Univerzitet u Novom Sadu
Prirodno-matematički fakultet

Miloš Kurilić

REDUKOVANI IDEAL-PROIZVOD TOPOLOŠKIH PROSTORA

- doktorska disertacija -

Novi Sad, 1994.

Sadržaj

PREDGOVOR

Proučavanje topologije na proizvodu familije topoloških prostora započinje 1910. godine Frechet u radu [19]. U pomenutom radu razmatra se samo proizvod konačne familije prostora.

1923. godine u radu [42] Tietze posmatra proizvoljnu familiju topoloških prostora $\{\mathcal{X}_i \mid i \in I\}$, gde je $\mathcal{X}_i = (X_i, \mathcal{O}_i)$, i na skupu $\Pi_{i\in I}X_i$ definiše topologiju "punog boks - proizvoda" (full box - product). Bazu ove topologije čine "puni boksovi", to jest skupovi oblika $\Pi_{i\in I}O_i$, gde $O_i \in \mathcal{O}_i$ za sve $i \in I$. Ovakav proizvod označićemo sa $\Box_{i\in I}\mathcal{X}_i$ (ili $\Box\mathcal{X}_i$, ako je jasno o kom skupu indeksa je reč). Pošto se pokazalo da se na ovakav proizvod ne prenose važne osobine prostora $\mathcal{X}_i$ (kao što su kompaktnost, povezanost, težina itd.) puni boks - proizvod ostaje gotovo zaboravljen tokom sledeće četiri decenije.

Proučavanje proizvoda topoloških prostora tokom 20-tih godina je u znaku ispitivanja konačnih i prebrojivih proizvoda metričkih prostora.

1930. godine, u članku [43], Tihonov na skupu $\Pi_{i\in I}X_i$ definiše topologiju koja dobija ime "topologija Tihonova". Bazu ove topologije čine skupovi oblika $\bigcap_{i\in K}\pi_i^{-1}(O_i)$, gde je $K \subset I$ konačan skup a $O_i \in \mathcal{O}_i$ za sve $i \in K$. ($\pi_j : \Pi X_i \rightarrow X_j$ su kanonske projekcije). Kada se danas kaže "proizvod familije topoloških prostora" najčešće se misli baš na proizvod Tihonova. Popularnost i prihvaćenost ovog proizvoda je posledica njegovog "lepog ponašanja". Teorema Tihonova o kompaktnosti proizvoda kompaktnih prostora pojavila se u [44] mada se delimično nalazi i u [43]. Osim kompaktnosti i mnoga druga važna topološka svojstva kao što su povezanost, niže aksiome separacije i druge prenose se sa prostora $\mathcal{X}_i$ na Tihonovski proizvod $\Pi\mathcal{X}_i$. Dalje, u [43] Tihonov daje čuveni rezultat: svaki $T_{3\frac{1}{2}}$ prostor težine κ može se potopiti u $[0,1]^\kappa$. Danas je poznato mnogo sličnih teorema o univerzalnim prostorima koje koriste proizvod Tihonova. Ovo takodje potvrdjuje njegovu važnost.

U monografijama 1951. Bourbaki ([5]) i 1955. Kelley ([26]) vraćaju se "neposlušnom" punom boks - proizvodu, ali samo kroz kratke vežbe.

Članak [27] Knighta iz 1964. godine je prva detaljnija studija boks - proizvoda odnosno redukovanih boks - proizvoda. Preciznije, Knight na skupu ΠX_i posmatra prvo topologiju čiju bazu čine skupovi oblika $\bigcap_{i\in J}\pi_i^{-1}(O_i)$ gde je $|J| < \kappa$ i $\kappa \leq |I|^+$ fiksiran kardinal. Ovakav proizvod označimo sa $\square^\kappa\mathcal{X}_i$. Ako za $\lambda < \kappa$ na ΠX_i uvedemo relaciju ekvivalencije

$$f \sim g \quad \text{akko} \quad |\{i \in I \mid f_i \neq g_i\}| < \lambda,$$

onda faktor prostor $\square^\kappa X_i/\sim$ označavamo sa $\square^\kappa_\lambda\mathcal{X}_i$. To je boks - proizvod u smislu Knighta.

Razvojem skup - teoretske topologije boks - proizvodi ponovo izazivaju interesovanje. Oni omogućavaju konstrukciju primera i kontraprimera za mnoge pretpostavke. (Na primer radovi Kunena [28] o parakompaktnosti, van Douwena o normalnosti boks - proizvoda itd.).

Konstrukcije razvijene u teoriji modela primenjuju se i u topologiji. U svojoj tezi 1975. godine Bankston ([1]) proučava ultraproizvod topoloških prostora. Ovo je u stvari redukovani puni boks - proizvod $\square X_i/\sim$, gde je $\sim$ relacija ekvivalencije na skupu ΠX_i data sa

$$f \sim g \quad \text{akko} \quad \{i \in I \mid f_i = g_i\} \in \mathcal{U}$$

a $\mathcal{U}$ je slobodan ultrafilter na I. U radovima [3] i [2] Bankston daje detaljnu studiju ove strukture.

U prvom delu ove disertacije konstruisana je struktura koja obuhvata sve dosada pomenute strukture vezane za proizvod familije topoloških prostora: puni boks - proizvod $\square\mathcal{X}_i$, proizvod Tihonova $\prod\mathcal{X}_i$, boks - proizvod u smislu Knighta $\square^\kappa_\lambda\mathcal{X}_i$ i ultraproizvod $\square_\mathcal{U}\mathcal{X}_i$. Ovu opštu strukturu odredjuju ideal Λ i filter Ψ (na indeksnom skupu I) koji zadovoljavaju uslov $(\Lambda\Psi)$. Taj uslov je proizišao iz zahteva da aksiome separacije T_0, T_1, T_2, T_3 i $T_{3\frac{1}{2}}$, koje ostaju očuvane u četiri poznate strukture, budu očuvane i u novoj.

U drugom delu rada se pokazuje da se i druge topološke osobine, koje se sa prostora X_i prenose na četiri poznata proizvoda (kao na primer homogenost, nula - dimenzionalnost itd.) takodje prenose na novouvedeni proizvod.

Na kraju teze dokazana je verzija teoreme Feferman - Vaughta za r.i.p. Ovim je problematika izložena u ovom radu dovedena u vezu sa topološkom teorijom modela, što predstavlja smernicu za dalja istraživanja.

Inicijalna ideja disertacije potiče od prof. dr Milana Grulovića, specijaliste za matematičku logiku, koji mi je ukazao na redukovane proizvode i ultraproizvode - fundamentalne konstrukcije u teoriji modela. Saradnja sa prof. Grulovićem je rezultovala radom [21] koji je sadržan u drugoj glave ove teze, dok je poslednja glava uvod u novu saradnju jer se njen sadržaj nalazi u preseku teorije modela i topologije.

Korisne sugestije i znanje iz topologije i teorije skupova koje su mi tokom studija preneli akademik prof. dr Bogoljub Stanković, akademik prof. dr Olga Hadžić, prof. dr Stevan Pilipović, prof. dr Endre Pap, prof. dr Ljiljana Gajić i prof. dr Milan Grulović ugradjeni su u ovaj rad.

Prof. dr Mila Mršević je sa izuzetnom pažnjom pročitala prvu verziju teze i ukazala mi je na više suštinskih pitanja.

Kolege sa Instituta za matematiku PMF-a u Novom Sadu su mi, stvaranjem kreativne atmosfere, posebno pomogli da istrajem u lepom ali iscrpljujućem pisanju ove disertacije.

Merima Marčićev je, kao i uvek, dala sve od sebe pri kompjuterskom uobličavanju grafički jako složenog teksta koji predstoji.

Svima se najsrdačnije zahvaljujem.

Autor

PREGLED SADRŽAJA I UVODNE NAPOMENE

Sadržaj disertacije je podeljen na sedam poglavlja, pri čemu se poglavlja sastoje od više tačaka.

U prvoj glavi se navode osnovne definicije i poznati rezultati vezani za Tihonovski proizvod, box - proizvod i ultraproizvod familije topoloških prostora.

Glavni rezultat druge glave je definisanje opšte strukture, redukovanog ideal - proizvoda (r.i.p.), koja uopštava i objedinjuje pomenute proizvode a kod koje aksiome separacije T_0, T_1, T_2, T_3 *i* $T_{3\frac{1}{2}}$ *ostaju očuvane.*

U **prvoj tački** se precizno formulišu pitanja koja će biti razmatrana u ovoj glavi.

Druga tačka sadrži uglavnom poznate leme vezane za skupovne osobine redukovanog proizvoda proizvoljne familije skupova.

Sadržaj **treće tačke** odnosi se na ideal - proizvod $\Pi^{\Lambda}\mathcal{X}_i$ familije topoloških prostora $\{(X_i, \mathcal{O}_i) \mid i \in I\}$. Bazu topologije ovog prostora čine skupovi oblika $\bigcap_{i \in L} \pi_i^{-1}(O_i)$, gde $O_i \in \mathcal{O}_i$ i $L \in \Lambda$, pri čemu je Λ neki ideal na skupu indeksa I. Zatim se definiše r.i.p. $\Pi^{\Lambda}_{\Psi}\mathcal{X}_i = \Pi^{\Lambda}\mathcal{X}_i / \sim$ gde relaciju $\sim$ odredjuje filter Ψ na indeksnom skupu. Takodje, dokazuju se neke tehničke leme neophodne za dalji rad.

U **četvrtoj tački** je dokazano da je r.i.p. familije topoloških prostora homeomorfan svojoj "restrikciji" na skup indeksa $A \subset I$ koji je elemenat filtra Ψ.

U **petoj tački** se formuliše uslov "spregnutosti" ideala Λ i filtra Ψ (uslov $(\Lambda\Psi)$) koji glasi:

$$\forall A \in \Psi \ \forall B \notin \Psi \ \exists L \in \Lambda (L \subset A \setminus B \wedge \ L^c \notin \Psi).$$

Dokazano je da je ovaj uslov potreban za prenošenje navedenih aksioma separacije sa prostora $\mathcal{X}_i, i \in I$ na r.i.p. $\Pi_\Psi^\Lambda \mathcal{X}_i$.

Dovoljnost uslova $(\Lambda\Psi)$ za očuvanje osobina T_0, T_1, T_2 i T_3 dokazana je u **šestoj tački.**

Sedma tačka se bavi r.i.p.-om uniformizabilnih prostora. Pokazuje se da je proizvoljan r.i.p. uniformizabilnih prostora uniformizabilan. Takodje je dokazano da je uslov $(\Lambda\Psi)$ dovoljan za prenošenje osobine $T_{3\frac{1}{2}}$ na r.i.p.

U **osmoj tački** dat je odgovor na obratno pitanje: ako je $\Pi_\Psi^\Lambda \mathcal{X}_i$ T_k- prostor, da li su "skoro svi" prostori $\mathcal{X}_i$ sa ovom osobinom (gde $k \in \{0, 1, 2, 3, 3\frac{1}{2}\}$. Odgovor je potvrdan za proizvoljne Λ i Ψ, ako je $k \in \{0, 1, 2\}$. Za $k = 3$, odgovor je potvrdan ako važi $(\Lambda\Psi)$. Na kraju, za $k = 3\frac{1}{2}$ odgovor može biti odrečan čak iako je uslov $(\Lambda\Psi)$ ispunjen. U ovoj tački je takodje pokazano da diskretnost $\Pi_\Psi^\Lambda \mathcal{X}_i$ povlači diskretnost $\mathcal{X}_i$ za "skoro sve" $i \in I$.

U trećoj glavi je izvršena delimična diskusija uslova $(\Lambda\Psi)$. *Izdvojeni su specijalni slučajevi* $(\Lambda\Psi)$ *r.i.p.*

U **prvoj tački** dati su uslovi ekvivalentni uslovu $(\Lambda\Psi)$ za slučaj kada je Λ glavni ideal, odnosno Ψ glavni filter. Proizvod Tihonova, puni boks - proizvod i ultraproizvod su obuhvaćeni ovim slučajem.

Druga tačka daje neke dovoljne uslove da uslov $(\Lambda\Psi)$ bude zadovoljen ako su pri tom Λ i Ψ neglavni. Kao specijalan slučaj dobijen je boks - proizvod u smislu Knighta.

Neki ekvivalenti uslova $(\Lambda\Psi)$ dati su u **trećoj tački.** Ako je $\mathbf{B} = P(I)/\Psi$ (faktor algebra Booleove algebre $P(I)$) i $\mathbf{\Lambda} \subset \mathbf{B}$ slika ideala Λ, onda važi:

$$(\Lambda\Psi) \quad \text{akko} \quad \mathbf{\Lambda} \setminus \{0\} \quad \text{je gust u} \quad \mathbf{B} \setminus \{0\}.$$

Četvrta glava sadrži rezultate o preslikavanjima i homogenosti r.i.p.

U **prvoj tački se,** na prirodan način, polazeći od familije preslikavanja $\{\varphi_i : X_i \to Y_i \mid i \in I\}$, definiše preslikavanje $\varphi_\Psi^\Lambda : \Pi_\Psi^\Lambda \mathcal{X}_i \to \Pi_\Psi^\Lambda \mathcal{Y}_i$. Pokazuje se da ako su "skoro sva" preslikavanja φ_i neprekidna (otvorena, "1-1", "na") onda je takvo i preslikavanje φ_Ψ^Λ. Takodje se dokazuje da homogenost "skoro svih" prostora $\mathcal{X}_i$ povlači homogenost r.i.p. $\Pi_\Psi^\Lambda \mathcal{X}_i$.

U **drugoj tački** se pokazuje da je r.i.p. r.i.p-ova opet r.i.p. (Radi se o prostoru oblika $\prod_\Psi^\Lambda(\prod_{\Psi_i}^{\Lambda_i} \mathcal{X}_i)$). Uslov $(\Lambda\Psi)$ ostaje očuvan pri ovakvoj iteraciji.

Peta glava je posvećena redukovanom ideal - proizvodu topoloških algebri.

U **prvoj tački** je dokazano da je ideal - proizvod $\Pi^\Lambda \mathcal{X}_i$ topoloških grupa ponovo topološka grupa.

U **drugoj tački** je dat odgovarajući rezultat za r.i.p. Ako (što je uobičajeno) u definiciju topološke grupe uključimo i T_1- aksiomu separacije, onda je za njeno prenošenje dovoljan uslov $(\Lambda\Psi)$.

Treća tačka sadrži odgovarajuće rezultate za topološke prstene. Primenjene metode se mogu koristiti u verifikaciji neprekidnosti bilo koje operacije.

U šestoj glavi se proučava otvorenost r.i.p.

U **prvoj tački** je dokazano da $\mu-$ otvorenost prostora $\mathcal{X}_i$ i $\kappa-$ kompletnost ideala Λ povlači $\lambda-$ otvorenost r.i.p. $\Pi_\Psi^\Lambda X_i$, gde je $\lambda = \min\{\kappa, \mu\}$. Specijalno, ako je κ regularan kardinal a $\mathcal{X}_i$, $i \in I$, $P-$ prostori, onda je Knight-ov boks - proizvod $\Box_\lambda^\kappa \mathcal{X}_i$ takodje $P-$ prostor.

Glavni rezultat **druge tačke** glasi: ako su prostori $\mathcal{X}_i$ $\mu-$ otvoreni, ideal Λ κ^+- kompletan i Ψ $(\mu, \kappa)-$ regularan filter, gde $\kappa, \lambda \geq \omega$, onda je $\Pi_\Psi^\Lambda \mathcal{X}_i$ κ^+- otvoren prostor.

U **trećoj tački** se navode neki specijalni slučajevi i ilustracije poslednje teoreme.

Rezultati koji se odnose na nepovezanost r.i.p. izloženi su u sedmoj glavi.

U **prvoj tački** je dokazano da je uslov $(\Lambda\Psi)$ dovoljan za prenošnje totalne nepovezanosti prostora $\mathcal{X}_i, i \in I$ na $\Pi_\Psi^\Lambda \mathcal{X}_i$.

Druga tačka sadrži odgovarajući rezultat koji se odnosi na nuladimenzionalnost r.i.p. No, ovde se dokazuje mnogo više: ako je Ψ $\omega-$ regularan filter a $\mathcal{X}_i$ T_3- prostori i ako pritom važi $(\Lambda\Psi)$, onda je $\Pi^{\Lambda}_{\Psi}\mathcal{X}_i$ nuladimenzionalan prostor.

U **trećoj tački** dati su neki rezultati o jakoj nuladimenzionalnosti r.i.p. kao i odredjeni primeri.

U osmoj glavi dati su neki rezultati o r.i.p koji pripadaju topološkoj teoriji modela.

Prva tačka je uvodna i sadrži osnovne definicije ove teorije. Definisane su L_t- formule i njihova interpretacija.

U **drugoj tački** je dokazana teorema Feferman - Vaughta za r.i.p. Na svakom kraju je neki početak. Takav je slučaj i sa ovom tezom. Teorema Feferman - Vaughta omogućava "prevodjenje" mnogih rezultata klasične teorije modela na rezultate o r.i.p. To bi verovatno mogla biti tema još jedne ovakve teze. To će sigurno biti tema za razmišljanje ovog autora.

Na kraju svake glave (sem glava 1 i 3) date su **istorijske i bibliografske napomene.** One se uglavnom odnose na teoreme o r.i.p. i njihove analogone vezane za klasične proizvode.

Spisak literature, dat na kraju teze, obuhvata dve vrste referenci. Jednu čine članci i monografije koje je autor neposredno koristio. Druga grupa referenci sadrži radove koji su zanimljivi iz istorijskih razloga.

Notacija je u celom tekstu standardna. Novouvedene oznake se svugde detaljno objašnjavaju. Ipak, zbog preglednosti, na sledećoj strani dajemo spisak oznaka.

Posle tablice oznaka dat je spisak definicija osnovnih klasa topoloških prostora. Ove definicije su sigurno dobro poznate čitaocu ali ih navodimo zbog postojećih odstupanja u literaturi.

OZNAKE

N	skup prirodnih brojeva
Z	skup celih brojeva
Q	skup racionalnih brojeva
R	skup realnih brojeva
C	skup kompleksnih brojeva
α, β, γ	ordinali
κ, λ, μ	kardinali
$\omega = \aleph_0$	prvi beskonačni kardinal (ordinal)
ω_1	prvi neprebrojivi kardinal (ordinal)
κ^+	najmanji kardinal veći od κ
$P(X)$	partitivni skup skupa X
$\mid X \mid$	kardinalni broj skupa X
$[X]^{<\omega}$	$= \{A \subset X \mid A$ je konačan $\}$
$[X]^{<\kappa}$	$= \{A \subset X \mid \mid A \mid < \kappa\}$
$\mathcal{O}$	topologija (familija otvorenih skupova)
$\mathcal{F}$	familija zatvorenih skupova
$\mathcal{B}$	baza topologije
$\mathcal{B}(x)$	baza okolina tačke x
I	skup indeksa
ΠX_i	$= \Pi_{i \in I} X_i$ (proizvod familije skupova)
f, g, h	elementi ΠX_i
π_j	kanonske projekcije ($\pi_j : \Pi X_i \to X_j$)
Λ	ideal na I
$\mathcal{B}^\Lambda$	$= \{\bigcap_{i \in L} \pi_i^{-1}(O_i) \mid L \in \Lambda, O_i \in \mathcal{O}_i\}$
$\mathcal{O}^\Lambda$	ideal topologija na ΠX_i
$\Pi^\Lambda \mathcal{X}_i$	$= (\Pi X_i, \mathcal{O}^\Lambda)$ ideal proizvod
Ψ	filter na I
$\sim$	relacija na ΠX_i odredjena sa Ψ (tačka 2.1)
$[f]$	klasa ekvivalencije elementa f
q	prirodna projekcija $q : \Pi X_i \to \Pi X_i / \sim$
A^*	$= q^{-1}(q(A))$ gde $A \subset \Pi X_i$
$\Pi^\Lambda_\Psi \mathcal{X}_i$	$= \Pi^\Lambda \mathcal{X}_i / \sim$ redukovani ideal proizvod

$\mathcal{O}_{\Psi}^{\Lambda}$	topologija r.i.p
$f \mid J$	restrikcija funkcije f na skup J
Ψ_J	$= \{A \cap J \mid A \in \Psi\}$ restrikcija filtera
Λ_J	$= \{L \cap J \mid L \in \Lambda\}$ restrikcija ideala
Δ_X	$= \{(x, x) \mid x \in X\}$ dijagonala X^2
$\mathcal{U}$	uniformna struktura
$\mathcal{G}$	baza uniformne strukture
$\mathcal{O}_{\mathcal{U}}$	topologija generisana unif. strukturom $\mathcal{U}$
$\mathcal{G}_{\Psi}^{\Lambda}$	videti definiciju u teoremi 2.7.4
$\mathcal{U}_{\Psi}^{\Lambda}$	uniformna struktura čija je baza $\mathcal{G}_{\Psi}^{\Lambda}$
$\square \mathcal{X}_i$	puni boks-proizvod
$\square_{\lambda}^{\kappa} \mathcal{X}_i$	boks-proizvod u smislu Knighta
$\square_{\mathcal{U}} \mathcal{X}_i$	ultraproizvod
$\Pi \mathcal{X}_i$	Tihonovski proizvod
$(G, \oplus)$	grupa
e	neutralni element grupe
x^{-1}	inverzni element za $x \in G$
$\Pi^{\Lambda} G_i$	ideal - proizvod grupa
$\Pi_{\Psi}^{\Lambda} G_i$	r.i.p grupa
$\varphi^{\Lambda}, \varphi_{\Psi}^{\Lambda}$	videti definicije na str. 53 i 54.

OSNOVNE KLASE TOPOLOŠKIH PROSTORA

Topološki prostor $(X, \mathcal{O})$ je:

- T_0- **prostor** akko za svake dve različite tačke x i y postoji otvoren skup O da $x \in O \not\ni y$ ili $x \notin O \ni y$

- T_1- **prostor** akko za svake dve različite tačke x i y postoji otvoren skup U da $x \in U \not\ni y$.

- **Hausdorffov** (ili T_2- prostor) akko za svake dve različite tačke x i y postoje disjunktni, otvoreni skupovi U i V da je $x \in U$ i $y \in V$

- **regularan** akko za svaki zatvoren skup F i tačku x koja mu ne pripada postoje disjunktni otvoreni skupovi U i V da $x \in U$ i $F \subset V$

- **kompletno - regularan** akko za svaki zatvoren skup F i svaku tačku x koja mu ne pripada postoji neprekidna funkcija $f : X \to [0,1]$ da je $f(x) = 0$ i $f(F) = \{1\}$

- **normalan** akko za svaka dva disjunktna zatvorena skupa F i G postoje disjunktni otvoreni skupovi U i V da je $F \subset U$ i $G \subset V$

- T_3- **prostor** akko je regularan, T_2- prostor

- $T_{3\frac{1}{2}}-$ **prostor** akko je kompletno - regularan T_2- prostor

- T_4- **prostor** akko je normalan, T_2- prostor

- T_5- **prostor** akko je svaki njegov potprostor T_4,

- T_6- **prostor** akko je T_4 i ako je svaki otvoren skup $F_\sigma-$ skup

- **prostor Frechét - Urisona** akko za svako $A \subset X$ i svako $x \in \overline{A}$ postoji niz $< x_n \mid n \in N >$ u A da je $\lim_{n\to\infty} x_n = x$

- **sekvencijalan prostor** akko za svako $A \subset X$ važi $A \in \mathcal{F} \iff$ za svaki niz $< x_n \mid n \in N >$ tačaka iz A, $\lim_{n\to\infty} x_n \subset A$

- **kompaktan** akko svaki otvoren pokrivač X sadrži konačan potpokrivač

- **lokalno kompaktan** akko svaka tačka ima kompaktnu okolinu

- $k-$ **prostor** akko je T_2- prostor i pritom je faktor-prostor nekog lokalno kompaktnog T_2- prostora

- **prebrojivo kompaktan** akko svaki prebrojivi otvoreni pokrivač X sadrži konačan potpokrivač

- **pseudokompaktan** akko je $T_{3\frac{1}{2}}-$ prostor i ako je svaka neprekidna realna funkcija na X ograničena

- **sekvencijalno kompaktan** akko svaki niz tačaka iz X sadrži konvergentan podniz

- **Čech - kompletan** akko postoji kompaktifikacija cX prostora X da je ostatak $cX \setminus c(X)$ $F_\sigma-$ skup u cX

- **Lindelöfov** akko je T_3- prostor i ako svaki otvoreni pokrivač X sadrži prebrojiv potpokrivač

- **realno - kompletan** ($R-$ kompletan, kompletan po Hewittu, engl: realcompact) akko je X homeomorfan zatvorenom potprostoru topološkog stepena R^κ, gde je κ neki kardinal

- **topološki kompletan** (kompletan po Dieudonneu) akko je topologija generisana nekom kompletnom uniformnom strukturom

- **metrizabilan** akko postoji metrika koja indukuje topologiju $\mathcal{O}$

- **povezan** akko su jedini otvoreno - zatvoreni skupovi $\emptyset$ i X

- **lokalno povezan** akko u svakoj tački ima bazu okolina koja se sastoji od povezanih skupova

- **nasledno nepovezan** akko su jedini povezani potprostori X jednočlani podskupovi

- **totalno nepovezan** akko je kvazikomponenta svake tačke $x \in X$ skup $\{x\}$

- **nula - dimenzionalan** akko je T_2 i ako ima bazu topologije koja se sastoji od otvoreno - zatvorenih skupova

- **jako nula - dimenzionalan** akko je $T_{3\frac{1}{2}}-$ prostor i ako za svaka dva funkcionalno razdvojena skupa A i B postoji otvoreno - zatvoren skup U da $A \subset U \subset X \setminus B$

- **ekstremno nepovezan** akko $\forall O \in \mathcal{O},\ \overline{O} \in \mathcal{O}$

- **parakompaktan** akko se u svaki otvoren pokrivač može upisati lokalno konačan otvoren pokrivač

- **prebrojivo parakompaktan** akko se u svaki prebrojiv otvoreni pokrivač može upisati lokalno konačan otvoreni pokrivač

- **slabo parakompaktan** akko se u svaki otvoreni pokrivač može upisati tačkasto konačan otvoreni pokrivač

- **kolektivno normalan** akko je T_2- prostor i ako za svaku diskretnu familiju $\{F_i \mid i \in I\}$ zatvorenih skupova postoji diskretna familija $\{V_i \mid i \in I\}$ otvorenih skupova da za sve $i \in I$ važi $F_i \subset V_i$

- **jako parakompaktan** akko se u svaki otvoreni pokrivač prostora X može upisati zvezdasto konačan otvoreni pokrivač.

- **homogen** akko za svake dve tačke $x, y \in X$ postoji automorfizam $f : X \to X$ da je $f(x) = y$

- κ **- otvoren** akko je presek $< \kappa$ otvorenih skupova otvoren skup

- $P-$ **prostor** akko je ω_1- otvoren (tj. G_δ skupovi su otvoreni)

- **raspršen** (engl. scattered) akko svaki neprazan potprostor $A \subset X$ ima izolovanu tačku (u A)

- **ccc - prostor** akko ne postoji disjunktna familija nepraznih otvorenih skupova kardinalnosti veće od ω.

Dalje, ako je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor onda

- **težina prostora** X, u oznaci $w(X)$ je kardinal

$$w(X) = \min\{\mid \mathcal{B} \mid \; \mid \mathcal{B} \text{ je baza topologije } \mathcal{O}\}$$

- **karakter prostora** X **u tački** x je kardinal

$$\chi(x, X) = \min\{\mid \mathcal{B}(x) \mid \; \mid \mathcal{B}(x) \text{ je baza okolina tačle } x\}$$

- **karakter prostora** X je kardinal

$$\chi(X) = \sup\{\chi(x, X) \mid x \in X\}$$

- **gustina prostora** X je kardinal

$$d(X) = \min\{\mid D \mid \; \mid D \text{ je gust u } X\}.$$

Glava 1

Uvod

1.1 Ideali, filtri, ultrafiltri

Ideali, filtri i ultrafiltri su opštepoznati matematički pojmovi. No ipak, zbog kompletnosti teksta, navodimo neke osnovne definicije i činjenice vezane za ove objekte. Detaljne informacije vezane za ovu temu mogu se naći u [7]. U ovoj disertaciji koristićemo samo činjenice koje slede.

Definicija 1.1.1. *Neka je I neprazan skup. Neprazna familija Λ podskupova skupa I je ideal na I akko važi:*

(i) $L_1 \cup L_2 \in \Lambda$, *za sve* $L_1, L_2 \in \Lambda$;

(ii) ako $L \in \Lambda$ *i* $A \subset L$, *onda* $A \in \Lambda$.

Λ *je pravi ideal akko je* $\Lambda \neq P(I)$. Λ *je glavni ideal akko je* $\Lambda = \{L \mid L \subset J\}$ *za neko* $J \subset I$.

Definicija 1.1.2. *Neka je I neprazan skup. Neprazna familija Ψ podskupova skupa I je filter na I akko važi:*

(i) $A_1 \cap A_2 \in \Psi$, *za sve* $A_1, A_2 \in \Psi$;

(ii) ako $A \in \Psi$ *i* $A \subset B \subset I$, *onda* $B \in \Psi$.

Ψ *je pravi filter akko je* $\Psi \neq P(I)$. Ψ *je glavni filter akko je* $\Psi = \{A \mid J \subset A \subset I\}$ *za neko* $J \subset I$.

Pojam ideala je u odredjenom smislu dualan pojmu filtra, što tvrdi sledeća teorema koja se lako dokazuje.

Teorema 1.1.1. *Neka je I neprazan skup. Tada važi:*

a) Ako je Λ ideal na I, onda je $\Psi = \{I \setminus L \mid L \in \Lambda\}$ filter na I.

b) Ako je Ψ filter na I, onda je $\Lambda = \{I \setminus A \mid A \in \Psi\}$ ideal na I. $\square$

Primeri 1. $\Lambda = \{\emptyset\}$ je očigledno ideal. Odgovarajući filter je $\Psi = \{I\}$.

2. $P(I)$ je i ideal i filter , pritom nepravi.

3. Neka je I neprazan , beskonačan skup i neka je $\omega \leq \kappa \leq \mid I \mid$ kardinal. Tada je $\Lambda = [I]^{<\kappa}$ ideal (skupova kardinalnosti manje od κ). Odgovarajući filter je $\Psi = \{A \subset I \mid\mid I \backslash A \mid < \kappa\}$. Λ je pravi, neglavni ideal a Ψ pravi, neglavni filter. Posebno, za $\kappa = \omega$, $\Lambda = [I]^{<\omega}$ je ideal konačnih podskupova I. Ovaj ideal zovemo Frechetov ideal a odgovarajući filter - Frechetov filter na I.

4. Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor. Tada je familija nigde gustih podskupova prostora X ideal na X. Isto važi za familiju podskupova X koji su prve kategorije. Takodje, familija podskupova L skupa X, takvih da postoji kompaktan skup $K \subset X$ da je $L \subset K$, čini ideal na X. Ovim idealima možemo pridružiti odgovarajuće filtre, u skladu sa teoremom 1.1.1.

5. Neka je (X, d) metrički prostor. Tada familija ograničenih podskupova prostora X čini ideal na X. Isto važi za familiju svih totalno ograničenih podskupova prostora X.

6. Neka je $(X, \mathcal{P}, \mu)$ prostor mere. Tada familija svih skupova mere nula čini ideal na X.

Prelazimo dalje na izdvajanje posebnih filtera - ultrafiltera. Ovakvi filtri imaju posebnu ulogu u teoriji modela.

Definicija 1.1.3. *Filter Ψ na I je ultrafilter akko važi:*

$$\forall A \subset I \, (A \in \Psi \Leftrightarrow I \backslash A \notin \Psi)$$

Teorema 1.1.2. *Neka je I neprazan skup i Ψ filter na I. Tada su ekvivalentni sledeći uslovi:*

(i) Ψ je ultrafilter na I;

(ii) Ψ je maksimalan (obzirom na inkluziju) pravi filter;

(iii) Ψ je pravi filter i važi:

$$\forall A, B \subset I \ (A \cup B \in \Psi \Rightarrow A \in \Psi \vee B \in \Psi) \quad \square$$

Teorema 1.1.3. *Svaki pravi filter na I je sadržan u nekom ultrafilteru.* □

Teorema 1.1.4. *Neka je I neprazan skup. Tada važi:*

a) Ako je Ψ glavni ultrafilter, onda postoji $a \in I$ da je

$$\Psi = \{A \mid a \in A \subset I\};$$

b) Ako je I beskonačan skup, onda postoji neglavni ultrafilter na I. □

Neglavni ultrafilter zove se još i slobodan ultrafilter.

Definicija 1.1.4. *Ultrafilter $\mathcal{U}$ na I je $\kappa-$ kompletan (gde je $\kappa \geq \omega$ kardinal) akko je presek κ elementa $\mathcal{U}$ element $\mathcal{U}$. Inače, $\mathcal{U}$ je $\kappa-$ nekompletan.*

Jasno, svaki glavni ultrafilter je $\kappa-$ kompletan za proizvoljan kardinal κ. Takodje, svaki slobodan ultrafilter na ω je $\omega-$ nekompletan. Egzistencija $\omega-$ kompletnog slobodnog ultrafiltra na neprebrojivom skupu je poznat problem u teoriji skupova.

Definicija 1.1.5. *Kardinal κ je merljiv akko postoji slobodan ultrafilter na κ koji je $\mu-$ kompletan za sve $\mu < \kappa$. Dalje, κ je $\omega-$ merljiv kardinal ako na κ postoji $\omega-$ kompletan, slobodan ultrafilter.*

Interesantno je da su egzistencija merljivog i $\omega-$ merljivog kardinala ekvivalentne.

1961. godine Scott je pokazao da ako važi Gödelova aksiomaa konstruktibilnosti ($V = L$) onda merljiv kardinal ne postoji.

Opširne informacije iz ove oblasti mogu se naći u knjizi Drakea [13] ili Changa i Keislera [6].

1.2 Proizvod Tihonova

Neka je $\{(X_i, \mathcal{O}_i) \mid i \in I\}$ familija topoloških prostora. Sa π_j označimo projekcije $\pi_j : \prod_{i\in I} X_i \to X_j$, gde je $\pi_j(< f_i \mid i \in I >) = f_j$. Bazu topologije Tihonova na skupu $\prod_{i\in I} X_i$ čine skupovi oblika $\bigcap_{i\in K} \pi_i^{-1}(O_i)$, gde je $K \subset I$ konačan skup, a $O_i \in \mathcal{O}_i$ za sve $i \in K$. Ova topologija je uvedena 1930. godine u članku Tihonova [43]. Ako uvedemo oznaku $\mathcal{X}_i = (X_i, \mathcal{O}_i)$, tihonovski proizvod ćemo označiti sa $\prod_{i\in I} \mathcal{X}_i$ ili kraće sa $\prod \mathcal{X}_i$.

Topološko svojstvo P je multiplikativno ako za proizvoljnu familiju topoloških prostora $\{\mathcal{X}_i \mid i \in I\}$ važi: ako $\mathcal{X}_i$ ima P, za sve $i \in I$, onda $\prod \mathcal{X}_i$ ima P. U nastavku dajemo pregled poznatih rezultata vezanih za multiplikativnost osnovnih topoloških osobina.

1. Biti T_k- prostor, gde $k \in \{0, 1, 2, 3, 3\frac{1}{2}\}$ je multiplikativna osobina. Ovo je deo folklora i može se naći u [14] str. 131.

2. Osobine T_4, T_5 i T_6 nisu multiplikativne. Prava Sorgenfreya je T_6- prostor ([14] str. 82) ali njen kvadrat nije ni T_4- prostor ([14] str. 132). Ovaj prostor uveo je Sorgenfrey u [41].

3. Karakter, težina i gustina prostora nisu multiplikativne osobine. Medjutim, proizvod $\leq \kappa$ prostora karaktera (težine) $\leq \kappa$ je karaktera (težine) $\leq \kappa$ ([14] str. 133). Takodje, proizvod $\leq 2^\kappa$ prostora gustine $\leq \kappa$ je gustine $\leq \kappa$ ([14] str. 133). Poslednju teoremu su nezavisno dokazali Hewitt [22], Marczewski [32] i Pondiczery [38].

4. Biti prostor Frechet-Urisona i biti sekvencijalan prostor su osobine koje nisu očuvane već u proizvodu dva prostora ([14] str. 146). Ovo pokazuje Franklin u [17] i [18].

5. Kompaktnost je multiplikativno svojstvo ([14] str. 217). Ovo je poznata teorema Tihonova (videti [43] i [44]).

6. Lokalna kompaktnost nije multiplikativna. Preciznije, proizvod $\prod_{i\in I} \mathcal{X}_i$ je lokalno kompaktan akko su kompaktni svi prostori $\mathcal{X}_i$ sem konačno mnogo koji su lokalno kompaktni ([14] str. 234).

7. Svojstvo biti $k-$ prostor nije očuvano već u proizvodu dva prostora ([14], str. 240). Prvi primer dao je Dowker u [12].

8. Prebrojiva kompaktnost i pseudokompaktnost nisu očuvane u proizvodu dva prostora ([14] str. 309). Originalan rezultat pripada Novaku (videti [37]).

9. Sekvencijalna kompaktnost nije očuvana u proizvodu proizvoljnog broja faktora. Folklorna teorema ([14] str. 315) kaže da je ova osobina očuvana u proizvodu $\leq \aleph_0$ faktora. Ako sa D označimo dvoelementni diskretan prostor, onda D^c nije sekvencijalno kompaktan prostor ([14] str. 316) pa se gornji rezultat ne može poboljšati.

10. Čech-kompletnost nije multiplikativna jer stepen $N^{\aleph_1}$ nije ni $k-$prostor (videti: Kelley [26]). Ova osobina je očuvana u proizvodu $\leq \aleph_0$ prostora ([14] str. 300).

11. $R-$kompletnost (to jest kompletnost po Hewittu) je multiplikativna ([14] str. 322). Rezultat pripada Shiroti [40].

12. Osobina biti prostor Lindelöfa nije očuvana već kod proizvoda dva prostora. Kontraprimer je kvadrat prave Sorgenfreya ([14] str. 293).

13. Parakompaktnost, prebrojiva parakompaktnost i slaba parakompaktnost nisu ni konačno multiplikativne osobine. Jedinstveni kontraprimer je prava Sorgenfreya koja je parakompaktna a kvadrat nije ni prebrojivo ni slabo parakompaktan ([14] str. 458, 474, 485).

