)].$$

Neka je $\{p_m(G) : m \in M\}$, gde je M beskonačan (uređen) podskup skupa $\mathbb{N}$, podniz niza $\{p_n(G) : n \in \mathbb{N}\}$, takav da je $\liminf_{n\to\infty} p_n(G) = \lim_{m\in M} p_m(G)$. Tada, korišćenjem jednakosti (1.8) i jednakosti (1.7) se dobija

$$[c, \liminf_{n\to\infty} p_n(G)] = [c, \lim_{m\in M} p_m(G)] = \lim_{m\in M}[c, p_m(G)] = \liminf_{m\in M}[c, p_m(G)].$$

Kako je $M \subset \mathbb{N}$, važi $\liminf_{m\in M}[c, p_m(G)] \subseteq \liminf_{n\to\infty}[c, p_n(G)]$, odakle sledi

$$[c, \liminf_{n\to\infty} p_n(G)] \subseteq \liminf_{n\to\infty}[c, p_n(G)].$$

$\square$

U nastavku je pokazana teorema koja daje ekvivalentne uslove g-slabe konvergencije niza intervalno-vrednosnih pseudoverovatnoća, što je deo originalnog rezultata iz [27].

Posmatra se niz intervalno-vrednosnih pseudoverovatnoća za koje važe veze (4.1) i (4.2).

Teorema 4.1 *Neka je $([a,b], \oplus, \odot)$ g-poluprsten, gde je g strogo monotono rastući generator. Neka je $\overline{p}$ intervalno-vrednosna pseudoverovatnoća i $\{\overline{p}_n : n \in \mathbb{N}\}$ niz intervalno-vrednosnih pseudoverovatnoća za koje važi (4.1) i (4.2). Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(i) $D\left(\int_{\mathbb{R}}^{\oplus} f \odot d\overline{p}_n, \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} f \odot d\overline{p}\right) \to 0,\ n \to \infty,$

(ii) $\limsup_{n\to\infty} \overline{p}_n(F) \preceq_S \overline{p}(F)$, *za svaki zatvoren skup* F,

(iii) $\overline{p}(G) \preceq_S \liminf_{n\to\infty} \overline{p}_n(G)$, *za svaki otvoren skup* G,

(iv) $\lim_{n\to\infty} \overline{p}_n(A) = \overline{p}(A)$, *za svaki* $\overline{p}$*-neprekidan skup* A.

Dokaz. U slučaju poluprstena sa strogo monotono rastućim generatorom g, totalni poredak je jednak uobičajenom poretku pa je $\overline{p} = [p_l, p_r]$, a $\overline{p}_n = [p_{n,l}, p_{n,r}]$, $n \in \mathbb{N}$.

$(i) \Rightarrow (ii)$: Uslov (i) je ekvivalentan uslovima $p_{n,l} \xrightarrow{g\text{-w}} p_l$ i $p_{n,r} \xrightarrow{g\text{-w}} p_r$, pa za svaki zatvoren skup F i strogo monotono rastući generator g, koristeći teoremu 3.4, dobija se

$$\limsup_{n\to\infty} p_{n,l}(F) \leq p_l(F) \tag{4.3}$$

i

$$\limsup_{n\to\infty} p_{n,r}(F) \leq p_r(F). \tag{4.4}$$

Neka je $x \in \limsup_{n\to\infty}[p_{n,l}(F), p_{n,r}(F)]$. Tada, iz (1.6) sledi da je

$$x = \lim_{m\in M} p_m, \quad p_m \in [p_{m,l}(F), p_{m,r}(F)],$$

gde je M beskonačan (uređen) podskup skupa $\mathbb{N}$.

Kako je $p_m \leq p_{m,r}(F)$ sledi

$$\limsup_{m \in M} p_m \leq \limsup_{m \in M} p_{m,r}(F).$$

Niz $\{p_m : m \in M\}$ je konvergentan, tj. $\limsup\limits_{m \in M} p_m = \lim\limits_{m \in M} p_m = x$ pa je

$$x \leq \limsup_{m \in M} p_{m,r}(F). \tag{4.5}$$

Koristeći nejednakost (4.5), činjenicu da za svaki podniz $\{p_{m,r}(F) : m \in M\} \subset \{p_{n,r}(F) : n \in \mathbb{N}\}$ važi $\limsup\limits_{m \in M} p_{m,r}(F) \leq \limsup\limits_{n \to \infty} p_{n,r}(F)$ i nejednakost (4.4) dobija se

$$x \leq \limsup_{m \in M} p_{m,r}(F) \leq \limsup_{n \to \infty} p_{n,r}(F) \leq p_r(F).$$

Dakle, za svako $x \in \limsup\limits_{n \to \infty}[p_{n,l}(F), p_{n,r}(F)]$, za $y = p_r(F)$, važi $y \in [p_l(F), p_r(F)]$ i $x \leq y$.

Neka je $y \in [p_l(F), p_r(F)]$. Iz $\overline{p}_n = [p_{n,l}, p_{n,r}]$ jasno sledi

$$\limsup_{n \to \infty} p_{n,l}(F) \leq \limsup_{n \to \infty} p_{n,r}(F). \tag{4.6}$$

Koristeći nejednakost (4.3), nejednakost (4.4) i nejednakost (4.6), dobijaju se dva moguća slučaja:

$$\limsup_{n \to \infty} p_{n,l}(F) \leq p_l(F) \leq \limsup_{n \to \infty} p_{n,r}(F) \leq p_r(F)$$

ili

$$\limsup_{n \to \infty} p_{n,l}(F) \leq \limsup_{n \to \infty} p_{n,r}(F) \leq p_l(F) \leq p_r(F).$$

Na osnovu leme 4.1, važi da $\limsup\limits_{n \to \infty} p_{n,l}(F) \in \limsup\limits_{n \to \infty}[p_{n,l}(F), p_{n,r}(F)]$, za svaki zatvoren skup F. U oba posmatrana slučaja važi $\limsup\limits_{n \to \infty} p_{n,l}(F) \leq p_l(F)$ pa za svako $y \in [p_l(F), p_r(F)]$ važi da je $x \leq y$, gde je $x = \limsup\limits_{n \to \infty} p_{n,l}(F)$.

$(ii) \Rightarrow (i)$: Neka za svaki zatvoren skup F važi $\limsup\limits_{n \to \infty} \overline{p}_n(F) \preceq_S \overline{p}(F)$. Ako se za svaki zatvoren skup F pokažu nejednakosti

$$\limsup_{n \to \infty} p_{n,l}(F) \leq p_l(F) \quad \text{i} \quad \limsup_{n \to \infty} p_{n,r}(F) \leq p_r(F),$$

koje su redom ekvivalentne uslovima $p_{n,l} \xrightarrow{g\text{-w}} p_l$ i $p_{n,r} \xrightarrow{g\text{-w}} p_r$, sledi tvrđenje.