14. Jaka parakompaktnost takodje nije očuvana u proizvodu dva prostora ([14] str. 484). Naime, Lindelöfov prostor je jako parakompaktan (Morita [35]) pa je prava Sorgenfreya ponovo primer.

15. Metrizabilnost nije multiplikativna. Jednostavan primer je prostor D^c koji ne zadovoljava prvu aksiomu prebrojivosti. Medjutim, proizvod $\leq \aleph_0$ metrizabilnih prostora je metrizabilan, što je opštepoznato ([14] str. 385).

16. Povezanost je multiplikativno svojstvo ([14] str. 521). Rezultat za konačne proizvode pripada Van Dantzigu [8].

17. Nasledna nepovezanost i nuladimenzionalnost su multiplikativne osobine ([14] str. 533).

18. Jaka nuladimenzionalnost nije očuvana već u proizvodu dva faktora ([14] str. 533).

19. Ekstremna nepovezanost nije multiplikativna ([14] str. 541).

20. Uniformizabilnost je multiplikativna osobina. Ovo je deo folklora i može se naći u [14] str. 641.

21. Osobine biti $P-$prostor i biti diskretan prostor nisu multiplikativne. Zajednički primer je Cantorov kub $D^{\aleph_0}$.

22. Homogenost je multiplikativna osobina što je dobro poznato.

23. Topološka kompletnost je multiplikativna ([14] str. 676). Ovaj rezultat pripada Dieudonneu i može se naći u [9].

24. Lokalna povezanost nije multiplikativna. Preciznije, proizvod $\prod \mathcal{X}_i$ je lokalno povezan akko su svi prostori $\mathcal{X}_i$ lokalno povezani i svi sem konačno mnogo povezani ([14] str. 548).

25. Pitanje multiplikativnosti osobine "biti ccc prostor" je nezavisno od aksioma ZFC. Naime, CH daje nemultiplikativnost, dok $\neg CH + MA$ daje multiplikativnost ove osobine. Rezultati se mogu naći kod Kunena u [29] i u članku Noblea i Ulmera [36].

1.3 Puni boks-proizvod

Neka je I neprazan skup i neka su $\mathcal{X}_i = (X_i, \mathcal{O}_i)$ topološki prostori, gde je $i \in I$. Skup oblika $\prod_{i\in I} O_i$, gde $O_i \in \mathcal{O}_i$ za sve $i \in I$, zovemo puni otvoreni boks. Familija svih punih otvorenih boksova čini bazu topologije na skupu $\prod_{i\in I} X_i$ koju zovemo boks - topologija. Odgovarajući prostor je puni boks-proizvod familije prostora $\{\mathcal{X}_i \mid i \in I\}$ i označavamo ga sa $\square_{i\in I}\mathcal{X}_i$ ili kraće sa $\square\mathcal{X}_i$. Ako je $\mathcal{X}_i = \mathcal{X}$ za sve $i \in I$, pišemo $\square_I\mathcal{X}$.

Ako je I konačan skup, boks-topologija je jednaka topologiji Tihonova, pa su interesantni samo beskonačni puni boks - proizvodi.

Detaljnije preglede poznatih rezultata o punom boks - proizvodu daju Williams u [45] i Rudin u [39]. Pre iznošenja rezultata o očuvanju topoloških osobina, ističemo neke činjenice koje ćemo koristiti.

(A) Van Douwen u [10] daje primer prebrojive familije $\{\mathcal{X}_n \mid n \in \omega\}$ separabilnih kompletnih metričkih prostora, takve da prostor $\square\mathcal{X}_n$ nije T_4- prostor. Ovaj primer može se naći u [45] str. 180.

(B) $\square_\omega[0,1]$ nije $k-$ prostor (gde je $[0,1] \subset R$ jedinični interval sa uobičajenom topologijom). Dajemo kratak dokaz. Relacija $\sim$ na skupu $[0,1]^\omega$ data sa: $f \sim g$ akko je $f_i \neq g_i$ za najviše konačno $i \in \omega$, je relacija ekvivalencije. Faktor prostor $\square_\omega[0,1]/\sim$ označava se sa $\nabla_\omega[0,1]$ i zove "nabla proizvod". Prema [45] str. 181, $\nabla_\omega[0,1]$ je $P-$ prostor ($G_\delta-$ skupovi su otvoreni) i pritom je Hausdorffov. Lako se dokazuje da je $T_1, P-$ prostor totalno nekompaktan (što znači da su jedini kompaktni podskupovi tog prostora konačni podskupovi) (videti u [2]). Zato je $\nabla_\omega[0,1]$ totalno nekompaktan prostor.

Lema 1.3.1. *Totalno nekompaktan $k-$ prostor je diskretan.*

Dokaz. Neka je $A \subset X$ proizvoljan skup, i neka je $K \subset X$ kompaktan. Tada je K, pa i $K \cap A$ konačan skup a time i zatvoren ($k-$ prostori su T_2). Pošto je $\mathcal{X}$ $k-$ prostor, A je zatvoren skup. No, A je proizvoljan pa je $\mathcal{F} = \mathcal{O} = P(X)$. □

Dakle, kada bi $\nabla_\omega[0,1]$ bio $k-$ prostor, prema prethodnoj lemi bio bi diskretan, što nije tačno (videti [45] ili [39]). Znači $\nabla_\omega[0,1]$ nije $k-$ prostor. Prema [14] str. 238, osobina "biti $k-$ prostor" je invarijanta faktor preslikavanja, pa kada bi $\square_\omega[0,1]$ bio $k-$ prostor to bi bio i $\nabla_\omega[0,1]$.

(C) $\square_\omega D$ je diskretan prostor kardinalnosti c (gde je $D = \{0,1\}$ sa ddiskretnom topologijom). Ovo je evidentno.

Konačno prelazimo na rezultate o očuvanju topoloških osobina u punom boks - proizvodu.

1. Osobine T_0, T_1, T_2, T_3 i $T_{3\frac{1}{2}}$ su očuvane, što je dobro poznato ([45] str. 171, 175). Detaljan dokaz može se naći u radu Knighta [27].

2. Osobine T_4, T_5 i T_6 nisu očuvane. što pokazuje van Douwenov primer (A).

3. Uniformizabilnost je očuvana, što pokazuje Knight u [27] (dokaz se može naći u [45] str. 175).

4. Kardinalne invarijante: težina, karakter i gustina nisu očuvane što pokazuje primer (C). Isti primer pokazuje da osobine "biti ccc-prostor" i "biti prostor Lindelöfa" nisu očuvane u punom boks - proizvodu.

5. Osobine: kompaktnost, lokalna kompaktnost, Čech - kompletnost, metrizabilnost, biti sekvencijalan prostor, prostor Frechet - Urisona i biti $k-$ prostor nisu očuvane. Naime, sve ove osobine impliciraju da je prostor $k-$ prostor. Kako prostor $[0,1]$ ima sve ove osobine, iz primera (B) sledi tvrdjenje.

6. Prebrojiva, pseudo - i sekvencijalne kompaktnost nisu očuvane, što pokazuje primer (D).

7. $R-$ kompletnost. Ovde je situacija komplikovanija. Važi: ako su prostori $\mathcal{X}_i$ $R-$ kompletni, onda je $\square_{i\in I}\mathcal{X}_i$ $R-$ kompletan akko $\mid I \mid$ ne sadrži merljive kardinale ([45] str. 176). Ovu teoremu je dokazao Kato u [25]. U ZFC nije moguće dokazati egzistenciju merljivih kardinala.

8. Topološka kompletnost (to jest kompletnost po Dieudonneu) je očuvana, što je dokazao Kato u [25]. Dokaz postoji i u [45] str. 175.

9. Jaka parakompaktnost, parakompaktnost i kolektivna normalnost nisu očuvane. Naime, važi rezultat Kaplana (iz [24]): separabilan metrički prostor je jako parakompaktan (pa je zato parakompaktan i kolektivno normalan) (videti [14] str. 484). Sve ove osobine impliciraju normalnost pa tvrdjenje sledi iz van Douwenovog primera (A).

10. Povezanost i lokalna povezanost nisu očuvane. (Videti [45] str. 172 ili u [27]).

11. Nuladimenzionalnost i totalna nepovezanost je očuvana. Za ovo u literatuti koju je imao na raspolaganju autor nije našao eksplicitno tvrdjenje ni dokaz. Medjutim, u ovoj tezi dokaz je dat za opšti - redukovani ideal proizvod (videti glavu 7).

12. Ekstremna nepovezanost nije očuvana. Naime, ova osobina je invarijanta otvorenih preslikavanja ([14] str. 545), pa kada bi se prenosila na puni boks - proizvod, prenosila bi se i na njegovu otvorenu sliku - ultraproizvod, što nije tačno (videti u [2]).

13. Puni boks - proizvod (T_1-) topoloških grupa je (T_1-) topološka grupa (van Douwen [11]). Rezultat je dat i u [45] str. 175).

14. Homogenost je očuvana. Komentar je isti kao za tačku 11.

15. $\kappa-$ otvorenost je očuvana ($\kappa \geq \omega$ je proizvoljan kardinal). Ovo sledi iz $\bigcap_{\alpha<\lambda}(\prod_{i\in I} O_i^\alpha) = \prod_{i\in I}(\bigcap_{\alpha<\lambda} O_i^\alpha)$ i činjenice da je prostor $\mathcal{X}$ $\kappa-$ otvoren akko je presek $< \kappa$ baznih otvorenih skupova otvoren skup.

16. Raspršen (scattered) prostor. Ova osobina nije očuvana. Argument je isti kao u 12.

1.4 Knightov boks-proizvod

Neka je $\{\mathcal{X}_i \mid i \in I\}$ beskonačna familija topoloških prostora. Ako je κ kardinal, takav da je $\omega \leq \kappa \leq\mid I \mid^+$ lako se pokazuje da je familija podskupova skupa $\prod_{i\in I} X_i$ oblika $\bigcap_{i\in K} \pi_i^{-1}(O_i)$, gde $O_i \in \mathcal{O}_i$ i gde $K \in [I]^{<\kappa}$ baza neke topologije na $\prod_{i\in I} X_i$. Ovaj prostor označimo sa $\square^\kappa \mathcal{X}_i$. Primetimo da za $\kappa =\mid I \mid^+$ ovo predstavlja puni boks - proizvod. Ako za $\lambda < \kappa$ na skupu $\prod X_i$ uvedemo relaciju ekvivalencije $\sim$ sa

$$f \sim g \quad \text{akko} \quad \mid \{i \in I \mid f_i \neq g_i\} \mid < \lambda$$

onda faktor prostor $\square^{\kappa}\mathcal{X}_i/\sim$ označavamo sa $\square^{\kappa}_{\lambda}\mathcal{X}_i$. To je boks - proizvod u smislu Knighta. (U literaturi se sreću i nazivi: boks - proizvod i redukovani boks - proizvod). Poseban slučaj ovakvog proizvoda (za $I = \omega$, $\kappa = \omega_1$ i $\lambda = \omega$) je "nabla - proizvod" spomenut u prethodnoj tački. Lako se dokazuje sledeća činjenica:

(D) $\square_{i\in\omega}{}^{\omega_1}_{\omega} D$ je diskretan prostor kardinalnosti c (gde je $D = \{0,1\}$ sa diskretnom topologijom).

Sada prelazimo na rezultate o očuvanju topoloških osobina u Knightovom boks - proizvodu.

1. Aksiome separacije T_0, T_1, T_2, T_3 i $T_{3\frac{1}{2}}$ su očuvane, što pokazuje Knight u [27].

2. Uniformizabilnost je očuvana (a time i kompletna regularnost). Knight u [27] na $\square^{\kappa}_{\lambda}\mathcal{X}_i$ konstruiše odgovarajuću uniformnu strukturu.

3. Aksiome separaacije T_4, T_5 i T_6 nisu očuvane.

4. Kardinalne invarijante: težina, karakter i gustina nisu očuvane, što pokazuje primer (D). Isti primer pokazuje da osobine "biti ccc prostor" i "biti prostor Lindelöfa" nisu očuvane.

5. Kompaktnost, lokalna kompaktnost, Čech-kompletnost, metrizabilnost, te osobine "prostor Frechet - Urisona", "sekvencijalan prostor", "k - prostor" nisu očuvane. Naime, u prethodnoj tački je pokazano da "nabla - proizvod" $\nabla_{\omega}[0,1]$ (koji je isto što i $\square^{\omega_1}_{\omega}[0,1]$) nije $k-$ prostor. Pošto prostor $[0,1]$ ima sve navedene osobine a s druge strane sve te osobine povlače osobinu "biti k - prostor", sledi tvrdjenje.

6. Prebrojiva kompaktnost, pseudokompaktnost i sekvencijalna kompaktnost nisu očuvane. Ovo pokazuje primer (D).

7. Jaka parakompaktnost i parakompaktnost nisu očuvane. Dajemo kratak dokaz. Naime, Kunen daje primer familije $\{\mathcal{X}_n \mid n \in \omega\}$ Hausdorffovih, kompaktnih (a time i Lindelöfovih pa i jako parakompaktnih (videti u [14] str. 484)) prostora, takvih da $\square_{\omega}\mathcal{X}_n$ nije T_4-prostor (videti u [39] str. 55). Kako su prostori $\mathcal{X}_n$ parakompaktni i lokalno kompaktni. važi "Nabla lema" ([45] str. 183) pa su parakompaktnost $\square_{\omega}\mathcal{X}_n$ i $\nabla_{\omega}\mathcal{X}_n$ ekvivalentne. Zato $\nabla_{\omega}\mathcal{X}_n$ nije parakompaktan prostor (jer $\square_{\omega}\mathcal{X}_n$ nije ni T_4). No, $\nabla_{\omega}\mathcal{X}_n$ je Knightov boks - proizvod $\square_{i\in\omega}{}^{\omega_1}_{\omega}\mathcal{X}_n$.

8. Povezanost nije očuvana što pokazuje Knight u [27].

9. Totalna nepovezanost i nuladimenzionalnost su očuvane u Knightovom boks - proizvodu. Dokaz za opštiju strukturu - redukovani ideal proizvod može se naći u ovoj tezi.

10. Homogenost je očuvana. Komentar je isti kao u prethodnoj tački.

11. Knightov boks - proizvod (T_1-) topoloških grupa je (T_1-) topološka grupa. Komentar je isti kao u tački 9.

12. Diskretnost nije očuvana. Primer je prostor $\square_{\iota\in\omega_1}{}^{\omega_1}_{\omega} D$.

1.5 Ultraproizvod

Neka je $\{\mathcal{X}_\iota \mid \iota \in I\}$ familija topoloških prostora i neka je $\mathcal{U}$ slobodan ultrafilter na skupu I. Ako na skupu $\prod_{\iota\in I} X_\iota$ definišemo relaciju ekvivalencije $\sim$ sa

$$f \sim g \quad \text{akko} \quad \{\iota \in I \mid f_\iota = g_\iota\} \in \mathcal{U},$$

onda faktor prostor punog boks-proizvoda $\square\mathcal{X}_\iota / \sim$ zovemo ultraproizvod (familije topoloških prostora $\{\mathcal{X}_\iota \mid \iota \in I\}$). Dakle, ultraproizvod je redukovani puni boks-proizvod.

U nastavku dajemo pregled rezultata o očuvanju osnovnih topoloških osobina u ultraproizvodu. Osnovna referenca biće članak Bankstona [2].

1. Aksiome separacije T_0, T_1, T_2, T_3 i $T_{3\frac{1}{2}}$ su očuvane u ultraproizvodu ([2] primeri 1.1 i 1.2).

2. Aksiome separacije T_4, T_5 i T_6 nisu očuvane ([2] teorema 8.2).

3. Diskretnost i nediskretnost su očuvane ([2] primer 1.1).

4. Kardinalne invarijante: težina, karakter i gustina nisu očuvane ([2] teorema 4.5).

5. Kompaktnost, lokalna kompaktnost, Čech - kompletnost, metrizabilnost te osobine: "biti prostor Frechet - Urisona", "biti sekvencijalan prostor" i "biti $k-$ prostor" nisu očuvane. Dajemo kratak dokaz. Neka je $\mathcal{X}_n = [0,1]$ za sve $n \in \omega$ i neka je $\mathcal{U}$ prebrojivo nekompletan ultrafilter na ω. Tada je $\square_u[0,1]$ prostor koji je $T_{3\frac{1}{2}}$ (zbog 1) i $P-$ prostor ([2] teorema 4.1), pa je totalno nekompaktan ([2] lema 4.4). Kada bi $\square_u[0,1]$ bio $k-$ prostor, onda bi morao biti diskretan (lema 1.3.1 iz prethodne tačke), što je u suprotnosti sa 3. Zato $\square_u[0,1]$ nije $k-$ prostor, pa kako sve navedene osobine impliciraju osobinu "biti $k-$ prostor", sledi tvrdjenje.

6. Prebrojiva kompaktnost, pseudokompaktnost, sekvencijalna kompaktnost te osobina "biti prostor Lindelöfa" nisu očuvane. Primer: ako je $\mathcal{X}_n = D(= \{0,1\}$ sa diskretnom topologijom) za sve $n \in \omega$, i ako je $\mathcal{U}$ slobodan ultrafilter na ω, onda je $\Box_u D$ diskretan prostor kardinalnosti c koji nema ni jednu od navedenih osobina.

7. Parakompaktnost i kolektivna normalnost nisu očuvane ([2] posledica 8.3).

8. Osobina "biti ccc - prostor" nije očuvana ([2] teorema 4.6 ili primer dat u 6).

9. Povezanost i lokalna povezanost nisu očuvane. Naime, prostor $\Box_u[0,1]$ iz tačke 5. je $T_{3\frac{1}{2}}$ i $P-$ prostor pa je jako nuladimenzionalan tako da bi lokalna povezanost dala diskretnost ovog prostora, što nije tačno.

10. Totalna nepovezanost i nuladimenzionalnost su očuvane ([2] primer 1.6).

11. Za jaku nuladimenzionalnost dajemo parcijalan odgovor. Ako ne postoje merljivi kardinali, onda su svi slobodni ultrafiltri (prebrojivo) nekompletni pa su svi ultraproizvodi $P-$ prostori. Tada je jaka nuladimenzionalnost očuvana. Naime, ako je $\{\mathcal{X}_i \mid i \in I\}$ familija jako nuladimenzionalnih prostora, ti prostori su $T_{3\frac{1}{2}}$ pa je $\Box_u \mathcal{X}_i$ $T_{3\frac{1}{2}}$, $P-$ prostor za time i jako nuladimenzionalan. ([2] teorema 5.8).

12. Ekstremna nepovezanost nije očuvana ([2] posledica 4.8).

13. Osobina "biti $P-$ prostor" je očuvana ([2] posledica 4.2). Opštije, osobina "biti $\kappa-$ otvoren prostor" je očuvana. Naime, ova osobina je očuvana u punom boks - proizvodu i predstavlja invarijantu otvorenih preslikavanja (videti lemu 6.1.1 ove teze).

14. Uniformizabilnost je očuvana. (Efektivna konstrukcija uniformne strukture za opšti-redukovani ideal-proizvod, data je u drugoj glavi ove teze).

15. Ultraproizvod (T_1-) topoloških grupa je (T_1-) topološka grupa ([2] primer 1.10).

16. Homogenost je očuvana ([2] primer 1.3).

17. Raspršenost nije očuvana ([2] problem 10.2).

Glava 2

R.i.p. i aksiome separacije

2.1 Formulacija problema

U ovoj glavi bavićemo se uvodjenjem topologije na faktor prostoru proizvoda topoloških prostora. Uslov koji tražena struktura treba da zadovolji je očuvanje nižih aksioma separacije, to je uslov koji zadovoljavaju sve dosad pomenute topologije (proizvod Tihonova, ultra - proizvod, puni boks - proizvod i boks - proizvod).

Očekujemo da novouvedena topologija bude generalizacija pomenutih, to jest da se stare topologije pojave kao posebni slučajevi nove.

Sa ovim u vezi nameću se problemi koji slede.

Neka je I neprazan skup i $\{X_i \mid i \in I\}$ familija nepraznih skupova. Za $\Psi \subset P(I)$ uvodimo na skupu $\prod X_i$ binarnu relaciju $\sim$ na sledeći način: za $f, g \in \prod X_i$

$$f \sim g \quad \text{akko} \quad \{i \in I \mid f(i) = g(i)\} \in \Psi.$$

Problem 1. Naći uslov za Ψ da $\sim$ bude relacija ekvivalencije na skupu $\prod X_i$, za proizvoljnu familiju nepraznih skupova $\{X_i \mid i \in I\}$.

Neka je $\{(X_i, \mathcal{O}_i) \mid i \in I\}$ familija topoloških prostora. Za $\emptyset \neq \Lambda \subset P(I)$ definišemo familiju podskupova skupa $\prod X_i$:

$$\mathcal{B}^{\Lambda} = \left\{ \bigcap_{i \in L} \pi_i^{-1}(O_i) \mid L \in \Lambda, O_i \in \mathcal{O}_i \text{ za } i \in L \right\}$$

Problem 2. Naći uslov za Λ da $\mathcal{B}^{\Lambda}$ bude baza neke topologije na skupu $\prod X_i$, za svaku familiju topoloških prostora $\{(X_i, \mathcal{O}_i) \mid i \in I\}$.

Problem 3. Ako Ψ i Λ zadovoljavaju uslove tražene u prethodnim problemima, naći uslov za Λ i Ψ da za proizvoljnu familiju topoloških prostora $\{(X_i, \mathcal{O}_i) \mid i \in I\}$ i za svako $k \in \{0, 1, 2, 3, 3\frac{1}{2}\}$ važi

$\{i \in I \mid X_i \text{ je } T_k\text{– prostor }\} \in \Psi \Rightarrow (\prod X_i, \mathcal{O}^{\Lambda})/\sim$ je T_k– prostor gde je $\mathcal{O}^{\Lambda}$ topologija generisana bazom $\mathcal{B}^{\Lambda}$.

Odgovor na prva dva pitanja je dobro poznat, pa ga ovde dajemo samo zbog kompletnosti teksta. Težište ove glave je rešavanje trećeg problema.

2.2 Redukovani proizvod skupova

Rešenje prvog problema daje sledeća teorema.

Teorema 2.2.1 *Neka je I neprazan skup i $\Psi \subset P(I)$. Tada za svaku familiju nepraznih skupova $\{X_i \mid i \in I\}$ važi:*

$\sim$ je relacija ekvivalencije na $\prod X_i$ akko Ψ je filter na I.

Dokaz ($\Rightarrow$) Neka je $X_i = \{0, 1, 2\}$ za sve $i \in I$ i neka je $\sim$ relacija ekvivalencije na $\prod X_i$.

(i) Neka je $f \in \prod X_i$ proizvoljno. Zbog refleksivnosti je $f \sim f$ pa $\{i \mid f_i = f_i\} = I \in \Psi$.

(ii) Neka je $A_1, A_2 \in \Psi$. Definišimo $f, g, h \in \prod X_i$ sa $f_i = 0$ za sve $i \in I$,

$$g_i = \begin{cases} 0. & \text{za } i \in A_1, \\ 1. & \text{za } i \in I \setminus A_1, \end{cases} \qquad h_i = \begin{cases} 0, & \text{za} \quad i \in A_1 \cap A_2, \\ 1, & \text{za} \quad i \in A_2 \setminus A_1, \\ 2 & \text{za} \quad i \in I \setminus A_2, \end{cases}$$

Sada $\{i \mid f_i = g_i\} = A_1 \in \Psi$ pa $f \sim g$. Takodje $\{i \mid g_i = h_i\} = A_2 \in \Psi$, pa $g \sim h$. Zbog tranzitivnosti $\sim$ imamo $f \sim h$ pa $\{i \mid f_i = h_i\} = A_1 \cap A_2 \in \Psi$.

(iii) Neka $A \in \Psi$ i $A \subset A_1$. Definišemo f i g kao u (ii). Definišemo $h_i = 0$ za $i \in A$ i $h_i = 2$ za $i \in I \setminus A$. Sada $\{i \mid f_i = h_i\} = \{i \mid h_i = g_i\} = A \in \Psi$, pa $f \sim h$ i $h \sim g$. Zato $f \sim g$ pa $\{i \mid f_i = g_i\} = A_1 \in \Psi$. Ψ je filter na I.

($\Leftarrow$) Neka je Ψ filter na I i $\{X_i \mid i \in I\}$ proizvoljna familija nepraznih skupova.

(R) Neka $f \in \prod X_i$. Tada $\{i \mid f_i = f_i\} = I \in \Psi$, pa $f \sim f$.

(S) Neka $f \sim g$. Tada $\{i \mid f_i = g_i\} = \{i \mid g_i = f_i\} \in \Psi$, pa $g \sim f$.

(T) Neka $f \sim g$ i $g \sim h$. Tada $\{i \mid f_i = g_i\} = A, \{i \mid g_i = h_i\} = B \in \Psi$. Pošto je Ψ filter, $A \cap B \in \Psi$. No $A \cap B \subset \{i \mid f_i = h_i\} = C$ pa $C \in \Psi$. Zato $f \sim h$. □

Neka je sada Ψ filter na I. Zbog pojednostavljenja notacije uvodimo neke oznake. Sa $[f]$ ćemo označiti klasu ekvivalencije elementa $f \in \prod X_i$, tj. $[f] = \{g \in \prod X_i \mid g \sim f\}$. Dalje, $q : \prod X_i \to \prod X_i/\sim$ je kanonsko preslikavanje koje odgovara relaciji $\sim$, dato sa $q(f) = [f]$. Na kraju za $A \subset \prod X_i$ definišemo $A^* = q^{-1}(q(A))$.

Lema 2.2.1. *Neka su $A, B \subset \prod X_i$ i $A_\mu \subset \prod X_i$ za $\mu \in M \neq \emptyset$. Tada:*

$(i)\emptyset^* = \emptyset \quad (ii)A \subset A^* \quad (iii)A \subset B \Rightarrow A^* \subset B^* \quad (iv)A^{**} = A^*$

$(v)(\bigcup_{\mu\in M} A_\mu)^* = \bigcup_{\mu\in M} A_\mu^* (vi)A^* = \bigcup_{f\in A}[f] (vii)q(A^*) = q(A)$.

Dokaz. Prva tri tvrdjenja su očigledna na osnovu definicije.

$(iv)A^{**} = q^{-1}(q(q^{-1}(q(A)))) = q^{-1}(q(A)) = A^*$, jer je q "na", pa je $q(q^{-1}(B)) = B$ za sve $B \subset \prod X_i/\sim$. Isti argument važi i za (vii).

$(v)(\bigcup_{\mu\in M} A_\mu)^* = q^{-1}(q(\bigcup_{\mu\in M} A_\mu)) = q^{-1}(\bigcup_{\mu\in M} q(A_\mu)) = \bigcup_{\mu\in M} q^{-1}$ $(q(A_\mu)) = \bigcup_{\mu\in M} A_\mu^*$.

$(vi)A^* = q^{-1}(q(A)) = q^{-1}(\{q(f) \mid f \in A\}) = \bigcup_{f\in A} q^{-1}(q(f)) = \bigcup_{f\in A}[f]$. □

Lema 2.2.2 (i) *za sve $B \subset \prod X_i/\sim$ važi $q^{-1}(B) = (q^{-1}(B))^*$*

(ii) *ako $A \subset q^{-1}(B)$, onda $A^* \subset q^{-1}(B)$*

Dokaz (i) $(q^{-1}(B))^* = q^{-1}(q(q^{-1}(B))) = q^{-1}(B)$, jer je $q(q^{-1}(B)) = B$ (q je "na").

(ii) Prema lemi 2.2.1 (iii), $A \subset q^{-1}(B)$ implicira $A^* \subset (q^{-1}(B))^*$. Sada primenimo (i) ove leme. □

Lema 2.2.3 *Neka je $A_i, B_i \subset X_i$ za sve $i \in I$. Tada važi:*

$(i)(\prod A_i)^* \subset (\prod B_i)^*$ *akko* $\{i \mid A_i \subset B_i\} \in \Psi$.

$(ii)(\prod A_i)^* = (\prod B_i)^*$ *akko* $\{i \mid A_i = B_i\} \in \Psi$.

$(iii)(\prod A_i)^* = \prod X_i$ *akko* $\{i \mid A_i = X_i\} \in \Psi$.

$(iv) f \in (\prod A_i)^*$ *akko* $\{i \mid f_i \in A_i\} \in \Psi$.

$(v)(\prod A_i)^* \cap (\prod B_i)^* \neq \emptyset$ *akko* $\{i \mid A_i \cap B_i \neq \emptyset\} \in \Psi$.

Dokaz $(i)(\Rightarrow)$ Neka $(\prod A_i)^* \subset (\prod B_i)^*$. Pretpostavimo da $D = \{i \mid A_i \subset B_i\} \notin \Psi$. Tada za $i \in I \setminus D$ važi $A_i \setminus B_i \neq \emptyset$. Ako izaberemo $f_i \in A_i \setminus B_i$ za $i \in I \setminus D$ i $f_i \in A_i$ za $i \in D$, onda $f \in \prod A_i \subset (\prod A_i)^* \subset (\prod B_i)^*$, pa postoji $g \in \prod B_i$ da je $f \sim g$ to jest da $E = \{i \mid f_i = g_i\} \in \Psi$. Kako $D \notin \Psi$ to nije $E \subset D$ pa postoji $i_o \in E \setminus D$. No tada $g_{i_0} = f_{i_0} \notin B_{i_0}$ što je u suprotnosti sa $g \in \prod B_i$. Dakle $D \in \Psi$.

$(\Leftarrow)$ Neka $D \in \Psi$ i $f \in (\prod A_i)^*$. Tada postoji $g \in \prod A_i$ da je $f \sim g$, to jest da $H = \{i \mid f_i = g_i\} \in \Psi$. Naravno $H \cap D \in \Psi$. Neka je $h_i = f_i$ za $i \in H \cap D$ i $h_i \in B_i$ proizvoljno za $i \in I \setminus (H \cap D)$. Za $i \in H \cap D$ je $h_i = f_i = g_i \in A_i \subset B_i$ pa $h \in \prod B_i$. Takodje $H \cap D \subset \{i \mid f_i = h_i\} = G$, pa $G \in \Psi$. Zato $f \sim h$, pa $f \in (\prod B_i)^*$.

$(ii)(\Rightarrow)$ Neka $(\prod A_i)^* = (\prod B_i)^*$. Tada prema $(i) H = \{i \mid A_i \subset B_i\} \in \Psi$ i $K = \{i \mid B_i \subset A_i\} \in \Psi$. No tada $H \cap K = \{i \mid A_i = B_i\} \in \Psi$.

$(\Leftarrow)$ Neka $J = \{i \mid A_i = B_i\} \in \Psi$. Tada $J \subset \{i \mid A_i \subset B_i\} \in \Psi$ pa zbog (i) važi $(\prod A_i)^* \subset (\prod B_i)^*$. Analogno se pokazuje i druga inkluzija.

(iii) Ovo je specijalan slučaj tvrdjenja (ii) za $B_i = X_i$.

(iv) Kako $f \in (\prod A_i)^*$ akko $\{f\} = \prod\{f_i\} \subset (\prod A_i)^*$ akko $(\prod\{f_i\})^* \subset (\prod A_i)^*$ to primenom (i) imamo $f \in (\prod A_i)^*$ akko $\{i \mid \{f_i\} \subset A_i\} \in \Psi$.

$(v)(\Rightarrow)$ Neka $f \in (\prod A_i)^* \cap (\prod B_i)^*$. Tada postoje $g \in \prod A_i$ i $h \in \prod B_i$ da $f \sim g$ i $f \sim h$, pa zato $g \sim h$ to jest $K = \{i \mid g_i = h_i\} \in \Psi$. Kako je $K \subset \{i \mid A_i \cap B_i \neq \emptyset\}$, sledi tvrdjenje.

$(\Leftarrow)$ Neka $J = \{i \mid A_i \cap B_i \neq \emptyset\} \in \Psi$. Izaberemo $f_i = g_i \in A_i \cap B_i$ za $i \in J$ i $f_i \in A_i, g_i \in B_i$ proizvoljno, za $i \in I \setminus J$. Sada $f \in \prod A_i, g \in \prod B_i$ i $f \sim g$ jer $J \subset \{i \mid f_i = g_i\} \in \Psi$. Zato $f \in [g] \subset (\prod B_i)^*$ pa $f \in (\prod A_i)^* \cap (\prod B_i)^*$. □

Lema 2.2.4 *Neka je $A \in \Psi, L \subset I$ i $B_i \subset X_i$ za $i \in I$. Tada*

(i) $(\bigcap_{i\in L}\pi_i^{-1}(B_i))^* = (\bigcap_{i\in L\cap A}\pi_i^{-1}(B_i))^*$.
(ii) $q(\bigcap_{i\in L}\pi_i^{-1}(B_i)) = q(\bigcap_{i\in L\cap A}\pi_i^{-1}(B_i))$.

Dokaz (i) Označimo $\bigcap_{i\in L}\pi_i^{-1}(B_i) = \prod C_i$ i $\bigcap_{i\in L\cap A}\pi_i^{-1}(B_i) = \prod D_i$. Za $i \in A\cap L$ je $C_i = D_i = B_i$ a za $i \in A\backslash L$ je $C_i = D_i = X_i$ pa je $A \subset \{i \mid C_i = D_i\} \in \Psi$ odakle primenom (ii) prethodne leme sledi tvrdjenje.

(ii) Sledi iz $A^* = B^* \Rightarrow q^{-1}(q(A)) = q^{-1}(q(B)) \Rightarrow q(A) = q(B)$, jer je q "na". □

2.3 Redukovani ideal-proizvod prostora

Odgovor na drugo pitanje daje sledeća teorema.

Teorema 2.3.1 *Neka je I neprazan skup i $\Lambda \subset P(I)$. Tada važi: za svaku familiju topoloških prostora $\{(X_i,\mathcal{O}_i) \mid i \in I\}, \mathcal{B}^\Lambda$ je baza neke topologije na $\prod X_i$ akko za svako $L_1, L_2 \in \Lambda$ postoji $L_3 \in \Lambda$ da $L_1 \cup L_2 \subset L_3$ (tj akko je $(\Lambda, \subset)$ usmeren skup).*

Dokaz $(\Rightarrow)$ Neka je $\mathcal{B}^\Lambda$ baza za svaku familiju topoloških prostora. Pretpostavimo da postoje $L_1, L_2 \in \Lambda$ za sve $L_3 \in \Lambda$ važi $(L_1 \cup L_2)\backslash L_3 \neq \emptyset$. Neka je za sve $i \in I$, $X_i = \{0,1\}$ sa diskretnom topologijom. Za bazne skupove $B_1 = \bigcap_{i\in L_1}\pi_i^{-1}(\{0\})$ i $B_2 = \bigcap_{i\in L_2}\pi_i^{-1}(\{0\})$ mora postojati $B_3 = \bigcap_{i\in L_3}\pi_i^{-1}(O_i)$ da $B_3 \subset B_1 \cap B_2 = \bigcap_{i\in L_1\cup L_2}\pi_i^{-1}(\{0\})$. Neka $f \in B_3$ i $i_o \in (L_1 \cup L_2)\backslash L_3$. Tada za g dato sa $g_i = f_i$ za $i \neq i_0, g_{i_0} = 1$ važi : $g \in B_3 \setminus (B_1 \cap B_2)$ što je nemoguće. Pretpostavka je pogrešna pa uslov važi.

$(\Leftarrow)$ Neka važi uslov i neka je $\{(X_i,\mathcal{O}_i) \mid i \in I\}$ proizvoljna familija topoloških prostora.

(i) Ako je $\Lambda = \{\emptyset\}$, tada je $\bigcap_{i\in\emptyset}\pi_i^{-1}(X_i) = \prod X_i \in \mathcal{B}^\Lambda$. Ako postoji $L \in \Lambda$ da $L \neq \emptyset$ onda je opet $\bigcap_{i\in L}\pi_i^{-1}(X_i) = \prod X_i \in \mathcal{B}^\Lambda$.

(ii) Neka je $B_1 = \bigcap_{i\in L_1}\pi_i^{-1}(U_i)$ i $B_2 = \bigcap_{i\in L_2}\pi_i^{-1}(V_i)$. Definišimo

$$W_i = \begin{cases} U_i & \text{za} \quad i \in L_1 \setminus L_2, \\ U_i \cap V_i & \text{za} \quad i \in L_1 \cap L_2, \\ V_i & \text{za} \quad i \in L_2 \setminus L_1. \end{cases}$$

Sada je $B_1 \cap B_2 = \bigcap_{i\in L_1\cup L_2} \pi_i^{-1}(W_i)$. Neka $L_3 \in \Lambda$ da $L_1 \cup L_2 \subset L_3$. Definišimo $W_i = X_i$ za $i \in L_3 \backslash (L_1 \cup L_2)$. Sada je $B_1 \cap B_2 = \bigcap_{i\in L_3} \pi_i^{-1}(W_i) = B_3 \in \mathcal{B}^\Lambda$. Dakle, $\mathcal{B}^\Lambda$ je baza. □

Lema 2.3.1 *Neka $\Lambda \subset P(I)$ zadovoljava uslov iz prethodne teoreme i neka je $\Lambda_1 = \{K \subset I \mid \exists L \in \Lambda \;\; K \subset L\}$ (Λ_1 je ideal generisan sa Λ). Tada je $\mathcal{B}^\Lambda = \mathcal{B}^{\Lambda_1}$.*

Dokaz. ($\subset$) Kako je $\Lambda \subset \Lambda_1$ to je $\mathcal{B}^\Lambda \subset \mathcal{B}^{\Lambda_1}$.

($\supset$) Neka $B = \bigcap_{i\in K} \pi_i^{-1}(O_i) \in \mathcal{B}^{\Lambda_1}$ gde $K \in \Lambda_1$. Tada postoji $L \in \Lambda$ da je $K \subset L$. Definišimo $O_i = X_i$ za $i \in L\backslash K$. Sada je $B = \bigcap_{i\in L} \pi_i^{-1}(O_i) \in \mathcal{B}^\Lambda$. □

Poslednja lema govori da bez ograničenja opštosti možemo posmatrati samo topologije na $\prod X_i$ koje su definisane idealima na I. Usmereni skupovi koji nisu ideali ne daju nikakve nove topologije.

Definicija 2.3.1 *Neka je I neprazan skup, $\{(X_i, \mathcal{O}_i) \mid i \in I\}$ familija topoloških prostora, Λ ideal na I i Ψ filter na I.*

Topologiju na $\prod X_i$ definisanu bazom $\mathcal{B}^\Lambda$ označićemo sa $\mathcal{O}^\Lambda$, a prostor $(\prod X_i, \mathcal{O}^\Lambda)$ sa $\prod^\Lambda \mathcal{X}_i$.

Faktor prostor prostora $\prod^\Lambda \mathcal{X}_i$ s obzirom na relaciju $\sim$ označićemo sa $\prod_\Psi^\Lambda \mathcal{X}_i$ (to jest $\prod_\Psi^\Lambda \mathcal{X}_i \stackrel{def}{=} \prod^\Lambda \mathcal{X}_i/\sim$). Odgovarajuću topologiju označićemo sa $\mathcal{O}_\Psi^\Lambda$. Prostor $\prod_\Psi^\Lambda \mathcal{X}_i$ je redukovani ideal proizvod (r.i.p) familije prostora $\{\mathcal{X}_i \mid i \in I\}$ odredjen idealom Λ i filtrom Ψ.

Dokažimo još neke leme koje će nam biti potrebne u daljem radu.

Lema 2.3.2 *(i) Ako je $O \in \mathcal{O}^\Lambda$, onda $O^* \in \mathcal{O}^\Lambda$*

(ii) $q : \prod^\Lambda \mathcal{X}_i \to \prod_\Psi^\Lambda \mathcal{X}_i$ je otvorena sirjekcija.

Dokaz (i) Dokažimo prvo tvrdjenje za elemente $\mathcal{B}^\Lambda$. Neka $B = \bigcap_{i\in L} \pi_i^{-1}(O_i) \in \mathcal{B}^\Lambda$ i neka $f \in B^*$. Tada postoji $g \in B$ da je $f \sim g$ to jest da $A = \{i \mid f_i = g_i\} \in \Psi$. Sada $f \in \bigcap_{i\in L\cap A} \pi_i^{-1}(O_i) = B_1 \in \mathcal{B}^\Lambda$. No prema lemi 2.2.4 imamo $f \in B_1 \subset B_1^* = B^*$. Dakle B^* je okolina f pa je otvoren. Ako $O \in \mathcal{O}^\Lambda$

onda je $O = \bigcup_{\mu \in M} B_\mu$ gde $B_\mu \in \mathcal{B}^\Lambda$ za sve $\mu \in M$. Primena leme 2.2.1 (v) daje $O^* = \bigcup_{\mu \in M} B_\mu^*$ pa $O^* \in \mathcal{O}^\Lambda$.

(ii) Prema [14] teorema 2.4.10. preslikavanje q je otvoreno akko za svako $O \in \mathcal{O}^\Lambda$ važi $q^{-1}(q(O)) \in \mathcal{O}^\Lambda$. No $q^{-1}(q(O)) = O^*$ pa tvrdjenje sledi iz (i). Inače, faktor preslikavanje je uvek neprekidno i "na". □

Lema 2.3.3. *Neka su $(X, \mathcal{O}_X)$ i $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topološki prostori i $\mathcal{B}_X$ baza topologije $\mathcal{O}_X$. Ako je $q : X \to Y$ otvorena sirjekcija, onda je $\mathcal{B}_Y = \{q(B) \mid B \in \mathcal{B}_X\}$ baza topologije $\mathcal{O}_Y$.*

Dokaz. Neka $O \in \mathcal{O}_Y$. Neprekidnost q daje $q^{-1}(O) \in \mathcal{O}_X$, pa kako je $\mathcal{B}_X$ baza to je $q^{-1}(O) = \bigcup_{\mu \in M} B_\mu$ gde $B_\mu \in \mathcal{B}_X$ za $\mu \in M$. Kako je q "na" to je $O = q(q^{-1}(O)) = \bigcup_{\mu \in M} q(B_\mu)$. Skupovi $q(B_\mu)$ su otvoreni zbog otvorenosti q. □

Teorema 2.3.2. *Baza topologije $\mathcal{O}^\Lambda_\Psi$ je $\mathcal{B}^\Lambda_\Psi = \{q(B) \mid B \in \mathcal{B}^\Lambda\}$.*

Dokaz. Prema lemi 3.4 $q : \prod^\Lambda \mathcal{X}_i \to \prod^\Lambda_\Psi \mathcal{X}_i$ je otvorena sirjekcija pa tvrdjenje sledi primenom poslednje leme. □

Lema 2.3.4. *Neka su $\mathcal{B}_i, i \in I$ baze topologija $\mathcal{O}_i$ na X_i. Tada je i $\mathcal{B}^\Lambda_1 = \{\bigcap_{i \in L} \pi_i^{-1}(B_i) \mid L \in \Lambda,\ B_i \in \mathcal{B}_i$ za $i \in L\}$ takodje baza topologije $\mathcal{O}^\Lambda$.*

Dokaz. Pokazaćemo da se elementi $\mathcal{B}^\Lambda$ mogu prikazati kao unije elemenata $\mathcal{B}^\Lambda_1$. Neka $B = \bigcap_{i \in L} \pi_i^{-1}(O_i) \in \mathcal{B}^\Lambda$ i neka $f \in B$. Tada za sve $i \in L$ $f_i \in O_i$ pa postoje $B_i^f \in \mathcal{B}_i$ da $f_i \in B_i^f \subset O_i$. No, tada $f \in B_f = \bigcap_{i \in L} \pi_i^{-1}(B_i^f) \subset B$ gde $B_f \in \mathcal{B}^\Lambda_1$. Sada je $B = \bigcup_{f \in B} B_f$ što dokazuje tvrdjenje. □

2.4 Teorema o restrikciji r. i. p.

Za dalji rad biće nam korisna sledeća teorema iz opšte toplogije.

Lema 2.4.1 *Neka su $(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$ i $(Z, \mathcal{O}_Z)$ topološki prostori i neka je $q : X \longrightarrow Y$ neprekidno, otvoreno i "na". Tada za proizvoljno preslikavanje $\varphi : Y \longrightarrow Z$ važi:*

(i) φ *je neprekidno* $\Leftrightarrow$ $\varphi \circ q$ *je neprekidno.*

(ii) φ *je otvoreno* $\Leftrightarrow$ $\varphi \circ q$ *je otvoreno.*

Dokaz Smer ($\Rightarrow$) je elementaran. Dokažimo ($\Leftarrow$).

(i) Neka $O \in \mathcal{O}_Z$. Neprekidnost $\varphi \circ q$ daje $(\varphi \circ q)^{-1}(O) = q^{-1}(\varphi^{-1}(O)) \in \mathcal{O}_X$. Otvorenost q daje $q(q^{-1}(\varphi^{-1}(O))) \in \mathcal{O}_Y$ a kako je q "na" to je $q(q^{-1}(\varphi^{-1}(O))) = \varphi^{-1}(O)$, pa $\varphi^{-1}(O) \in \mathcal{O}_Y$.

(ii) Neka $O \in \mathcal{O}_Y$. Tada $q^{-1}(O) \in \mathcal{O}_X$, zbog neprekidnosti q. Otvorenost $\varphi \circ q$ daje $(\varphi \circ q)(q^{-1}(O)) \in \mathcal{O}_Z$. No $(\varphi \circ q)(q^{-1}(O)) = \varphi(q(q^{-1}(O))) = \varphi(O)$, pa $\varphi(O) \in \mathcal{O}_Z$. Dakle, φ je otvoreno . □

Lema 2.4.2 *Neka je* $\{(X_i, \mathcal{O}_i) \mid i \in I\}$ *familija topoloških prostora,* $\Lambda \subset P(I)$ *ideal* $\Psi \subset P(I)$ *filter na* I *i neka* $J \in \Psi$. *Tada*

(i) $\Psi_J = \{A \cap J \mid A \in \Psi\}$ *je filter na* J *i* $\Psi_J \subset \Psi$.

(ii) $\Lambda_J = \{L \cap J \mid L \in \Lambda\}$ *je ideal na* J, *i* $\Lambda_J \subset \Lambda$.

(iii) preslikavanje $r : \prod_{i \in I}^{\Lambda} X_i \to \prod_{i \in J}^{\Lambda_J} X_i$ *dato sa* $r(f) = f \mid J$ *za* $f \in \prod_{i \in I} X_i$ *je neprekidno, otvoreno i "na".*

Dokaz (i) Kako $I \in \Psi$ to $I \cap J = J \in \Psi_J$. Za $A_1 = A \cap J, B_1 = B \cap J \in \Psi_J$ gde $A, B \in \Psi$, imamo $A_1 \cap B_1 = (A \cap B) \cap J \in \Psi_J$ jer $A \cap B \in \Psi$. Neka $A_1 \subset C \subset J$. Kako $A_1 = A \cap J \in \Psi$ to i $C \in \Psi$ pa zato $C = C \cap J \in \Psi_J$.

(ii) Kako $\emptyset \in \Lambda$, to $\emptyset \cap J = \emptyset \in \Lambda_J$. Za $L_1 = L \cap J, K_1 = K \cap J \in \Lambda_J$ gde $K, L \in \Lambda$, imamo $L_1 \cup K_1 = (L \cup K) \cap J \in \Lambda_J$ jer $L \cup K \in \Lambda$. Neka $M \subset L_1 = L \cap J$. Tada $M \subset L$ pa $M \in \Lambda$. Takodje $M \subset J$ pa $M = M \cap J \in \Lambda_J$.

(iii) Neka su $\pi_j : \prod_{i \in I} X_i \to X_j$ i $p_j : \prod_{i \in J} X_i \to X_j$ projekcije.

a) neprekidnost r. Dokažimo najpre

$$r^{-1}\Big(\bigcap_{i \in L \cap J} p_i^{-1}(O_i)\Big) = \bigcap_{i \in L \cap J} \pi_i^{-1}(O_i) \qquad (*)$$

Imamo: $f \in r^{-1}(\bigcap_{i \in L \cap J} p_i^{-1}(O_i))$ akko $f \mid J \in \bigcap_{i \in L \cap J} p_i^{-1}(O_i)$ akko za sve $i \in L \cap J, f_i \in O_i$ akko $f \in \bigcap_{i \in L \cap J} \pi_i^{-1}(O_i)$. Sada kako $L \in \Lambda$ i $L \cap J \subset L$ imamo $L \cap J \in \Lambda$ pa je $\bigcap_{i \in L \cap J} \pi_i^{-1}(O_i) \in \mathcal{B}^{\Lambda} \subset \mathcal{O}^{\Lambda}$. Dakle r je neprekidno.

b) otvorenost r. Dokažimo

$$r(\bigcap_{i\in L}\pi_i^{-1}(O_i) = r(\bigcap_{i\in L\cap J}\pi_i^{-1}(O_i)) \qquad (**)$$

Inkluzija ($\subset$) je očigledna jer $\bigcap_{i\in L}\pi_i^{-1}(O_i) \subset \bigcap_{i\in L\cap J}\pi_i^{-1}(O_i)$. Neka $g \in r(\bigcap_{i\in L\cap J}\pi_i^{-1}(O_i))$. Tada postoji $f \in \bigcap_{i\in L\cap J}\pi_i^{-1}(O_i)$ da $g = f \mid J$. Definišemo $h \in \prod X_i$

$$h_i = \begin{cases} f_i & \text{za } i \in J \cup (I\setminus L) \\ \in O_i & \text{za } i \in L\setminus J. \end{cases}$$

Sada $g = f \mid J = h \mid J$ pa $g = r(h)$ i $h \in \bigcap_{i\in L}\pi_i^{-1}(O_i)$. Zato $g \in r(\bigcap_{i\in L}\pi_i^{-1}(O_i))$ čime je dokazana druga inkluzija.

Kako je r "na" to prema (*) i (**) imamo $r(\bigcap_{i\in L}\pi_i^{-1}(O_i)) = r(\bigcap_{i\in L\cap J}\pi_i^{-1}(O_i)) = \bigcap_{i\in L\cap J}p_i^{-1}(O_i)$, pa je r otvoreno. □

Teorema 2.4.1 *(O restrikciji r.i.p.) Neka važe uslovi leme 2.4.2. Tada je preslikavanje*

$$\varphi : \prod_{i\in I}{}^{\Lambda}_{\Psi}X_i \longrightarrow \prod_{i\in J}{}^{\Lambda_J}_{\Psi_J}X_i \text{ dato sa } \varphi([f]) = [f \mid J]$$

homeomorfizam.

Dokaz. (i) φ je dobro definisano. Neka je $f \sim g$. Tada $A = \{i \mid f_i = g_i\} \in \Psi$ pa i $A \cap J = \{i \in J \mid (f \mid J)_i = (g \mid J)_i\} \in \Psi_J$ pa je $[f \mid J] = [g \mid J]$ to jest $\varphi([f]) = \varphi([g])$.

(ii) φ je "1-1". Neka je $\varphi([f]) = \varphi([g])$. Tada je $[f \mid J] = [g \mid J]$ pa $A = \{i \in J \mid (f \mid J)_i = (g \mid J)_i\} \in \Psi_J$. No $\Psi_J \subset \Psi$ pa $A \in \Psi$ a zbog $A \subset B = \{i \in I \mid f_i = g_i\}$ imamo $B \in \Psi$ to jest $f \sim g$.

(*iii*) φ je "na". Neka $[h] \in \prod^{\Lambda_J}_{\Psi_J}X_i$. Definišimo $f \in \prod X_i$ sa $f_i = h_i$ za $i \in J$ i $f_i \in X_i$ proizvoljno za $i \in I\setminus J$. Tada je $f \mid J = h$ pa je $\varphi([f]) = [h]$.

(iv) φ je homomorfizam. Posmatrajmo dijagram

$$\begin{array}{ccc} \prod^{\Lambda}_{\Psi}X_i & \xrightarrow{\varphi} & \prod^{\Lambda_J}_{\Psi_J}X_i \\ q\uparrow & & \uparrow q_J \end{array}$$

$$\prod{}^{\Lambda}\mathcal{X}_i \xrightarrow{r} \prod{}^{\Lambda_J}\mathcal{X}_i.$$

Kako za $f \in \prod^{\Lambda} X_\iota$ važi $\varphi(q(f)) = \varphi([f]) = [f \mid J] = q_J(f \mid J) = q_J(r(f))$, to dijagram komutira. Dakle $\varphi \circ q = q_J \circ r$

Dalje, leme 2.4.2 (iii) i 2.3.2. (ii) daju nam neprekidnost i otvorenost preslikavanja q_J i r. Zato je $q_J \circ r$ pa time i $\varphi \circ q$ otvoreno i neprekidno. Kako je i q neprekidno, otvoreno i "na" to prema Lemi 4.1 imamo otvorenost i neprekidnost φ. □

2.5 Uslov $(\Lambda\Psi)$. Potrebnost uslova

U sledeće tri tačke bavićemo se trećim pitanjem, to jest dokazaćemo teoremu:

Teorema 2.5.1 *Neka je I neprazan skup, Λ ideal i Ψ filter na I. Tada važi: za svaku familiju topoloških prostora $\{(X_\iota, \mathcal{O}_\iota) \mid \iota \in I\}$, za svako $k \in \{0,1,2,3,3\frac{1}{2}\}$, uslov $\{\iota \mid X_i \text{ je } T_k - \text{prostor}\} \in \Psi$ povlači $\prod_{\Psi}^{\Lambda} X_i$ je T_k prostor akko*

$$\forall A \in \Psi\ \forall B \notin \Psi\ \exists L \in \Lambda\ (L \subset A \setminus B\ \wedge\ L^c \notin \Psi) \quad (\Lambda\Psi)$$

Dokaz $(\Rightarrow)$ Pretpostavimo da $(\Lambda\Psi)$ ne važi. Tada postoje $A \in \Psi$ i $B \notin \Psi$ da za sve $L \in \Lambda$ važi: $L \subset A \setminus B \Rightarrow L^c \in \Psi$. Neka je D_2 prostor $\{0,1\}$ sa diskretnom i A_2 sa antidiskretnom topologijom. Neka je $\mathcal{X}_\iota = D_2$ za $i \in A$ i $\mathcal{X}_i = A_2$ za $i \in I \setminus A$. Tada je $\{\iota \mid X_i \text{ je } T_6 \text{ - prostor}\} = A \in \Psi$ a dokazaćemo da $\prod_{\Psi}^{\Lambda} \mathcal{X}_\iota$ nije ni T_1 - prostor. Neka je $f_\iota = 1$ za sve $\iota \in I$ i neka je

$$g_i = \begin{cases} 1 & \text{za } i \in B, \\ 0 & \text{za } i \in I \setminus B. \end{cases}$$

Tada $\{\iota \mid f_\iota = g_\iota\} = B \notin \Psi$ pa $[f] \neq [g]$. Neka $[g] \in q(V)$ gde je $V = \bigcap_{\iota \in L} \pi_i^{-1}(O_i) = \prod V_i \in \mathcal{B}^{\Lambda}$. Tada $g \in V^*$ pa, prema lemi 2.2.3 (iv), $E = \{\iota \mid g_i \in V_i\} \in \Psi$. Dalje, $L \cap A \cap B^c \subset A \setminus B$ pa zbog $\rceil(\Lambda\Psi)$ imamo $(L \cap A \cap B^c)^c = L^c \cup A^c \cup B \in \Psi$. Zato i $(L^c \cup A^c \cup B) \cap A = (L^c \cup B) \cap A \in \Psi$ pa i $(L^c \cup B) \cap A \cap E \in \Psi$. Prema lemi 2.2.4 tada je $q(V) = q(W)$ gde $W = \bigcap_{\iota \in L_1} \pi_\iota^{-1}(O_\iota)$ i gde je $L_1 = L \cap (L^c \cup B) \cap A \cap E = L \cap B \cap A \cap E$. Sada za $i \in L_1$ važi $f_i = 1 = g_i \in V_i = O_i$ pa $f \in W$, to jest $[f] \in q(W) = q(V)$. Prema teoremi 3.6 u svakoj baznoj okolini tačke $[g] \in \prod_{\Psi}^{\Lambda} \mathcal{X}_i$ nalazi se $[f]$, pa $\prod_{\Psi}^{\Lambda} \mathcal{X}_i$ nije T_1 - prostor. □

2.6 Aksiome separacije T_0, T_1, T_2 i T_3

Za dalji rad biće nam potrebna sledeća lema.

Lema 2.6.1 *Neka Λ i Ψ zadovoljavaju uslov $(\Lambda\Psi)$ i neka $F_i \subset X_i$ za $i \in I$. Tada važi:*

(i) Ako $A = \{i \mid F_i \in \mathcal{F}_i\} \in \Psi$, onda $(\prod F_i)^* \in \mathcal{F}^\Lambda$ i $q(\prod F_i) \in \mathcal{F}_{\Psi}^{\Lambda}$.

(ii) $\overline{q(\prod F_i)} = q(\prod \overline{F_i})$.

Dokaz (i) Neka $f \notin (\prod F_i)^*$. Prema lemi 2.2.3 (iv) tada $\{i \mid f_i \in F_i\} = B \notin \Psi$ pa zbog $(\Lambda\Psi)$ postoji $L \in \Lambda$ da $L \subset A \setminus B$ i $L^c \notin \Psi$. Za $i \in L$ je $F_i \in \mathcal{F}_i$ i $f_i \notin F_i$ pa $f_i \in X_i \setminus F_i \in \mathcal{O}_i$. Definišimo $\bigcap_{i\in L} \pi_i^{-1}(X_i \setminus F_i) = \prod U_i$. Tada $\{i \mid U_i \cap F_i \neq \emptyset\} = L^c \notin \Psi$ pa lema 2.2.3 (v) daje $U^* \cap (\prod F_i)^* = \emptyset$. No $f \in U \subset U^*$ pa $f \in U$ i $U \cap (\prod F_i)^* = \emptyset$. Kako $U \in \mathcal{B}^\Lambda, (\prod F_i)^*$ je zatvoren. Dokažimo zatvorenost $q(\prod F_i)$. Neka $[f] = q(f) \notin q(\prod F_i)$. Tada $f \notin q^{-1}(q(\prod F_i)) = (\prod F_i)^*$ pa prema gornjem razmatranju postoji $U \in \mathcal{B}^\Lambda$ da $f \in U$ i $\emptyset = U^* \cap (\prod F_i)^* = q^{-1}(q(U)) \cap q^{-1}(q(\prod F_i)) = q^{-1}(q(U) \cap q(\prod F_i))$. Odavde je $q(U) \cap q(\prod F_i) = \emptyset$ (jer je q "na"). Takodje $[f] = q(f) \in q(U)$ i $q(U) \in \mathcal{O}_{\Psi}^{\Lambda}$ (zbog otvorenosti q) pa je $q(\prod F_i)$ zatvoren.

(ii) $(\subset)$ Zbog (i) je $q(\prod \overline{F_i}) \in \mathcal{F}_{\Psi}^{\Lambda}$ pa kako $q(\prod F_i) \subset q(\prod \overline{F_i})$ imamo $\overline{q(\prod F_i)} \subset q(\prod \overline{F_i})$.

$(\supset)$ Neka $[f] \in q(\prod \overline{F_i})$. Tada $f \in (\prod \overline{F_i})^*$ pa prema lemi 2.4 važi $C = \{i \mid f_i \in \overline{F_i}\} \in \Psi$. Neka je $q(B) \in \mathcal{B}_{\Psi}^{\Lambda}$ gde $B = \bigcap_{i\in L} \pi_i^{-1}(O_i) = \prod S_i \in \mathcal{B}^\Lambda$, bazni otvoren skup (vidi teoremu 2.3.2), da važi $[f] \in q(B)$. Tada je $D = \{i \mid f_i \in S_i\} \in \Psi$. Za $i \in C \cap D$ je $f_i \in \overline{F_i}$ i $f_i \in S_i \in \mathcal{O}_i$ pa je $S_i \cap F_i \neq \emptyset$. Zato $C \cap D \subset \{i \mid S_i \cap F_i \neq \emptyset\}$ pa kako $C \cap D \in \Psi$ to i $\{i \mid S_i \cap F_i \neq \emptyset\} \in \Psi$. Prema lemi 2.2.3 tada $(\prod S_i)^* \cap (\prod F_i)^* = q^{-1}(q(B)) \cap q^{-1}(q(\prod F_i)) = q^{-1}(q(B) \cap q(\prod F_i)) \neq \emptyset$ pa $q(B) \cap q(\prod F_i) \neq \emptyset$. Dakle, svaka okolina $[f]$ seče $q(\prod F_i)$ pa $[f] \in \overline{q(\prod(F_i)}$. □

Primer 2.6.1. Prethodna lema ne važi ako uslov $(\Lambda\Psi)$ nije zadovoljen. Neka je $I = N$, Λ ideal konačnih skupova a Ψ filter čiji elementi imaju konačan komplement. Kako tada za sve $L \in \Lambda$ važi $L^c \in \Psi$, uslov $(\Lambda\Psi)$ nije zadovoljen. Neka je za sve $i \in I$, $\mathcal{X}_i = R$ sa uobičajenom topologijom. Sada za sve $B = \bigcap_{i\in L} \pi_i^{-1}(O_i) \in \mathcal{B}^\Lambda$ važi $q(B) = q(\bigcap_{i\in L\cap L^c} \pi_i^{-1}(O_i)) = q(\prod^\Lambda \mathcal{X}_i) = \prod_\Psi^\Lambda \mathcal{X}_i$ (vidi lemu 2.2.4). Zato je $\prod_\Psi^\Lambda \mathcal{X}_i$ prostor sa antidiskretnom topologijom. Ako uzmemo $F_i = [0,1] \subset \mathcal{X}_i$, tada $\{i \mid F_i \in \mathcal{F}_i\} = I \in \Psi$ no, $q(\prod F_i) \neq \prod_\Psi^\Lambda \mathcal{X}_i$ pa $q(\prod F_i)$ nije zatvoren.

Prelazimo na dokaz da je uslov $(\Lambda\Psi)$ dovoljan za očuvanje aksioma T_k za $k = 0, 1, 2, 3$.

Teorema 2.6.1 *Neka važi uslov $(\Lambda\Psi)$. Tada za svaku familiju topoloških prostora $\{(X_i, \mathcal{O}_i) \mid i \in I\}$ i za svako $k \in \{0,1,2,3\}$ važi*

$$A = \{i \mid \mathcal{X}_i \text{ je } T_k\} \in \Psi \Rightarrow \prod\nolimits_\Psi^\Lambda \mathcal{X}_i \quad \text{je } T_k - \text{prostor}.$$

Dokaz ($k = 0$). Neka $[f], [g] \in \prod_\Psi^\Lambda X_i$ i neka je $[f] \neq [g]$. Tada $B = \{i \mid f_i = g_i\} \notin \Psi$ pa zbog $(\Lambda\Psi)$ postoji $L \in \Lambda$ da $L \subset A \setminus B$ i $L^c \notin \Psi$. Za $i \in L$ važi $f_i \neq g_i$ i X_i je T_0 pa postoji $O_i \in \mathcal{O}_i$ da je $f_i \notin O_i \ni g_i$ ili $f_i \in O_i \not\ni g_i$. Neka je $L_f = \{i \in L | \exists O_i \in \mathcal{O}_i,\ f_i \in O_i \not\ni g_i\}$ i $L_g = \{i \in L \mid \exists O_i \in \mathcal{O}, f_i \notin O_i \ni g_i\}$. Sada je $L = L_f \cup L_g$ pa $L^c = L_f^c \cap L_g^c \notin \Psi$. Odavde $L_f^c \notin \Psi$ ili $L_g^c \notin \Psi$. Neka $L_f^c \notin \Psi$. Kako $L_f \subset L \subset \Lambda$ to $L_f \in \Lambda$, pa $U = \bigcap_{i\in L_f} \pi_i^{-1}(O_i) = \prod U_i \in \mathcal{B}^\Lambda$ i $f \in U$, odakle $[f] = q(f) \in q(U)$. Takodje $H = \{i \mid g_i \in U_i\} = L_f^c \notin \Psi$ pa prema lemi 2.2.3 (iv) $g \notin U^* = q^{-1}(q(U))$, odakle $q(g) = [g] \notin q(U)$. Konačno, $[f] \in q(U) \not\ni [g]$. Za $L_g^c \notin \Psi$ slično. $\prod_\Psi^\Lambda \mathcal{X}_i$ je T_0-prostor.

($k = 1$) Neka $[f] \in \prod_\Psi^\Lambda X_i$. Dokažimo da $\{[f]\} \in \mathcal{F}_\Psi^\Lambda$. Prvo uočimo da je $\{[f]\} = \{q(f)\} = q(\{f\}) = q(\prod\{f_i\})$. Dalje za $i \in A, X_i$ je T_1 pa je $\{f_i\} \in \mathcal{F}_i$. Zato je $A \subset B = \{i \mid \{f_i\} \in \mathcal{F}_i\}$, pa kako $A \in \Psi$ to i $B \in \Psi$. No tada je, prema lemi 6.1.1, $q(\prod\{f_i\}) \in \mathcal{F}_\Psi^\Lambda$.

($k = 2$) Neka je $[f] \neq [g]$. Tada $B = \{i \mid f_i = g_i\} \notin \Psi$ pa zbog $(\Lambda\Psi)$ postoji $L \in \Lambda$ da $L \subset A \setminus B$ i da $L^c \notin \Psi$. Za $i \in L$ je $\mathcal{X}_i$ Hausdorffov prostor i $f_i \neq g_i$. Zato postoje $U_i, V_i \in \mathcal{O}_i$ da je $U_i \cap V_i = \emptyset, f_i \in U_i$ i $g_i \in V_i$. Neka je $U = \bigcap_{i\in L} \pi_i^{-1}(U_i) = \prod S_i$ i $V = \bigcap_{i\in L} \pi_i^{-1}(V_i) = \prod T_i$. Tada $f \in U, g \in V$ pa $[f] \in q(U)$ i $[g] \in q(V)$. Takodje $U, V \in \mathcal{B}^\Lambda$ pa $q(U), q(V) \in \mathcal{O}^\Lambda$. Na kraju, $H = \{i \mid S_i \cap T_i \neq \emptyset\} = L^c \notin \Psi$ pa je prema lemi 2.2.3 $U^* \cap V^* = \emptyset$ a odavde i $q(U) \cap q(V) = \emptyset$.

($k = 3$) Neka $[f] \in O \in \mathcal{O}_\Psi^\Lambda$. Tada $f \in q^{-1}(O) \in \mathcal{O}^\Lambda$ pa postoji $B \in \mathcal{B}^\Lambda, B = \bigcap_{i\in L} \pi_i^{-1}(O_i)$ da je $f \in B \subset q^{-1}(O)$. Moguće je:

a) $L \cap A = \emptyset$. Tada je $A \subset \{i \mid S_i = X_i\} \in \Psi$, pa je prema lemi 2.2.3 (iii) $B = \prod^A X_i$. No tada je $\prod_\Psi^A X_i = q(B) \subset q(q^{-1}(O)) = O$, pa je $O = \prod_\Psi^A X_i$. Zato $[f] \in O \subset \bar{O} \subset O$.

b) $L \cap A \neq \emptyset$. Neka je $B_1 = \bigcap_{i \in L \cap A} \pi_i^{-1}(O_i)$. Za $i \in L \cap A$ je X_i T_3-prostor i $f_i \in O_i$. Zato postoji $V_i \in \mathcal{O}_i$ da je $f_i \in V_i \subset \bar{V}_i \subset O_i$. Definišemo $V = \bigcap_{i \in L \cap A} \pi_i^{-1}(V_i)$ i $F = \bigcap_{i \in L \cap A} \pi_i^{-1}(\overline{V_i})$. Prema lemi 6.1.1 je $q(F) \in \mathcal{F}_\Psi^A$ pa imamo $V \subset F \Rightarrow q(V) \subset q(F) \Rightarrow \overline{q(V)} \subset q(F)$. S druge strane je $F \subset B_1$ pa je $F^* \subset B_1^* = B^*$ (lema 2.2.4) što daje $q(F) \subset q(B) \subset q(q^{-1}(O)) = O$($q$ je "na"). Sada $f \in V$ pa $[f] \in q(V) \subset \overline{q(V)} \subset O$, gde je $q(V) \in \mathcal{O}_\Psi^A$, pa je $\prod_\Psi^A \mathcal{X}_i$ regularan prostor. □

2.7 Uniformizabilnost r.i.p.

Radi usaglašavanja notacije navodimo neke osnovne definicije i tvrdjenja vezana za uniformne prostore. Za detaljnije informacije videti na primer [26].

Neka je X neprazan skup. Svaki potskup $U \subset X^2$ je binarna relacija na skupu X. Relaciji $\Delta_X = \{(x,x) \mid x \in X\}$ zvaćemo dijagonala. $U^{-1} = \{(y,x) \mid (x,y) \in U\}$ je inverzna relacija za relaciju U. $U \circ V = \{(x,y) \mid \exists t \in X (x,t) \in U \wedge (t,y) \in V\}$ je kompozicija relacija U i V. Dalje, za $x \in X$ definišemo $U < x >= \{y \mid (x.y) \in U\}$. Relacija U je simetrična akko $U = U^{-1}$.

Definicija 2.7.1 *Familija relacija $\mathcal{U} \subset P(X^2)$ na skupu X je uniformna struktura na X akko*

1. $\forall U, V \in \mathcal{U}\ \ U \cap V \in \mathcal{U}$
2. $\forall U \in \mathcal{U}\ \ U \subset V \subset X^2 \Rightarrow V \in \mathcal{U}$
3. $\forall U \in \mathcal{U}\ \ \Delta_X \subset U$
4. $\forall U \in \mathcal{U}\ \ U^{-1} \in \mathcal{U}$
5. $\forall U \in \mathcal{U}\ \ \exists V \in \mathcal{U}\ \ V \circ V \subset U.$

Tada uredjeni par $(X, \mathcal{U})$ zovemo uniformni prostor.

Definicija 2.7.2 *$\mathcal{G} \subset \mathcal{U}$ je baza uniformne strukture $\mathcal{U}$ akko*

$$\forall U \in \mathcal{U}\ \ \exists G \in \mathcal{G},\ G \subset U.$$

Teorema 2.7.1 *$\mathcal{G} \subset P(X^2)$ je baza neke uniformne strukture na X akko*

1. $\forall G_1, G_2 \in \mathcal{G}\ \exists G_3 \in \mathcal{G}\ G_3 \subset G_1 \cap G_2$.

2. $\forall G \in \mathcal{G}\ \Delta_X \subset G$.

3. $\forall G \in \mathcal{G}\ \exists G_1 \in \mathcal{G}\ G_1 \subset G^{-1}$.

4. $\forall G \in \mathcal{G}\ \exists G_1 \in \mathcal{G}\ G_1 \circ G_1 \subset G$.

Tada je ta struktura $\mathcal{U} = \{U \subset X^2 \mid \exists G \in \mathcal{G}\ G \subset U\}$.□

Teorema 2.7.2 *Neka je $(X,\mathcal{U})$ uniformni prostor. Tada je*

$$\mathcal{O}_\mathcal{U} = \{O \subset X \mid \forall x \in O\ \ \exists U \in \mathcal{U}\ \ U < x > \subset O\}$$

topologija na X. (Za $\mathcal{O}_\mathcal{U}$ kažemo da je generisana uniformnom strukturom $\mathcal{U}$).

Teorema 2.7.3 *Familija svih otvorenih (u X^2), simetričnih elemenata $\mathcal{U}$ čini bazu strukture $\mathcal{U}$.* □

Neka je sada $I \neq \emptyset, \Lambda$ ideal i Ψ filter na I a $\{(X_i,\mathcal{U}_i) \mid i \in I\}$ familija uniformnih prostora. Neka su $\mathcal{G}_i$ baze struktura $\mathcal{U}_i$ koje se sastoje od otvorenih i simetričnih elemenata. Za $L \in \Lambda$ i $G_i \in \mathcal{G}_i, i \in L$, definišemo binarnu relaciju na $\prod X_i/\sim$:

$$\prod_L G_i = \{([f],[g]) \mid \exists A \in \Psi\ \forall i \in L \cap A\ (f_i, g_i) \in G_i\}.$$

Lema 2.7.1 $(i) \forall i \in L\ G'_i \subset G''_i \Rightarrow \prod_L G'_i \subset \prod_L G''_i$

$(ii) L_1 \subset L \Rightarrow \prod_L G_i \subset \prod_{L_1} G_i$

$(iii) L = L_1 \cup L_2 \wedge L_1 \cap L_2 = \emptyset \Rightarrow \prod_L G_i = \prod_{L_1} G_i \cap \prod_{L_2} G_i$

$(iv) \prod_L G'_i \cap \prod_L G''_i = \prod_L (G'_i \cap G''_i)$

(v) $\prod_{L_1} G'_i \cap \prod_{L_2} G''_i = \prod_{L_1 \cup L_2} G_i$ *gde* $G_i = G'_i$ *za* $i \in L_1 \setminus L_2, G_i = G'_i \cap G''_i$ *za* $i \in L_1 \cap L_2$ *i* $G_i = G''_i$ *za* $i \in L_2 \setminus L_1$.

(vi) $(\prod_L G_i)^{-1} = \prod_L G_i^{-1}$

(vii) $(\prod_L G_i) \circ (\prod_L G_i) = \prod_L (G_i \circ G_i)$

Dokaz (i) Neka $([f],[g]) \in \prod_L G'_i$. Tada postoji $A \in \Psi$ da za sve $i \in L \cap A\ (f_i, g_i) \in G'_i \subset G''_i$, pa $([f],[g]) \in \prod_L G''_i$.

(ii) Neka $([f],[g]) \in \prod_L G_i$. Tada postoji $A \in \Psi$ da za sve $i \in L \cap A$ pa i za sve $i \in L_1 \cap A$ važi $(f_i, g_i) \in G_i$. Zato $([f],[g]) \in \prod_{L_1} G_i$.

(iii)($\subset$) Kako L_1, $L_2 \subset L$ to $\prod_L G_i \subset \prod_{L_k} G_i$ za $k = 1,2$ (zbog (ii).

($\supset$) Neka $([f],[g]) \in \prod_{L_1} G_i \cap \prod_{L_2} G_i$. Tada postoje $A_1, A_2 \in \Psi$ da za $i \in L_1 \cap A_1$ $(f_i, g_i) \in G_i$ i za $L_2 \cap A_2$ takodje $(f_i, g_i) \in G_i$. Ψ je filter pa $A = A_1 \cap A_2 \in \Psi$. Za $i \in A \cap L = (A \cap L_1) \cup (A \cap L_2) \subset (A_1 \cap L_1) \cup (A_2 \cap L_2)$ važi $(f_i, g_i) \in G_i$ pa $([f],[g]) \in \prod_L G_i$.

(iv)($\supset$) Kako $G'_i \cap G''_i \subset G'_i, G''_i$ ova inkluzija sledi iz (i).

($\subset$). Neka $([f],[g]) \in \prod_L G'_i \cap \prod_L G''_i$. Tada postoje $A_1, A_2 \in \Psi$ da za $i \in A_1 \cap L$, $(f_i, g_i) \in G'_i$ i za $i \in A_2 \cap L, (f_i, g_i) \in G''_i$. No za $A = A_1 \cap A_2$ i za $i \in A \cap L$ je $(f_i, g_i) \in G'_i \cap G''_i$ pa $([f],[g]) \in \prod_L (G'_i \cap G''_i)$.

(v) Prema (iii) i (iv) imamo $\prod_{L_1} G'_i \cap \prod_{L_2} G''_i = \prod_{L_1 \setminus L_2} G'_i \cap \prod_{L_1 \cap L_2} G'_i \cap \prod_{L_1 \cap L_2} G''_i \cap \prod_{L_2 \setminus L_1} G''_i = \prod_{L_1 \setminus L_2} G'_i \cap \prod_{L_1 \cap L_2} (G'_i \cap G''_i) \cap \prod_{L_2 \setminus L_1} G''_i$.

(vi) Neka $([f],[g]) \in (\prod_L G_i)^{-1}$. Tada $([g],[f]) \in \prod_L G_i$ pa postoji $A \in \Psi$ da za $i \in L \cap A$ važi $(g_i, f_i) \in G_i$ to jest $(f_i, g_i) \in G_i^{-1}$. Zato $([f],[g]) \in \prod_L G_i^{-1}$. Obratno je analogno.

(vii)($\subset$) Neka $([f],[g]) \in (\prod_L G_i) \circ (\prod_L G_i)$. Tada postoji $[h]$ da $([f],[h]), ([h],[g]) \in \prod_L G_i$ pa postoje $A_1, A_2 \in \Psi$ da za sve $i \in L \cap A_1$ važi $(f_i, h_i) \in G_i$ i za sve $i \in L \cap A_2$ važi $(h_i, g_i) \in G_i$ Tada za $A = A_1 \cap A_2 \in \Psi$ i za sve $i \in L \cap A$ važi $(f_i, h_i), (h_i, g_i) \in G_i$ pa $(f_i, g_i) \in G_i \circ G_i$. Zato $([f],[g]) \in \prod_L (G_i \circ G_i)$.