Za svako $x \in \limsup_{n\to\infty}[p_{n,l}(F), p_{n,l}(F)]$ postoji $y \in [p_l(F), p_r(F)]$ tako da je $x \leq y$. Neka je $x = \limsup_{n\to\infty} p_{n,r}(F)$. Na osnovu leme 4.1 sledi da $\limsup_{n\to\infty} p_{n,r}(F) \in \limsup_{n\to\infty}[p_{n,l}(F), p_{n,l}(F)]$, pa postoji $y \in [p_l(F), p_r(F)]$ tako da je $\limsup_{n\to\infty} p_{n,r}(F) \leq y$. Dalje, iz $y \leq p_r(F)$ sledi da je $\limsup_{n\to\infty} p_{n,r}(F) \leq p_r(F)$.

Ako se pretpostavi da je $p_l(F) < \limsup_{n\to\infty} p_{n,l}(F)$, za neki zatvoren skup F, tada je

$$p_l(F) < \limsup_{n\to\infty} p_{n,l}(F) \leq \limsup_{n\to\infty} p_{n,r}(F) \leq p_r(F).$$

Na osnovu leme 4.2, za svako $x \in \limsup_{n\to\infty}[p_{n,l}(F), p_{n,r}(F)]$ postoji beskonačan (uređen) podskup M_x skupa $\mathbb{N}$ takav da $x \in [\limsup_{m\in M_x} p_{m,l}(F), \limsup_{m\in M_x} p_{m,r}(F)]$.

Kako niz pseudoverovatnoća $\{p_{n,l} : n \in \mathbb{N}\}$ g-slabo ne konvergira ka pseudoverovatnoći p_l, tj. $p_l(F) < \limsup_{n\to\infty} p_{n,l}(F)$, primenom (4.1) sledi $p_l(F) < \limsup_{m\in M_x} p_{m,l}(F)$. Dakle, za posmatrano $x \in \limsup_{n\to\infty}[p_{n,l}(F), p_{n,r}(F)]$ važi

$$p_l(F) < \limsup_{m\in M_x} p_{m,l}(F) \leq \limsup_{n\to\infty} p_{n,l}(F) \leq \limsup_{n\to\infty} p_{n,r}(F) \leq p_r(F).$$

Prema tome, za posmatrano $x \in \limsup_{n\to\infty}[p_{n,l}(F), p_{n,r}(F)]$ je $p_l(F) < x$.

Kako je $x \in \limsup_{n\to\infty}[p_{n,l}(F), p_{n,r}(F)]$ proizvoljno, za $y = p_l(F)$ ne postoji nijedno $x \in \limsup_{n\to\infty}[p_{n,l}(F), p_{n,r}(F)]$ tako da je $x \leq y$, što je u kontradikciji sa pretpostavkom $\limsup_{n\to\infty} \overline{p}_n(F) \preceq_S \overline{p}(F)$.

$(i) \Rightarrow (iii)$: Uslov (i) je ekvivalentan uslovima $p_{n,l} \xrightarrow{g\text{-w}} p_l$ i $p_{n,r} \xrightarrow{g\text{-w}} p_r$. Za poluprsten kod kog je generator strogo monotono rastuća funkcija na osnovu teoreme 3.4 za svaki otvoren skup G važi

$$p_l(G) \leq \liminf_{n\to\infty} p_{n,l}(G) \tag{4.7}$$

i

$$p_r(G) \leq \liminf_{n\to\infty} p_{n,r}(G). \tag{4.8}$$

Da bi se pokazalo da važi (iii), treba pokazati da za svako $x \in [p_l(G), p_r(G)]$ postoji $y \in \liminf_{n\to\infty}[p_{n,l}(G), p_{n,r}(G)]$ takvo da je $x \leq y$ i da za svako $y \in \liminf_{n\to\infty}[p_{n,l}(G), p_{n,r}(G)]$ postoji $x \in [p_l(G), p_r(G)]$ takvo da je $x \leq y$.

Prvo će biti pokazano da za svako $x \in [p_l(G), p_r(G)]$ postoji neko $y \in \liminf_{n\to\infty}[p_{n,l}(G), p_{n,r}(G)]$ takvo da je $x \leq y$.

Očigledno je da za svako $x \in [p_l(G), p_r(G)]$ važi $x \leq p_r(G)$, pa je dovoljno pokazati da postoji $y \in \liminf_{n\to\infty}[p_{n,l}(G), p_{n,r}(G)]$ takvo da je $p_r(G) \leq y$. Pokazuje se da $\liminf_{n\to\infty} p_{n,r}(G) \in \liminf_{n\to\infty}[p_{n,l}(G), p_{n,r}(G)]$ te da se za traženo y može uzeti $\liminf_{n\to\infty} p_{n,r}(G)$.

Kako je $\liminf_{n\to\infty}[p_{n,l}(G), p_{n,r}(G)] \neq \emptyset$, postoji $c \in \liminf_{n\to\infty}[p_{n,l}(G), p_{n,r}(G)]$. Na osnovu (1.5), $c = \lim_{n\to\infty} p_n(G)$, $p_{n,l}(G) \leq p_n(G) \leq p_{n,r}(G)$. Dalje je

$$\liminf_{n\to\infty} p_{n,l}(G) \leq \liminf_{n\to\infty} p_n(G) \leq \liminf_{n\to\infty} p_{n,r}(G).$$

Kako je niz $\{p_n(G) : n \in \mathbb{N}\}$ konvergentan, tj. $\liminf_{n\to\infty} p_n(G) = \lim_{n\to\infty} p_n(G) = c$, sledi

$$c \leq \liminf_{n\to\infty} p_{n,r}(G). \tag{4.9}$$

Posmatra se skup $\{n \in \mathbb{N} : c < p_{n,r}(G)\}$.

Ako skup $\{n \in \mathbb{N} : c < p_{n,r}(G)\}$ nije kokonačan [1] postoji beskonačno mnogo elemenata niza $\{p_{n,r}(G) : n \in \mathbb{N}\}$ takvih da je $p_{n,r}(G) \leq c$. Koristeći osobine limesa inferiora niza, dalje sledi

$$\liminf_{n\to\infty} p_{n,r}(G) \leq c. \tag{4.10}$$

Dalje, iz nejednakosti (4.9) i nejednakosti (4.10) sledi

$$c = \liminf_{n\to\infty} p_{n,r}(G).$$

Dakle, $\liminf_{n\to\infty} p_{n,r}(G) \in \liminf_{n\to\infty}[p_{n,l}(G), p_{n,r}(G)]$, a kako važi i nejednakost (4.8), za traženo $y \in \liminf_{n\to\infty}[p_{n,l}(G), p_{n,r}(G)]$ može se uzeti $y = \liminf_{n\to\infty} p_{n,r}(G)$ $= c$.