($\supset$) Neka $([f],[g]) \in \prod_L (G_i \circ G_i)$. Tada postoji $A \in \Psi$ da za sve $i \in L \cap A$ $(f_i, g_i) \in G_i \circ G_i$ pa za $i \in L \cap A$ postoji $h_i \in X_i$ da $(f_i, h_i), (h_i, g_i) \in G_i$. Neka je za $i \in I \setminus (L \cap A) h_i \in X_i$ proizvoljno. Tada $([f],[h]), ([h],[g]) \in \prod_L G_i$ pa zato $([f],[g]) \in \prod_L G_i \circ \prod_L G_i$.□

Teorema 2.7.4 *$\mathcal{G}_\Psi^\Lambda = \{\prod_L G_i \mid L \in \Lambda, G_i \in \mathcal{G}_i$ za sve $i \in L\}$ je baza neke uniformne strukture na $\prod X_i / \sim$.*

Dokaz

1. Neka $G' = \prod_{L_1} G'_i, G'' = \prod_{L_2} G''_i \in \mathcal{G}_\Psi^\Lambda$. Za $i \in L_1 \cap L_2$, kako je $\mathcal{G}_i$ baza, postoji $G'''_i \in \mathcal{G}_i$ da $G'''_i \subset G'_i \cap G''_i$. Sada je prema lemi 2.7.1 (i), (v), $\prod_{L_1 \setminus L_2} G'_i \cap \prod_{L_1 \cap L_2} G'''_i \cap \prod_{L_2 \setminus L_1} G''_i \subset \prod_{L_1 \setminus L_2} G'_i \cap \prod_{L_1 \cap L_2} (G'_i \cap G''_i) \cap \prod_{L_2 \setminus L_1} G''_i = \prod_{L_1} G'_i \cap \prod_{L_2} G''_i$.

2. Neka $G = \prod_L G_i \in \mathcal{G}_\Psi^\Lambda$, i neka $([f],[f]) \in \Delta_{\prod X_i/\sim}$. Za $A = I \in \Psi$ i za sve $i \in L \cap A = L$ je $(f_i, f_i) \in \Delta_{X_i} \subset G_i$ pa $([f],[f]) \in G$. Dakle

$\Delta_{\prod X_i/\sim} \subset G$ za sve $G \in \mathcal{G}_\Psi^\wedge$.

3. Po pretpostavci elementi $\mathcal{G}_i$ su simetrični pa je prema lemi 2.7.1 (vi) $(\prod_L G_i)^{-1} = \prod_L G_i^{-1} = \prod_L G_i$.

4. Neka $\prod_L G_i \in \mathcal{G}_\Psi^\wedge$. Za svako $i \in L$ postoji $G'_i \in \mathcal{G}_i$ da je $G'_i \circ G'_i \subset G_i$. Tada je, prema Lemi 2.7.1 (vii), (i) $(\prod_L G'_i) \circ (\prod_L G'_i) = \prod_L (G'_i \circ G'_i) \subset \prod_L G_i$.□

Označićemo sa $\mathcal{U}_\Psi^\wedge$ uniformnu strukturu generisanu bazom $\mathcal{G}_\Psi^\wedge$ iz prethodne teoreme. Sada na skupu $\prod X_i/\sim$ imamo dve toplogije: toplogiju r.i.p. $\mathcal{O}_\Psi^\wedge$ i topologiju $\mathcal{O}_{\mathcal{U}_\Psi^\wedge}$ definisanu uniformnom strukturom $\mathcal{U}_\Psi^\wedge$. U daljem radu koristićemo sledeće tvrdjenje iz teorije uniformnih prostora, (vidi [26]).

Teorema 2.7.5 *Neka je $\mathcal{U}$ uniformna struktura na skupu X i $\mathcal{G}$ njena baza. Tada je $\mathcal{B}(x) = \{G < x > \mid G \in \mathcal{G}\}$ baza okalina tačke $x \in X$.*

Teorema 2.7.6 *Topologija redukovanog ideal-proizvoda familije uniformnih prostora $\{(X_i, \mathcal{U}_i) \mid i \in I\}$ generisana je uniformnom strukturom $\mathcal{U}_\Psi^\wedge$. To jest*

$$\mathcal{O}_{\mathcal{U}_\Psi^\wedge} = \mathcal{O}_\Psi^\wedge.$$

Dokaz $(\subset)$ Najpre dokažimo da je za $G = \prod_L G_i \in \mathcal{G}_\Psi^\wedge$ i $[f] \in \prod X_i/\sim$

$$q^{-1}(G < [f] >) = \bigcup_{A \in \Psi} \bigcap_{i \in L \cap A} \pi_i^{-1}(G_i < f_i >) \qquad (*)$$

Sledi $h \in q^{-1}(G < [f] >)$ akko $[h] \in G < [f] >$ akko $([f],[h]) \in \prod_L G_i$ akko $\exists A \in \Psi \forall i \in L \cap A (f_i, h_i) \in G_i$ akko $\exists A \in \Psi \forall i \in L \cap A, h_i \in G_i < f_i >$ akko $\exists A \in \Psi h \in \bigcap_{i \in L \cap A} \pi_i^{-1}(G_i < f_i >)$ akko $h \in \bigcup_{A \in \Psi} \bigcap_{i \in L \cap A} \pi_i^{-1}(G_i < f >)$.

Prema $(*)$, kako je q "na" i koristeći lemu 2.2.4, sledi: $G < [f] >= q(q^{-1}(G < [f] >)) = q(\bigcup_{A \in \Psi} \bigcap_{i \in L \cap A} \pi_i^{-1}(G_i < f_i >)) = \bigcup_{A \in \Psi} q(\bigcap_{i \in L \cap A} \pi_i^{-1}(G_i < f_i >)) = \bigcup_{A \in \Psi} q(\bigcap_{i \in L} \pi_i^{-1}(G_i < f_i >))$ pa je

$$G < [f] >= q(\bigcap_{i \in L} \pi_i^{-1}(G_i < f_i >)). \qquad (**)$$

Neka $O \in \mathcal{O}_{\mathcal{U}_\Psi^\wedge}$ i neka $[f] \in O$. Prema teoremama 2.7.4 i 2.7.5 tada postoji $G = \prod_L G_i \in \mathcal{G}_\Psi^\wedge$ da $[f] \in G < [f] > \subset O$. G_i su otvoreni u

$X_i^?, G_i < f_i >$ su otvoreni u X_i pa je prema $(**) G < [f] >$ otvoren u $\mathcal{O}_\Psi^\Lambda$ (jer je q otvoreno). Zato $[f] \in int(O)$ u topologiji $\mathcal{O}_\Psi^\Lambda$. Ovo važi za sve $[f] \in O$ pa je $O \in \mathcal{O}_\Psi^\Lambda$.

($\supset$) Prema teoremi 3.6 skupovi oblika $q(B)$ gde $B \in \mathcal{B}^\Lambda$ čine bazu topologije $\mathcal{O}_\Psi^\Lambda$. Dokažimo da su otvoreni u $\mathcal{O}_{\mathcal{U}_\Psi^\Lambda}$. Neka $B = \bigcap_{i \in L} \pi_i^{-1}(O_i) \in \mathcal{B}^\Lambda$ i neka $[f] \in q(B)$. Tada $f \in B^*$ pa $A = \{i \mid f_i \in B_i\} \in \Psi$. Zato za $i \in L \cap A$ važi $f_i \in O_i \in \mathcal{O}_i$ pa kako je $\mathcal{O}_i = \mathcal{O}_{\mathcal{U}_i}$, postoji $G_i \in \mathcal{G}_i$ da $f_i \in G_i < f_i > \subset O_i$. Zato $f \in \bigcap_{i \in L \cap A} \pi_i^{-1}(G_i < f_i >) \subset \bigcap_{i \in L \cap A} \pi_i^{-1}(O_i)$ pa $[f] \in q(\bigcap_{i \in L \cap A} \pi^{-1}(G_i < f_i >)) \subset q(\bigcap_{i \in L \cap A} \pi_i^{-1}(O_i)) = q(B)$.

Za $i \in L \setminus A$ odaberimo $G_i \in \mathcal{G}_i$ proizvoljno. Tada za $G = \prod_L G_i$ imamo prema $(**) [f] \in G < [f] > \subset q(B)$. Prema teoremi 7.8, skup $G < [f] >$ je okolina tačke $[f]$ pa je $q(B)$ otvoren u $\mathcal{O}_{\mathcal{U}_\Psi^\Lambda}$. Dakle $\mathcal{B}_\Psi^\Lambda \subset \mathcal{O}_{\mathcal{U}_\Psi^\Lambda}$ pa $\mathcal{O}_\Psi^\Lambda \subset \mathcal{O}_{\mathcal{U}_\Psi^\Lambda}$. □

Radi uskladjivanja terminologije navodimo sledeću definiciju.

Definicija 2.7.3 *Topološki prostor $(X, \mathcal{O})$ je:*

- kompletno - regularan akko za svaku tačku $x \in X$ i svaki zatvoren skup $F \subset X$ gde $x \notin F$, postoji neprekidna funkcija $f : X \to [0,1]$ takva da je $f(x) = 0$ i $f(F) = \{1\}$.

- $T_{3\frac{1}{2}}$ - prostor akko je kompletno -regularan i T_1.

- uniformizabilan akko postoji uniformna struktura $\mathcal{U}$ na X da je $\mathcal{O} = \mathcal{O}_\mathcal{U}$.

Teorema 2.7.7 *$(X, \mathcal{O})$ je uniformizabilan akko je kompletno regularan.*

Dokaz Vidi na primer u [26].□ Teoremu 2.7.6 možemo sada zapisati i ovako:

Teorema 2.7.8 *Neka je $I \neq \emptyset$, Λ ideal i Ψ filter na I. Ako je $\{\mathcal{X}_i \mid i \in I\}$ familija uniformizabilnih (kompletno - regularnih) prostora, onda je $\prod_\Psi^\Lambda \mathcal{X}_i$ uniformizabilan (kompletno - regularan) prostor.* □

Uslovi poslednje teoreme mogu se oslabiti:

Teorema 2.7.9 *Ako je familija prostora $\{(X_i, \mathcal{O}_i) \mid i \in I\}$ takva da $A = \{i \mid \mathcal{X}_i$ je kompletno regularan $\} \in \Psi$, onda je $\prod_\Psi^\Lambda \mathcal{X}_i$ kompletno regularan.*

Dokaz Kako $A \in \Psi$, to je, prema teoremi 2.4.1, $\prod_{\Psi}^{\Lambda} \mathcal{X}_i \cong \prod_{i \in A}^{\Lambda_A} {}_{\Psi_A} \mathcal{X}_i$. No za poslednji prostor važe uslovi teoreme 2.7.8 (svi faktori su kompletno - regularni). □

Napomena. Uočimo da u teoremi 2.7.9 uslov $(\Lambda\Psi)$ nije potreban za prenošenje kompletne regularnosti. No za prenošenje aksiome separacije $T_{3\frac{1}{2}}$ ovaj uslov je potreban. Naime u dokazu teoreme 2.5.1 pod pretpostavkom da $(\Lambda\Psi)$ ne važi, dat je primer familije topoloških prostora $\{\mathcal{X}_i, | \ i \in I\}$, za koju $A = \{i \mid \mathcal{X}_i \text{ je } T_6\} \in \Psi$. Naravno, tada je i $\{i \mid \mathcal{X}_i \text{ je } T_{3\frac{1}{2}}\} \in \Psi$ no $\prod_{\Psi}^{\Lambda} \mathcal{X}_i$ nije ni T_1. Uslov $(\Lambda\Psi)$ je i dovoljan za prenošenje $T_{3\frac{1}{2}}$ što tvrdi sledeća teorema.

Teorema 2.7.10 *Neka ideal Λ i filter Ψ na skupu I zadovoljavaju uslov $(\Lambda\Psi)$ i neka je $\{(X_i, \mathcal{O}_i) \mid i \in I\}$ familija topoloških prostora. Tada važi*

$$A = \{i \mid \mathcal{X}_i \text{ je } T_{3\frac{1}{2}} \text{ prostor } \} \in \Psi \Rightarrow \prod_{\Psi}^{\Lambda} \mathcal{X}_i \text{ je } T_{3\frac{1}{2}} \text{ - prostor.}$$

Dokaz Prema teoremi 2.7.9 prostor $\prod_{\Psi}^{\Lambda} \mathcal{X}_i$ je kompletno - regularan. Kako važi $(\Lambda\Psi)$, to su ispunjeni uslovi teoreme 2.6.1 pa je $\prod_{\Psi}^{\Lambda} \mathcal{X}_i$ i T_1 - prostor. □

2.8 Da li su $\mathcal{X}_i$ T_k ako je $\Pi_{\Psi}^{\Lambda}\mathcal{X}_i$ T_k ?

Pitanje iz naslova prirodno se nameće. Pokazaćemo da su za različite $k \in \{0, 1, 2, 3, 3\frac{1}{2}\}$ odgovori različiti. Naime za $k = 0, 1, 2$ odgovor je potvrdan i u slučaju kada uslov $(\Lambda\Psi)$ nije zadovoljen. Ako je uslov $(\Lambda\Psi)$ zadovoljen, tada je odgovor potvrdan i za $k = 3$. Na kraju, za $k = 3\frac{1}{2}$ odgovor može biti negativan iako je uslov $(\Lambda\Psi)$ zadovoljen.

Teorema 2.8.1. *Neka je I neprazan skup, $\Lambda \subset P(I)$ ideal, $\Psi \subset P(I)$ filter i neka je $\{\mathcal{X}_i | i \in I\}$ familija topoloških prostora. Tada za $k \in \{0, 1, 2\}$ važi:*

$$\text{ako je } \Pi_{\Psi}^{\Lambda}\mathcal{X}_i \ T_k\text{- prostor, onda je } \{i | \mathcal{X}_i \text{ je } T_k\} \in \Psi.$$

Dokaz: U sva tri slučaja dokazujemo kontrapoziciju date implikacije. Neka $H = \{i | \mathcal{X}_i \text{ je } T_k\} \notin \Psi$. Za $i \in H$ odaberimo $f_i = g_i \in X_i$.

($k = 0$) za $i \in I \setminus H$ $\mathcal{X}_i$ nije T_0 pa postoje $f_i, g_i \in X_i$ da $f_i \neq g_i$ i da važi:

$$\forall O \in \mathcal{O}_i\ (f_i \in O \Leftrightarrow g_i \in O). \qquad (*)$$

Tada $\{i | f_i = g_i\} = H \notin \Psi$ pa $[f] \neq [g]$. Neka je $q(B) \in \mathcal{B}_\Psi^\Lambda$ gde je $B = \bigcap_{i \in L} \pi_i^{-1}(U_i) = \Pi S_i$ i neka $[f] \in q(B)$. Tada $f \in q^{-1}(q(\Pi S_i))$ pa prema lemi 2.2.3 $A = \{i | f_i \in S_i\} \in \Psi$. Za $i \in A \cap H$ je $g_i = f_i \in S_i$. Za $i \in A \setminus H$ je $f_i \in S_i$ pa je zbog $(*)$ i $g_i \in S_i$. Zato $A \subset \{i | g_i \in S_i\} = D$ pa $D \in \Psi$. Odavde $g \in (\Pi S_i)^* = q^{-1}(q(B))$ pa $[g] \in q(B)$. Dakle $[f] \in q(B) \Rightarrow [g] \in q(B)$. Obratna implikacija se analogno dokazuje. Kako $[f] \in q(B) \Leftrightarrow [g] \in q(B)$ za svaki bazni otvoren skup $q(B)$ to $\Pi_\Psi^\Lambda \mathcal{X}_i$ nije T_0.

($k = 1$) za $i \in I \setminus H$ odaberimo $f_i,\ g_i \in X_i$ da je $f_i \neq g_i$ i

$$\forall O \in \mathcal{O}_i\ \ (f_i \in O \Rightarrow g_i \in O). \qquad (**)$$

Tada $\{i | f_i = g_i\} = H \notin \Psi$ pa $[f] \neq [g]$. Neka $[f] \in q(B)$ gde je $B = \bigcap_{i \in L} \pi_i^{-1}(U_i) = \Pi S_i \in \mathcal{B}^\Lambda$. Tada $f \in (\Pi S_i)^*$ pa $A = \{i | f_i \in S_i\} \in \Psi$. Za $i \in A \cap H$ je $g_i = f_i \in S_i$ a za $i \in A \setminus H$ imamo$f_i \in S_i \in \mathcal{O}_i$ pa je zbog $(**)$ $g_i \in S_i$. Zato $A \subset \{i | g_i \in S_i\} = D$ pa $D \in \Psi$. No tada, prema lemi 2.2.3, $g \in (\Pi S_i)^*$ pa $[g] \in q(\Pi S_i) = q(B)$. Dakle, u svakom baznom otvorenom skupu u kome je $[f]$ nalazi se i $[g]$, pa $\Pi_\Psi^\Lambda \mathcal{X}_i$ nije T_1.

($k = 2$) za $i \in I \setminus H$ $\mathcal{X}_i$ nije T_2 pa postoje $f_i, g_i \in X_i$ da je $f_i \neq g_i$ i da važi

$$\forall U, V \in \mathcal{O}_i (f_i \in U \wedge g_i \in V \Rightarrow U \cap V \neq \emptyset) \qquad (***)$$

Ponovo $\{i | f_i = g_i\} = H \notin \Psi$ pa $[f] \neq [g]$. Neka $[f] \in q(B_f)$ i $[g] \in q(B_g)$ gde $B_f = \bigcap_{i \in L_f} \pi_i^{-1}(U_i) = \Pi S_i$, $B_g = \bigcap_{i \in L_g} \pi_i^{-1}(V_i) = \Pi T_i$ i $B_f, B_g \in \mathcal{B}^\Lambda$. Tada $A_f = \{i | f_i \in S_i\}$, $A_g = \{i | g_i \in T_i\} \in \Psi$, pa $A = A_f \cap A_g \in \Psi$. Ako $i \in A \cap H$ tada $f_i = g_i$, $f_i \in S_i$ i $g_i \in T_i$ pa je $S_i \cap T_i \neq \emptyset$. Ako $i \in A \setminus H$ onda $f_i \in S_i$ i $g_i \in T_i$ pa zbog $(***)$ važi $S_i \cap T_i \neq \emptyset$. Zato $A \subset \{i | S_i \cap T_i \neq \emptyset\} = D$ pa $D \in \Psi$. Prema lemi 2.2.3 je $(\Pi S_i)^* \cap (\Pi T_i)^* \neq \emptyset$. No tada je i $q(B_f) \cap q(B_g) \neq \emptyset$. Dakle, $[f]$ i $[g]$ se ne mogu razdvojiti baznim otvorenim skupovima pa $\Pi_\Psi^\Lambda \mathcal{X}_i$ nije Hausdorffov. □

Za dokaz sledeće teoreme biće nam potrebno sledeće tvrđenje iz opšte topologije.

Lema 2.8.1. *Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor i $\mathcal{B}$ baza topologije $\mathcal{O}$. Tada su ekvivalentni sledeći uslovi:*

(i) $(X, \mathcal{O})$ *je regularan prostor;*

(ii) $\forall x \in X\ \forall O \in \mathcal{O}\ (x \in O \Rightarrow \exists O_1 \in \mathcal{O}(x \in O_1 \wedge \overline{O_1} \subset O))$;

(iii) $\forall x \in X\ \forall B \in \mathcal{B}\ (x \in B \Rightarrow \exists B_1 \in \mathcal{B}(x \in B_1 \wedge \overline{B_1} \subset B))$.

Dokaz: $(i) \Leftrightarrow (ii)$ je direktna posledica definicije regularnog prostora i može se naći u [E].

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Neka $x \in X$ i $B \in \mathcal{B}$ gde $x \in B$. Tada $B \in \mathcal{O}$ pa zbog (ii) postoji $O_1 \in \mathcal{O}$ da $x \in O_1$ i $\overline{O_1} \subset B$. Kako je $\mathcal{B}$ baza, to postoji $B_1 \in \mathcal{B}$ da $x \in B_1 \subset O_1$. No tada $\overline{B_1} \subset \overline{O_1} \subset B$, što dokazuje (iii).

$(iii) \Rightarrow (ii)$ Neka $x \in X$ i $O \in \mathcal{O}$ gde $x \in O$. Tada postoji $B \in \mathcal{B}$ da $x \in B \subset O$, pa zbog (iii) postoji i $B_1 \in \mathcal{B}$ da $x \in B_1$ i $\overline{B_1} \subset B$. No sada $B_1 \in \mathcal{O}$ i $x \in B_1$ te $\overline{B_1} \subset O$ što dokazuje (ii). □

Teorema 2.8.2. *Neka* Λ *i* Ψ *zadovoljavaju* $(\Lambda\Psi)$. *Tada*

(i) ako je $\Pi_\Psi^\Lambda \mathcal{X}_i$ *regularan, onda* $\{i | \mathcal{X}_i$ *je regularan*$\} \in \Psi$,

(ii) ako je $\Pi_\Psi^\Lambda \mathcal{X}_i$ T_3*−prostor, onda* $\{i | \mathcal{X}_i$ *je* T_3*-prostor* $\} \in \Psi$.

Dokaz: (i) Pretpostavimo da $H = \{i | \mathcal{X}_i$ je regularan$\} \notin \Psi$. Tada, prema uslovu $(\Lambda\Psi)$, postoji $L \in \Lambda$ da $L \subset I \setminus H$ i $L^c \notin \Psi$. Za $i \in L$ $\mathcal{X}_i$ nije regularan pa prema prethodnoj lemi postoje $f_i \in X_i$ i $O_i \in \mathcal{O}_i$ da $f_i \in O_i$ i da važi

$$\forall U \in \mathcal{O}_i\ (f_i \in U \Rightarrow \neg \overline{U} \subset O_i) \qquad (*)$$

Za $i \in I \setminus L$ neka je $f_i \in X_i$ proizvoljno. Definišimo $B = \bigcap_{i \in L} \pi_i^{-1}(O_i) = \Pi T_i$. Tada $f \in B$ i $[f] \in q(B) \in \mathcal{B}_\Psi^\Lambda$. Neka je $W = \bigcap_{i \in L_1} \pi_i^{-1}(U_i) = \Pi G_i \in \mathcal{B}^\Lambda$ takav da $[f] \in q(W)$. Tada $f \in (\Pi G_i)^*$ pa $E = \{i | f_i \in G_i\} \in \Psi$. Prema lemi 2.5 za $L_2 = L_1 \cap E$ i $B_1 = \bigcap_{i \in L_2} \pi_i^{-1}(U_i)$ važi $q(W) = q(B_1)$. Sem toga, prema lemi 6.1 je $\overline{q(B_1)} = q(\bigcap_{i \in L_2} \pi_i^{-1}(\overline{U_i})) = q(\Pi S_i)$.

Neka sada $i \in L \cap L_2$. Tada $T_i = O_i$, $S_i = \overline{U_i}$ i $f_i \in G_i = U_i$, pa zbog $(*)$ nije $\overline{U_i} \subset O_i$, to jest nije $S_i \subset T_i$. Ako $i \in L \setminus L_2$, tada $T_i = O_i \neq X_i = S_i$ pa ponovo nije $S_i \subset T_i$. Sada $L \subset \{i |\rceil S_i \subset T_i\}$ pa $\{i | S_i \subset T_i\} \subset L^c$. No $L^c \notin \Psi$ pa $\{i | S_i \subset T_i\} \notin \Psi$ zato, prema lemi 2.2.3, nije $(\Pi S_i)^* \subset (\Pi T_i)^*$, Dalje, kako važi $(\Pi S_i)^* \subset (\Pi T_i)^*$ akko $q^{-1}(q(\Pi S_i)) \subset q^{-1}(q(\Pi T_i))$ akko $q(\Pi S_i) \subset q(\Pi T_i)$ (jer je q "na") akko $\overline{q(W)} \subset q(B)$ imamo da nije $\overline{q(W)} \subset q(B)$.

Dakle, postoje $[f] \in \Pi_\Psi^\Lambda \mathcal{X}_i$ i $q(B) \in \mathcal{B}_\Psi^\Lambda$ da $[f] \in q(B)$ i da za sve $q(W) \in \mathcal{B}_\Psi^\Lambda$ važi: ako $[f] \in q(W)$ onda nije $\overline{q(W)} \subset q(B)$. Prema lemi 2.8.1, $\Pi_\Psi^\Lambda \mathcal{X}_i$ nije regularan što je trebalo dokazati.

(ii) Ako je $\Pi_\Psi^\Lambda \mathcal{X}_i$ T_3–prostor, onda je T_1 i regularan. Prema teoremi 2.8.1 tada $\{i|\mathcal{X}_i \text{ je } T_1\} = A \in \Psi$ a prema (i) ove teoreme $H = \{i|\mathcal{X}_i$ je regularan $\} \in \Psi$ pa $\{i|\mathcal{X}_i \text{ je } T_3\} = A \cap H \in \Psi$. □

Iako je zadovoljen uslov $(\Lambda\Psi)$ a $\Pi_\Psi^\Lambda \mathcal{X}_i$ je $T_{3\frac{1}{2}}$–prostor, može se dogoditi da nije $\{i|\mathcal{X}_i \text{ je } T_{3\frac{1}{2}}\} \in \Psi$. Dakle teorema 2.8.2 ne važi za $T_{3\frac{1}{2}}$–prostore. Ovo će biti pokazano kasnije (vidi primedbu VII 2.6).

Teorema slična teoremi 2.8.1 važi za diskretne prostore, kao što sledi.

Teorema 2.8.3. *Ako je $\Pi_\Psi^\Lambda \mathcal{X}_i$ diskretan, onda $\{i|\mathcal{X}_i$ je diskretan $\} \in \Psi$.*

Dokaz: Pretpostavimo da $H = \{i|\mathcal{X}_i$ je diskretan $\} \notin \Psi$. Za $i \in I \backslash H$ tada postoji $f_i \in X_i$ da $\{f_i\} \notin \mathcal{O}_i$. Za $i \in H$ neka je $f_i \in X_i$ proizvoljno.

Pretpostavimo da $[f] \in \mathcal{O}^\Lambda$. Tada, kako $f \in [f]$, postoji $B = \bigcap_{i \in L} \pi_i^{-1}(O_i) = \Pi S_i \in \mathcal{B}^\Lambda$ da $f \in B \subset [f]$. No tada $B^* \subset [f]^* = [f]$ (vidi lemu 2.2.1) pa $B^* \subset \{f\}^*$, što znači $(\Pi S_i)^* \subset (\Pi\{f_i\})^*$. Prema lemi 2.2.3 tada je $\{i|S_i \subset \{f_i\}\} = \{i|S_i = \{f_i\}\} \in \Psi$. No $S_i \in \mathcal{O}_i$ za sve $i \in I$ pa $\{i|S_i = \{f_i\}\} \subset \{i|\{f_i\} \in \mathcal{O}_i\} \subset H$. Odavde $H \in \Psi$ što nije tačno. Dakle $[f] \notin \mathcal{O}^\Lambda$.

Za $\{[f]\} \in \mathcal{O}_\Psi^\Lambda$ zbog otvorenosti q bilo bi $q^{-1}(\{[f]\}) = q^{-1}([f]) = [f] \in \mathcal{O}^\Lambda$. Zato $\{[f]\} \notin \mathcal{O}_\Psi^\Lambda$ pa $\Pi_\Psi^\Lambda \mathcal{X}_i$ nije diskretan. □

Obratna implikacija u prethodnoj teoremi ne važi čak iako je uslov $(\Lambda\Psi)$ zadovoljen. Dovoljno je posmatrati Tihonovski stepen D^ω gde je $D = \{0, 1\}$ sa diskretnom topologijom (Cantorov kub). Ovaj prostor nije diskretan.

2.9 Istorijske i bibliografske napomene

Teorema 2.2.1. je deo matematičkog folklora i može se naći na primer u [6] str. 198. Varijanta leme 2.2.3. za boks-proizvode može se naći kod Knighta [27] str. 47, i Williamsa [45] str. 181.

Poseban slučaj teoreme 2.3.1. i leme 2.3.1. može se naći u članku Knighta [27] str. 41, 42. Varijanta leme 2.3.2. za puni boks - proizvod nalazi se kod Williamsa u [45] str. 171, za boks-proizvod u smislu Knighta u [27] str. 43 a za ultraproizvod u [2] str. 284.

Specijalan slučaj teoreme 2.4.1 za boks-proizvode u smislu Knighta nalazi se u [27] str. 45.

Lema 2.6.1. za tihonovske proizvode data je u [14] str. 128, za puni boks - proizvod u [45] str. 171; za Knightov boks - proizvod u [27] str. 47 i za ultraproizvod u radu Bankstona [2] str. 284. Teorema 2.6.1. koja govori o očuvanju aksioma separacije T_0, T_1, T_2 i T_3 u $(\Lambda\Psi)$ r.i.p. za tihonovske proizvode data je u [14] str. 131; za puni boks - proizvod u [45] str. 171; za Knightov boks - proizvod u [27] str. 47 a za ultraproizvod u [2] str. 284.

Odgovarajući rezultati za ideal - proizvod topoloških prostora dobijeni primenom topološke teorije modela mogu se naći u radu Bertossija [4] str. 93 i 94.

Definicije 2.7.1. i 2.7.2. kao i teoreme 2.7.1, 2.7.2. i 2.7.3. su opšte poznate i mogu se naći na primer u [26] str. 234-237. Proizvod uniformnih struktura koji odgovara tihonovskom proizvodu dat je u [14] str. 641; dok je odgovarajuća konstrukcija za puni boks - proizvod data u [45] str. 175; a za Knightov proizvod u [27] str. 48, 49. U pomenutim člancima mogu se naći i analogoni leme 2.7.1. za specijalne proizvode. eoreme 2.7.6., 2.7.9. i 2.7.10. govore o uniformizabilnosti i kompletnoj regularnosti r.i.p imaju analogone: za tihonovske proizvode u [14] str. 131 i 641; za puni boks - proizvod u [45] str. 171 i 175; za Knightov boks - proizvod u [27] str. 49 i 50; a za ultraproizvod u [2] str. 284 i 286.

Teoreme 2.8.1. i 2.8.2. koje govore o prenošenju aksioma separacije T_0, T_1, T_2 i T_3 sa $\Pi^{\Lambda}_{\Psi}\mathcal{X}_i$ na "skoro sve" prostore $\mathcal{X}_i$ takodje imaju svoje klasične analogone. Oni se mogu naći: za tihonovske proizvode u [14] str. 131; za puni boks - proizvod u [45] str. 171; za Knightov boks - proizvod u [27] str. 47 i za ultraproizvod u [2] str. 284.

Glava 3

Specijalni slučajevi $(\Lambda\Psi)$ r.i.p.

I u ovoj glavi I će biti neprazan skup, Λ ideal i Ψ filter na I. Posmatraćemo familiju topoloških prostora $\{(X_i, \mathcal{O}_i) | i \in I\}$.

3.1 Filter ili ideal je glavni

U daljim razmatranjima koristićemo sledeću lemu.

Lema 3.1.1. *Neka Λ i Ψ zadovoljavaju uslov $(\Lambda\Psi)$ i neka je $J \subset I$ i $J \in \Psi$. Tada $\Psi_J = \{A \cap J | A \in \Psi\}$ i $\Lambda_J = \{L \cap J \mid L \in \Lambda\}$, kao filter i ideal na J, takodje zadovoljavaju ovaj uslov.*

Dokaz: Prema lemi 2.4.2, Ψ_J i Λ_J su filter odnosno ideal na J. Neka $A, B \subset J$ i $A \in \Psi_J$ a $B \notin \Psi_J$. Kako $J \in \Psi$, to $A \in \Psi$ i $B \notin \Psi$ (inače bi bilo $B = B \cap J \in \Psi_J$). Zato, zbog $(\Lambda\Psi)$ postoji $L \in \Lambda$ da $L \subset A \backslash B$ i $I \backslash L \notin \Psi$. Sada $L \subset A \subset J$ pa $L = L \cap J \in \Lambda_J$. Kako je $J \backslash L \subset I \backslash L$ to $J \backslash L \notin \Psi$ (jer je Ψ filter). No $\Psi_J \subset \Psi$ pa $J \backslash L \notin \Psi_J$. $\square$

Prvo razmotrimo slučaj kada je Ψ glavni filter.

Teorema 3.1.1. *Neka je $\Psi = \{A \subset I | J \subset A\}$ gde $J \subset I$. Tada*

(i) $(\Lambda\Psi) \Leftrightarrow [J]^{<\omega} \subset \Lambda$ *(tj. Λ sadrži sve konačne podskupove od J)*

(ii) ako važi uslov pod (i) onda je $\prod_{\Psi}^{\Lambda} \mathcal{X}_i \cong \prod_{i \in J}{}^{\Lambda_J} \mathcal{X}_i$.

Dokaz: (i) $(\Rightarrow)$ Neka $i \in J$. Tada $J\backslash\{i\} \notin \Psi$ pa zbog $(\Lambda\Psi)$ postoji $L \in \Lambda$ da $L \subset J\backslash(J\backslash\{i\}) = \{i\}$ i $I\backslash L \notin \Psi$. Za $L = \emptyset$ bismo imali $I \notin \Psi$ što je nemoguće pa $L = \{i\} \in \Lambda$. Za svako $i \in J$, $\{i\} \in \Lambda$ pa kako je Λ zatvoren u odnosu na konačne unije, sadrži sve konačne potskupove J.

$(\Leftarrow)$ Neka $A \in \Psi$ i $B \notin \Psi$, to jest $J \subset A$ i $J \not\subset B$. Tada postoji $i \in J\backslash B \subset A\backslash B$, pa $L = \{i\} \in \Lambda$ i $L \subset A\backslash B$. Takođe $L^c = I\backslash\{i\} \not\supset J$ pa $L^c \notin \Psi$. $(\Lambda\Psi)$ važi.

(ii) Ovo je posledica teoreme 2.4.1 i činjenice da je $\Psi_J = \{J\}$. □

Posledica 3.1.1. *Ideal proizvod $\Pi^\Lambda \mathcal{X}_i$ je $(\Lambda\Psi)$–r.i.p. akko $[I]^{<\omega} \subset \Lambda$.*

Dokaz: Ovo je poseban slučaj prethodne teoreme za $J = I$, to jest za $\Psi = \{I\}$. □

Primer 3.1.1. Za $J = I$ i $\Lambda = [I]^{<\omega}$ imamo $\Pi^\Lambda_\Psi \mathcal{X}_i = \Pi \mathcal{X}_i$ to jest $(\Lambda\Psi)$–r.i.p. svodi se na proizvod Tihonova. Prema posledici 3.1.1, topologija Tihonova na ΠX_i je najgrublja ideal-topologija na ΠX_i koja garantuje očuvanje aksioma separacije. Ovo sledi iz očigledne činjenice da $\Lambda_1 \subset \Lambda_2$ daje $\mathcal{B}^{\Lambda_1} \subset \mathcal{B}^{\Lambda_2}$ to jest $\mathcal{O}^{\Lambda_1} \subset \mathcal{O}^{\Lambda_2}$. □

Primer 3.1.2. Ako u teoremi 3.1.1 stavimo $\Psi = \{I\}$ i $\Lambda = P(I)$, tada je $\Pi^\Lambda_\Psi \mathcal{X}_i = \square \mathcal{X}_i$ (puni box-proizvod). Ovo je očigledno najfinija ideal topologija na ΠX_i. □

Prelazimo sada na slučaj kada je ideal Λ glavni.

Teorema 3.1.2. *Neka je $\Lambda = \{L \subset I | L \subset J\}$ gde $J \subset I$. Tada*

(i) $(\Lambda\Psi) \Leftrightarrow J \in \Psi$

(ii) ako važi uslov pod (i) onda je $\prod^\Lambda_\Psi \mathcal{X}_i = \square_{i\in J} \mathcal{X}_i / \sim_\Psi$,

Dokaz: (i) $(\Rightarrow)$ Pretpostavimo da važi $(\Lambda\Psi)$ i da $J \notin \Psi$. Tada postoji $L \in \Lambda$ da $L \subset I\backslash J$ i $L^c \notin \Psi$. No tada $L \neq \emptyset$ i $L \cap J = \emptyset$ što je nemoguće obzirom na oblik ideala Λ.

$(\Leftarrow)$ Neka $J \in \Psi$, $A \in \Psi$, $B \notin \Psi$. Tada $A \cap J \in \Psi$ pa $A \cap J \not\subset B$, to jest $L = A \cap J \cap B^c \neq \emptyset$. Pritom $L \subset J$ pa $L \in \Lambda$. Takođe $L \subset A\backslash B$. Za

$L^c = (A \cap J)^c \cup B \in \Psi$ bilo bi i $A \cap J \cap L^c = A \cap J \cap B \in \Psi$, pa kako $A \cap J \cap B \subset B$ imali bismo $B \in \Psi$ što je nemoguće. Dakle $L^c \notin \Psi$.

(ii) Prema teoremi 2.4.3 je $\prod_\Psi^\Lambda \mathcal{X}_i = \prod_{i \in J} {}^{\Lambda_J}_{\Psi_J} \mathcal{X}_i$. No $\Lambda_J = P(J)$ pa je $\prod_{i \in J}^{\Lambda_J} \mathcal{X}_i = \square_{i \in J} \mathcal{X}_i$ □

Posledica 3.1.2. *Za ma koji filter Ψ na I, redukovani puni box-proizvod $\square \mathcal{X}_i / \sim$ je $(\Lambda\Psi)$ r.i.p.*

Dokaz: Ovo je specijalan slučaj prethodne teoreme za $J = I$. □

Primer 3.1.3. Ako je $J = I$, to jest $\Lambda = P(I)$ a $\Psi = \mathcal{U}$ slobodan (tj. neglavni) ultrafilter na I, onda je $\Pi_\Psi^\Lambda \mathcal{X}_i = \square_\mathcal{U} \mathcal{X}_i$ (ultraproizvod familije prostora $\{(X_i, \mathcal{O}_i) | i \in I\}$).

Dakle ako su Ψ ili Λ glavni, $(\Lambda\Psi)$−r.i.p. se svodi na ideal proizvod odnosno redukovani puni boks-proizvod. Ostaju još slučajevi kada su Λ i Ψ neglavni. No i neki od tih slučajeva svode se na gornje.

Teorema 3.1.3. *Neka su Λ i Ψ neglavni i neka je pritom $J \in \Psi \cap \Lambda$. Tada se $\Pi_\Psi^\Lambda \mathcal{X}_i$ svodi na redukovani puni boks-proizvod.*

Dokaz: Kako je tada $\Lambda_J = P(J)$, prema teoremi 2.4.3 imamo $\prod_\Psi^\Lambda \mathcal{X}_i \cong \prod_{i \in J} {}^{\Lambda_J}_{\Psi_J} \mathcal{X}_i = \square_{i \in J} \mathcal{X}_i / \sim_{\Psi_J}$. □

3.2 Filter i ideal su neglavni

Lema 3.2.1. *Neka važi $(\Lambda\Psi)$ i neka je $\bigcup \Lambda = J$. Tada $J \in \Psi$ i $\prod_\Psi^\Lambda \mathcal{X}_i \cong \prod_{i \in J} {}^{\Lambda_J}_{\Psi_J} \mathcal{X}_i$.*

Dokaz: Za $J \notin \Psi$ iz $(\Lambda\Psi)$ bi sledilo da postoji $L \in \Lambda$ da $L \subset I \backslash J$ i $L \neq \emptyset$, što je nemoguće. □

Uzevši u obzir teoremu 3.1.3 i lemu 3.2.1, do sada neobuhvaćen slučaj $(\Lambda\Psi)$− r.i.p. je kada su zadovoljeni sledeći uslovi za Λ i Ψ :

1. $(\Lambda\Psi)$ 2. Λ i Ψ su neglavni 3. $\Lambda \cap \Psi = \emptyset$ 4. $\bigcup \Lambda = I$

Sledeće tvrđenje govori da se teoremom o restrikciji r.i.p. na neki element $J \in \Psi$ ova četiri uslova ne mogu izgubiti (u tom slučaju bi se odgovarajući $(\Lambda\Psi)$−r.i.p. sveo na neki slučaj iz tačke 1. ove glave).

Teorema 3.2.1. *Neka ideal Λ i filter Ψ zadovoljavaju uslove 1, 2, 3 i 4. Tada za sve $J \in \Psi$ ove uslove zadovoljavaju i Λ_J i Ψ_J.*

Dokaz: Λ_J i Ψ_J su ideal odnosno filter na J prema lemi 2.4.2, a zadovoljavaju uslov $(\Lambda\Psi)$ zbog leme 3.1.1.

$\bigcup \Lambda_J = J$ sledi iz $\bigcup \Lambda_J = \bigcup_{L \in \Lambda} L \cap J = (\bigcup_{L \in \Lambda} L) \cap J = I \cap J = J$.

Kada bi Λ_J bio glavni ideal, onda bi bilo $\bigcup \Lambda_J = J \in \Lambda_J \subset \Lambda$ pa bismo imali $J \in \Lambda \cap \Psi$ što je nemoguće.

Pretpostavimo da je $\Psi_J = A \uparrow = \{C \subset J | A \subset C\}$. Tada $A \uparrow \subset \Psi$ jer $\Psi_J \subset \Psi$. Neka $B \in \Psi$. Tada $B \cap J \in \Psi_J$, pa $A \subset B \cap J \subset B$. Zato $B \in A \uparrow$ pa $\Psi \subset A \uparrow$ i Ψ je glavni filter, što je nemoguće.

Kako je $\Lambda_J \subset \Lambda$ i $\Psi_J \subset \Psi$, to $\Lambda_J \cap \Psi_J \subset \Lambda \bigcap \Psi = \emptyset$. Zato je $\Lambda_J \cap \Psi_J = \emptyset$. □

Sada dajemo neke primere kada su zadovoljeni uslovi 1, 2, 3 i 4.

Teorema 3.2.2. *Neka je $|I| \geq \kappa > \lambda \geq \omega$ gde su κ i λ kardinali i neka je $\Lambda = [I]^{<\kappa}$ a $\Psi = \{A \subset I | A^c \in [I]^{<\lambda}\}$. Tada Λ i Ψ zadovoljavaju uslove 1, 2, 3 i 4.*

Dokaz: Neka $A \in \Psi$ i $B \notin \Psi$. Tada $|A^c| < \lambda$ i $|B^c| \geq \lambda$. Kako je $|B^c| = |A \cap B^c| + |A^c \cap B^c|$ i $|A^c \cap B^c| < \lambda$, to je $|A \cap B^c| = |B^c| \geq \lambda$. Neka je $L \subset A \cap B^c$ i $|L| = \lambda$. Zbog $\lambda < \kappa$ imamo $L \in \Lambda$. Pretpostavimo $L^c \in \Psi$. Tada $|(L^c)^c| = |L| < \lambda$ što je nemoguće. Dakle $L^c \notin \Psi$ pa je uslov $(\Lambda\Psi)$ zadovoljen. I ostali uslovi se lako proveravaju. □

Primer 3.2.1. Ako su Λ i Ψ kao u prethodnoj teoremi, onda je $\Pi_{\Psi}^{\Lambda} \mathcal{X}_i = \square_{\lambda}^{\kappa} \mathcal{X}_i$ (boks-proizvod u smislu Knighta [27]).

3.3 Ekvivalenti uslova $(\Lambda\Psi)$

Sledeća teorema je elementarna ali je dajemo zbog kompletnosti teksta.

Teorema 3.3.1. *Neka je I neprazan skup i Ψ filter na I. Ako na $P(I)$ definišemo binarnu relaciju $\equiv$ sa:*

$$A \equiv B \quad akko \quad \exists F \in \Psi \ (A \cap F = B \cap F)$$

gde $A, B \in P(I)$, onda važi:

a) $\equiv$ *je relacija ekvivalencije na $P(I)$.*

b) Ako na skupu $P(I)/\equiv$ definišemo operacije $\wedge, \vee$ i $'$ sa

$$[A] \wedge [B] = [A \cap B], \quad [A] \vee [B] = [A \cup B], \quad [A]' = [I \backslash A]$$

onda su ove operacije dobro definisane i uredjena šestorka $(P(I)/\equiv, \wedge, \vee, ', 0, 1)$ gde je $0 = [\emptyset]$ i $1 = [I]$ je Boole-ova algebra.

c) Za proizvoljno $L \in P(I)$ sledeći uslovi su ekvivalentni:

(i) $[L] > 0$; *(ii)* $I \backslash L \notin \Psi$; *(iii)* $\forall F \in \Psi (F \cap L \neq \emptyset)$.

d) Za proizvoljno $A \in P(I)$ važi:

$$[A] = 1 \Leftrightarrow A \in \Psi.$$

e) Ako je Λ ideal na I onda je

$$\Lambda/\equiv = \{[L] \mid L \in \Lambda\}$$

ideal u Boole-ovoj algebri $P(I)/\equiv$.

Dokaz. a) Refleksivnost i simetričnost je očigledna. Ako je $A \equiv B$ i $B \equiv C$, onda je $A \cap F = B \cap F$ i $B \cap G = C \cap G$ za neke $F, G \in \Psi$. Pošto $F \cap G \in \Psi$, iz jednakosti $A \cap F \cap G = C \cap F \cap G$ sledi tranzitivnost.

b) Neka je $A \equiv A_1$ i $B \equiv B_1$. Tada postoje $F, G \in \Psi$ da važi

$$A \cap F = A_1 \cap F \quad \text{i} \quad B \cap G = B_1 \cap G.$$

Dobra definisanost operacija $\wedge, \vee$ i $'$ sledi iz relacija

$$(A \cap B) \cap (F \cap G) = (A_1 \cap B_1) \cap (F \cap G);$$
$$(A \cup B) \cap (F \cap G) = (A_1 \cup B_1) \cap (F \cap G) \text{ i}$$
$$(I \backslash A) \cap F = (I \backslash A_1) \cap F$$

i činjenice da $F \cap G \in \Psi$. Dakle, $\equiv$ je kongruencija na $P(I)$, pa je $P(I)/\equiv$ Boole-ova algebra.

c) Važi: $[L] > 0$ akko $\neg L \equiv \emptyset$ akko $\neg \exists F \in \Psi (L \cap F = \emptyset)$ akko $\forall F \in \Psi (L \cap F \not\equiv \emptyset)$ akko $\forall F \in \Psi (\neg F \subset I \backslash L)$ akko $I \backslash L \notin \Psi$.

d) Sledi iz $[A] = 1$ akko $[A]' = [I \backslash A] = 0$ akko $\neg[I \backslash A] > 0$ što je prema c) ekvivalentno sa $I \backslash (I \backslash A) = A \in \Psi$.

e) Za $L_1, L_2 \in \Lambda$ važi $[L_1] \vee [L_2] = [L_1 \cup L_2] \in \Lambda/\equiv$, jer $L_1 \cup L_2 \in \Lambda$. Dalje, ako $[K] \leq [L_1]$, tada je $[K] = [K] \wedge [L_1] = [K \cap L_1] \in \Lambda/\equiv$, jer $K \cap L_1 \in \Lambda$. □

Teorema 3.3.2. *Neka je I neprazan skup, Λ ideal a Ψ filter na I. Tada su ekvivalentni sledeći uslovi:*

(i) $\forall A \in \Psi \forall B \notin \Psi \exists L \in \Lambda\, (L \subset A \setminus B \wedge I \setminus L \notin \Psi)$ *(uslov $(\Lambda\Psi)$).*

(ii) $\forall B \notin \Psi \exists L \in \Lambda\, (L \subset I \setminus B \wedge I \setminus L \notin \Psi)$

(iii) $\forall x \in P(I)/\equiv (x > 0 \Rightarrow \exists y \in \Lambda/\equiv (0 < y \leq x))$

Dokaz. $(i \Rightarrow ii)$ sledi direktno (za $A = I$).

$(ii \Rightarrow iii)$ Neka je $x = [C] \in P(I)/\equiv$ i neka je $x > 0$. Tada, prema prethodnoj teoremi, $B = I \setminus C \notin \Psi$, pa zbog (ii) postoji $L \in \Lambda$ da $L \subset I \setminus B = C$ i $I \setminus L \notin \Psi$. Tada $y = [L] \in \Lambda/\equiv$ i $y > 0$ (jer $I \setminus L \notin \Psi$). Takodje, $L \subset C$ daje $y = [L] \leq [C] = x$.

$(iii \Rightarrow i)$ Neka $A \in \Psi$ i $B \notin \Psi$. Tada, prema teoremi 3.3.1 (d) važi $[B] < 1$ pa je $[B]' = [I \setminus B] > 0$, pa zbog (iii) postoji $K \in \Lambda$ da važi

$$0 < [K] \leq [I \setminus B] \qquad (*)$$

Tada, prema (c) prethodne teoreme $I \setminus K \notin \Psi$. Zbog $(*)$ postoji $F \in \Psi$ da je $K \cap F \subset (I \setminus B) \cap F$ pa je (sečenjem sa A)

$$K \cap F \cap A \subset (A \setminus B) \cap F.$$

Tada $L = K \cap F \cap A \in \Lambda$ i $L \subset A \setminus B$. Za $G \in \Psi$ je $L \cap G = K \cap F_1$ gde $F_1 = F \cap A \cap G \in \Psi$, pa kako je $[K] > 0$, to $K \cap F_1 \neq \emptyset$, to jest $L \cap G \neq \emptyset$, za sve $G \in \Psi$. Prema prethodnoj teoremi imamo $I \setminus L \notin \Psi$, što dokazuje $(\Lambda\Psi)$. □

Uslov $(\Lambda\Psi)$ možemo zapisati na još jedan način. Neka je dat jezik prvog reda $\mathcal{L}_{B,\Lambda} = \{\wedge, \vee, ', 0, 1, \lambda\}$ gde su $\wedge$ i $\vee$ funkcijski znaci dužine 2, $'$ je funkcijski znak dužine 1, 0 i 1 su konstante a λ je relacijski znak dužine 1.

Teorija Boole-ovih algebri sa istaknutim idealom je teorija prvog reda čiji je jezik $\mathcal{L}_{B,\Lambda}$ i čije su aksiome aksiome Boole-ove algebre:

$$\begin{array}{cc} x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z & x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z \\ x \wedge y = y \wedge x & x \vee y = y \vee x \\ x \wedge (x \vee y) = x & x \vee (x \wedge y) = x \\ x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) & x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) \\ x \wedge x' = 0 & x \vee x' = 1 \\ x \wedge 1 = x & x \vee 0 = x \end{array}$$

kojima su dodate sledeće aksiome:

$$\lambda(0)$$

$$\lambda(x) \wedge \lambda(y) \Rightarrow \lambda(x \vee y)$$

$$\lambda(x) \wedge y \leq x \Rightarrow \lambda(y).$$

Kao i obično, u Boole-ovim algebrama uvedimo oznake

$$x \leq y \overset{def}{\Longleftrightarrow} x \wedge y = x, \quad x < y \overset{def}{\Longleftrightarrow} x \leq y \wedge x \neq y.$$

Dalje, $(\forall x > 0)\ \varphi$ je skraćenje za formulu $\forall x(x > 0 \Rightarrow \varphi)$. Sada se rezultat prehodne teoreme može zapisati ovako

Teorema 3.3.3. *Neka je $I \neq \emptyset$, Λ ideal i Ψ filter na I. Tada važi*

$$(\Lambda\Psi) \text{ akko } (P(I)/\equiv, \Lambda/\equiv) \models \forall x > 0 \exists y(\lambda(y) \wedge 0 < y \leq x). \quad \square$$

Dalje, ako posmatramo parcijalno uredjen skup $\mathbf{P} = (P(I)/\equiv) \setminus \{0\}$ i ako je $\Lambda = (\Lambda/\equiv) \setminus \{0\}$, onda

$$(\Lambda\Psi) \quad \text{akko} \quad \forall x \in \mathbf{P}\ \exists y \in \mathbf{\Lambda}\ \ y \leq x$$

što se prema nekim autorima (npr. kod Kunena u [29]) iskazuje kao uslov da je skup $\mathbf{\Lambda}$ gust u parcijalno uredjenom skupu $\mathbf{P}$. Dakle važi

Teorema 3.3.4. *Neka je $I \neq \emptyset$, Λ ideal i Ψ filter na I. Tada važi*

$$(\Lambda\Psi) \quad \textit{akko} \quad \mathbf{\Lambda} \quad \textit{je gust u} \quad \mathbf{P}. \quad \square$$

Glava 4

Preslikavanja r.i.p.

4.1 Preslikavanje i homogenost r.i.p.

Neka je I neprazan skup, Λ ideal a Ψ filter na I i neka su $\{\mathcal{X}_i | i \in I\}$ i $\{\mathcal{Y}_i | i \in I\}$ gde je $\mathcal{X}_i = (X_i, \mathcal{O}_i^X)$ i $\mathcal{Y}_i = (Y_i, \mathcal{O}_i^Y)$ familije topoloških prostora. Na kraju, neka su $\varphi_i : X_i \to Y_i$ preslikavanja za sve $i \in I$. Označimo sa φ^Λ Dekartov proizvod preslikavanja φ_i, to jest

$$\varphi^\Lambda : \Pi^\Lambda X_i \to \Pi^\Lambda Y_i \quad \text{gde} \quad \varphi^\Lambda(\langle f_i | i \in I\rangle) = \langle \varphi_i(f_i) | i \in I\rangle.$$

Lema 4.1.1. *Ako su zadovoljeni gornji uslovi, onda*

(i) Ako je φ_i "na" za sve $i \in I$, onda je φ^Λ "na".

(ii) ako je φ_i "1–1" za sve $i \in I$, onda je φ^Λ "1–1".

(iii) ako je φ_i neprekidno za sve $i \in I$, onda je φ^Λ neprekidno.

(iv) ako je φ_i otvoreno i "na" za sve $i \in I$, onda je φ^Λ otvoreno.

Dokaz: (i) Neka $g = \langle g_i \rangle \in \Pi Y_i$. Tada za sve $i \in I$, $g_i \in Y_i$ pa kako je φ_i "na", postoji $f_i \in X_i$ da je $g_i = \varphi_i(f_i)$. Sada je $g = \varphi^\Lambda(\langle f_i \rangle)$.

(ii) Neka $f, g \in \Pi X_i$ i neka je $\varphi^\Lambda(f) = \varphi^\Lambda(g)$. Tada je za sve $i \in I$, $\varphi_i(f_i) = \varphi_i(g_i)$ pa kako su φ_i "1–1" preslikavanja, $f_i = g_i$ za sve $i \in I$, to jest $f = g$.

(iii) Označimo sa $\pi_j : \Pi X_i \to X_j$ i $p_j : \Pi Y_i \to Y_j$ kanonske projekcije. Dokažimo:

$$(\varphi^{\Lambda})^{-1}(\bigcap_{i\in L} p_i^{-1}(O_i)) = \bigcap_{i\in L} \pi_i^{-1}(\varphi_i^{-1}(O_i))$$

Važi: $f \in (\varphi^{\Lambda})^{-1}(\bigcap_{i\in L} p_i^{-1}(O_i))$ akko $\langle \varphi_i(f_i)\rangle \in \bigcap_{i\in L} p_i^{-1}(O_i)$ akko za sve $i \in L$ $\varphi_i(f_i) \in O_i$ akko za sve $i \in L$ $f_i \in \varphi_i^{-1}(O_i)$ akko $f \in \bigcap_{i\in L} \pi_i^{-1}(\varphi_i^{-1}(O_i))$.

Ako je za $i \in L$ $O_i \in \mathcal{O}_i^Y$ onda je zbog neprekidnosti funkcija φ_i i $\varphi_i^{-1}(O_i) \in \mathcal{O}_i^X$. Dakle za preslikavanje φ^{Λ}, inverzna slika svakog baznog otvorenog skupa je otvoren skup. Jasno, ovo važi i za proizvoljne otvorene skupove pa je φ^{Λ} neprekidno.

(iv) Dokažimo da je slika baznog otvorenog skupa otvoren skup, to jest da važi

$$\varphi^{\Lambda}(\bigcap_{i\in L} \pi_i^{-1}(O_i)) = (\bigcap_{i\in L} p_i^{-1}(\varphi_i(O_i))).$$

($\subset$) Neka $g \in \varphi^{\Lambda}(\bigcap_{i\in L} \pi_i^{-1}(O_i))$. Tada postoji $f \in \bigcap_{i\in L} \pi_i^{-1}(O_i)$ da je $g = \varphi^{\Lambda}(f)$, to jest da je $g_i = \varphi_i(f_i)$ za sve $i \in I$. Pritom za $i \in L$ važi $f_i \in O_i$ pa $g_i \in \varphi_i(O_i)$. Zato je $g \in \bigcap_{i\in L} p_i^{-1}(\varphi_i(O_i))$.

($\supset$) Neka $g \in \bigcap_{i\in L} p_i^{-1}(\varphi_i(O_i))$. Tada za sve $i \in L$ $g_i \in \varphi_i(O_i)$ pa postoji $f_i \in O_i$ da je $g_i = \varphi_i(f_i)$. Za $i \in I\backslash L$ imamo $g_i \in Y_i = \varphi_i(X_i)$ (jer su φ_i "na") pa odaberimo $f_i \in X_i$ da je $g_i = \varphi_i(f_i)$. Sada $f \in \bigcap_{i\in L} \pi_i^{-1}(O_i)$ i $g = \varphi^{\Lambda}(f)$. □

Definišimo sada preslikavanje

$$\varphi_{\Psi}^{\Lambda} : \Pi_{\Psi}^{\Lambda}\mathcal{X}_i \to \Pi_{\Psi}^{\Lambda}\mathcal{Y}_i \qquad \text{sa} \qquad \varphi_{\Psi}^{\Lambda}([f]) = [\varphi^{\Lambda}(f)]$$

Lema 4.1.2. *Preslikavanje φ_{Ψ}^{Λ} je dobro definisano.*

Dokaz: Neka je $[f] = [g]$, to jest $f \sim g$. Tada je $A = \{i | f_i = g_i\} \in \Psi$. Sada je $f' = \varphi^{\Lambda}(f) = \langle\varphi_i(f_i)\rangle$ $g' = \varphi^{\Lambda}(g) = \langle\varphi_i(g_i)\rangle$ i za $i \in A$ imamo $f'_i = \varphi_i(f_i) = \varphi_i(g_i) = g'_i$ pa je $A \subset \{i | f'_i = g'_i\} \in \Psi$. Dakle $f' \sim g'$ to jest $[\varphi^{\Lambda}(f)] = [\varphi^{\Lambda}(g)]$. □

Teorema 4.1.1. *Pod gornjim pretpostavkama važi:*

(i) ako $A = \{i | \varphi_i$ je "na" $\} \in \Psi$, onda je φ_{Ψ}^{Λ} "na".

(ii) ako $A = \{i | \varphi_i$ je "1-1" $\} \in \Psi$, onda je φ_{Ψ}^{Λ} "1-1".

(iii) ako $A = \{i|\varphi_i$ *je neprekidno* $\} \in \Psi$, *onda je* $\varphi^{\wedge}_{\Psi}$ *neprekidno.*

(iv) ako $A = \{i|\varphi_i$ *je otvoreno i "na"* $\} \in \Psi$, *onda je* $\varphi^{\wedge}_{\Psi}$ *otvoreno.*

(v) ako $A = \{i|\varphi_i$ *je homeomorfizam* $\} \in \Psi$, *onda je* $\varphi^{\wedge}_{\Psi}$ *homeomorfizam.*

Dokaz: Prema teoremi 2.4.1 postoje homeomorfizmi η_X i η_Y na sledećem dijagramu:

$$\begin{array}{ccc} \Pi_{i\in I}{}^{\wedge}_{\Psi}\mathcal{X}_i & \xrightarrow{\varphi^{\wedge}_{\Psi}} & \Pi_{i\in I}{}^{\wedge}_{\Psi}\mathcal{Y}_i \\ \eta_X \downarrow & & \downarrow \eta_Y \\ \Pi_{i\in A}{}^{\wedge_A}_{\Psi_A}\mathcal{X}_i & \xrightarrow{\varphi^{\wedge_A}_{\Psi_A}} & \Pi_{i\in A}{}^{\wedge_A}_{\Psi_A}\mathcal{Y}_i \end{array}$$

dati sa $\eta_X([f]) = [f|A]$ i $\eta_Y([g]) = [g|A]$. Očigledno važi

$$\varphi^{\wedge}_{\Psi} = \eta_Y^{-1} \circ \varphi^{\wedge_A}_{\Psi_A} \circ \eta_X$$

pa ako je $\varphi^{\wedge_A}_{\Psi_A}$ "na" ("1–1", neprekidno, otvoreno) onda je i $\varphi^{\wedge}_{\Psi}$ "na" ("1–1", neprekidno, otvoreno). Dakle bez ograničenja opštosti možemo pretpostaviti da u svim tvrdjenjima (i) - (v) važi $A = I$. Dokažimo da tada dijagram

$$\begin{array}{ccc} \Pi^{\wedge}\mathcal{X}_i & \xrightarrow{\varphi^{\wedge}} & \Pi^{\wedge}\mathcal{Y}_i \\ q_X \downarrow & & \downarrow q_Y \\ \Pi^{\wedge}_{\Psi}\mathcal{X}_i & \xrightarrow{\varphi^{\wedge}_{\Psi}} & \Pi^{\wedge}_{\Psi}\mathcal{Y}_i \end{array}$$

komutira, to jest da važi $\varphi^{\wedge}_{\Psi} \circ q_X = q_Y \circ \varphi^{\wedge}$.
Neka $f \in \Pi\mathcal{X}_i$. Tada je $\varphi^{\wedge}_{\Psi}(q_X(f)) = \varphi^{\wedge}_{\Psi}([f]) = [\varphi^{\wedge}(f)] = q_Y(\varphi^{\wedge}(f))$ što dokazuje traženu relaciju.

(i) Preslikavanja q_X i q_Y su "na" a prema lemi 4.1.1 i $\varphi^{\wedge}$ je "na". Zato je $\varphi^{\wedge}_{\Psi}(\Pi^{\wedge}_{\Psi}\mathcal{X}_i) = \varphi^{\wedge}_{\Psi}(q_X(\Pi^{\wedge}\mathcal{X}_i)) = q_Y(\varphi^{\wedge}(\Pi^{\wedge}\mathcal{X}_i)) = q_Y(\Pi^{\wedge}\mathcal{Y}_i) = \Pi^{\wedge}_{\Psi}\mathcal{Y}_i$.

(ii) Neka je $\varphi^{\wedge}_{\Psi}([f]) = \varphi^{\wedge}_{\Psi}([g])$ tj. $[\varphi^{\wedge}(f)] = [\varphi^{\wedge}(g)]$. Tada $\langle\varphi_i(f_i)\rangle \sim \langle\varphi_i(g_i)\rangle$ pa je $A = \{i|\varphi_i(f_i) = \varphi_i(g_i)\} \in \Psi$. No za $i \in A$, kako je φ_i "1–1", važi $f_i = g_i$ pa $f \sim g$, tj. $[f] = [g]$.

(iii) Neka je O otvoren u $\Pi^{\wedge}_{\Psi}\mathcal{Y}_i$. Kako je q_X "na" imamo: $(\varphi^{\wedge}_{\Psi})^{-1}(O) = q_X(q_X^{-1}((\varphi^{\wedge}_{\Psi})^{-1}(O))) = q_X((\varphi^{\wedge}_{\Psi}\circ q_X)^{-1}(O)) = q_X((q_Y\circ\varphi^{\wedge})^{-1}(O)) = q_X((\varphi^{\wedge})^{-1}(q_Y^{-1}(O)))$. Dakle

$$(\varphi^{\wedge}_{\Psi})^{-1}(O) = q_X((\varphi^{\wedge})^{-1}(q_Y^{-1}(O)))$$

Prema lemi 4.1.1, φ^Λ je neprekidno što sa neprekidnošću q_Y i otvorenošću q_X daje otvorenost $(\varphi^\Lambda_\Psi)^{-1}(O)$.

(iv) Neka je O otvoren u $\Pi^\Lambda_\Psi \mathcal{X}_i$. Tada je $\varphi^\Lambda_\Psi(O) = \varphi^\Lambda_\Psi(q_X(q_X^{-1}(O))) = q_Y(\varphi^\Lambda(q_X^{-1}(O)))$. Prema lemi 4.1.1, φ^Λ je otvoreno pa kako je q_X neprekidno a q_Y otvoreno, $\varphi^\Lambda_\Psi(O)$ je otvoren u $\Pi^\Lambda_\Psi \mathcal{Y}_i$.

(v) je posledica (i) - (iv). □

Podsetimo se da je topološki prostor $(X, \mathcal{O})$ homogen akko za svako $x, y \in X$ postoji homeomorfizam $f : X \to X$ (automorfizam) da je $f(x) = y$. Tada imamo

Teorema 4.1.2. *Ako $A = \{i | \mathcal{X}_i$ je homogen $\} \in \Psi$, onda je $\Pi^\Lambda_\Psi \mathcal{X}_i$ homogen.*

Dokaz: Neka $[f], [g] \in \Pi^\Lambda_\Psi \mathcal{X}_i$. Za $i \in A$ neka je $\varphi_i : X_i \to X_i$ homeomorfizam, gde je $\varphi_i(f_i) = g_i$ a za $i \in I \setminus A$ neka je $\varphi_i = id_{X_i}$. Prema prethodnoj teoremi $\varphi^\Lambda_\Psi : \Pi^\Lambda_\Psi \mathcal{X}_i \to \Pi^\Lambda_\Psi \mathcal{X}_i$ je homeomorfizam. Dalje, $\varphi^\Lambda_\Psi([f]) = [\varphi^\Lambda(f)] = [\langle \varphi_i(f_i) \rangle] = [\langle h_i \rangle]$ gde je $h_i = \varphi_i(f_i) = g_i$ za $i \in A$. Zato $h \sim g$ pa je $\varphi^\Lambda_\Psi([f]) = [h] = [g]$. □

Napomena 4.1.1 Lako se pokazuje da je svaki antidiskretan prostor homogen. Ako je $I = N$, $\Lambda = [I]^{<\omega}$, $\Psi = \{L^c | L \in \Lambda\}$ i $\mathcal{X}_i = R$ sa uobičajenom topologijom, onda je prema prethodnoj teoremi $\Pi^\Lambda_\Psi \mathcal{X}_i$ homogen prostor. No $\Pi^\Lambda_\Psi \mathcal{X}_i$ ima antidiskretnu topologiju (videti primer posle leme 2.6.1). Dakle može se dogoditi da su prostori $\mathcal{X}_i$ "interesantni" no da je $\Pi^\Lambda_\Psi \mathcal{X}_i$ trivijalan. Da bismo ovo izbegli teoremu 4.1.2 možemo kombinovati sa uslovom $(\Lambda\Psi)$ koji garantuje prenošenje aksioma separacije T_k za $k \in \{0, 1, 1, 3, 3\frac{1}{2}\}$.

4.2 R.i.p. r.i.p.-ova je r.i.p.

U ovoj tački dokazujemo tvrdjenje iskazano u naslovu. Naime, pokazaćemo da je r.i.p. oblika $\prod^\Lambda_\Psi(\prod^{\Lambda_i}_{\Psi_i} \mathcal{X}_j)$ ponovo r.i.p. nad posebnim skupom indeksa a u odnosu na odredjeni ideal i filter. Ovakva konstrukcija čuva uslov $(\Lambda\Psi)$.

Preciznije, neka je $I \neq \emptyset$ i neka su $J_i, i \in I$ disjunktni, neprazni skupovi. Neka je, dalje, Λ ideal a Ψ filter na skupu I i neka je za svako $i \in I$ dat ideal Λ_i i filter Ψ_i na skupu J_i. Ako je $J = \bigcup_{i \in I} J_i$ onda važi:

Lema 4.2.1. *a)* $\Psi_0 = \{A \subset J \mid \{i \in I \mid A \bigcap J_i \in \Psi_i\} \in \Psi\}$ *je filter na* J;

b) $\Lambda_0 = \{\bigcup_{i \in L} L_i \mid L \in \Lambda, L_i \in \Lambda_i \text{ za } i \in L\}$ *je ideal na* J;

c) ako parovi Λ, Ψ *i* Λ_i, Ψ_i, *gde je* $i \in I$; *zadovoljavaju uslov* $(\Lambda\Psi)$, *onda ovaj uslov zadovoljava i par* Ψ_0, Λ_0.

Dokaz. Za $A \subset J$ definišemo skup $I_A = \{i \in I \mid A \bigcap J_i \in \Psi_i\}$.

a) Očigledno, $I_J = I \in \Psi$ pa $J \in \Psi_0$. Dalje, ako $A, B \in \Psi_0$ onda $I_A, I_B \in \Psi$ pa $I_A \bigcap I_B \in \Psi$. No, $I_A \bigcap I_B \subset I_{A \bigcap B}$, što je lako proveriti, pa $I_{A \bigcap B} \in \Psi$, što daje $A \bigcap B \in \Psi_0$. Na kraju, $A \in \Psi_0$ i $A \subset B$ daje $I_A \in \Psi$ i $I_A \subset I_B$, odakle sledi $I_B \in \Psi$, to jest $B \in \Psi_0$.

b) Za $A, B \in \Lambda_0$, gde je $A = \bigcup_{i \in L_A} L_i^A$ i $B = \bigcup_{i \in L_B} L_i^B$ i gde $L_A, L_B \in \Lambda$ a $L_i^A, L_i^B \in \Lambda_i$, važi $A \cup B = \bigcup_{i \in L_A \bigcup L_B} L_i$ gde je

$$L_i = \begin{cases} L_i^A & \text{za} \quad i \in L^A \backslash L^B, \\ L_i^A \bigcup L_i^B & \text{za} \quad i \in L^A \bigcap L^B, \\ L_i^B & \text{za} \quad i \in L^B \backslash L^A. \end{cases}$$

Sada $L_A \bigcup L_B \in \Lambda$ i $L_i \in \Lambda_i$ za sve $i \in L_A \bigcup L_B$ pa $A \bigcup B \in \Lambda_0$. Na kraju, za $C \subset \bigcup_{i \in L} L_i$ imamo $C = \bigcup_{i \in L}(C \bigcap L_i) \in \Lambda_0$.

c) Prema pretpostavci teoreme važe uslovi

$$\forall A \in \Psi \; \forall B \notin \Psi \exists L \in \Lambda (L \subset A \backslash B \wedge I \backslash L \notin \Psi) \tag{4.1}$$

$$\forall A \in \Psi_i \; \forall B \notin \Psi_i \exists L \in \Lambda_i (L \subset A \backslash B \wedge J_i \backslash L \notin \Psi_i), i \in I. \tag{4.2}$$

Dokazujemo

$$\forall A \in \Psi_0 \forall B \notin \Psi_0 \; \exists L \in \Lambda_0 (L \subset A \backslash B \wedge J \backslash L \notin \Psi_0). \tag{4.3}$$

Neka $A \in \Psi_0$ i $B \notin \Psi_0$. Tada $I_A \in \Psi$ i $I_B \notin \Psi$ pa zbog (1) postoji $L \in \Lambda$ da $L \subset I_A \backslash I_B$ i da $I \backslash L \notin \Psi$. Za $i \in L$ važi: $A \bigcap J_i \in \Psi_i$ i $B \bigcap J_i \notin \Psi_i$, pa zbog (2) postoji $L_i \in \Lambda_i$ da $L_i \subset (A \bigcap J_i) \setminus (B \bigcap J_i) = (A \backslash B) \bigcap J_i$ i da $J_i \backslash L_i \notin \Psi_i$. Dakle,

$$\forall i \in L \; \exists L_i \in \Lambda_i \; (L_i \subset (A \backslash B) \bigcap J_i \wedge J_i \backslash L_i \notin \Psi_i) \tag{4.4}$$

Očigledno, $L_0 = \bigcup_{i\in L} L_i \in \Lambda_0$ i $L_0 \subset A\backslash B$. Dokažimo da $J\backslash L_0 \notin \Psi_0$, to jest da $I_{J\backslash L_0} \notin \Psi$. Pošto je $(J\backslash L_0)\bigcap J_i = J_i\backslash L_0$, u stvari dokazujemo da

$$I_0 = \{i \in I \mid J_i\backslash L_0 \in \Psi_i\} \notin \Psi \tag{4.5}$$

Za $i \in L$ važi $J_i\backslash L_0 \subset J_i\backslash L_i \notin \Psi_i$ pa $J_i\backslash L_0 \notin \Psi_i$, to jest $i \notin I_0$. Dakle, $L \subset I\backslash I_0$, odnosno $I_0 \subset I\backslash L$ pa (5) sledi iz činjenice da $I\backslash L \notin \Psi$. □

Neka je sada, uz gornje pretpostavke, $\{(X_j, \mathcal{O}_j) \mid j \in J\}$ familija topoloških prostora. Cilj ove tačke je da se dokaže da su prostori

$$\prod_{j\in J}{}^{\Lambda_0}_{\Psi_0} X_j \quad \text{i} \quad \prod_{i\in I}{}^{\Lambda}_{\Psi} \prod_{j\in J_i}{}^{\Lambda_i}_{\Psi_i} X_j$$

homeomorfni. Dokaz počinjemo sledećom lemom.

Lema 4.2.2. *Preslikavanje F dato sa*

$$F : (\prod_{j\in J} X_j)/\sim_{\Psi_0} \to (\prod_{i\in I}((\prod_{j\in J_i} X_j)/\sim_{\Psi_i}))/\sim_{\Psi}$$

$$F([f]_{\Psi_0}) = [< [f \mid J_i]_{\Psi_i} \mid i \in I >]_{\Psi}, \quad \textit{za sve} \quad [f]_{\Psi_0} \in (\prod_{j\in J} X_j)/\sim_{\Psi_0}$$

je bijekcija.

Dokaz. Kako za proizvoljno $f, g \in \prod_{j\in J} X_j$ važi:

$$[< [f \mid J_i]_{\Psi_i} \mid i \in I >]_{\Psi} = [< [g \mid J_i]_{\Psi_i} \mid i \in I >]_{\Psi} \quad \text{akko}$$
$$\{i \in I \mid [f \mid J_i]_{\Psi_i} = [g \mid J_i]_{\Psi_i}\} \in \Psi \quad \text{akko}$$
$$\{i \in I \mid \{j \in J_i \mid f_j = g_j\} \in \Psi_i\} \in \Psi \quad \text{akko}$$
$$\{i \in I \mid \{j \in J \mid f_j = g_j\}\bigcap J_i\} \in \Psi_i\} = I_{\{j\in J \mid f_j = g_j\}} \in \Psi \quad \text{akko}$$
$$\{j \in J \mid f_j = g_j\} \in \Psi_0 \quad \text{akko}$$
$$[f]_{\Psi_0} = [g]_{\Psi_0}$$

to važi:

$$F([f]_{\Psi_0}) = F([g]_{\Psi_0}) \iff [f]_{\Psi_0} = [g]_{\Psi_0}.$$

Dobra definisanost F sledi iz smera ($\Leftarrow$) ove ekvivalencije a injektivnost iz obratnog smera.

Dokažimo da je F "na". Za $x \in (\prod_{i\in I}((\prod_{j\in J_i} X_j)/\sim_{\Psi_i}))/\sim_{\Psi}$ postoji $\varphi = <\varphi_i \mid i \in I> \in \prod_{i\in I}((\prod_{j\in J_i} X_j)/\sim_{\Psi_i})$ da je $x = [\varphi]_{\Psi}$. Pritom, $\varphi_i \in (\prod_{j\in J_i} X_j)/\sim_{\Psi_i}$ za $i \in I$ pa (koristeći AC) izaberimo $f^i \in \prod_{j\in J_i} X_j$ da je $\varphi_i = [f^i]_{\Psi_i}$. Neka je $f = \bigcup_{i\in I} f^i$. Tada $f \in \prod_{j\in J} X_j$ i $f \mid J_i = f^i$, gde $i \in I$, pa je

$$x = [<[f \mid J_i]_{\Psi_i} \mid i \in I>]_{\Psi} = F([f]_{\Psi_0}). \quad \square$$

Sledećim dijagramom uvodimo oznake za razne projekcije i faktor preslikavanja

$$\begin{tikzcd}
\prod_{j\in J_i}{}^{\Lambda_i}_{\Psi_i}\mathcal{X}_j & \prod_{i\in I}^{\Lambda}(\prod_{j\in J_i}{}^{\Lambda_i}_{\Psi_i}\mathcal{X}_j) \arrow[l, "\pi_i"'] \arrow[r, "q"] & \prod_{i\in I}{}^{\Lambda}_{\Psi}(\prod_{j\in J_i}{}^{\Lambda_i}_{\Psi_i}\mathcal{X}_j) \\
\prod_{j\in J_i}^{\Lambda_i}\mathcal{X}_j \arrow[u, "q_i"] \arrow[d, "p_j"'] & & \prod_{j\in J}{}^{\Lambda_0}_{\Psi_0}\mathcal{X}_j \arrow[u, "F"'] \\
\mathcal{X}_j & & \prod_{j\in J}^{\Lambda_0}\mathcal{X}_j \arrow[u, "q_{\Psi_0}"'] \arrow[ll, "r_j"']
\end{tikzcd}$$

Lema 4.2.3. *a) Bazu topologije prostora* $\prod_{\Psi}^{\Lambda}(\prod_{\Psi_i}^{\Lambda_i}\mathcal{X}_j)$ *čine skupovi*

$$q(\bigcap_{i\in L}\pi_i^{-1}(q_i(\bigcap_{j\in L_i}p_j^{-1}(B_j^i))))$$

gde $L \in \Lambda, L_i \in \Lambda_i$ *za* $i \in L, B_j^i \in \mathcal{B}_j$ *za sve* $i \in L$ *i* $j \in L_i$.

b) Bazu topologije prostora $\prod_{\Psi_0}^{\Lambda_0}\mathcal{X}_j$ *čine skupovi oblika*

$$q_{\Psi_0}(\bigcap_{j\in\bigcup_{i\in L}L_i} r_j^{-1}(B_j))$$

gde $L \in \Lambda$, $L_i \in \Lambda_i$ *za* $i \in L$ *i gde* $B_j \in \mathcal{B}_j$ *za sve* $j \in \bigcup_{i\in L} L_i$.