Ako je skup $\{n \in \mathbb{N} : c < p_{n,r}(G)\}$ kokonačan, dovoljno je pokazati da za $p_r(G)$ postoji $y \in \liminf_{n\to\infty}[c, p_{n,r}(G)]$ takvo da je $p_r(G) \leq y$. Očigledno je da $\liminf_{n\to\infty} p_{n,r}(G) \in [c, \liminf_{n\to\infty} p_{n,r}(G)]$, pa na osnovu leme 4.4 sledi da $\liminf_{n\to\infty} p_{n,r}(G) \in \liminf_{n\to\infty}[c, p_{n,r}(G)]$.

Dakle, $\liminf_{n\to\infty} p_{n,r}(G) \in \liminf_{n\to\infty}[c, p_{n,r}(G)]$, a kako važi i nejednakost (4.8), za traženo $y \in \liminf_{n\to\infty}[c, p_{n,r}(G)]$ može se uzeti $y = \liminf_{n\to\infty} p_{n,r}(G)$.

Pokazuje se još da za svako $y \in \liminf_{n\to\infty}[p_{n,l}(G), p_{n,r}(G)]$ postoji neko $x \in [p_l(G), p_r(G)]$ takvo da je $x \leq y$.

[1] Skup $A \subset B$ je *kokonačan skup* ako mu je komplement (u odnosu na B) konačan skup.

Za $y \in \liminf_{n\to\infty}[p_{n,l}(G), p_{n,r}(G)]$ na osnovu (1.5) sledi $y = \lim_{n\to\infty} p_n(G)$, $p_{n,l}(G) \le p_n(G) \le p_{n,r}(G)$. Iz osobina limesa inferiora sledi $\liminf_{n\to\infty} p_{n,l}(G) \le \liminf_{n\to\infty} p_n(G)$. Kako je niz $\{p_n : n \in \mathbb{N}\}$ konvergentan niz, tj. $\liminf_{n\to\infty} p_n(G) = \lim_{n\to\infty} p_n(G) = y$, to je $\liminf_{n\to\infty} p_{n,l}(G) \le y$.

Primenom nejednakosti (4.7) sledi

$$p_l(G) \le \liminf_{n\to\infty} p_{n,l}(G) \le y,$$

pa se za traženo x može uzeti $p_l(G)$.

$(iii) \Rightarrow (i)$: Neka za svaki otvoren skup G važi $\overline{p}(G) \preceq_S \liminf_{n\to\infty} \overline{p}_n(G)$. Treba pokazati da za svaki otvoren skup G važe nejednakosti $p_l(G) \le \liminf_{n\to\infty} p_{n,l}(G)$ i $p_r(G) \le \liminf_{n\to\infty} p_{n,r}(G)$.

Iz (iii), za svako $x \in [p_l(G), p_r(G)]$ postoji $y \in \liminf_{n\to\infty}[p_{n,l}(G), p_{n,r}(G)]$ takvo da je $x \le y$, gde je $y = \lim_{n\to\infty} p_n(G)$, $p_{n,l}(G) \le p_n(G) \le p_{n,r}(G)$.

Iz nejednakosti $p_n(G) \le p_{n,r}(G)$ sledi $\liminf_{n\to\infty} p_n(G) \le \liminf_{n\to\infty} p_{n,r}(G)$. Niz $\{p_n(G) : n \in \mathbb{N}\}$ je konvergentan niz, tj. $\liminf_{n\to\infty} p_n(G) = \lim_{n\to\infty} p_n(G) = y$ pa dalje sledi da je $y \le \liminf_{n\to\infty} p_{n,r}(G)$. Iz $x \le y$ i $y \le \liminf_{n\to\infty} p_{n,r}(G)$ sledi da je

$$x \le \liminf_{n\to\infty} p_{n,r}(G),$$

za svako $x \in [p_l(G), p_r(G)]$. Dakle, uzimajući da je $x = p_r(G)$ važi $p_r(G) \le \liminf_{n\to\infty} p_{n,r}(G)$.

Pokazuje se još da za svaki otvoren skup G važi nejednakost $p_l(G) \le \liminf_{n\to\infty} p_{n,l}(G)$.

Ako se pretpostavi da važi suprotno, tj. da postoji otvoren skup G takav da je $\liminf_{n\to\infty} p_{n,l}(G) < p_l(G)$, na osnovu (4.2) postoji $y \in \liminf_{n\to\infty}[p_{n,l}(G), p_{n,r}(G)]$ takvo da je

$$\liminf_{n\to\infty} p_{n,l}(G) < y < p_l(G).$$

Za to y i za svako $x \in [p_l(G), p_r(G)]$ važi $y < x$, što je u kontradikciji sa pretpostavkom $\overline{p}(G) \preceq_S \liminf_{n\to\infty} \overline{p}_n(G)$.

$(i) \Rightarrow (iv)$: Neka je skup A $\overline{p}$-neprekidan skup. Tada važi da je A p_l-neprekidan i p_r-neprekidan skup. Uslov (i) je ekvivalentan uslovima $p_{n,l} \xrightarrow{g\text{-w}} p_l$ i $p_{n,r} \xrightarrow{g\text{-w}} p_r$, pa se za svaki p_l-neprekidan i p_r-neprekidan skup A, koristeći teoremu 3.4, dobija

$$\lim_{n\to\infty} p_{n,l}(A) = p_l(A) \quad \text{i} \quad \lim_{n\to\infty} p_{n,r}(A) = p_r(A).$$

Na osnovu (1.8) sledi

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \overline{p}_n(A) &= \lim_{n\to\infty} [p_{n,l}(A), p_{n,r}(A)] \\
&= \left[\lim_{n\to\infty} p_{n,l}(A), \lim_{n\to\infty} p_{n,r}(A)\right] \\
&= [p_l(A), p_r(A)] \\
&= \overline{p}(A).
\end{aligned}$$

$(iv) \Rightarrow (i)$: Neka važi uslov (iv). Tada, za svaki $\overline{p}$-neprekidan skup A, važi

$$\lim_{n\to\infty} [p_{n,l}(A), p_{n,r}(A)] = [p_l(A), p_r(A)]$$

Na osnovu (1.8) je

$$\lim_{n\to\infty} [p_{n,l}(A), p_{n,r}(A)] = \left[\lim_{n\to\infty} p_{n,l}(A), \lim_{n\to\infty} p_{n,r}(A)\right],$$

pa je

$$\lim_{n\to\infty} p_{n,l}(A) = p_l(A) \quad \text{i} \quad \lim_{n\to\infty} p_{n,r}(A) = p_r(A).$$

Kako je skup A p_l-neprekidan i p_r-neprekidan skup, na osnovu teoreme 3.4 $p_{n,l} \xrightarrow{g\text{-w}} p_l$ i $p_{n,r} \xrightarrow{g\text{-w}} p_r$, odakle sledi tvrđenje, čime je dokaz završen. $\square$

U sledećim primerima je ilustrovana g-slaba konvergencija niza intervalno-vrednosnih pseudoverovatnoća.