Dokaz. a) Prema lemi 2.3.4, jednu bazu topologije na $\prod_{j\in J_i}^{\Lambda_i}\mathcal{X}_j$ čine skupovi oblika $\bigcap_{j\in L_i} p_j^{-1}(B_j^i)$, gde $L_i \in \Lambda_i$ a $B_j^i \in \mathcal{B}_j$. Zato, prema lemi 2.3.3, skupovi oblika $q_i(\bigcap_{j\in L_i} p_j^{-1}(B_j^i))$ čine bazu topologije prostora $\prod_{j\in J_i}{}^{\Lambda_i}_{\Psi_i}\mathcal{X}_j$, gde $i \in I$. Sada, ponovo zbog leme 2.3.4, skupovi oblika

$$\bigcap_{i\in L}\pi_i^{-1}(q_i(\bigcap_{j\in L_i}p_j^{-1}(B_j^i)))$$

gde $L \in \Lambda$, $L_i \in \Lambda_i$ za sve $i \in L$ i $B_j^i \in \mathcal{B}_j$, čine bazu topologije prostora $\prod^{\Lambda}(\prod_{\Psi_i}^{\Lambda_i} \mathcal{X}_j)$, odakle, primenom leme 2.3.3, sledi tvrdjenje.

b) Sledi direktnom primenom lema 2.3.4 i 2.3.3 te iz činjenice da su elementi ideala Λ_0 oblika $\bigcup_{i \in L} L_i$, gde $L \in \Lambda$ i $L_i \in \Lambda_i$, za sve $i \in L$. □

Lema 4.2.4. *Neka $L \in \Lambda$; $L_i \in \Lambda_i$, gde $i \in L, B_j \in \mathcal{B}_j$ za $j \in \bigcup_{i \in L} L_i$. Tada za sve $f \in \prod_{j \in J} X_j$ važi:*

a) $[f]_{\Psi_0} \in F^{-1}(q(\bigcap_{i \in L} \pi_i^{-1}(q_i(\bigcap_{j \in L_i} p_j^{-1}(B_j))))))$ *akko*
$\exists A \in \Psi\ \forall i \in L \bigcap A\ \exists A_i \in \Psi_i\ \forall j \in A_i \bigcap L_i\ f_j \in B_j$.

b) $[f]_{\Psi_0} \in q_{\Psi_0}(\bigcap_{j \in \bigcup_{i \in L} L_i} r_j^{-1}(B_j))$ *akko*
$\exists D \in \Psi_0 \forall j \in D \bigcap (\bigcup_{i \in L} L_i) f_j \in B_j$.

c) $q_{\Psi_0}(\bigcap_{j \in \bigcup_{i \in L} L_i} r_j^{-1}(B_j)) = F^{-1}(q(\bigcap_{i \in L} \pi_i^{-1}(q_i(\bigcap_{j \in L_i} p_j^{-1}(B_j)))))$.

Dokaz. Neka $f \in \prod_{j \in J} X_j$. Korišćenjem leme 2.2.4, sledi:

a)

$$[f]_{\Psi_0} \in F^{-1}(q(\bigcap_{i \in L} \pi_i^{-1}(q_i(\bigcap_{j \in L_i} p_j^{-1}(B_j)))))\ \text{akko}$$

$$[< [f \mid J_i]_{\Psi_i} \mid i \in I >]_{\Psi} \in q(\bigcap_{i \in L} \pi_i^{-1}(q_i(\bigcap_{j \in L_i} p_j^{-1}(B_j))))\ \text{akko}$$

$$\exists A \in \Psi\ \forall i \in L \bigcap A\ [f \mid J_i]_{\Psi_i} \in q_i(\bigcap_{j \in L_i} p_j^{-1}(B_j))\ \text{akko}$$

$$\exists A \in \Psi\ \forall i \in L \cap A\ \exists A_i \in \Psi_i\ \forall j \in A_i \cap L_i\ f_j \in B_j$$

b) se dobija neposrednom primenom leme 2.2.4.

c) ($\subset$) Neka važi b). Neka je $D \in \Psi_0$ takvo da

$$\forall j \in D \cap (\bigcup_{i \in L} L_i)\quad f_j \in B_j \tag{4.6}$$

Kako $D \in \Psi_0$, postoji $A \in \Psi$ da $D \cap J_i = A_i \in \Psi_i$ za sve $i \in A$. Dokazujemo uslov dat u (a). Neka $i \in L \cap A$, i neka je $j \in A_i \cap L_i = D \cap J_i \cap L_i = D \cap L_i$. Tada, zbog (1) važi $f_j \in B_j$, što dokazuje (a).

($\supset$) Neka važi uslov iz (a). Definišimo

$$D_i = \begin{cases} A_i & \text{za} \quad i \in L \cap A \\ J_i & \text{za} \quad i \in A \setminus L. \end{cases}$$

Tada $D = \bigcup_{i \in A} D_i \in \Psi_0$. Neka je $D \cap (\bigcup_{i \in L} L_i)$. Tada postoji $i_0 \in L \cap A$ da važi $j \in D_i \cap L_i = A_i \cap L_i$ pa zbog (a) imamo $f_j \in B_j$, što dokazuje (b). □

Sada smo u mogućnosti da dokažemo glavnu teoremu.

Teorema 4.2.1. *Preslikavanje F definisano u lemi 4.2.2 je homeomorfizam.*

Dokaz. Obzirom na rezultate leme 4.2.3, iz (c) prethodne leme sledi neprekidnost preslikavanja F dok se otvorenost F dobija iz jednakosti

$$F(q_{\Psi_0}(\bigcap_{j \in \bigcup_{i \in L} L_i} r_j^{-1}(B_j))) = q(\bigcap_{i \in L} \pi_i^{-1}(q_i(\bigcap_{j \in L_i} p_j^{-1}(B_j))))$$

koja je takodje dobijena iz (c) prethodne leme i činjenice da je F bijekcija. □

4.3 Istorijske i bibliografske napomene

Specijalni slučaj leme 4.1.1. za direktan proizvod preslikavanja tihonovskih proizvoda može se naći u [14] str. 131 i 139. Slično tvrdjenje za Knightov boks - proizvod nalazi se u [27] str. 44. teorema 4.1.1. za tihonovske proizvode nalazi se u [14] str. 139 a za Knightov boks - proizvod u [27] str. 44. Poseban slučaj teoreme 4.1.2. za ultraproizvode može se naći u članku Bankstona [2] str. 285.

Delovi (a) i (b) leme 4.2.1 su dobro poznati i dati su zbog kompletnosti teksta. Specijalni slučaj teoreme 4.2.1 za tihonovski proizvod je teorema o asocijativnosti (videti u [14] str. 129). Ista teorema za ultraproizvod je implicitno sadržana u [45], teorema A 2.3. (Videti i sekciju 6.5 u [6]).

Glava 5

R.i.p. topoloških algebri

5.1 Ideal-proizvod topoloških grupa

Definicija 5.1.1. *Uređeni par $(G, \oplus)$ gde je G neprazan skup i $\oplus : G \times G \to G$ binarna operacija na G takva da važi*

(G_1) $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$ *za sve* $x, y, z \in G$

(G_2) *postoji* $e \in G$ *da za sve* $x \in G$ $e \oplus x = x \oplus e = x$

(G_3) *za svako* $x \in G$ *postoji* $x^{-1} \in G$ *da* $x \oplus x^{-1} = e$

je grupa. Ako pritom važi još i

(G_4) *za sve* $x, y \in G$ $x \oplus y = y \oplus x$

onda je $(G, \oplus)$ Abelova (komutativna) grupa.

Element $e \in G$ zovemo neutralni element. Za $x \in X$, element x^{-1} je njegov inverzni element. U teoriji grupa pokazuje se da je neutralni element jedinstven i da za svako $x \in X$ postoji jedinstven inverzni element. Zato je preslikavanje $\varphi : G \to G$ dato sa $\varphi(x) = x^{-1}$ dobro definisano.

Definicija 5.1.2. *Neka je $(G, \oplus)$ grupa. Ako je na G data topologija $\mathcal{O}$ tako da važi*

(TG_1) *preslikavanje* $\oplus : G \times G \to G$ *je neprekidno*

(TG_2) *preslikavanje* $\varphi : G \to G$ *dato sa* $\varphi(x) = x^{-1}$ *je neprekidno*

onda je G topološka grupa. Ako je pritom $(G, \mathcal{O})$ T_1-*prostor, G je tada* T_1- *topološka grupa.*

U opštoj topologiji se pokazuje da je svaka T_1-topološka grupa $T_{3\frac{1}{2}}$ prostor.

Napomena 5.1.1 U novijoj literaturi pod topološkom grupom se podrazumeva T_1-topološka grupa. Definicija 5.1.2 je motivisana praktičnim razlozima.

Za dalji rad biće nam potrebno sledeće tvrđenje

Lema 5.1.1. *Neka je I neprazan skup,* $\Lambda \subset P(I)$ *ideal na I i neka su* $\{\mathcal{X}_i | i \in I\}$ *i* $\{\mathcal{Y}_i | i \in I\}$ *gde* $\mathcal{X}_i = (X_i, \mathcal{O}_i^X)$, $\mathcal{Y}_i = (Y_i, \mathcal{O}_i^Y)$, *familije topoloških prostora. Tada je preslikavanje* $\eta : \Pi^\Lambda \mathcal{X}_i \times \Pi^\Lambda \mathcal{Y}_i \to \Pi^\Lambda(\mathcal{X}_i \times \mathcal{Y}_i)$ *dato sa* $\eta(\langle f_i \rangle, \langle g_i \rangle) = \langle (f_i, g_i) \rangle$ *homeomorfizam.*

Dokaz: (i) η je bijekcija što je lako proveriti.

(ii) η je neprekidno. Bazu toplogije na $\mathcal{X}_i \times \mathcal{Y}_i$ čine skupovi oblika $U_i \times V_i$ gde $U_i \in \mathcal{O}_i^X$ a $V_i \in \mathcal{O}_i^Y$. Zato, prema lemi 2.3.4, bazu topologije na $\Pi^\Lambda(\mathcal{X}_i \times \mathcal{Y}_i)$ čine skupovi oblika $\bigcap_{i \in L} \pi_i^{-1}(U_i \times V_i)$ gde $L \in \Lambda$. Dokažimo

$$\eta^{-1}(\bigcap_{i \in L} \pi_i^{-1}(U_i \times V_i)) = (\bigcap_{i \in L} \pi_i^{-1}(U_i)) \times (\bigcap_{i \in L} \pi_i^{-1}(V_i)) \qquad (*)$$

Neka $(f, g) \in \eta^{-1}(\bigcap_{i \in L} \pi_i^{-1}(U_i \times V_i)) \Longleftrightarrow \eta(f, g) = \langle (f_i, g_i) \rangle \in \bigcap_{i \in L} \pi_i^{-1}$ $(U_i \times V_i)$ to jest za sve $i \in L$, $f_i \in U_i$ i $g_i \in V_i$. Zato $f \in \bigcap_{i \in L} \pi_i^{-1}(U_i)$ i $g \in \bigcap_{i \in L} \pi_i^{-1}(V_i)$ što dokazuje traženu jednakost.

Kako je $\bigcap_{i \in L} \pi_i^{-1}(U_i)$ otvoren u $\Pi^\Lambda \mathcal{X}_i$ a $\bigcap_{i \in L} \pi_i^{-1}(V_i)$ otvoren u $\Pi^\Lambda \mathcal{X}_i$, to je prema $(*)$ inverzna slika svakog baznog otvorenog skupa pri preslikavanju η otvorena, pa je η neprekidno preslikavanje.

(iii) η je otvoreno. Obzirom da je η "na", iz $(*)$ dobijamo $\bigcap_{i \in L} \pi_i^{-1}(U_i \times V_i) = \eta((\bigcap_{i \in L} \pi_i^{-1}(U_i)) \times (\bigcap_{i \in L} \pi_i^{-1}(V_i))$. Tako je slika svakog baznog otvorenog skupa iz $\Pi^\Lambda \mathcal{X}_i \times \Pi^\Lambda \mathcal{Y}_i$ otvorena. Naravno ovo važi i za sve otvorene skupove. $\square$

Neka su sada $(G_i, \oplus_i)$ grupe gde $i \in I$. Na skupu ΠG_i definišemo operaciju $\oplus$ na sledeći način

$$\langle f_i \rangle \oplus \langle g_i \rangle = \langle f_i \oplus_i g_i \rangle$$

Ako su G_i i topološke grupe posmatraćemo prostor $\Pi^\Lambda G_i$ (ideal proizvod odgovarajućih prostora).

Teorema 5.1.1. *(i)* $(\Pi G_i, \oplus)$ *je grupa.*
(ii) $\Pi^\Lambda G_i$ *je topološka grupa (s obzirom na* $\oplus$*).*

Dokaz: (i) Provera je elementarna i dobro poznata. Neutralni element je $\langle e_i | i \in I \rangle$ gde je e_i neutralni element u G_i. Za $\langle f_i \rangle \in \Pi G_i$ inverzni element je $\langle f_i^{-1} | i \in I \rangle (= \langle \varphi_i(f_i) \rangle)$.

(ii) Neka je $\oplus^\Lambda = \Pi_{i \in I} \oplus_i : \Pi^\Lambda (G_i \times G_i) \to \Pi^\Lambda G_i$ Dekartov proizvod preslikavanja $\oplus_i$, $i \in I$. Prema lemi 4.1.1 pošto su sva preslikavanja $\oplus_i$ neprekidna (G_i su topološke grupe) i preslikavanje $\oplus^\Lambda$ je neprekidno. Dokažimo da komutira dijagram:

$$\begin{tikzcd} \Pi^\Lambda (G_i \times G_i) \arrow[rr, "\oplus^\Lambda"] & & \Pi^\Lambda G_i \\ & \Pi^\Lambda G_i \times \Pi^\Lambda G_i \arrow[ul, "\eta"] \arrow[ur, "\oplus"'] & \end{tikzcd}$$

to jest da je $\oplus = \oplus^\Lambda \circ \eta$, gde je η homeomorfizam iz leme 5.1.1 za $\mathcal{X}_i = \mathcal{Y}_i = G_i$. Neka je $(f,g) \in \Pi^\Lambda G_i \times \Pi^\Lambda G_i$. Tada $(\oplus^\Lambda \circ \eta)(f,g) = \oplus^\Lambda(\langle (f_i, g_i) \rangle) = \langle \oplus_i (f_i, g_i) \rangle = \langle f_i \oplus_i g_i \rangle = f \oplus g = \oplus(f,g)$ pa je zaista $\oplus = \oplus^\Lambda \circ \eta$. Iz neprekidnosti $\oplus^\Lambda$ i η sledi neprekidnost $\oplus$.

Dokažimo sada da je preslikavanje $\varphi^\Lambda : \Pi^\Lambda G_i \to \Pi^\Lambda G_i$ dato sa $\varphi^\Lambda(f) = f^{-1} = \langle \varphi_i(f_i) \rangle$ gde je $\varphi_i(f_i) = f_i^{-1}$ neprekidno. G_i su topološke grupe, pa su preslikavanja $\varphi_i : G_i \to G_i$ neprekidna. Zato je prema lemi 4.1.1 i φ^Λ neprekidno preslikavanje.

5.2 R.i.p. topoloških grupa

Neka su ponovo $(G_i, \oplus_i)$ topološke grupe sa topologijama $\mathcal{O}_i$ gde $i \in I$. Neka je $\Lambda \subset P(I)$ ideal i $\Psi \subset P(I)$ filter na I. Na skupu $\Pi G_i / \sim$ definišemo operaciju $\oplus_\Psi$ na sledeći način:

$$[f] \oplus_\Psi [g] = [f \oplus g].$$

($\oplus$ je operacija na ΠG_i iz prethodne tačke).

Lema 5.2.1. *Operacija $\oplus_\Psi$ je dobro definisana.*

Dokaz: Neka $f, f', g, g' \in \Pi G_i$ i neka $f \sim f'$ i $g \sim g'$. Tada $A = \{i | f_i = f'_i\}$, $B = \{i | g_i = g'_i\} \in \Psi$. Za $i \in A \cap B$ važi $f_i = f'_i$ i $g_i = g'_i$ pa je $f_i \oplus_i g_i = f'_i \oplus_i g'_i$. Zato $A \cap B \subset \{i | f_i \oplus_i g_i = f'_i \oplus_i g'_i\} \in \Psi$ pa je $f \oplus g \sim f' \oplus g'$ to jest $[f \oplus g] = [f' \oplus g']$. □
Sem operacija $\oplus_i$ na G_i imamo i topologije $\mathcal{O}_i$ pa možemo posmatrati redukovani ideal proizvod topoloških prostora $(G_i, \mathcal{O}_i)$ u oznaci $\Pi^\Lambda_\Psi G_i$.

Teorema 5.2.1. *(i)* $(\Pi G_i/\sim, \oplus_\Psi)$ *je grupa.*
(ii) $\Pi^\Lambda_\Psi G_i$ *je topološka grupa.*

Dokaz: (i) je direktno, pošto je $(\Pi G_i, \oplus)$ grupa. Neutralni element je $[e]$ a $[f]^{-1} = [f^{-1}]$.
(ii) Dokažimo neprekidnost $\oplus_\Psi$. Posmatrajmo dijagram

$$\begin{array}{ccc} \Pi^\Lambda G_i \times \Pi^\Lambda G_i & \xrightarrow{q \times q} & \Pi^\Lambda_\Psi G_i \times \Pi^\Lambda_\Psi G_i \\ \oplus \downarrow & & \downarrow \oplus_\Psi \\ \Pi^\Lambda G_i & \xrightarrow{q} & \Pi^\Lambda_\Psi G_i \end{array}$$

Dokažimo da dijagram komutira, to jest da je

$$q \circ \oplus = \oplus_\Psi \circ (q \times q).$$

Za $(f, g) \in \Pi^\Lambda G_i \times \Pi^\Lambda G_i$ važi: $(\oplus_\Psi \circ (q \times q))(f, g) = \oplus_\Psi((q \times q)(f, g)) = \oplus_\Psi(q(f), q(g)) = \oplus_\Psi([f], [g]) = [f] \oplus_\Psi [g] = [f \oplus g] = [\oplus(f, g)] = q(\oplus(f, g)) = (q \circ \oplus)(f, g)$.
Prema teoremi 5.1.1 funkcija $\oplus$ je neprekidna a kako je (lema 2.3.2) i q neprekidno to je $q \circ \oplus$ to jest $\oplus_\Psi \circ (q \times q)$ neprekidno preslikavanje. No q je neprekidno, otvoreno i "na" pa ove osobine ima i Dekartov proizvod $q \times q$. Prema lemi 2.4.1 tada je i $\oplus_\Psi$ neprekidno.

Dokažimo da je preslikavanje $\varphi^\Lambda_\Psi : \Pi^\Lambda_\Psi G_i \to \Pi^\Lambda_\Psi G_i$ dato sa $\varphi^\Lambda_\Psi([f]) = [f]^{-1}$ neprekidno. Dokažimo da dijagram

$$\begin{array}{ccc} \Pi^\Lambda G_i & \xrightarrow{q} & \Pi^\Lambda_\Psi G_i \\ \varphi^\Lambda \downarrow & & \downarrow \varphi^\Lambda_\Psi \\ \Pi^\Lambda G_i & \xrightarrow{q} & \Pi^\Lambda_\Psi G_i \end{array}$$

komutira, tj. da je $q \circ \varphi^\Lambda = \varphi^\Lambda_\Psi \circ q$. Neka $f \in \Pi G_i$. Tada $(\varphi^\Lambda_\Psi \circ q)(f) = \varphi^\Lambda_\Psi(q(f)) = \varphi^\Lambda_\Psi([f]) = [f]^{-1} = [f^{-1}] = [\varphi^\Lambda(f)] = q(\varphi^\Lambda(f)) = (q \circ \varphi^\Lambda)(f)$ što dokazuje traženu jednakost. Prema teoremi 5.1.1, φ^Λ je neprekidno, pa je neprekidna i kompozicija $q \circ \varphi^\Lambda$ to jest $\varphi^\Lambda_\Psi \circ q$. Prema lemi 2.4.1 tada je i φ^Λ_Ψ neprekidno. □

Primetimo da u prethodnoj teoremi Λ i Ψ ne moraju da zadovolje uslov $(\Lambda\Psi)$ pa teorema važi za proizvoljan r.i.p. No ako ovaj uslov nije zadovoljen $\Pi^\Lambda_\Psi G_i$ može biti topološka grupa sa antidiskretnom topologijom, što pokazuje sledeći primer.

Primer 5.2.1. Neka je $I = N$, G_i topološka grupa realnih brojeva sa operacijom sabiranja za sve $i \in I$ i neka je $\Lambda = [I]^{<\omega}$ a $\Psi = \{L^c | L \in \Lambda\}$. Tada je $\Pi^\Lambda_\Psi G_i$, prema teoremi 5.2.1, topološka grupa, no istovremeno to je antidiskretan topološki prostor (videti primer posle leme 2.6.1).

Teorema 5.2.2. *Neka ideal Λ i filter Ψ zadovoljavaju uslov $(\Lambda\Psi)$ i neka su G_i T_1−topološke grupe za sve $i \in I$. Tada je $\Pi^\Lambda_\Psi G_i$ T_1−topološka grupa.*

Dokaz: Ovo je posledica teoreme 5.2.1 i teoreme 2.6.1. □

5.3 R.i.p. topoloških prstena

Definicija 5.3.1. *Uredjena trojka $(R, \oplus, \odot)$ gde je R neprazan skup a $\oplus : R^2 \to R$ i $\odot : R^2 \to R$ binarne operacije na R, takve da važi:*

(R_1) $(R, \oplus)$ je Abelova grupa;

(R_2) $x \odot (y \odot z) = (x \odot y) \odot z$, za sve $x, y, z \in R$;

(R_3) $x \odot (y \oplus z) = x \odot y \oplus x \odot z, (x \oplus y) \odot z = x \odot z \oplus y \odot z$, za sve $x, y, z \in R$, je prsten.

Definicija 5.3.2. *Uredjena četvorka $(R, \oplus, \odot, \mathcal{O})$ gde je $(R, \oplus, \odot)$ prsten i $\mathcal{O}$ topologija na R da važi:*

(TR_1) $(R, \oplus)$ je topološka grupa (tj. operacije $\oplus : R^2 \to R$ i $^{-1} : R \to R$ su neprekidne);

(TR_2) preslikavanje $\odot : R^2 \to R$ je neprekidno,
je topološki prsten. Ako je $(R, \mathcal{O})$ prostor koji zadovoljava T_1 aksiomu separacije, onda je $(R, \oplus, \odot, \mathcal{O})$ T_1- topološki prsten.

Kao kod topoloških grupa važi: T_1- topološki prsten je $T_{3\frac{1}{2}}-$ prostor. Takodje, r.i.p. topoloških prstena je topološki prsten. Preciznije, važi sledeća teorema:

Teorema 5.3.1. *Neka je I neprazan skup, $\Lambda \subset P(I)$ ideal i $\Psi \subset P(I)$ filter na I. Neka je $\{(R_i, \oplus_i, \odot_i, \mathcal{O}_i) \mid i \in I\}$ familija topoloških prstena. Tada važi:*

(i) Ako na skupu ΠR_i definišemo operacije $\oplus$ i $\odot$ sa

$$< f_i > \oplus < g_i > = < f_i \oplus_i g_i > \quad i \quad < f_i > \odot < g_i > = < f_i \odot_i g_i >,$$

za sve $< f_i >, < g_i > \in \Pi R_i$ i ako je $\mathcal{O}^\Lambda$ ideal - topologija na ΠR_i odredjena idealom Λ, onda je $(\Pi R_i, \oplus, \odot, \mathcal{O}^\Lambda)$ topološki prsten.

(ii) Ako je $\sim$ relacija ekvivalencije na ΠR_i odredjena filtrom Ψ; ako na skupu $\Pi R_i / \sim$ definišemo operacije $\oplus_\Psi$ i $\odot_\Psi$ sa

$$[f] \oplus_\Psi [g] = [f \oplus g] \quad i \quad [f] \odot_\Psi [g] = [f \odot g],$$

za sve $[f], [g] \in \Pi R_i / \sim$ i ako je $\mathcal{O}^\Lambda_\Psi$ odgovarajuća topologija redukovanog ideal - proizvoda, onda je četvorka $(\Pi R_i / \sim, \oplus_\Psi, \odot_\Psi, \mathcal{O}^\Lambda_\Psi)$ ili kraće $\Pi^\Lambda_\Psi R_i$ topološki prsten.

(iii) Ako su "skoro svi" prostori $(R_i, \mathcal{O}_i)$ T_1- prostori i važi $(\Lambda\Psi)$, onda je $(\Pi R_i / \sim, \oplus_\Psi, \odot_\Psi, \mathcal{O}^\Lambda_\Psi)$ T_1- topološki prsten.

Dokaz. (i) Provera da je $(\Pi R_i, \oplus, \odot)$ prsten je elementarna. Prema teoremi 5.1.1. $(\Pi R_i, \oplus, \mathcal{O}^\Lambda)$ je topološka grupa. Ostaje da se dokaže neprekidnost operacije $\odot : \Pi^\Lambda R_i \times \Pi^\Lambda R_i \to \Pi^\Lambda R_i$. Neka je

$$\odot^\Lambda : \Pi^\Lambda (R_i \times R_i) \to \Pi^\Lambda R_i$$

direktan proizvod preslikavanja $\odot_i$. lema 4.1.1. daje neprekidnost $\odot^\Lambda$. Ako je η homeomorfizam iz leme 5.1.1., neprekidnost $\odot$ sledi iz činjenice da komutira dijagram:

$$\begin{array}{ccc} \prod^{\wedge}(R_\iota \times R_\iota) & \overset{\odot^{\wedge}}{\rightarrow} & \prod^{\wedge} R_\iota \\ \nwarrow \eta & & \odot \nearrow \\ & \prod^{\wedge} R_\iota \times \prod^{\wedge} R_\iota & \end{array}$$

(ii) Lako se proverava da su operacije $\oplus_\Psi$ i $\odot_\Psi$ dobro definisane i da je $(\Pi R_\iota / \sim, \oplus_\Psi, \odot_\Psi)$ prsten. U teoremi 5.2.1. dokazano je da je $(\Pi R_\iota / \sim, \oplus_\Psi, \mathcal{O}_\Psi^\Lambda)$ topološka grupa. Dalje, lako se proverava da dijagram

$$\begin{array}{ccc} \prod^{\wedge} R_\iota \times \prod^{\wedge} R_\iota & \overset{q\times q}{\rightarrow} & \prod^{\Lambda}_{\Psi} R_\iota \times \prod^{\Lambda}_{\Psi} R_\iota \\ \odot \downarrow & & \downarrow \odot_\Psi \\ \prod^{\wedge} R_\iota & \overset{q}{\rightarrow} & \prod^{\Lambda}_{\Psi} R_\iota \end{array}$$

komutira, to jest da je $q \circ \odot = \odot_\Psi \circ (q \times q)$. Sada neprekidnost $\odot$ i q daje neprekidnost $\odot_\Psi \circ (q \times q)$. Sem toga, preslikavanje q je neprekidno, otvoreno i "na" pa je takvo i $q \times q$. Konačno, lema 2.4.1. daje neprekidnost $\odot_\Psi$;

(iii) je posledica teoreme 2.6.1. □

Primer 5.3.1. U primeru 5.2.1. dat je r.i.p. topoloških prstena (realnih brojeva) koji je topološki gledano trivijalan (antidiskretan prostor). Uslov $(\Lambda\Psi)$ ovde nije bio zadovoljen. Ako (što je u savremenoj literaturi uobičajeno) u definiciju topološkog prstena uključimo i uslov da je to T_1 ili (što je ekvivalentno) $T_{3\frac{1}{2}}-$ prostor onda uslov $(\Lambda\Psi)$ postaje važan za prezervaciju.

Napomena 5.3.1. Pošto već direktan proizvod dva polja nije polje, to r.i.p. topoloških polja ne mora biti topološko polje. (Topološki prsten će biti sigurno). Ultraproizvod (kao poseban r.i.p.) topoloških polja jeste topološko polje (videti u [2]).

Napomena 5.3.2. Metoda korišćena za dokazivanje neprekidnosti operacija $\oplus_\Psi$ i $\odot_\Psi$ može se direktno primeniti na bilo koju binarnu pa i $n-$arnu operaciju. Tako se mogu dobiti rezultati o r.i.p. raznih topoloških algebri, slični teoremama 5.2.1. i 5.3.1.

5.4 Istorijske i bibliografske napomene

Teoreme 5.1.1., 5.2.1. i 5.2.2. govore o ideal proizvodu odnosno r.i.p. topoloških grupa. Poseban slučaj ovih teorema za tihonovske proizvode može se naći u [14] str. 673. Analogna teorema za puni boks - proizvod data je u [45] str. 175, a odgovarajuće tvrdjenje za ultraproizvod nalazi se u [2] str. 286.

Analogon teoreme 5.3.1. za r.i.p. topoloških prstena u slučaju ultraproizvoda dat je u [2] str. 286.

Glava 6

Otvorenost r.i.p.

6.1 Prvi rezultati o otvorenosti r.i.p.

Definicija 6.1.1. *Neka je $\mu \geq \omega$ kardinal. Topološki prostor $(X, \mathcal{O})$ je $\mu-$otvoren akko je presek proizvoljne familije otvorenih skupova koja je kardinalnosti manje od μ otvoren skup, tj. akko $\forall \Omega \subset \mathcal{O}(|\Omega| < \mu \Rightarrow \bigcap \Omega \in \mathcal{O})$.*

Očigledno, svaki topološki prostor je $\omega-$otvoren. ω_1-otvoren prostor zovemo $P-$prostor. To je prostor u kome je presek prebrojive familije otvorenih skupova otvoren skup (tj. G_δ skupovi su otvoreni).

Lema 6.1.1. *Neka su $(X, \mathcal{O}_X)$ i $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topološki prostori i neka je $f : X \rightarrow Y$ preslikavanje koje je neprekidno, otvoreno i "na". Ako je tada X $\mu-$otvoren, onda je i Y $\mu-$otvoren prostor.*

Dokaz: Neka je λ kardinal gde $\lambda < \mu$ i neka je $O_\alpha \in \mathcal{O}_Y$ za $\alpha < \lambda$. Zbog neprekidnosti f skupovi $f^{-1}(O_\alpha) \in \mathcal{O}_X$ za sve $\alpha < \lambda$, pa kako je X $\mu-$otvoren to i $\bigcap_{\alpha<\lambda} f^{-1}(O_\alpha) = f^{-1}(\bigcap_{\alpha<\lambda} O_\alpha) \in \mathcal{O}_X$. Otvorenost f daje $f(f^{-1}(\bigcap_{\alpha<\lambda} O_\alpha)) \in \mathcal{O}_Y$ no kako je f "na" važi $f(f^{-1}(\bigcap_{\alpha<\lambda} O_\alpha)) = \bigcap_{\alpha<\lambda} O_\alpha$. Zato $\bigcap_{\alpha<\lambda} O_\alpha \in \mathcal{O}_Y$. $\square$

Lema 6.1.2. *Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor i $\mathcal{B}$ baza topologije $\mathcal{O}$. Tada za beskonačan kardinal μ važi:*

X je $\mu-$otvoren akko $\forall \mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ $(|\mathcal{A}| < \mu \Rightarrow \bigcap \mathcal{A} \in \mathcal{O})$

Dokaz: ($\Rightarrow$) trivijalno, jer $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$.

($\Leftarrow$) Neka je $\Omega \subset \mathcal{O}$ i $|\Omega| = \nu < \mu$. Ako je $\bigcap \Omega = \emptyset$, dokaz je završen. Neka $x \in \bigcap \Omega$. Tada za svako $O \in \Omega$, $x \in O$ pa postoji $B_O \in \mathcal{B}$ da $x \in B_O \subset O$. Za familiju $\mathcal{A} = \{B_O | O \in \Omega\}$ važe uslovi pa $\bigcap \mathcal{A} = \bigcap_{O \in \Omega} B_O \in \mathcal{O}$. Kako $x \in \bigcap \mathcal{A} \subset \bigcap \Omega$, skup $\bigcap \Omega$ je okolina svake svoje tačke pa je otvoren. □

Definicija 6.1.2. *Ideal $\Lambda \subset P(I)$ je μ–kompletan akko $\forall M \subset \Lambda$ ($|M| < \mu \Rightarrow \bigcup M \in \Lambda$).*

Jasno svaki ideal je ω–kompletan. ω_1–kompletan ideal je zatvoren prema prebrojivim unijama itd.

Sada prelazimo na pitanje otvorenosti r.i.p.

Teorema 6.1.1. *Neka su $\kappa, \mu \geq \omega$ kardinali, Λ κ–kompletan ideal na I, Ψ proizvoljan filter na I i neka su prostori $\mathcal{X}_i$, $i \in I$ μ–otvoreni. Tada je $\Pi_\Psi^\Lambda \mathcal{X}_i$ λ–otvoren, gde je $\lambda = \min\{\kappa, \mu\}$.*

Dokaz: Neka je ν kardinal, gde $\nu < \lambda$ i neka je $B_\alpha = \bigcap_{i \in L_\alpha} \pi_i^{-1}(O_i^\alpha) \in \mathcal{B}^\Lambda$ gde $\alpha < \nu$. Sada $\nu < \kappa$ pa $L = \bigcup_{\alpha < \nu} L_\alpha \in \Lambda$. Ako za sve $\alpha < \nu$ i sve $i \in L \setminus L_\alpha$ dodefinišemo $O_i^\alpha = X_i$, onda je $B_\alpha = \bigcap_{i \in L} \pi_i^{-1}(O_i^\alpha)$ gde $\alpha < \nu$. Dokazujemo da $\bigcap_{\alpha < \nu} B_\alpha \in \mathcal{O}^\Lambda$. Ako je $\bigcap_{\alpha < \nu} B_\alpha = \emptyset$, dokaz je gotov. Neka $f \in \bigcap_{\alpha < \nu} B_\alpha$. Tada za sve $\alpha < \nu$ i sve $i \in L$, $f_i \in O_i^\alpha$, pa $f_i \in \bigcap_{\alpha < \nu} O_i^\alpha = V_i$ za sve $i \in L$. Kako je $\nu < \mu$, μ–otvorenost prostora $\mathcal{X}_i$ daje $V_i \in \mathcal{O}_i$. Dalje, za fiksirano $\alpha < \nu$, za sve $i \in L$ je $V_i \subset O_i^\alpha$ pa je $W_f = \bigcap_{i \in L} \pi_i^{-1}(V_i) \subset \bigcap_{i \in L} \pi_i^{-1}(O_i^\alpha) = B_\alpha$. Znači za sve $\alpha < \nu$, $f \in W_f \subset B_\alpha$ pa je $f \in W_f \subset \bigcap_{\alpha < \nu} B_\alpha$ i pritom $W_f \in \mathcal{O}^\Lambda$. Skup $\bigcap_{\alpha < \nu} B_\alpha$ je okolina svoje proizvoljne tačke pa je otvoren.

Dakle, presek manje od λ baznih skupova u prostoru $\Pi^\Lambda \mathcal{X}_i$ je otvoren, pa je prema lemi 6.1.2 $\Pi^\Lambda \mathcal{X}_i$ λ–otvoren prostor. Dalje, $q : \Pi^\Lambda \mathcal{X}_i \to \Pi_\Psi^\Lambda \mathcal{X}_i$ je otvoreno preslikavanje, pa je prema lemi 6.1.1 i $\Pi_\Psi^\Lambda \mathcal{X}_i$ λ–otvoren. □

Koristeći teoremu o redukciji r.i.p. uslovi gornje teoreme mogu se oslabiti. Naime teorema važi ako $\{i \in I | \mathcal{X}_i$ je μ–otvoren$\} = A \in \Psi$. (Tada je $\Pi_\Psi^\Lambda \mathcal{X}_i$ homeomorfan sa $\prod_{i \in A} {}_{\Psi_A}^{\Lambda_A} \mathcal{X}_i$ a Λ_A je ponovo κ–kompletan ideal jer je $\Lambda_A \subset \Lambda$).

Teorema 6.1.1 svodi se na trivijalno tvrđenje ako je $\kappa = \omega$ ili $\mu = \omega$. Dakle prvi interesantan slučaj imamo za $\kappa = \mu = \omega_1$:

Posledica 6.1.1. *Neka je za sve $i \in I$ $\mathcal{X}_i$ $P-$prostor i Λ prebrojivo kompletan ideal. Tada je $\Pi_\Psi^\Lambda \mathcal{X}_i$ $P-$prostor.*

Specijalno, ideal $\Lambda = P(I)$ je (uvek) prebrojivo kompletan pa sledi poznato tvrđenje: Ako su $\mathcal{X}_i$, $i \in I$ $P-$prostori, onda je $\square \mathcal{X}_i$ (puni boks-proizvod) takođe $P-$prostor. Opštije važi:

Posledica 6.1.2. *Neka je $|I| \geq \kappa > \lambda \geq \omega$ gde je κ regularan kardinal, i neka su $\mathcal{X}_i$, $i \in I$ $P-$prostori. Tada je $\square_\lambda^\kappa \mathcal{X}_i$ (boks-proizvod) takođe $P-$prostor.*

Dokaz: Ovde je $\Lambda = [I]^{<\kappa}$, gde $\kappa > \omega$. Dokažimo da je Λ $\omega-$kompletan. Neka $L_n \in \Lambda$, $n \in \omega$. Tada je $|\bigcup_{n\in\omega} L_n| \leq \sum_{n\in\omega} |L_n| = \omega \cdot \sup\{|L_n| \; |n \in \omega\} < \kappa$ jer je $|L_n| < \kappa$ za sve $n \in \omega$ pa je $\sup\{|L_n| \; |n \in \omega\} < \kappa$ jer je κ regularan. $\square$

Ako je $\kappa = \kappa_1^+$ (sledbenik kardinal) onda se kao u prethodnom dokazu pokazuje da je $[I]^{<\kappa}$ u stvari $\kappa-$kompletan ideal. Tada je za razne stepene otvorenosti prostora $\mathcal{X}_i$ moguće formulisati razna uopštenja posledice 6.1.2.