Primer 4.3 Neka je $X : \mathcal{U}(0,1)$ slučajna promenljiva sa uniformnom raspodelom i $X_n : \mathcal{U}\left(0, 1 + \frac{1}{2n}\right)$, $n \geq 1$ niz slučajnih promenljivih sa uniformnom raspodelom.

Kao u primeru 4.1, za svako $n \in \mathbb{N}$ posmatra se neprazna familija $\mathcal{M}_{d,n} = \{p, p_n, p_{n+1}, \dots\}$ pseudoverovatnoća, gde je

$$p = g^{-1} \circ P_X \quad \text{i} \quad p_n = g^{-1} \circ P_{X_n}.$$

Familija $(\mathcal{M}_{d,n}, \preceq)$ je gusto linearno uređenje sa krajevima p_n i p.

Za svako $n \in \mathbb{N}$, intervalno-vrednosna pseudoverovatnoća je data sa

$$\overline{p}_n = [p_{n,l}, p_{n,r}],$$

gde je $p_{n,l} = p_n$ i $p_{n,r} = p$.

Na ovaj način se dobija niz intervalno-vrednosnih pseudoverovatnoća $\{\overline{p}_n : n \in \mathbb{N}\}$, takvih da za $(a,b] \in \mathcal{B}(\mathcal{R})$ važi

$$\overline{p}_n((a,b]) = [p_{n,l}((a,b]), p_{n,r}((a,b])].$$

Jasno je da je

$$\lim_{n\to\infty} p_n((a,b]) = p((a,b]), \tag{4.11}$$

pa na osnovu jednakosti (1.8) i jednakosti (4.11) sledi da za svaki $\overline{p}$-neprekidan skup $(a,b]$ važi

$$\lim_{n\to\infty} \overline{p}_n((a,b]) = \left[\lim_{n\to\infty} p_n((a,b]), \lim_{n\to\infty} p((a,b])\right] = \{p((a,b])\},$$

tj. niz intervalno-vrednosnih pseudoverovatnoća $\overline{p}_n$ g-slabo konvergira ka intervalno-vrednosnoj pseudoverovatnoći p. $\diamond$

Primer 4.4 Neka su $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ i $\{Y_n : n \in \mathbb{N}\}$ nizovi nezavisnih slučajnih promenljivih sa istom raspodelom na prostoru verovatnoće $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ sa matematičkim očekivanjima $E(X_n) = 0$, $E(Y_n) = a$ i disperzijama $D(X_n) = 1$, $D(Y_n) = \sigma^2$.

Neka je $P_n(A) \leq \widetilde{P}_n(A)$, za svako $A \in \mathcal{F}$, gde su $P_n = \mathcal{P} \circ S_n^{-1}$ i $\widetilde{P}_n = \mathcal{P} \circ \widetilde{S}_n^{-1}$ verovatnoće indukovane slučajnim promenljivim $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ i $\widetilde{S}_n = \sum\limits_{i=1}^{n} Y_i$, redom.

Za slučajnu promenljivu S_n važi $E(S_n) = 0$ i $D(S_n) = n$. Iz centralne granične teoreme sledi

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{P}\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \leq x\right) = \mathcal{P}\left(Z \leq x\right), \tag{4.12}$$

gde je Z slučajna promenljiva sa normalnom raspodelom i matematičkim očekivanjem $E(Z) = 0$ i disperzijom $D(Z) = 1$. Jednačina (4.12) je ekvivalentna sa

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} f dP_n = \int\limits_{\mathbb{R}} f dP,$$

gde je $P = \mathcal{P} \circ Z^{-1}$, tj. niz verovatnoća P_n slabo konvergira ka verovatnoći P.

Slično, za slučajnu promenljivu $\widetilde{S}_n$ važi $E(\widetilde{S}_n) = na$ i $D(\widetilde{S}_n) = n\sigma^2$ i

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \mathcal{P}\left(\tfrac{\widetilde{S}_n - na}{\sigma\sqrt{n}} \leq y\right) = \mathcal{P}\left(Z \leq y\right) \quad &\Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \widetilde{F}_n(y) = F_Z(y) \\ &\Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} f d\widetilde{P}_n = \int\limits_{\mathbb{R}} f dP,\end{aligned}$$

gde je $\widetilde{F}_n$ funkcija raspodele slučajne promenljive $\dfrac{\widetilde{S}_n - na}{\sigma\sqrt{n}}$.

Dakle, niz verovatnoća $\widetilde{P}_n$ slabo konvergira ka verovatnoći P.

Na osnovu rezultata iz odeljka 3.2.1, iz ekvivalencije slabe konvergencije niza verovatnoća sa g-slabom konvergencijom odgovarajućeg niza pseudoverovatnoća, sledi

$$p_n \xrightarrow{g\text{-w}} p \quad \text{i} \quad \widetilde{p}_n \xrightarrow{g\text{-w}} p,$$

gde je $p_n = g^{-1} \circ P_n$, $\widetilde{p}_n = g^{-1} \circ \widetilde{P}_n$ i $p = g^{-1} \circ P$.

Slično kao u primeru 4.3, za poluprsten sa strogo monotono rastućim generatorom g može se konstruisati niz intervalno-vrednosnih pseudoverovatnoća $\overline{p}_n = [p_n, \widetilde{p}_n]$ pa važi

$$\lim_{n\to\infty} [p_n, \widetilde{p}_n] = [p, p]. \qquad \diamond$$

Zaključak

U osnovi istraživanja disertacije je poznat pojam teorije verovatnoće: slaba konvergencija, koja predstavlja sponu između verovatnoće kao teorijske nauke i statistike kao primenjene nauke.

U okviru pseudoanalize, kao prva grupa rezultata, u disertaciji je definisana nova mera, pseudoverovatnoća p, koja predstavlja analogon pojmu klasične verovatnoće. Ovako definisana mera je za razliku od klasične verovatnoće neaditivna mera, ali zadržava osobine $p(\emptyset) = \mathbf{0}$ i $p(\Omega) = \mathbf{1}$. Neaditivne mere su korisne kada je u modelovanju realnih pojava osobina aditivnosti narušena.

Jedan od glavnih rezutata istraživanja vezanog za ovako definisanu pseudoverovatnoću je teorema koja daje ekvivalentne uslove slabe konvergencije niza pseudoverovatnoća. Takođe, još jedan rezultat je niz ekvivalencija kojima se dobija praktičan alat za ispitivanje raznih vrsta konvergencija u teoriji verovatnoće i mere, za koje je pokazano da su ekvivalentne slaboj konvergenciji niza pseudoverovatnoća.

Prirodno uopštenje realnih funkcija su skupovno-vrednosne funkcije, čiji je specijalan slučaj intervalno-vrednosna funkcija. Kako se u praktičnim primenama prilikom merenja često dobijaju približne vrednosti posmatranih veličina, intervalno-vrednosne funkcije i mere, pa samim tim i intervalno-vrednosna verovatnoća predstavljaju prirodan matematički okvir za izučavanje i modelovanje neodređenosti. Druga grupa originalnih rezultata disertacije se odnosi na inervalno-vrednosne mere.