6.2 Otvorenost r.i.p. kada je Ψ regularan

U ovoj tački pokazujemo da se tvrđenje u teoremi 6.1.1 pod dodatnim uslovima na Ψ može pojačati.

Definicija 6.2.1. *Neka su $\mu, \kappa \geq \omega$ kardinali. Filter $\Psi \subset P(I)$ je $(\mu, \kappa)-$regularan akko*

$$\exists \{A_\alpha | \alpha < \kappa\} \subset \Psi \qquad \forall i \in I \;\; |\{\alpha < \kappa | \, i \in A_\alpha\}| < \mu.$$

Specijalno, za $\mu = \omega$ imamo $\kappa-$regularan filter. To je filter u kome postoji familija kardinalnosti κ koja je konačna u svakoj tački (tj. svako $i \in I$ sadržano je u najviše konačno elemenata ove familije)

Teorema 6.2.1. *Neka su μ i κ kardinali gde $\kappa \geq \mu \geq \omega$ i neka su $\mathcal{X}_i = (X_i, \mathcal{O}_i)$ $\mu-$otvoreni topološki prostori za sve $i \in I$. Ako je Λ κ^+-kompletan ideal na I i Ψ (μ, κ) regularan filter na I, onda je r.i.p. $\Pi_\Psi^\Lambda \mathcal{X}_i$ κ^+-otvoren.*

Dokaz: Prema lemi 2.3.2, $\mathcal{B}^{\Lambda}_{\Psi} = \{q(\bigcap_{i\in L}\pi_i^{-1}(O_i))|L \in \Lambda,\ O_i \in \mathcal{O}_i\}$ je baza topologije na $\Pi^{\Lambda}_{\Psi}\mathcal{X}_i$. Za dokaz κ^+-otvorenosti ovog prostora je, prema lemi 6.1.2, dovoljno pokazati da je presek κ elemenata iz $\mathcal{B}^{\Lambda}_{\Psi}$ otvoren. Neka je

$$B_\alpha = q(\bigcap_{i\in L_\alpha}\pi_i^{-1}(O_i^\alpha)) \qquad \text{gde} \qquad \alpha < \kappa.$$

Za one α za koje je $L_\alpha \cap A = \emptyset$, za neko $A \in \Psi$, prema lemi 2.2.4 imamo $B_\alpha = \Pi^{\Lambda}_{\Psi}\mathcal{X}_i$. Dakle oni su neutralni u odnosu na presek te ih možemo isključiti. Zato bez ograničenja opštosti pretpostavimo da za sve $\alpha < \kappa$ i sve $A \in \Psi$ važi $L_\alpha \cap A \neq \emptyset$.

Kako je Λ κ^+-kompletan, to $L = \bigcup_{\alpha<\kappa} L_\alpha \in \Lambda$. Zato je $B_\alpha = q(\bigcap_{i\in L}\pi_i^{-1}(O_i^\alpha))$ gde $O_i^\alpha = X_i$ za $i \in L\setminus L_\alpha$

Ako je $\bigcap_{\alpha<\kappa} B_\alpha = \emptyset$, dokaz je gotov.

Neka $[f] = q(f) \in \bigcap_{\alpha<\kappa} B_\alpha$. Tada za sve $\alpha < \kappa$ $f \in q^{-1}(B_\alpha) = (\bigcap_{i\in L}\pi_i^{-1}(O_i^\alpha))^*$ pa prema lemi 2.2.3 (iv) postoji $C_\alpha \in \Psi$ da za sve $i \in L \bigcap C_\alpha$ važi $f_i \in O_i^\alpha$. Neka je $\{A_\alpha|\alpha < \kappa\} \subset \Psi$ familija iz definicije 6.2.1. Tada imamo:

$$\forall\alpha < \kappa \quad \forall i \in E_\alpha = L \cap C_\alpha \cap A_\alpha \qquad f_i \in O_i^\alpha \qquad\qquad (*)$$

Kako je $E = \bigcup_{\alpha<\kappa} E_\alpha \subset L$ to $E \in \Lambda$. Za $i \in E$ definišemo

$$S(i) = \{\alpha < \kappa|\ i \in E_\alpha\}, \qquad\qquad i \in E$$

Pošto je $E_\alpha \subset A_\alpha$ to je $\{\alpha < \kappa|i \in E_\alpha\} \subset \{\alpha < \kappa|i \in A_\alpha\}$ pa $|S(i)| < \mu$ jer je Ψ $(\mu,\kappa)-$regularan. Za $i \in E$ definišemo

$$V_i = \bigcap_{\alpha\in S(i)} O_i^\alpha$$

Za $i \in E$ zbog $E \subset L$ važi $i \in L$. Zato su O_i^α definisani za sve α. Dalje za neko $\alpha < \kappa$ $i \in E_\alpha$ pa $\alpha \in S(i)$. Dakle $S(i) \neq \emptyset$, pa su V_i dobro definisani za sve $i \in E$. Dokažimo

$$\text{za sve} \quad i \in E,\ f_i \in V_i \in \mathcal{O}_i \qquad\qquad (**)$$

Neka $i \in E$ i $\alpha \in S(i)$. Tada $i \in E_\alpha$ pa zbog $(*)$ $f_i \in O_i^\alpha$. Ovo važi za sve $\alpha \in S(i)$ pa $f_i \in \bigcap_{\alpha\in S(i)} O_i^\alpha = V_i$. Dalje, V_i je presek $|S(i)| < \mu$ otvorenih skupova, pa je zbog $\mu-$otvorenosti $\mathcal{X}_i$, $V_i \in \mathcal{O}_i$.

Definišimo $U = \bigcap_{i\in E}\pi_i^{-1}(V_i)$. Sada $U \in \mathcal{O}^{\Lambda}$ i zbog otvorenosti q je $q(U) \in \mathcal{O}^{\Lambda}_{\Psi}$. Takođe $f \in U$ pa $q(f) \in q(U)$.

Neka $\alpha < \kappa$ i $i \in E_\alpha$. Tada $\alpha \in S(i)$ pa $V_i \subset O_i^\alpha$. Dakle

$$\forall\alpha < \kappa \quad \forall i \in E_\alpha \quad V_i \subset O_i^\alpha \qquad (***)$$

Dokažimo $q(U) \subset \bigcap_{\alpha<\kappa} B_\alpha$. Neka $[g] = q(g) \in q(U)$. Tada postoji $h \in U$ da $h \sim g$ tj. da $A = \{i \mid g_i = h_i\} \in \Psi$. Zato zbog $(***)$ za sve $\alpha < \kappa$ i sve $i \in E_\alpha \cap A$ važi $g_i = h_i \in V_i \subset O_i^\alpha$. Odatle $g \in \bigcap_{i\in E_\alpha\cap A}\pi_i^{-1}(O_i^\alpha)$ pa $q(g) \in q(\bigcap_{i\in E_\alpha\cap A}\pi_i^{-1}(O_i^\alpha) = q(\bigcap_{i\in L}\pi_i^{-1}(O_i^\alpha) = B_\alpha$ za sve $\alpha < \kappa$ (jer je $E_\alpha \bigcap A = L \bigcap A_\alpha \bigcap C_\alpha \bigcap A = L \bigcap F$ gde $F \in \Psi$ pa važi lema 2.2.4). Zato $q(g) \in \bigcap_{\alpha<\kappa} B_\alpha$. Inkuzija $q(U) \subset \bigcap_{\alpha<\kappa} B_\alpha$ je dokazana.

Dakle za svako $[f] \in \bigcap_{\alpha<\kappa} B_\alpha$ postoji $W_f = q(U) \in \mathcal{O}^{\Lambda}_{\Psi}$ da $[f] \in W_f \subset \bigcap_{\alpha<\kappa} B_\alpha$. Zato je $\bigcap_{\alpha<\kappa} B_\alpha$ otvoren skup. □

Napomena 6.2.1 U stvari važi opštije tvrđenje – uslov da su svi prostori $\mu-$otvoreni može se zameniti slabijim uslovom: $G = \{i \in I \mid \mathcal{X}_i$ je $\mu-$otvoren $\} \in \Psi$. Tada teorema 6.2.1 sledi iz teoreme o redukciji r.i.p.

Napomena 6.2.2 Uslov $\kappa \geq \mu$ u teoremi 6.2.1 može se izostaviti jer za $\kappa < \mu$ važi $\kappa^+ \leq \mu$ pa je $\min\{\kappa^+, \mu\} = \kappa^+$ a teorema 6.2.1 svodi se na teoremu 6.1.1.

6.3 Specijalni slučajevi i primeri

Navodimo neke posledice teoreme 6.3.1. Za $\mu = \omega$ važi:

Posledica 6.3.1. *Neka je $\kappa \geq \omega$ kardinal i $\mathcal{X}_i$, $i \in I$, proizvoljni topološki prostori. Ako je Λ κ^+-kompletan ideal na I i Ψ $\kappa-$regularan filter na I, onda je prostor $\Pi^{\Lambda}_{\Psi}\mathcal{X}_i$ κ^+-otvoren.* □

Ideal $\Lambda = P(I)$ je κ^+ kompletan za svako κ pa važi prvi deo Bankstonove "Openess" leme:

Posledica 6.3.2. *Neka je $\kappa \geq \omega$ i neka su $\mathcal{X}_i$, $i \in I$ proizvoljni topološki prostori. Ako je $\mathcal{U}$ $\kappa-$regularan ultrafilter na I, onda je ultraproizvod $\Box_{\mathcal{U}}\mathcal{X}_i$ κ^+-otvoren.* □

Za $\kappa = \mu = \omega$ imamo:

Posledica 6.3.3. *Neka su $\mathcal{X}_i$, $i \in I$ proizvoljni topološki prostori. Ako je Λ prebrojivo kompletan ideal na I a Ψ $\omega-$regularan filter na I, onda je $\Pi_{\Psi}^{\Lambda}\mathcal{X}_i$ $P-$prostor.* □

Primer 3.1. Neka je $I = R$ i za sve $i \in I$ neka je $\mathcal{X}_i = R$ sa uobičajenom topologijom. Ideal Λ skupova prve kategorije na R je prebrojivo kompletan. Takođe, ako je Ψ filter podskupova R čiji je komplement ograničen, Ψ je $\omega-$regularan jer je $\{R\backslash[-n, n] | n \in N\}$ prebrojiva, tačkasto-konačna potfamilija Ψ. Prema posledici 6.3.3, $\Pi_{\Psi}^{\Lambda}\mathcal{X}_i$ je tada $P-$prostor.

6.4 Istorijske i bibliografske napomene

Definicija 6.1.1. može se naći kod Bankstona u [2] str. 290. Leme 6.1.1. i 6.1.2. su tehničke i deo su matematičkog folklora. Specijalan slučaj posledice 6.1.1. za ultraproizvode data je u [2] str. 291.

Posledica 6.3.2. je deo Bankstonove "Opennes" leme date u [2] str. 290. Specijalan slučaj posledice 6.3.3. koji se odnosi na "nabla-proizvod" (koji se dobija za $I = \omega$, $\Lambda = P(I)$ i $\Psi-$ filter ko-konačnih podskupova I) dat je kod Williamsa u [45] str. 181.

Glava 7

Nepovezanost r.i.p.

7.1 Totalna nepovezanost

Topološki prostor $(X, \mathcal{O})$ je totalno nepovezan akko je za svako $x \in X$ kvazikomponenta tačke x skup $\{x\}$, akko za svake dve tačke $x, y \in X$ postoji otvoreno-zatvoren skup O da $x \in O$ i $y \notin O$. (U literaturi se na nekim mestima ovakvi prostori zovu ultra-Hausdorfovi, dok se totalno nepovezanim zovu prostori kod kojih je za sve $x \in X$, komponenta tačke x skup $\{x\}$). Totalna nepovezanost je očuvana u r.i.p. kod kojih je zadovoljen uslov $(\Lambda\Psi)$. Preciznije važi:

Teorema 7.1.1. *Neka važi uslov $(\Lambda\Psi)$. Tada, ako $\{i \in I | \mathcal{X}_i$ je tot. nepovezan$\} = A \in \Psi$, onda je $\Pi^{\Lambda}_{\Psi}\mathcal{X}_i$ totalno nepovezan.*

Dokaz: Neka $[f], [g] \in \Pi^{\Lambda}_{\Psi}\mathcal{X}_i$ gde $[f] \neq [g]$. Tada $B = \{i \in I | f_i = g_i\} \notin \Psi$ pa kako važi $(\Lambda\Psi)$ to postoji $L \in \Lambda$ da je $L \subset A \backslash B$ i $L^c \notin \Psi$. Za $i \in L, \mathcal{X}_i$ je totalno nepovezan i $f_i \neq g_i$ pa postaje $O_i \in \mathcal{O}_i \cap \mathcal{F}_i$ da $f_i \in O_i \not\ni g_i$. Definišimo $U = \cap_{i \in L}\pi_i^{-1}(O_i) = \Pi U_i$. Sada $f \in U$ pa, kako je q otvoreno,$[f] \in q(U) \in \mathcal{O}^{\Lambda}_{\Psi}$. Takođe, $U_i \in \mathcal{F}_i$ za sve $i \in I$ pa prema lemi 2.6.1 imamo $q^{-1}(q(U)) \in \mathcal{F}^{\Lambda}$. Kako je q faktor preslikavanje, to $q(U) \in \mathcal{F}^{\Lambda}_{\Psi}$.

Pretpostavimo da $[g] \in q(U)$. Tada $g \in U^*$ pa prema lemi 2.2.3 $C = \{i | g_i \in U_i\} \in \Psi$. Kako $L^c \notin \Psi$ to je $L \cap C \neq \emptyset$. No za $i \in L \cap C$ imamo $g_i \in U_i = O_i$ što je nemoguće. Dakle $q(U)$ je otvoreno-zatvoren skup i $[f] \in q(U) \not\ni [g]$. □

Napomena 7.1.1. Totalna nepovezanost "skoro svih" prostora $\mathcal{X}_i$ nije i potreban uslov za totalnu nepovezanost prostora $\Pi_\Psi^\Lambda \mathcal{X}_i$ što će biti pokazano u sledećoj tački.

7.2 Nula-dimenzionalnost

Topološki prostor $(X, \mathcal{O})$ je nula-dimenzionalan akko je T_1 i ima bazu topologije koja se sastoji od otvoreno-zatvorenih skupova. Takav prostor je $T_{3\frac{1}{2}}$ i totalno nepovezan.

Proizvod Tihonova i ultraproizvod čuvaju nula-dimenzionalnost no važi opštije tvrđenje:

Teorema 7.2.1. *Neka ideal Λ i filter Ψ na I zadovoljavaju uslov $(\Lambda\Psi)$. Tada, ako $\{i \in I | \mathcal{X}_i$ je nula-dimenzionalan$\} = A \in \Psi$, onda je $\Pi_\Psi^\Lambda \mathcal{X}_i$ nula-dimenzionalan.*

Dokaz: Prema teoremi 2.3.2 skupovi oblika $q(B)$ gde je $B = \bigcap_{i \in L} \pi_i^{-1}(O_i) = \Pi B_i \in \mathcal{B}^\Lambda$ čine bazu topologije na $\Pi_\Psi^\Lambda \mathcal{X}_i$. Dokažimo da su oni unije otvoreno-zatvorenih skupova. Neka $[f] \in q(B)$, to jest, $f \in B^*$. Prema lemi 2.2.3, tada $K = \{i | f_i \in B_i\} \in \Psi$. (Za $L \cap A \cap K = \emptyset$ je prema lemi 2.2.4, $q(B) = \Pi_\Psi^\Lambda \mathcal{X}_i$ otvoreno-zatvoren.) Za $i \in L \cap A \cap K, \mathcal{X}_i$ je nula-dimenzionalan i $f_i \in B_i = 'O_i$, pa postoji $U_i \in \mathcal{O}_i \cap \mathcal{F}_i$ da $f_i \in U_i \subset O_i$. Sada $f \in B' = \bigcap_{i \in L \cap A \cap K} \pi_i^{-1}(U_i)$.

Dalje prema lemi 2.2.4 sledi $[f] \in q(B') \subset q(\bigcap_{i \in L \cap A \cap K} \pi_i^{-1}(O_i)) = q(B)$. Kako je q otvoreno, to $q(B') \in \mathcal{O}_\Psi^\Lambda$. Takođe $B' = \Pi B_i'$ i $B_i' \in \mathcal{F}_i$ za sve $i \in I$, pa prema lemi 2.6.1 važi $q^{-1}(q(B')) \in \mathcal{F}^\Lambda$. Kako je q faktor preslikavanje, to $q(B') \in \mathcal{F}_\Psi^\Lambda$. Konačno,$q(B')$ je otvoreno-zatvoren i $[f] \in q(B') \subset q(B)$. □

Napomena 7.2.1. Ponovo, nula-dimenzionalnost "skoro svih" prostora $\mathcal{X}_i$ nije i potrebna za nula-dimenzionalnost $\Pi_\Psi^\Lambda \mathcal{X}_i$, što ćemo uskoro pokazati.

Podsetimo se da je filter Ψ na I $\omega-$regularan akko postoji prebrojiva familija $\{A_n | n \in N\} \subset \Psi$ koja je tačkasto-konačna (tj.svako $i \in I$ je u najviše konačno A_n). Takođe važi

Lema 7.2.1. *Filter Ψ je $\omega-$regularan akko postoji familija $\{A_n | n \in N\} \subset \Psi$ da važi $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$ i da je $\bigcap_{n\in N} A_n = \emptyset$.*

Dokaz: ($\Rightarrow$) Neka je $\{A_n | n \in N\} \subset \Psi$ tačkasto-konačna. Definišimo $A'_n = \bigcap_{k=1}^{n} A_k$ gde $n \in N$. Tada je $A'_1 \supset A'_2 \supset \ldots$ a pošto je za sve $n \in N, A'_n \subset A_n$, imamo $\bigcap_{n\in N} A'_n \subset \bigcap_{n\in N} A_n = \emptyset$.

($\Leftarrow$) Trivijalno. $\square$

Teorema 7.2.2. *Neka je uslov $(\Lambda\Psi)$ zadovoljen, neka je Ψ $\omega-$regularan filter i neka su $\mathcal{X}_i$ T_3-prostori za sve $i \in I$. Tada je $\Pi_{\Psi}^{\Lambda}\mathcal{X}_i$ nula-dimenzionalan prostor.*

Dokaz: Kako važi $(\Lambda\Psi)$, to je prema teoremi 2.6.1 $\Pi_{\Psi}^{\Lambda}\mathcal{X}_i$ T_3 prostor (pa i T_1). Bazni otvoreni skupovi u $\Pi_{\Psi}^{\Lambda}\mathcal{X}_i$ su oblika $q(B)$ gde je $B = \bigcap_{i\in L} \pi_i^{-1}(O_i) \in \mathcal{B}^{\Lambda}$. Dokažimo da su oni unije otvoreno-zatvorenih skupova.

Prvo, ako je za neko $A \in \Psi$, $L \cap A = \emptyset$, onda je, prema lemi 2.2.4 $q(B) = \Pi_{\Psi}^{\Lambda}\mathcal{X}_i$ pa je $q(B)$ otvoreno-zatvoren.

Neka je sada $L \cap A \neq \emptyset$ za sve $A \in \Psi$, i neka $[g] \in q(B)$ Tada postoji $f \in B$ da je $g \sim f$. Ψ je $\omega-$regularan pa postoji familija $\{A_n | n \in N\} \subset \Psi$ da je $I = A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset \cdots$ i da je $\bigcap_{n\in N} A_n = \emptyset$. Tada je $L = L \cap A_0 \supset L \cap A_1 \supset L \cap A_2 \supset \cdots$

Definišemo skupove: za $i \in L$, $V_i^0 = X_i$; za $i \in L \cap A_1$, $V_i^1 = O_i$; za $i \in L \cap A_n$ gde $n > 1$ biramo $V_i^n \in \mathcal{O}_i$ da važi $f_i \in V_i^n \subset \overline{V_i^n} \subset V_i^{n-1}$. Ovo je moguće jer su $\mathcal{X}_i$ regularni.

Za proizvoljno $h \in \Pi X_i$ i proizvoljno $i \in L$ neka je

$$m(h,i) = \max\{k | h_i \in V_i^k\}$$

Sada kako za $i \in L, h \in X_i = V_i^0$, to je $\{k | h_i \in V_i^k\} \neq \emptyset$. Takođe $L = \bigcup_{n=0}^{\infty} L \cap (A_n \backslash A_{n+1})$ je particija L. Za $i \in L \cap (A_n - A_{n+1})$ V_i^{n+1} nije definisan pa $m(h,i) \leq n$. Dakle $m(h,i)$ su dobro definisani. Dalje, definišimo skup

$$U = \{h \in \Pi X_i | \forall M \in N, \exists A \in \Psi, \forall i \in L \cap A, m(h,i) \geq M\}$$

Sledećom lemom nastavljamo dokaz.

Lema 7.2.2. *(i) $f \in U$ (ii) U i U^c su otvoreni (iii) $U = q^{-1}(q(U)), U^c = q^{-1}(q(U^c))$ (iv) $q(U)$ je otvoreno-zatvoren (v) $U \subset q^{-1}(q(B))$.*

Dokaz: (i) Neka je dato $M \in N$. Tada za $A = A_M \in \Psi$ i za sve $i \in L \cap A_M$ važi $f_i \in V_i^M$ pa $m(f,i) \geq M$. Zato $f \in U$

(ii) Neka $h \in U$. Za sve $i \in L$ definišemo skupove W_i :

$$W_i = \begin{cases} V_i^{m(h,i)} \backslash \overline{V_i^{m(h,i)+2}} & \text{ako } \ m(h,i) \leq n-2 \\ V_i^{m(h,i)} & \text{ako } \ m(h,i) \in \{n-1, n\} \end{cases}$$

gde ova formula važi za $i \in L \cap (A_n \backslash A_{n+1})$, $n = 0,1,2,\ldots$ Jasno, $h_i \in V_i^{m(h,i)}$. Za $h_i \in \overline{V_i^{m(h,i)+2}}$ bilo bi $h_i \in V^{m(h,i)+1}$ pa $m(h,i) \geq m(h,i)+1$ što je nemoguće. Dakle $h_i \in W_i$ za sve $i \in L$ pa $h \in \bigcap_{i \in L} \pi_i^{-1}(W_i) = W_h \in \mathcal{O}^\Lambda$. Dokažimo da $W_h \subset U$. Neka $\varphi \in W_h$. Tada $\varphi_i \in W_i$ za sve $i \in L$ pa $m(h,i) \leq m(\varphi,i)$. Neka $M \in N$. Kako $h \in U$ to postoji $A \in \Psi$ da za sve $i \in L \cap A$ važi $m(h,i) \geq M$. No tada za sve $i \in L \cap A$ $m(\varphi,i) \geq M$ pa $\varphi \in U$.

Dakle $h \in W_h \subset U$ gde $W_h \in \mathcal{O}^\Lambda$, pa $U \in \mathcal{O}^\Lambda$.

Neka $h \in U^c$. Definišimo W_h kao u prethodnom slučaju. Neka $\varphi \in W_h$. Tada za sve $i \in L$ važi $m(\varphi,i) \leq m(h,i)+1$. Kako $h \in U^c$, postoji $M \in N$ da za sve $A \in \Psi$ postoji $i \in L \cap A$ za koje $m(h,i) < M$. No tada $m(\varphi,i) < M+1$ pa $\varphi \notin U$ to jest $\varphi \in U^c$. Dakle $h \in W_h \subset U^c$ gde $W_h \in \mathcal{O}^\Lambda$. U^c je otvoren.

(iii) $U \subset q^{-1}(q(U))$ važi uvek. Dokažimo obratnu inkluziju. Neka $h \in q^{-1}(q(U))$. Tada postoji $\varphi \in U$ da je $h \sim \varphi$ pa $D = \{i | h_i = \varphi_i\} \in \Psi$. Za $M \in N$ postoji $A \in \Psi$ da za sve $i \in L \cap A$ važi $m(\varphi,i) \geq M$. Kako $A \cap D \in \Psi$, to za sve $i \in L \cap A \cap D$ važi $m(h,i) = m(\varphi,i) \geq M$. Zato $h \in U$.

$U^c \subset q^{-1}(q(U^c))$ važi uvek. Pretpostavimo da postoji $h \in U \cap q^{-1}(q(U^c))$. Tada postoji $\varphi \in U^c$ da $\varphi \sim h$. No tada iz $h \in U$ sledi $\varphi \in U^* = q^{-1}(q(U)) = U$ pa $\varphi \in U \cap U^c$ što je nemoguće. Zato $q^{-1}(q(U^c)) \subset U^c$.

(iv) Pošto je q otvoreno, skupovi $q(U)$ i $q(U^c)$ su otvoreni. Takodje $q^{-1}(q(U) \cap q(U^c)) = U \cap U^c = \emptyset$ pa kako je q "na" sledi $q(U) \cap q(U^c) = \emptyset$. Takodje je $q(U) \cup q(U^c) = \Pi_\Psi^\Lambda \mathcal{X}_i$ pa je $q(U) = q(U^c)^c$ zatvoren.

(v) Neka $h \in U$. Tada za $M = 1$ postoji $A \in \Psi$ da za sve $i \in L \cap A$ važi $m(h,i) \geq 1$ pa $h_i \in V_i^1 = O_i$. Prema lemi 2.2.4 imamo

$h \in \bigcap_{i \in L \cap A} \pi_i^{-1}(O_i) \subset q^{-1}(q(\bigcap_{i \in L \cap A} \pi_i^{-1}(O_i))) = q^{-1}(q(\bigcap_{i \in L} \pi_i^{-1}(O_i))) = q^{-1}(q(B))$.

Sada, kako $f \in U$, imamo: $[g] = [f] \in q(U) \subset q(B)$ i $q(U)$ je otvoreno-zatvoren skup. □

Primer 7.2.1. Neka je R skup realnih brojeva, $I = R$ i neka je $\mathcal{X}_i = R$ sa uobičajenom topologijom za sve $i \in I$. Neka je Ψ filter potskupova R čiji komplementi su konačni a Λ ideal najviše prebrojivih podskupova R (tj. $\Lambda = [R]^{<\omega_1}$). Lako se proverava da je uslov $(\Lambda\Psi)$ zadovoljen. Takođe, $A_n = [-n,n]^c \in \Psi$ i familija $\{A_n | n \in N\} \subset \Psi$ je tačkasto-konačna. Zato je Ψ $\omega-$regularan filter. Prema poslednjoj teoremi $\Pi_\Psi^\Lambda \mathcal{X}_i$ je nula-dimenzionalan prostor. Kako su pritom $\mathcal{X}_i$ povezani prostori imamo primer koji pokazuje da za totalnu nepovezanost i nula-dimenzionalnost prostora $\Pi_\Psi^\Lambda \mathcal{X}_i$ nije potrebno da ove osobine imaju prostori $\mathcal{X}_i$.

Napomena 7.2.2. Neka su I, Ψ i Λ kao u prethodnom primeru i neka su $\mathcal{X}_i$ prostori koji su T_3 ali nisu $T_{3\frac{1}{2}}$. Tada je $\Pi_\Psi^\Lambda \mathcal{X}_i$ nula-dimenzionalan pa time i $T_{3\frac{1}{2}}$ prostor. Dakle iako je zadovoljen uslov $(\Lambda\Psi)$ i $\Pi_\Psi^\Lambda \mathcal{X}_i$ je $T_{3\frac{1}{2}}$, prostori $\mathcal{X}_i$ nisu $T_{3\frac{1}{2}}$. Ovo dokazuje da kompletna regularnost prostora $\mathcal{X}_i$ nije potreban uslov za kompletnu regularnost prostora $\Pi_\Psi^\Lambda \mathcal{X}_i$.

7.3 Jaka nula-dimenzionalnost

Topološki prostor $(X, \mathcal{O})$ je jako nula-dimenzionalan akko je $T_{3\frac{1}{2}}$ prostor i ako za svaki konačan pokrivač koji se sastoji od funkcionalno otvorenih (tj. ko-nula) skupova postoji upisan, konačan, disjunktan otvoren pokrivač. Ekvivalentnu definiciju u klasi $T_{3\frac{1}{2}}$ prostora daje sledeća teorema.

Teorema 7.3.1. *Neka je $(X, \mathcal{O})$ $T_{3\frac{1}{2}}$ prostor. Tada važi: $(X, \mathcal{O})$ je jako nula-dimenzionalan akko za svaka dva funkcionalno razdvojena skupa $A, B \subset X$ postoji $U \in \mathcal{O} \cap \mathcal{F}$ da važi $A \subset U \subset B^c$.*

Dokaz: Videti npr. u [14]. □

Jaka nula-dimenzionalnost nije očuvana u proizvodu Tihonova pa u opštem slučaju nije očuvana ni u $\Lambda\Psi-$r.i.p. No pod dodatnim uslovima jeste. Za dalji rad biće nam potrebna sledeća lema.

Lema 7.3.1. *Ako je $(X, \mathcal{O})$ T_3 i $P-$prostor, onda je jako nula-dimenzionalan.*

Dokaz: Dokažimo prvo nula-dimenzionalnost. Neka $x \in O \in \mathcal{O}$. Kako je X T_3-prostor, možemo odabrati $U_n \in \mathcal{O}$ gde $n \in N$ da važi: $O \supset \overline{U_1} \supset U_1 \supset \overline{U_2} \supset U_2 \cdots$ i da $x \in U_n$. Skup $U = \bigcap_{n\in N} U_n = \bigcap_{n \in N} \overline{U_n}$ je zatvoren ali je i otvoren jer je X $P-$prostor, i $x \in U \subset O$.

Zbog nula-dimenzionalnosti X je $T_{3\frac{1}{2}}$ pa važi teorema 7.3.1. Neka $A, B \subset X$ i neka je $f : X \longrightarrow [0,1]$ neprekidna funkcija da važi $f(A) = \{0\}$ i $f(B) = \{1\}$. Za skupove $U_n = f^{-1}([0, 1/(n+1))$ važi $X \backslash B \supset \overline{U_1} \supset U_1 \supset \overline{U_2} \supset U_2 \supset \cdots \supset A$. Zato je $U = \bigcap_{n \in N} U_n = \bigcap_{n\in N} \overline{U_n}$ otvoreno-zatvoren i $A \subset U \subset X \backslash B$. □

Teorema 7.3.2. *Neka je Λ prebrojivo kompletan ideal na I i Ψ $\omega-$regularan filter na I i neka važi uslov $(\Lambda\Psi)$. Tada, ako $\{i \in I | X_i$ je $T_3\} \in \Psi$ onda je $\Pi^{\Lambda}_{\Psi}\mathcal{X}_i$ jako nula-dimenzionalan prostor.*

Dokaz: Prema teoremi 2.6.1, $\Pi^{\Lambda}_{\Psi}\mathcal{X}_i$ je T_3 prostor, a prema posledici 6.3.3, $\Pi^{\Lambda}_{\Psi}\mathcal{X}_i$ je $P-$prostor. Sada iz leme 7.3.1 sledi tvrđenje. □

Posledica 7.3.1. *Neka važi uslov $(\Lambda\Psi)$ i neka je Λ prebrojivo kompletan ideal na I i Ψ $\omega-$regularan filter na I. Tada, ako $\{i \in I | \mathcal{X}_i$ je jako nula-dimenzionalan$\} \in \Psi$ onda je $\Pi^{\Lambda}_{\Psi}\mathcal{X}_i$ jako nula-dimenzionalan.* □

Primer 7.3.1. U primeru 2.5 jasno je da je Λ prebrojivo kompletan. Zato je $\Pi^{\Lambda}_{\Psi}\mathcal{X}_i$ jako nula-dimenzionalan.

Na kraju, pošto proizvod Tihonova ne čuva ekstremnu nepovezanost, ova osobina nije očuvana ni kod $\Lambda\Psi-$r.i.p.

7.4 Istorijske i bibliografske napomene

Specijalan slučaj teoreme 7.2.1. za tihonovske proizvode može se naći u [14] str. 533 a za ultraproizvode u radu Bankstona [2] str. 303. Lema 7.2.1. je opštepoznata i navedena je zbog kompletnosti teksta.

Teorema 7.3.1. je deo folklora i nalazi se na primer u [14] str. 531. Lema 7.3.1. uzeta je iz [2] str. 294.

Glava 8

R.i.p. i teorija modela

8.1 Osnovne definicije

U ovoj tački dajemo osnovne definicije topološke teorije modela. Pošto bi detaljno uvodjenje svih pojmova zahtevalo mnogo prostora, ovde dajemo samo neke definicije i teoreme koje ćemo neposredno koristiti. Za precizne i potpune informacije iz teorije modela upućujemo na [6], dok je odgovarajući materijal vezan za topološku teoriju modela detaljno izložen u [16].

Logika drugog reda, L_2, uključuje sve znake logike prvog reda $L_{\omega\omega}$ sa jednakošću (individualne promenljive: $x_0, x_1, x_2, \ldots$; veznike: $\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \neg$; kvantifikatore: $\forall$ i $\exists$; znak jednakosti: $=$ i pomoćne znake: $(,)$). Njima su pridodati novi znaci:

- skupovne promenljive: $X_0, X_1, X_2, \ldots$;

- simbol $\in$.

Neka je L jezik prvog reda (to jest skup relacijskih i funkcijskih slova i konstanti). Što se gradjenja terma u L_2 tiče, definicija je ista kao u $L_{\omega\omega}$, to jest skup terma u L_2 je isti kao u $L_{\omega\omega}$.

U L_2 se dopušta nova atomna formula

$$t \in X$$

gde je t term (jezika L) a X skupovna promenljiva. Ostala pravila za gradjenje formula su ista kao u $L_{\omega\omega}$ s tim što se dodaje i pravilo:

ako je φ formula L_2, onda su to i $\forall X\varphi$ i $\exists X\varphi$.

Koncept slobodne i vezane promenljive (kako individualne tako i skupovne) je isti kao u $L_{\omega\omega}$.

Sada prelazimo na semantičke koncepte.

Ako je $\mathcal{S}$ struktura jezika L to jest odgovarajuća relacijsko-operacijska struktura, onda dvojku $(\mathcal{S}, \mathcal{O})$ zovemo slaba $L-$ struktura ako je $\emptyset \neq \mathcal{O} \subset P(S)$ gde je S domen (nosač) strukture $\mathcal{S}$. Ako je $\mathcal{O}$ topologija na S, $(\mathcal{S}, \mathcal{O})$ je topološka $L-$ struktura.

Za razliku od prethodnih glava u kojima je za skup tačaka topološkog prostora bilo rezervisano slovo X, u ovoj glavi ćemo za istu namenu koristiti slovo S. Razlog promene je što se skupovne promenljive u L_2 obično označavaju sa $X, Y, Z, ...$ pa bi moglo doći do konfuzije. Zato ćemo topološki prostor u daljem tekstu označavati sa $(S, \mathcal{O})$, r.i.p. familije topoloških prostora biće označen sa $\prod_{\Psi}^{\wedge} S_i$ i.t.d.

Primeri. Neka je $L = \{\oplus\}$, gde je $\oplus$ funkcijsko slovo dužine 2 i neka je $((R, +), \mathcal{O})$ topološka grupa realnih brojeva. Tada je $((R, +), \mathcal{O})$ topološka $L-$ struktura.

Neka je $L = \{\preceq\}$, gde je $\preceq$ relacijsko slovo dužine 2. Tada je linearno uredjeni topološki prostor $((R, \leq), \mathcal{O})$ topološka $L-$ struktura.

Ako je $(\mathcal{S}, \mathcal{O})$ slaba struktura, valuacija u $(\mathcal{S}, \mathcal{O})$ je svako preslikavanje $\tau = \tau' \cup \tau''$ gde $\tau' : \{x_0, x_1, x_2, ...\} \to S$ i $\tau'' : \{X_0, X_1, X_2, ...\} \to \mathcal{O}$. Dakle, individualne promenljive interpretiramo kao elemente skupa S a skupovne kao elemente $\mathcal{O}$.

Vrednost terma t (jezika L) pri valuaciji τ, u oznaci $t[\tau]$, u L_2 definiše se kao u $L_{\omega\omega}$, pošto termi uključuju samo individualne promenljive.

Ako je $(\mathcal{S}, \mathcal{O})$ slaba $L-$ struktura, τ valuacija u $(\mathcal{S}, \mathcal{O})$ i φ L_2- formula, onda se relacija zadovoljivosti:

$$(\mathcal{S}, \mathcal{O}) \models \varphi[\tau] \tag{8.1}$$

definiše na uobičajen način. Pritom skupovne promenljive variraju nad $\mathcal{O}$, dok se znak $\in$ interpretira kao relacija "biti element". Relaciju (1) čitamo: formula φ je tačna u valuaciji τ strukture $(\mathcal{S}, \mathcal{O})$.

Primer. Neka je data L_2- formula φ sa

$$\varphi = \exists X_0(x_0 \in X_0 \wedge \neg x_0 \in X_1 \wedge x_0 = x_2)$$

Ako je $(\mathcal{S}, \mathcal{O})$ slaba struktura i $\tau =< a_0, a_1, a_2, ... > \cup < O_0, O_1, O_2, ... >$ valuacija u toj strukturi, onda važi:

$(\mathcal{S}, \mathcal{O}) \models \varphi[\tau]$ akko postoji $W \in \mathcal{O}$ da $a_0 \in W$ i $a_0 \notin O_1$ i $a_0 = a_2$.

Primetimo da smo u poslednjem primeru, znak = koristili za tri različite stvari: prvi put pri zadavanju formule φ, drugi put u samoj formuli $\varphi-$ kao logički znak i treći put kao standardnu interpretaciju znaka = kao logičkog znaka: jednakost elemenata domena S. Da bismo izbegli šarenilo oznaka i dalje ćemo vršiti ovakve "prekršaje", sigurni da konfuzije neće biti.

Na kraju, L_2 formula φ jezika L je tačna u slaboj $L-$ strukturi $(\mathcal{S}, \mathcal{O})$ akko za svaku valuaciju τ važi $(\mathcal{S}, \mathcal{O}) \models \varphi[\tau]$. Ovo označavamo sa $(\mathcal{S}, \mathcal{O}) \models \varphi$.