U disertaciji je definisana intervalno-vrednosna pseudoverovatnoća $\overline{p}$ kao jedno uopštenje intervalno-vrednosne mere. Ovako definisana intervalno-vrednosna mera je neaditivna skupovna funkcija koja zadovoljava uslov $\overline{p}(\emptyset) = [\mathbf{0}, \mathbf{0}]$.

Glavni rezutat istraživanja vezanog za ovako definisanu intervalno-vrednosnu pseudoverovatnoću je teorema koja daje ekvivalentne uslove slabe konvergencije niza intervalno-vrednosnih pseudoverovatnoća.

Treća grupa originalnih rezultata dobijenih u okviru istraživanja, je novi pristup definisanju neaditivnih mera preko tzv. generalizovane pseudoverovatnoće. Prednost ovakvog pristupa se ogleda u tome što je omogućeno „merenje” skupova koji nisu elementi familije na kojoj se generalizovana pseudoverovatnoća definiše. Pokazane su osobine generalizovane pseudoverovatnoće i definisano je uopšteno matematičko očekivanje u odnosu na generalizovanu pseudoverovatnoću.

Osim navedenih rezultata u teoriji neaditivnih mera, originalni doprinos disertaciji još čine i neke primene pseudointegrala date u odeljcima 2.2, 2.4, 2.6 i 3.3, koje su četvrta grupa originalnih rezultata disertacije.

U odeljku 2.2 je na osnovu poznate definicije g-integrala definisana g-Melinova transformacija i pokazana je primena u teoriji verovatnoće, kao i veza sa slabom konvergencijom niza pseudoverovatnoća.

U odeljku 2.4 je definisan pseudopolinom sa intervalnim koeficijentima kao jedan primer intervalno-vrednosne funkcije i pokazana je njegova pseudointegracija.

U odeljku 2.6 je definisana pseudometrika u odnosu na intervalno-vrednosnu $\oplus$-meru, tj. intervalno-vrednosno rastojanje između dve merljive funkcije.

Literatura

[1] In John Goutsias, Ronald P.S. Mahler, and Hung T. Nguyen, editors, *Random Sets: Theory and Applications*, N.Y., 1997. Springer-Verlag.

[2] H. Agahi, Y. Ouyang, R. Mesiar, E. Pap, and M. Štrboja. Hölder and Minkowski type inequalities for pseudo-integral. *Applied Mathematics and Computation*, 217(21):8630 – 8639, 2011.

[3] G. Aletti, E. G. Bongiorno, and V. Capasso. Statistical aspects of fuzzy monotone set-valued stochastic processes: Application to birth-and-growth processes. *Fuzzy Sets and Systems*, 160(21):3140 – 3151, 2009.

[4] R. Álvarez Nodarse, M. Atakishiyeva, and N. Atakishiyev. Mellin transforms for some families of q-polynomials. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 153:9–18, 2003.

[5] L. Ambrosio, N. Gigli, and G. Savare. *Gradient Flows in Metric Spaces and in the Space of Probability Measures.* Birkhäuser Verlag, Basel - Boston - Berlin, 2005.

[6] Z. Aouani and A. Chateauneuf. Exact capacities and star-shaped distorted probabilities. *Mathematical Social Sciences*, 56(2):185–194, 9 2008.

[7] A. Aswani. Statistics with set-valued functions: applications to inverse approximate optimization. *Math. Program.*, 174:225–251, 2019.

[8] R. J. Aumann. Integrals of set-valued functions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 12(1):1 – 12, 1965.

[9] H. Bergström. *Weak Convergence of Measures.* A Series of Monographs and Textbooks in Probability and Mathematical Statistics. Academic Press, 1982.

[10] P. Billingsley. *Convergence of Probability Measures.* Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics. Wiley, 1968.

[11] P. Billingsley. *Weak Convergence of Measures: Applications in Probability.* Society for Industrial and Applied Mathematics, 1971.

[12] P. Billingsley. *Probability and Measure.* John Wiley and Sons, second edition, 1986.

[13] J. Blümlein. Harmonic sums and Mellin transforms. *Nuclear Physics B - Proceedings Supplements*, 79:166–168, 1999.

[14] V.I. Bogachev. *Measure Theory.* Springer, 2007.

[15] V.I. Bogachev. *Weak Convergence of Measures.* American Mathematical Society, Providence, 2018.

[16] S. Butera and M. Di Paola. Fractional differential equations solved by using Mellin transform. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 19:2220–2227, 2014.

[17] A. Chateauneuf. Decomposable capacities, distorted probabilities and concave capacities. *Mathematical Social Sciences*, 31:19–37, 1996.

[18] M. Coffey and M. Lettington. Mellin transforms with only critical zeros: Legendre functionss. *Journal of Number Theory,*, 148:507–536, 2015.

[19] L. Crisman. Independence with lower and upper probabilities. In *Proceedings of the Twelfth International Conference of Uncertainty in Artificial Intelligence*, pages 169–177, 1996.

[20] L. Debnath and D. Bhatta. *Integral transforms and their applications.* CRC Press Taylor and Francis Group, third edition, 2015.

[21] A. Dembo and O. Zeitouni. *Large deviations techniques and applications.* Springer, 2010.

[22] A. P. Dempster. Upper and lower probabilities induced by a multivalued mapping. *Ann. Math. Stat.*, 38:325 – 339, 1967.

[23] D. Denneberg. *Non-Additive Measure and Integral.* Kluwer Academic Publisers, Dordrecht, 1994.

[24] P. Diamond and P. Kloede. *Metric Spaces of Fuzzy Sets.* Scientific Publiching Co. Pte. Ltd, Singapore, 1994.

[25] N. Duraković, T. Grbić, S. Rapajić, S. Medić, and S. Buhmiler. g-Mellin transform. In *2018 IEEE 16th International Symposium on Intelligent Systems and Informatics (SISY), Proceedings*, pages 75–79, 2018.

[26] N. Duraković, S. Medić, T. Grbić, S. Buhmiler, and S. Rapajić. Integration of pseudo-polynomials based on g-integrals. In *2009 IEEE 13th International Symposium on Intelligent Systems and Informatics (SISY), Proceedings*, pages 301–305, 2015.

[27] N. Duraković, S. Medić, T. Grbić, A. Perović, and Lj. Nedović. Generalization of portmanteau theorem for a sequence of interval-valued pseudo-probability measures. *Fuzzy Sets and Systems*, 364:96 – 110, 2019.

[28] B. Epstein. Some applications of the Mellin transform in statistics. *Ann. Math. Statist.*, 19(3):370–379, 1948.

[29] D. Feng and H. Nguyen. Choquet weak convergence of capacity functionals of random sets. *Information Sciences*, 177(16):3239 – 3250, 2007.

[30] J. Galambos and I. Simonelli. *Products of Random Variables*. Chapman & Hall/CRC Pure and Applied Mathematics. CRC Press, 2004.

[31] T. Gavrilov, N. Duraković, K. Gavrilov, T. Grbić, S. Medić, and S. Buhmiler. g-Mellin transform in probability theory. In *2020 IEEE 18th International Symposium on Intelligent Systems and Informatics (SISY), Proceedings*, 2020.

[32] M. Grabisch and C. Labreuche. The Choquet integral for 2-additive bi-capacities. In *Proceedings of the 3rd Conference of the European Society for Fuzzy Logic and Technology*, 2003.

[33] T. Grbić, S. Medić, and N. Duraković. Two Generalizations of Portmanteau Theorem. In *2019 38th International Conference on Organizational Science Development "Ecosystem of Organizations in the Digital Age", Proceedings*, 2019.

[34] T. Grbić, S. Medić, N. Duraković, S. Dumnić, and T. Gavrilov. Weak convergence of sequences of distorted probabilities. In *2015 IEEE 13th International Symposium on Intelligent Systems and Informatics (SISY), Proceedings*, pages 307–312, 2015.

[35] T. Grbić, S. Medić, I. Štajner Papuga, and T. Došenović. Inequalities of Jensen and Chebyshev type for interval-valued measures based on pseudo-integrals. In *Intelligent Systems: Models and Applications*, pages 23–41. Springer-Verlag, 2013.

[36] T. Grbić and E. Pap. Pseudo-weak convergence of the random sets defined by a pseudo-integral based on non-additive measure. In *Proceedings of the International Workshop: Idempotent and Tropical Mathematics and Problems of Mathematical Physics*, volume 1, pages 72–77, 2007.

[37] T. Grbić and E. Pap. Generalization of portmanteau theorem with respect to the pseudoweak convergence of random closed sets. *Theory of Probability & Its Applications*, 54(1):51–67, 2010.

[38] T. Grbić and I. Štajner-Papuga. Pseudo-integral of interval-valued functions and some limit properties. In *2008 IEEE 6th International Symposium on Intelligent Systems and Informatics (SISY), Proceedings*, pages 1–5, 2008.

[39] T. Grbić, I. Štajner-Papuga, and Lj. Nedović. Pseudo-integral of set-valued function. In *Proc. of EUSFLAT 2007*, volume 1, pages 221–225, 2007.

[40] T. Grbić, I. Štajner Papuga, and M. Štrboja. An approach to pseudo-integration of set-valued functions. *Information Sciences*, 181(11):2278 – 2292, 2011.

[41] H. Gzyl, M. Milev, and A. Tagliani. Discontinuous payoff option pricing by Mellin transform: A probabilistic approach. *Finance Research Letters*, 20:281–288, 2017.

[42] A. Honda, T. Nakano, and Y. Okazaki. Subjective evaluation based on distorted probability. In *Proc. of the SCIS/ISIS conference*, 2002.

[43] K. D. Jamison and W. A. Lodwick. A new approach to interval-valued probability measures, a formal method for consolidating the languages of information deficiency: Foundations. *Information Sciences*, 507:86 – 107, 2020.

[44] L.C. Jang and J.S. Kwon. On the representation of Choquet integrals of set-valued functions, and null sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 112(2):233 – 239, 2000.

[45] U. Katugampola. Mellin transforms of generalized fractional integrals and derivatives. *Applied Mathematics and Computation*, 257:566–580, 2015.

[46] S. M. Khairnar, R. M. Pise, and J. N. Salunkhe. Study of the Mellin integral transform with applications in statistics and probability. *Archives of Applied Science Research*, 4(3):1294–1310, 2012.

[47] A. Kilbas, H. Srivastava, and J. Trujillo. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations.* Elsevier, Amsterdam, 2006.

[48] E. Klein and A.C. Tompson. *Theory of Correspodences.* A Wiley-Interscience Publication, New York, 1984.

[49] V.N. Kolokoltsov and V.P. Maslov. *Idempotent Analsis and Its Application.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1997.

[50] Dong-Qing Li, Xiao-Qiu Song, Tian Yue, and Ya-Zhi Song. Generalization of the Lyapunov type inequality for pseudo-integrals. *Applied Mathematics and Computation*, 241:64 – 69, 2014.

[51] J. Li, R. Mesiar, E. Pap, and E. Klement. Convergence theorems for monotone measures. *Fuzzy Sets and Systems*, 281:103 – 127, 2015. Special Issue Celebrating the 50th Anniversary of Fuzzy Sets.

[52] W. A. Lodwick and K. D. Jamison. Interval-valued probability in the analysis of problems containing a mixture of possibilistic, probabilistic, and interval uncertainty. *Fuzzy Sets and Systems*, 159(21):2845 – 2858, 2008. Selected Papers from NAFIPS 2006.

[53] M. Maslarić, S. Medić, N. Duraković, S. Buhmiler, S. Rapajić, and T. Grbić. Generalized pseudo-probability measure. *Fuzzy Sets and Systems*, 379:48 – 62, 2020.

[54] B. Mayag, M. Grabisch, and C. Labreuch. *A Representation of Preferences by the Choquet Integral with Respect to a 2-Additive Capacity.* Springer, 2011.

[55] S. Medić, N. Duraković, V. Bogdanović, T. Grbić, I. Lončarević, and Lj. Budinski-Petković. Distance function associated with the g-integral with respect to the interval-valued $\oplus$-measure. In *2017 IEEE 15th International Symposium on Intelligent Systems and Informatics (SISY), Proceedings*, pages 83–88, 2017.

[56] S. Medić, T. Grbić, A. Perović, and S. Nikolič. Inequalities of Hölder and Minkowski type for pseudo-integrals with respect to interval-valued $\oplus$-measures. *Fuzzy Sets and Systems*, 304:110 – 130, 2016.

[57] R. Mesiar and E. Pap. Idempotent integral as limit of g-integrals. *Fuzzy Sets and Systems*, 102(3):385 – 392, 1999. Fuzzy Measures and Integrals.

[58] A. Miller. The Mellin transform of a product of two hypergeometric functions. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 137:77–82, 2001.

[59] E. Miranda, I. Couso, and P. Gil. Approximations of upper and lower probabilities by measurable selections. *Information Sciences*, 180(8):1407 – 1417, 2010.

[60] I. Molchanov. *Theory of Random Sets*. Springer, 2005.

[61] T. Murofushi and M. Sugeno. An interpretation of fuzzy measures and the Choquet integral as an integral with respect to a fuzzy measure. *Fuzzy Sets and Systems*, 29:201 – 227, 1989.

[62] Lj. Nedović and T. Grbić. The Pseudo Probability. *Journal of Electrical Engineering*, 53(12/s):27–30, 2002.

[63] Lj. Nedović, B. Mihailović, and N.M. Ralević. Some properties of pseudo-measures and pseudo-probability. In *2007 IEEE 5th International Symposium on Intelligent Systems and Informatics (SISY), Proceedings*, pages 155–159, 2007.

[64] Lj. Nedović, N. M. Ralević, and T. Grbić. Large deviation principle with generated pseudo measures. *Fuzzy Sets and Systems*, 155(1):65 – 76, 2005.

[65] H. Nguyen. A new interval-valued knowledge measure for interval-valued intuitionistic fuzzy sets and application in decision making. *Expert Systems with Applications*, 56:143 – 155, 2016.

[66] H. T. Nguyen. Choquet Weak Convergence of Capacity Functionals of Random Sets. In *Soft Methodology and Random Information Systems*, pages 19–31. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2004.

[67] E. Pap. An integral generated by decomposable measure. *Novi Sad Journal of Mathematics*, 20:135–144, 1990.

[68] E. Pap. g-calculus. *Novi Sad Journal of Mathematics*, 23:145–156, 1993.

[69] E. Pap. *Null-Additive Set Functions.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht-Boston-London, 1995.

[70] E. Pap. *Fazi mere i njihova primena.* Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad, 1999.

[71] E. Pap. *Pseudo-additive measures and their applications. In: Handbook of Measure Theory*, volume II. Elsevier, North-Holland, 2002.

[72] E. Pap. Generalized real analysis and its applications. *International Journal of Approximate Reasoning*, 47(3):368 – 386, 2008. Reasoning under Partial Knowledge.

[73] E. Pap and D. Vivona. Noncommutative and nonassociative pseudo-analysis and its applications on nonlinear partial differential equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 246(2):390–408, 2000.

[74] E. Pap and I. Štajner Papuga. Pseudo-integral based on non-associative and non-commutative pseudo-addition and pseudo-multiplication. *International Journal of Uncertainty Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 9(2):159–168, 2001.

[75] E. Pap, M. Štrboja, and I. Rudas. Pseudo-L^p space and convergence. *Fuzzy Sets and Systems*, 238:113 – 128, 2014.

[76] A. Puhalskii. *Large deviations and idempotent probability.* Chapman & Hall/CRC monographs and surveys in pure and applied mathematics, 2001.

[77] D. Ralescu. Theory and applications of fuzzy random variables. In *NAFIPS 2009 - 2009 Annual Meeting of the North American Fuzzy Information Processing Society*, pages 1–1, 2009.

[78] N. M. Ralević and Lj. M. Nedović. The probability defined on semirings. *Bulletins for Applied and Computing Mathematics (BAM)*, pages 7–14, 1999.

[79] N. Ralević, T. Grbić, and Lj. Nedović. A law of large numbers in the pseudo-probability spaces. In *Zb. rad. PRIM '98*, 2000.

[80] W. Rudin. *Functional Analysis.* McGraw-Hill Book Company, 1973.

[81] Y Rébillé. A Yosida–Hewitt decomposition for minitive set functions. *Fuzzy Sets and Systems*, 157(2):308 – 318, 2006.

[82] H. H. Shaefer. *Topological Vector Spaces*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1971.

[83] S. Shirali. Analog of L^p with a subadditive measure. *Ricerche di Matematica*, 57:43–54, 2008.

[84] I. Štajner-Papuga. A note on generated pseudo-operations with two parameters as a base for the generalized pseudo-Laplace type transform. In Bernd Reusch, editor, *Computational Intelligence, Theory and Applications*, pages 383–394, Berlin, Heidelberg, 2006. Springer Berlin Heidelberg.

[85] I. Štajner-Papuga, T. Grbić, and M. Štrboja. A note on absolute continuity for the interval-valued measures based on pseudo-integral of interval-valued function. In *2009 IEEE 7th International Symposium on Intelligent Systems and Informatics (SISY), Proceedings*, pages 279–284, 2009.

[86] M. Sugeno. *Theory of fuzzy integrals and its applications*. PhD thesis, Tokyo Institute of Technology, 1974.

[87] M. Sugeno and T. Murofushi. Pseudo-additive measures and integrals. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 122(1):197 – 222, 1987.

[88] A. Tagliani. Recovering a probability density function from its Mellin transform. *Applied Mathematics and Computations*, 118:151–159, 2001.

[89] G. van Belle. *Statistical Rules of Thumb*. John Wiley and Sons, second edition, 2008.

[90] H. Wang and Y. Song. Uncertainty measure in evidence theory with its applications. *Applied Intelligence*, 48(7):1672 – 1688, 2018.

[91] Z. Wang and G. J. Klir. *Fuzzy measure theory*. Plenum Press, New York and London, 1992.

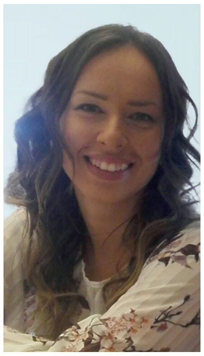
[92] Z. Wang and G. J. Klir. *Generalized measure theory*. Springer, 2009.

[93] K. Weichselberger. The theory of interval-probability as a unifying concept for uncertainty. *International Journal of Approximate Reasoning*, 24(2):149 – 170, 2000.

[94] D. Zhang and C. Guo. Generalized fuzzy integrals of set-valued functions. *Fuzzy Sets and Systems*, 76(3):365 – 373, 1995.

[95] D. Zhang and C. Guo. Integrals of set-valued functions for $\perp$-decomposable measures. *Fuzzy Sets and Systems*, 78(3):341 – 346, 1996.

[96] D. Zhang and Z. Wang. On set-valued fuzzy integrals. *Fuzzy Sets and Systems*, 56(2):237 – 241, 1993.



Nataša
Duraković

Nataša Duraković

Rođena sam 9.4.1987. godine u Inđiji u Srbiji, gde sam završila osnovnu školu i gimnaziju prirodno-matematičkog smera. 2010. godine sam završila osnovne studije matematike na Prirodno-matematičkom fakultetu Univerziteta u Novom Sadu, a 2011. godine sam završila master studije matematike na istom fakultetu odbranom master teze pod nazivom „Izvodi i integrali necelog reda”. Tokom školovanja sam bila dobitnik brojnih stipendija i nagrada. 2014. godine sam upisala doktorske studije Matematike u tehnici na Fakultetu tehničkih nauka Univerziteta u Novom Sadu i položila sve ispite predviđene planom i programom studija. Zaposlena sam kao asistent-master za užu naučnu oblast Teorijska i primenjena matematika na Katedri za matematiku Fakulteta tehničkih nauka Univerziteta u Novom Sadu.

Jula 2016. godine sam pohađala letnju školu „Existence and regularity for the Plateau problem”, Scuola Matematica Interuniversitaria, u Italiji.

Za period 2018-2019. godine sam bila učesnik bilateralnog projekta „Statistical Analysis of Business Correspondence from the Aspect of Students' Country of Origin”, između Republike Srbije i Slovenije.

Koautor sam 3 naučna rada štampana u časopisima sa ISI liste. Imala sam 12 saopštenja na međunarodnim skupovima štampanih u celini, kao i 7 saopštenja na skupovima nacionalnog značaja štampanih u celini.

U naučnom radu, oblast interesovanja mi je teorija neaditivnih mera, intervalno-vrednosnih funkcija i mera sa primenom u teoriji verovatnoće i modelovanju neodređenosti.

Trenutno istraživanje se bazira na izučavanju slabe konvergencije u okvirima pseudoanalize.

Овај Образац чини саставни део докторске дисертације, односно докторског уметничког пројекта који се брани на Универзитету у Новом Саду. Попуњен Образац укоричити иза текста докторске дисертације, односно докторског уметничког пројекта.

План третмана података

Назив пројекта/истраживања

Слабе конвергенције псеудовероватноћа и интервално-вредносних псеудовероватноћа

Назив институције/институција у оквиру којих се спроводи истраживање

а) Универзитет у Новом Саду, Факултет техничких наука

б)

в)

Назив програма у оквиру ког се реализује истраживање

-

1. Опис података

1.1 Врста студије

Укратко описати тип студије у оквиру које се подаци прикупљају

У овој студији нису прикупљани подаци.

1.2 Врсте података

а) квантитативни

б) квалитативни

1.3. Начин прикупљања података

а) анкете, упитници, тестови

б) клиничке процене, медицински записи, електронски здравствени записи в) генотипови: навести врсту ___________________________________

г) административни подаци: навести врсту _________________________

д) узорци ткива: навести врсту____________________________________

ђ) снимци, фотографије: навести врсту________________________________

е) текст, навести врсту ____

ж) мапа, навести врсту ____

з) остало: описати ____

1.3 Формат података, употребљене скале, количина података

1.3.1 Употребљени софтвер и формат датотеке:

а) Excel фајл, датотека ___________________

b) SPSS фајл, датотека ___________________

c) PDF фајл, датотека ____________________

d) Текст фајл, датотека ___________________

e) JPG фајл, датотека ____________________

f) Остало, датотека ______________________

1.3.2. Број записа (код квантитативних података)

а) број варијабли ____

б) број мерења (испитаника, процена, снимака и сл.) ________________________

1.3.3. Поновљена мерења

а) да

б) не

Уколико је одговор да, одговорити на следећа питања:

а) временски размак између поновљених мера је _________________________________

б) варијабле које се више пута мере односе се на ___________________________________

в) нове верзије фајлова који садрже поновљена мерења су именоване као _____________

Напомене: ____

Да ли формати и софтвер омогућавају дељење и дугорочну валидност података?

а) Да

б) Не

Ако је одговор не, образложити ____

____

2. Прикупљање података

2.1 Методологија за прикупљање/генерисање података

2.1.1. У оквиру ког истраживачког нацрта су подаци прикупљени?

а) експеримент, навести тип ____

б) корелационо истраживање, навести тип ______________________________________

ц) анализа текста, навести тип ____

д) остало, навести шта ____

2.1.2 Навести врсте мерних инструмената или стандарде података специфичних за одређену научну дисциплину (ако постоје).

____

____

2.2 Квалитет података и стандарди

2.2.1. Третман недостајућих података

а) Да ли матрица садржи недостајуће податке? Да Не

Ако је одговор да, одговорити на следећа питања:

а) Колики је број недостајућих података? __________________________

б) Да ли се кориснику матрице препоручује замена недостајућих података? Да Не

в) Ако је одговор да, навести сугестије за третман замене недостајућих података

____

2.2.2. На који начин је контролисан квалитет података? Описати

____

____

2.2.3. На који начин је извршена контрола уноса података у матрицу?

____

____

3. Третман података и пратећа документација

3.1. Третман и чување података

3.1.1. Подаци ће бити депоновани у ___________________________________ репозиторијум.

3.1.2. URL адреса ____

3.1.3. DOI ____

3.1.4. Да ли ће подаци бити у отвореном приступу?

а) Да

б) Да, али после ембарга који ће трајати до ____________________________________

в) Не

Ако је одговор не, навести разлог ____

3.1.5. Подаци неће бити депоновани у репозиторијум, али ће бити чувани.

Образложење

____

____

3.2 Метаподаци и документација података

3.2.1. Који стандард за метаподатке ће бити примењен? ___________________________________

3.2.1. Навести метаподатке на основу којих су подаци депоновани у репозиторијум.

____

____

Ако је потребно, навести методе које се користе за преузимање података, аналитичке и процедуралне информације, њихово кодирање, детаљне описе варијабли, записа итд.

____

____

____

____

3.3 Стратегија и стандарди за чување података

3.3.1. До ког периода ће подаци бити чувани у репозиторијуму? _________________________

3.3.2. Да ли ће подаци бити депоновани под шифром? Да Не

3.3.3. Да ли ће шифра бити доступна одређеном кругу истраживача? Да Не

3.3.4. Да ли се подаци морају уклонити из отвореног приступа после извесног времена?

Да Не

Образложити

____

____

4. Безбедност података и заштита поверљивих информација

Овај одељак МОРА бити попуњен ако ваши подаци укључују личне податке који се односе на учеснике у истраживању. За друга истраживања треба такође размотрити заштиту и сигурност података.

4.1 Формални стандарди за сигурност информација/података

Истраживачи који спроводе испитивања с људима морају да се придржавају Закона о заштити података о личности (*https://www.paragraf.rs/propisi/zakon_o_zastiti_podataka_o_licnosti.html*) и одговарајућег институционалног кодекса о академском интегритету.

4.1.2. Да ли је истраживање одобрено од стране етичке комисије? Да Не

Ако је одговор Да, навести датум и назив етичке комисије која је одобрила истраживање

____

4.1.2. Да ли подаци укључују личне податке учесника у истраживању? Да Не

Ако је одговор да, наведите на који начин сте осигурали поверљивост и сигурност информација везаних за испитанике:

а) Подаци нису у отвореном приступу

б) Подаци су анонимизирани

ц) Остало, навести шта

____

____

5. Доступност података

5.1. Подаци ће бити

а) јавно доступни

б) доступни само уском кругу истраживача у одређеној научној области

ц) затворени

Ако су подаци доступни само уском кругу истраживача, навести под којим условима могу да их користе:

____

____

Ако су подаци доступни само уском кругу истраживача, навести на који начин могу приступити подацима:

____

5.4. Навести лиценцу под којом ће прикупљени подаци бити архивирани.

___

6. Улоге и одговорност

6.1. Навести име и презиме и мејл адресу власника (аутора) података

___

6.2. Навести име и презиме и мејл адресу особе која одржава матрицу с подацима

___

6.3. Навести име и презиме и мејл адресу особе која омогућује приступ подацима другим истраживачима

___