Sada prelazimo na definiciju L_t- formula kao specijalnih L_2- formula.

L_2- formula koja od logičkih veznika sadrži: $\wedge, \vee, \neg$ i $\exists$ (dok se ostali smatraju kao skraćenja i eliminišu pomoću poznatih pravila) je u negacijskoj normalnoj formi (NNF) ako se znak negacije ($\neg$) pojavljuje samo ispred atomnih formula. Koristeći logičke zakone (De Morganove itd.), svaku L_2- formulu možemo svesti na ekvivalentnu L_2- formulu u NNF.

L_2- formula φ je negativna (pozitivna) u odnosu na skupovnu promenljivu X ako je svako slobodno pojavljivanje X u NNF formule φ oblika $\neg t \in X$ (oblika $t \in X$, čemu ne prethodi znak $\neg$).

Definicija 8.1.1. *L_t je skup formula koje se dobijaju od atomnih L_2- formula po pravilima izgradnje formula u $L_{\omega\omega}$ kojima su dodata pravila:*

1. ako je t term a formula φ je pozitivna u odnosu na promenljivu X, onda je formula i

$$\forall X(t \in X \Rightarrow \varphi).$$

2. Ako je t term a formula φ je negativna u odnosu na promenljivu X, onda je formula i

$$\exists X(t \in X \wedge \varphi).$$

Dakle, kvantifikacija skupovnih promenljivih koja je u L_2 slobodna, ovde se ograničava.

Dalje, $\varphi(x_1, ..., x_m, X_1, ..., X_n)$ označava formulu φ čije su sve slobodne individualne promenljive medju $x_1, ..., x_m$ a sve slobodne skupovne promenljive izmedju $X_1, ..., X_n$. Takodje, kad god ne bude postojala opasnost od konfuzije nizove $x_1, x_2, ..., x_n; X_1, ..., X_m; a_1, ..., a_k; V_1, ..., V_\ell$ radi preglednosti ćemo označavati sa $\overline{x}, \overline{X}, \overline{a}, \overline{V}$. Opasnost mešanja sa operatorom adherencije se neće javljati.

Formule bez slobodnih promenljivih zovemo rečenice.

U nastavku dajemo važnu karakterizaciju L_t– rečenica (Teorema 8.1.2.).

Definicija 8.1.2. *L_2– rečenica φ je invarijantna za topologije akko za svaku slabu L– strukturu $(\mathcal{S}, \mathcal{B})$ za koju je $\mathcal{O}(\mathcal{B}) = \{\bigcup \mathcal{P} \mid \mathcal{P} \subset \mathcal{B}\}$ topologija na S, važi:*

$$(\mathcal{S}, \mathcal{B}) \models \varphi \quad \textit{akko} \quad (\mathcal{S}, \mathcal{O}(\mathcal{B})) \models \varphi.$$

Teorema 8.1.1. *L_2– rečenica φ je invarijantna za topologije akko za svaku topološku strukturu $(\mathcal{S}, \mathcal{O})$ i svaku bazu $\mathcal{B}$ topologije $\mathcal{O}$ važi:*

$$(\mathcal{S}, \mathcal{O}) \models \varphi \quad \textit{akko} \quad (\mathcal{S}, \mathcal{B}) \models \varphi. \quad \square$$

Teorema 8.1.2. *L_2– rečenica φ je invarijantna za topologije akko je (u topološkim strukturama) ekvivalentna nekoj L_t– rečenici.* $\square$

Dokazi gornjih teorema mogu se naći u [16].

Primeri. L_2– formule (to jest rečenice)

$$\varphi_{T_0} = \forall x \forall y (x = y \vee \exists X (x \in X \wedge \neg y \in X) \vee \exists X (y \in X \wedge \neg x \in X))$$

$$\varphi_{T_1} = \forall x \forall y (x = y \vee \exists X (x \in X \wedge \neg y \in X))$$

$$\varphi_{T_2} = \forall x \forall y (x = y \vee \exists X (x \in X \wedge \exists Y (y \in Y \wedge \forall z (\neg z \in X \vee \neg z \in Y))))$$

$$\varphi_{reg} = \forall x \forall X (x \in X \Rightarrow \exists Y (x \in Y \wedge \forall y (y \in X \vee \exists Z (y \in Z \wedge \forall z (\neg z \in Z \vee z \in Y)))))$$

$$\varphi_{disc} = \forall x \exists X (x \in X \wedge \forall y (y \in X \Rightarrow y = x))$$

$$\varphi_{triv} = \forall x \forall X (x \in X \Rightarrow \forall y (y \in X))$$

su L_t– formule. One očigledno izražavaju topološke osobine: T_0, T_1, T_2, regularnost, diskretnost, trivijalnost. U zapisu gornjih formula zbog čitkosti nismo koristili propisane promenljive: $x_0, x_1, x_2, ..., X_0, X_1, X_2, ...$ već meta

- oznake x, y, z, X, Y, Z koje mogu biti ma koje od propisanih. To ćemo i dalje činiti. Dalje, L_2- formula

$$\varphi = \forall X(\exists x(x \in X) \Rightarrow \forall y(y \in X))$$

koja očigledno, izražava trivijalnost topologije nije L_t- formula. No lako je videti da je ona u topološkim strukturama ekvivalentna formuli φ_{triv}, koja jeste L_t- formula. (Ovo znači da u svakoj topološkoj strukturi $(\mathcal{S}, \mathcal{O})$ važi $(\mathcal{S}, \mathcal{O}) \models \varphi \Leftrightarrow \varphi_{triv}$).

8.2 Teorema Feferman-Vaughta za r.i.p.

Teorema Feferman-Vaughta, koja pripada klasičnoj teoriji modela, dovodi u vezu tačnost formule prvog reda φ u redukovanom proizvodu modela $\prod \mathcal{S}_i / \sim_\Psi$ sa tačnošću njoj pridruženih formula u pojedinačnim modelima $\mathcal{S}_i$.

Ziegler i Flum daju verziju ove teoreme u topološkoj teoriji modela. Ova verzija se odnosi na proizvod Tihonova. Bertossi (bez dokaza) daje uopštenje ove teoreme za ideal - proizvod topoloških struktura. U ovoj tački dajemo uopštenje teoreme Feferman-Vaughta za r.i.p. proizvoljne familije topoloških struktura.

U tekstu koji sledi koristićemo oznake i rezultate tačke 3.3. koji se odnose na Boole-ove algebre sa istaknutim idealom. Posebno ćemo posmatrati Boole-ovu algebru $(P(I)/\equiv, \Lambda/\equiv)$ koja je uvedena u tački 3.3. Najpre dajemo neke pomoćne definicije i tvrdjenja.

Definicija 8.2.1. *Neka je φ L_t- formula i neka je Y neka skupovna promenljiva. Tada je φ^Y formula koja se od φ dobija kada se svako slobodno pojavljivanje promenljive Y oblika $t \in Y$ zameni formulom $t = t$.*

Primer. Ako je $\varphi = x \in Y \wedge (\neg z \in Y \vee \exists Y(u \in Y \vee u = x))$ onda je $\varphi^Y = x = x \wedge (\neg z = z \vee \exists Y(u \in Y \vee u = x))$ pa je, očigledno, φ^Y ekvivalentna formuli $\exists Y(u \in Y \vee u = x)$. Očigledno važi:

$$(\neg\varphi)^Y = \neg\varphi^Y, \ (\alpha \wedge \beta)^Y = \alpha^Y \wedge \beta^Y, \ (\exists x\alpha)^Y = \exists x\alpha^Y \quad \text{i}$$

$$(\exists x(x \in X \wedge \alpha))^Y = \exists X(x \in X \wedge \alpha^Y).$$

Lema 8.2.1. *Za svaku L_t- formulu φ važi: za svaku topološku strukturu $(S,\mathcal{O})$ i svaku valuaciju τ u ovoj strukturi važi:*

$$(S,\mathcal{O}) \models (\varphi \Longleftrightarrow \varphi^Y)[\tau^Y]$$

gde je τ^Y valuacija koja se dobija od τ kada se vrednost pridružena promenljivoj Y zameni sa S.

Dokaz. Ako promenljiva Y nije slobodna u φ, onda je $\varphi^Y = \varphi$ pa tvrdjenje trivijalno važi. Za formule koje sadrže Y kao slobodnu promenljivu dokaz dajemo indukcijom po složenosti formule.

1. φ je atomna formula. Tada je $\varphi = x \in Y$ gde je x neka individualna promenljiva. Neka je $(S,\mathcal{O})$ proizvoljna topološka struktura i τ valauacija u $(S,\mathcal{O})$. Kako je $\varphi^Y = x = x$, dokazujemo

$$(S,\mathcal{O}) \models (x \in Y \Longleftrightarrow x = x)[\tau^Y] \tag{8.2}$$

ako je $\tau(x) = a(\in S)$ onda je (1) ekvivalentno sa $a \in S \Longleftrightarrow a = a$, što je očigledno tačno.

2. $\varphi = \alpha \wedge \beta$. Neka su $(S,\mathcal{O})$ i τ kao gore. Prema indukcijskoj hipotezi važi:

$$(S,\mathcal{O}) \models (\alpha \Longleftrightarrow \alpha^Y)[\tau^Y] \quad \text{i} \quad (S,\mathcal{O}) \models (\beta \Longleftrightarrow \beta^Y)[\tau^Y]$$

odakle se lako dobija

$$(S,\mathcal{O}) \models (\alpha \wedge \beta \Longleftrightarrow \alpha^Y \wedge \beta^Y)[\tau^Y].$$

3. $\varphi = \neg\alpha$. Neka su $(S,\mathcal{O})$ i τ kao gore. Tada, prema indukcijskoj hipotezi imamo $(S,\mathcal{O}) \models (\alpha \Longleftrightarrow \alpha^Y)[\tau^Y]$, odakle sledi $(S,\mathcal{O}) \models \alpha[\tau^Y]$ akko $(S,\mathcal{O}) \models \alpha^Y[\tau^Y]$, što daje: nije $(S,\mathcal{O}) \models \alpha[\tau^Y]$ akko nije $(S,\mathcal{O}) \models \alpha^Y[\tau^Y]$, pa važi:

$$(S,\mathcal{O}) \models (\neg\alpha \Longleftrightarrow \neg\alpha^Y)[\tau^Y].$$

4. $\varphi = \exists x\alpha$. Neka su $(S,\mathcal{O})$ i τ proizvoljni, i neka $(S,\mathcal{O}) \models (\exists x\alpha)[\tau^Y]$. Tada postoji $a \in S$ da $(S,\mathcal{O}) \models \alpha[\tau^Y(x/a)]$, gde je $\tau^Y(x/a)$ valuacija dobijena od τ^Y zamenom vrednosti dodeljene x sa a. Po induktivnoj pretpostavci za sve pa i za valuaciju $\tau^Y(x/a)$ važi $(S,\mathcal{O}) \models (\alpha \Longleftrightarrow \alpha^Y)[\tau^Y(x/a)]$ pa imamo $(S,\mathcal{O}) \models \alpha^Y[\tau^Y(x/a)]$ za sve $a \in S$. Zato $(S,\mathcal{O}) \models (\exists x\alpha^Y)[\tau^Y]$ pa važi:

$$(S,\mathcal{O}) \models (\exists x\alpha \Rightarrow \exists x\alpha^Y)[\tau^Y].$$

Obratna implikacija se slično dokazuje.

5. $\varphi = \exists x(x \in X \wedge \alpha)$. Neka su $(S, \mathcal{O})$ i τ proizvoljni i neka je $(S, \mathcal{O}) \models \varphi[\tau^Y]$. Tada postoji $U \in \mathcal{O}$ da je

$$(S, \mathcal{O}) \models x \in X[\tau^Y(X/U)] \tag{8.3}$$

$$(S, \mathcal{O}) \models \alpha[\tau^Y(X/U)]. \tag{8.4}$$

Kako je Y slobodno u φ, to je $Y \neq X$ pa je $\tau^Y[X/U] = (\tau(X/U))^Y$. Prema indukcijskoj hipotezi za sve valuacije, pa i za $\tau(X/U)$ važi:

$$(S, \mathcal{O}) \models (\alpha \Longleftrightarrow \alpha^Y)[\tau^Y(X/U)]$$

pa iz (3) sledi $(S, \mathcal{O}) \models \alpha^Y[\tau^Y(X/U)]$ što uzevši u obzir (2) daje

$$(S, \mathcal{O}) \models (x \in X \wedge \alpha^Y)[\tau^Y(X/U)]$$

gde $U \in \mathcal{O}$. Zato važi $(S, \mathcal{O}) \models (\exists X(x \in X \wedge \alpha^Y))[\tau^Y]$ pa je konačno

$$(S, \mathcal{O}) \models (\varphi \Rightarrow \varphi^Y)[\tau^Y]$$

Obratna implikacija se analogno dokazuje. □

Teoremu Feferman - Vaughta dokazujemo za slučaj kada je jezik $L = \emptyset$ (nema relacijskih, funkcijskih slova ni konstanti). Dokaz za slučaj kada je $L \neq \emptyset$ dobija se kada se u dokazu koji sledi, preciznije u onom delu tog dokaza koji se odnosi na atomne formule, dopišu poznati rezultati vezani za interpretaciju terma i relacijskih slova u redukovanom proizvodu relacijsko - operacijskih struktura. Ova interpretacija je ista u r.i.p. (to jest ideal Λ ne igra nikakvu ulogu), pa pomenuti rezultati (koji se mogu naći u [6] str. 342) automatski važe.

Teorema 8.2.1. *Za svaku L_t- formulu $\varphi(x_1, ..., x_p, X_1, ..., X_q)$ postoji niz formula $(\sigma; \psi_1, ..., \psi_m)$, takav da važi:*

(A) Za sve $j \in \{1, ..., m\}$ formule ψ_j su L_t- formule čije su slobodne promenljive medju slobodnim promenljivim formule φ. Pritom, ako je X skupovna promenljiva koja je pozitivna (negativna) u φ onda je takva i u ψ_j. (Nepojavljivanje se smatra i pozitivnim i negativnim).

(B) $\sigma(y_1,...,y_m)$ je formula na jeziku Boole-ovih algebri sa idealom i monotona je, to jest važi:

$$\vdash y_1 \leq z_1 \wedge y_2 \leq z_2 \wedge ... \wedge y_m \leq z_m \wedge \sigma(y_1,...,y_m) \Rightarrow \sigma(z_1,...,z_m).$$

(C) Za proizvoljan neprazan skup I, ideal Λ i filter Ψ na I, za proizvoljnu familiju topoloških struktura $\{(S_i,\mathcal{O}_i) \mid i \in I\}$ i svako $f^1,...,f^p \in \prod S_i$ te svako $U^1,...,U^q \in \mathcal{B}^\Lambda$, važi:

$$\prod{}^{\Lambda}_{\Psi} S_i \models \varphi[[f^1],...,[f^p],q(U^1),...,q(U^q)] \quad \text{akko } \mathbf{B} \models \sigma[[I_{\psi_1}],...,[I_{\psi_m}]]$$

gde je $I_{\psi_j} = \{i \in I \mid S_i \models \psi_j[f_i^1,...,f_i^p,U_i^1,...,U_i^q]\}$ za $j \in \{1,...,m\}$ i gde je $\mathbf{B} = (P(I)/\equiv,\Lambda/\equiv)$ (videti tačku 3.3).

Za niz $(\sigma;\psi_1,...,\psi_m)$ kažemo da odredjuje formulu φ.

Dokaz. Radi preglednosti, nizove $x^1,...,x^p; X^1,...,X^q; f^1,...,f^p; U^1, ...,U^q; [f^1],...,[f^p]; q(U^1),...,q(U^q); f_i^1,...,f_i^p$ i $U_i^1,...,U_i^q; [I_{\psi_1}],...,[I_{\psi_m}]$ ćemo, kada to ne izaziva konfuziju, označavati redom sa $\overline{x},\overline{X},\overline{f},\overline{U},\overline{[f]},\overline{q(U)},\overline{f_i}, \overline{U_i},\overline{[I_\psi]}$. Takodje uvodimo oznaku $\prod^{\Lambda}_{\Psi} S_i = S$. Na kraju, sa $Fv(\varphi)$ označimo skup slobodnih promenljivih formule φ, a sa $Fv^+(\varphi)(Fv^-(\varphi))$ skup skupovnih promenljivih koje su u φ pozitivne (negativne).

Dokaz dajemo indukcijom po složenosti formule φ.

1^0 φ je atomna formula. Neka je $\sigma(y_1) = (y_1 = 1)$ i $\psi_1 = \varphi$. Dokazujemo da niz $(\sigma;\psi_1)$ odredjuje formulu φ. Uslovi (A) i (B) očigledno važe. Dokazujemo (C). Neka su I,Λ,Ψ i $\{(S_i,\mathcal{O}_i) \mid i \in I\}$ kao u (C). Pošto je $L = \emptyset$, moguće je:

a) $\varphi = x = y$. Neka $f,g \in \prod S_i$. Tada važi: $S \models \varphi[[f],[g]]$ akko $[f] = [g]$ akko $\{i \in I \mid f_i = g_i\} = I_{\psi_1} \in \Psi$ akko $[I_{\psi_1}] = 1$ akko $\mathbf{B} \models \sigma[[I_{\psi_1}]]$.

b) $\varphi = x \in X$. Neka $f \in \prod S_i$ i $U \in \mathcal{B}^\Lambda$. Tada važi: $S \models \varphi[[f],q(U)]$ akko $[f] \in q(U)$ akko $\{i \in I \mid f_i \in U_i\} = I_{\psi_1} \in \Psi$ akko $[I_{\psi_1}] = 1$ akko $\mathbf{B} \models \sigma[[I_{\psi_1}]]$.

2^0 $\varphi = \alpha \wedge \beta$. Prema indukcijskoj hipotezi (u daljem i.h.) postoje nizovi $(\rho;\eta_1,...,\eta_r)$ i $(\tau;\theta_1,...,\theta_s)$ koji odredjuju formule α i β respektivno. Neka su $y_1,...,y_r,y_{r+1},...,y_{r+s}$ različite promenljive. Definišimo formulu

$$\sigma(y_1,...,y_{r+s}) = \rho(y_1,...,y_r) \wedge \tau(y_{r+1},...,y_{r+s}).$$

Dokažimo da niz $(\sigma; \eta_1, ..., \eta_r, \theta_1, ..., \theta_s)$ odredjuje formulu φ.

(A) Prema i.h. $\eta_1, ..., \eta_r, \theta_1, ..., \theta_s$ su L_t– formule i $Fv(\eta_j) \subset Fv(\alpha) \subset Fv(\varphi)$ a $Fv(\theta_k) \subset Fv(\beta) \subset Fv(\varphi)$. Dalje, ako $X \in Fv^+(\varphi)$, onda $X \in Fv^+(\alpha) \cap Fv^+(\beta)$ pa, prema i.h, $X \in Fv^+(\eta_j)$ gde $j \in \{1, ..., r\}$, odnosno $X \in Fv^+(\theta_k)$, gde $k \in \{1, ..., s\}$.

(B) Očigledno, σ je na jeziku $\mathcal{L}_{B,\Lambda}$. Dokažimo monotonost. Neka za $j \in \{1, ..., r+s\}$ važi $y_j \leq z_j$ i neka $\sigma(y_1, ..., y_{r+s})$. Tada $\rho(y_1, ..., y_r)$ i $\tau(y_{r+1}, ..., y_{r+s})$, pa zbog monotonosti ρ i τ imamo $\rho(z_1, ..., z_r) \wedge \tau(z_{r+1}, ..., z_{r+s})$, to jest $\sigma(z_1, ..., z_{r+s})$, što je trebalo dokazati.

(C) Neka su slobodne promenljive formule φ : $x_1, ..., x_p, X_1, ..., X_q$. Neka su $I, \Lambda, \Psi, \{(S_i \mathcal{O}_i) \mid i \in I\}, f^1, ..., f^p \in \prod S_i$ i $U^1, ..., U^q \in \mathcal{B}^\Lambda$ proizvoljni. Tada imamo: $S \models \varphi[\overline{[f]}, \overline{q(U)}]$ akko $S \models \alpha[\overline{[f]}, \overline{q(U)}]$ i $S \models \beta[\overline{[f]}, \overline{q(U)}]$ akko $\mathbf{B} \models \rho[\overline{[I_\eta]}]$ i $\mathbf{B} \models \tau[\overline{[I_\theta]}]$ akko $\mathbf{B} \models \sigma[\overline{[I_\eta]}, \overline{[I_\theta]}]$.

3^0 $\varphi = \neg\alpha$. Prema i.h. postoji niz $(\tau; \theta_1, ..., \theta_m)$ koji odredjuje formulu α. Dokažimo da niz $(\sigma; \psi_1, ..., \psi_m)$ odredjuje formulu φ, ako je

$$\sigma(y_1, ..., y_m) = \neg\tau(y_1^c, ..., y_m^c) \quad \text{i} \quad \psi_j = \neg\theta_j, \quad j \in \{1, ..., m\}.$$

(A) Prema i.h. je $Fv(\theta_j) \subset Fv(\alpha) = Fv(\varphi)$. Dalje, $Fv^+(\varphi) = Fv^-(\alpha) \subset Fv^-(\theta_j) = Fv^+(\psi_j)$ i slično, $Fv^-(\varphi) \subset Fv^-(\psi_j)$.

(B) Očigledno, σ je formula jezika $\mathcal{L}_{B,\Lambda}$. Neka je $y_1 \leq z_1, ..., y_m \leq z_m$ i $\sigma(y_1, ..., y_m)$. Tada je $z_1^c \leq y_1^c, ..., z_m^c \leq y_m^c$ pa bi $\tau(z_1^c, ..., z_m^c)$ zbog monotonosti τ dalo $\tau(y_1^c, ..., y_m^c)$ to jest $\neg\sigma(y_1, ..., y_m)$, što nije tačno. Dakle važi: $\neg\tau(z_1^c, ..., z_m^c)$ to jest $\sigma(z_1, ..., z_m)$, pa je σ monotona.

(C) Neka su $x_1, ..., x_p; X_1, ..., X_q$ slobodne promenljive φ i neka su $I, \Lambda, \Psi, \{(S_i, \mathcal{O}_i) \mid i \in I\}; f^1, ..., f^p \in \prod S_i; U^1, ..., U^q \in \mathcal{B}^\Lambda$ proizvoljni. Uočimo najpre da je $I_{\theta_j} = \{i \in I \mid S_i \models \theta_j[\overline{f_i}, \overline{U_i}]\} = \{i \in I \mid \text{nije } S_i \models \psi_j[\overline{f_i}, \overline{U_i}]\} = I \setminus I_{\psi_j}$ pa je $[I_{\theta_j}] = [I_{\psi_j}]^c$. Važi: $S \models \varphi[\overline{[f]}, \overline{q(U)}]$ akko nije $S \models \alpha[\overline{[f]}, \overline{q(U)}]$ akko nije $\mathbf{B} \models \tau[\overline{[I_\theta]}]$ akko nije $\mathbf{B} \models \tau[\overline{[I_\psi]^c}]$ akko $\mathbf{B} \models \sigma[\overline{[I_\psi]}]$, što je trebalo dokazati.

4^0 $\varphi = \exists x \alpha(x, x_1, ..., x_p, X_1, ..., X_q)$. Prema indukcijskoj hipotezi, postoji niz $(\tau; \theta_1, ..., \theta_m)$ koji odredjuje formulu α.

Neka je $\ell = 2^m$ i neka je $s_1 = \{1\}, s_2 = \{2\}, ..., s_m = \{m\}, s_{m+1}, ..., s_\ell$ spisak podskupova skupa $\{1, 2, ..., m\}$. Dokažimo da niz $(\sigma; \psi_1, ..., \psi_\ell)$ odredjuje formulu φ, ako je

$$\sigma(y_1,\dots,y_\ell) = \exists z_1,\dots,z_\ell(\bigwedge_{k=1}^{\ell} z_k \leq y_k \wedge \bigwedge_{s_i\cup s_j=s_k} z_i z_j = z_k \wedge \tau(z_1,\dots,z_m))$$

$$\psi_k = \exists x \bigwedge_{j\in S_k} \theta_j(x,\overline{x},\overline{X}), \quad k\in\{1,\dots,\ell\}.$$

(Prazna konjukcija se smatra tačnom).

(A) Prema i.h. θ_j su L_t- formule, pa su to i ψ_k i važi $Fv(\theta_j)\subset Fv(\alpha)$. Zato je $Fv(\psi_k) = (\bigcup_{j\in S_k} Fv(\theta_j))\setminus\{x\}\subset Fv(\alpha)\setminus\{x\} = Fv(\varphi)$. Dalje, $Fv^+(\varphi) = Fv^+(\alpha)\subset\bigcap_{j=1}^{n} Fv^+(\theta_j)\subset Fv^+(\psi_k)$ za sve $k\in\{1,\dots,\ell\}$. Slično važi $Fv^-(\varphi)\subset Fv^-(\psi_k)$, gde $k\in\{1,\dots,\ell\}$.

(B) Formula σ je na jeziku $\mathcal{L}_{B,\Lambda}$ jer je i τ na tom jeziku. Dokažimo monotonost. Neka je $y_1\leq t_1,\dots,y_\ell\leq t_\ell$ i neka je $\sigma(y_1,\dots,y_\ell)$. Tada postoje $z_1,\dots,z_\ell$ da je $z_1\leq y_1,\dots,z_\ell\leq y_\ell$ pa je $z_1\leq t_1,\dots,z_\ell\leq t_\ell$. Sem toga, ako je $s_1\cup s_j = s_k$, onda je $z_iz_j = z_k$. Na kraju, važi $\tau(z_1,\dots,z_m)$ pa zbog monotonosti τ važi $\sigma(t_1,\dots,t_\ell)$.

(C) Neka su $I,\Lambda,\Psi,\{(S_i,\mathcal{O}_i)\mid i\in I\}; f^1,\dots,f^p\in\prod S_i$ i $U^1,\dots,U^q\in\mathcal{B}^\Lambda$ proizvoljni. Dokazujemo

$$S\models\exists x\alpha(x)[\overline{[f]},\overline{q(U)}] \quad \text{akko} \quad \mathbf{B}\models\sigma[[I_{\psi_1}],\dots,[I_{\psi_\ell}]]$$

($\Rightarrow$) Neka $S\models\exists x\alpha(x)[\overline{[f]},\overline{q(U)}]$! Tada postoji $g\in\prod S_i$ da je $S\models\alpha[[g],\overline{[f]},\overline{q(U)}]$. Definišimo skupove

$$Z^k = \{i\in I\mid S_i\models\bigwedge_{j\in S_k}\theta_j[g_i,\overline{f_i},\overline{U_i}]\},\quad k\in\{1,\dots,\ell\}.$$

Za $i\in Z^k$ važi: postoji $a(=g_i)\in S_i$ da $S_i\models\bigwedge_{j\in S_k}\theta_j[,\overline{f_i},\overline{U_i}]$ pa $S_i\models\psi_k[\overline{f_i},\overline{U_i}]$, to jest $i\in I_{\psi_k}$. Zato $Z^k\subset I_{\psi_k}$ te imamo

$$[Z^k]\leq[I_{\psi_k}]\quad k\in\{1,\dots,\ell\}.$$

Ako je $s_i\cup s_j = s_k$, onda važi: $i\in Z^i\cap Z^j$ akko $S_i\models\bigwedge_{j\in s_k}\theta_j(g_i,\overline{f_i},\overline{U_i}]$ akko $i\in Z^k$. Dakle $Z^i\cap Z^j = Z^k$, što daje

$$s_i\cup s_j = s_k\Rightarrow[Z^i][Z^j] = [Z^k].$$

Na kraju za $k \in \{1,...,m\}$ je $s_k = \{k\}$ pa imamo $Z^k = I_{\theta_k}$. Prema i.h. a pošto je $S \models \alpha[[g],\overline{[f]},\overline{q(U)}]$, važi $\mathbf{B} \models \tau[[I_{\theta_1}],...,[I_{\theta_m}]$ to jest

$$\tau[[Z^1],...,[Z^m]]$$

što sa prethodnim zaključcima daje $\mathbf{B} \models \sigma[[I_{\psi_1}],...,[I_{\psi_\ell}]]$.

($\Leftarrow$) Neka je $\mathbf{B} \models \sigma[[I_{\psi_1}],...,[I_{\psi_\ell}]]$. Tada postoje $Z^1,...,Z^\ell \in P(I)$ da važi:

a) $[Z^k] \leq [I_{\psi_k}]$, $k = 1,...,\ell$; b) $s_i \cup s_j = s_k \Rightarrow [Z^i][Z^j] = [Z^k]$;

$$(c)\mathbf{B} \models \tau[[Z^1],...,[Z^m]].$$

Zato postoje $F^k \in \Psi$, $k = 1,...,\ell$ i ako je $s_i \cup s_j = s_k$ postoje $F^{ijk} \in \Psi$ da je:

a_1) $Z^k \cap F^k \subset I_{\psi_k}$, $k = 1,...,\ell$;
b_1) $s_i \cup s_j = s_k \Rightarrow Z^i \cap Z^j \cap F^{ijk} = Z^k \cap F^{ijk}$. Neka je $F = \bigcap_{k=1}^{\ell} F^k \cap \bigcap_{s_i \cup s_j = s_k} F^{ijk}$. Tada $F \in \Psi$ i važi

$$a_2)\ Z^k \cap F \subset I_{\psi_k}, k = 1,...,\ell;$$
$$b_2)\ s_i \cup s_j = s_k \Rightarrow Z^i \cap Z^j \cap F = Z^k \cap F.$$

Iz (b_2) se indukcijom lako pokazuje da važi:

b_3) $s_{j_1} \cup s_{j_2} \cup ... \cup s_{j_r} = s_h \Rightarrow Z^{j_1} \cap Z^{j_2} \cap ... \cap Z^{j_r} \cap F = Z^h \cap F$.
Za $i_0 \in F$ definišimo skup:

$$s(i_0) = \{j \in \{1,...,m\} \mid i_0 \in Z^j\}.$$

Tada za neko $h \in \{1,...,\ell\}$ važi:

$$s_{i_0} = s_h = \{j_1,...,j_r\} = s_{j_1} \cup s_{j_2} \cup ... \cup s_{j_r}$$

pa zbog (b_3) i (a_2) imamo

$$i_o \in \bigcap_{j \in s(i_0)} Z^j = Z^{j_1} \cap ... \cap Z^{j_r} \cap F = Z^h \cap F \subset I_{\psi_h}.$$

Zato $S_{i_0} \models \exists \bigwedge_{j \in s(i_0)} \theta_j(x)[\overline{f_{i_0}}, \overline{U_{i_0}}]$ za $i_0 \in F$ možemo odabrati $g_{i_0} \in S_{i_0}$ da važi $S_{i_0} \models \bigwedge_{j \in s(i_0)} \theta_j[g_{i_0}, \overline{f_{i_0}}, \overline{U_{i_0}}]$. Za $i \in I \setminus F$ odaberimo $g_i \in S_i$ proizvoljno pa smo time definisali $g \in \prod S_i$. Dokažimo da je $S \models \alpha[[g],\overline{[f]},\overline{q(U)}]$.

Ako $k \in \{1,...,m\}$ i ako $i \in Z^k \cap F$, onda $S_i \models \bigwedge_{j\in s(i)} \theta_j[g_i, \overline{f}_i, \overline{U}_i]$ pa, pošto je $k \in s(i)$, imamo $S_i \models \theta_k[g_i, \overline{f}_i, \overline{U}_i]$, to jest $i \in I_{\theta_k}$. Dakle, $Z^k \cap F \subset I_{\theta_k}$ pa važi:

$$[Z^k] \leq [I_{\theta_k}], \quad k = 1,...,m.$$

Iz uslova (c) i monotonosti τ sledi:

$$\mathbf{B} \models \tau[[I_{\theta_1}],...,[I_{\theta_m}]]$$

no, niz $(\tau; \theta_1,...,\theta_m)$ odredjuje formulu α pa je $S \models \alpha[[g], \overline{[f]}, \overline{q(U)}]$, odakle sledi $S \models \exists x\alpha(x)[\overline{[f]}, \overline{q(U)}]$ to jest

$$S \models \varphi[\overline{[f]}, \overline{q(U)}]$$

što je trebalo dokazati.

5^0 $\varphi = \exists Y(x \in Y \wedge \alpha(x, x_1,...,x_p, X_1,...,X_q, Y^-))$. Tada, prema i.h. postoji niz $(\tau; \theta_1,...,\theta_m)$ koji odredjuje formulu α. Neka su ℓ i s_i kao u 4^0. Dokažimo da niz $(\sigma; \psi_1,...,\psi_\ell, \eta_1,...,\eta_m)$ odredjuje formulu φ, ako je formula $\sigma(y_1,...,y_\ell, v_1,...,v_m)$ data sa:

$$\sigma = \exists z_1,...,z_\ell(\bigwedge_{k=1}^{\ell} z_k \leq y_k \wedge \bigwedge_{s_i \cup s_j = s_k} z_i z_j = z_k \wedge \tau(z_1,...,z_m) \wedge \bigwedge_{k=1}^{m} \lambda(z_k \setminus v_k)$$

$$\psi_k = \exists Y(x \in Y \wedge \bigwedge_{j\in s_k} \theta_j), \quad k = 1,...,\ell$$

$$\eta_j = \theta_j^Y \qquad j = 1,...,m.$$

(Formula θ_j^Y se od formule θ_j dobija kao u lemi 8.2.1).

(A) Prema i.h. θ_j su L_t- formule i Y je negativna u θ_j, pa su ψ_k i θ_j^Y takodje L_t- formule. Sem toga,

$$Fv(\psi_k) = \{x\} \cup \bigcup_{j\in s_k} Fv(\theta_j) \setminus \{Y\} \subset \{x\} \cup Fv(\alpha) \setminus \{Y\} = Fv(\varphi).$$

Takodje važi:

$$Fv(\eta_j) = Fv(\theta_j) \setminus \{Y\} \subset Fv(\alpha) \setminus \{Y\} \subset Fv(\varphi).$$

Na kraju

$$Fv^+(\varphi) = Fv^+(\alpha)\setminus\{Y\} \subset \bigcap_{j=1}^{m} Fv^+(\theta_j)\setminus\{Y\} \subset \bigcap_{k=1}^{\ell} Fv^+(\psi_k) \cap \bigcap_{j=1}^{m} Fv^+(\eta_j).$$

Analogan rezultat važi $Fv^-(\varphi)$.

(B) Monotonost σ se dokazuje kao u tački 4^0 ako se pritom uoči da $v_k \leq w_k$ povlači $z_k \setminus w_k \leq z_k \setminus v_k$ pa zato $\lambda(z_k \setminus v_k)$ implicira $\lambda(z_k \setminus w_k)$.

(C) Neka su $I, \Lambda, \Psi\{(S_i, \mathcal{O}_i) \mid i \in I\}, g, f^1, ..., f^p, \in \prod S_i, U^1, ..., U^q \in \mathcal{B}^\Lambda$ proizvoljni. Dokazujemo da važi

$$S \models \exists Y(x \in Y \wedge \alpha(Y))[[g], \overline{[f]}, \overline{q(U)}] \quad \text{akko } \mathbf{B} \models \sigma[[[I_{\psi_1}], ..., [I_{\eta_m}]]$$

($\Rightarrow$) Neka postoji $V = \prod V_i \in \mathcal{B}^\Lambda$ da je $[g] \in q(V)$ i da važi $S \models \alpha[[g], \overline{[f]}, \overline{q(U)}, q(V)]$. Definišimo skupove

$$Z^k = \{i \in I \mid S_i \models \bigwedge_{j \in s_k} \theta_j[g_i, \overline{f}_i, \overline{U}_i, V_i]\} \quad k = 1, ..., \ell.$$

Zbog $[g] \in q(V)$ imamo $F = \{i \in I \mid g_i \in V_i\} \in \Psi$. Dalje, za $i \in Z^k \cap F$ važi $S_i \models g_i \in V_i \wedge \bigwedge_{j \in s_k} \theta_j[g_i, \overline{f}_i, \overline{U}_i, V_i]$, odakle $S_i \models \psi_k[g_i, \overline{f}_i, \overline{U}_i]$ to jest $i \in I_{\psi_k}$. Dakle, $Z^k \cap F \subset I_{\psi_k}$ pa imamo

$$[Z^k] \leq [I_{\psi_k}], \quad k = 1, ..., \ell.$$

Dalje, kao u 4^0 se dokazuje da važi sledeća relacija

$$s_i \cup s_j = s_k \Rightarrow [Z^i][Z^j] = [Z^k].$$

Za $k \in \{1, ..., m\}$ je $s_k = \{k\}$ pa je $Z^k = I_{\theta_k}$. Pošto niz $(\tau; \theta_1, ..., \theta_m)$ određuje formulu α i važi $S \models \alpha[[g], \overline{[f]}, \overline{q(U)}, q(V)]$, imamo $\mathbf{B} \models \tau[[I_{\theta_1}], ..., [I_{\theta_m}]]$, to jest

$$\tau([Z^1], ..., [Z^m]).$$

Konačno, neka $k \in \{1, ..., m\}$ i neka $j \in Z^k \setminus I_{\eta_k} = I_{\theta_k} \setminus I_{\theta_k^Y}$. Tada je $S_j \models \theta_k[g_j, \overline{f}_j, \overline{U}_j, V_j]$ i nije $S_j \models \theta_k^Y[g_j, \overline{f}_j, \overline{U}_j, V_j]$. $V = \prod V_i \in \mathcal{B}^\Lambda$ pa je oblika $V = \bigcap_{i \in L} \pi_i^{-1}(O_i)$. Pretpostavimo da $j \in L$. Tada je $V_j = S_j$ pa važi:

$$S_j \models \theta_k[g_j, \overline{f}_j, \overline{U}_j, S_j] \quad \text{i nije } S_j \models \theta_k^Y[g_j, \overline{f}_j, \overline{U}_j, S_j]$$

što je prema lemi 8.2.1. nemoguće. Dakle, $j \in L$ pa je $Z^k \setminus I_{\eta_k} \subset L \in \Lambda$, što daje $Z^k \setminus I_{\eta_k} \in \Lambda$. No, tada imamo $[Z^k] \setminus [I_{\eta_k}] \in \Lambda/\equiv$ pa važi

$$\lambda([Z^k] \setminus [I_{\eta_k}]), \quad k = 1, ..., m$$

što dokazuje $\mathbf{B} \models \sigma[[I_{\psi_1}], ..., [I_{\psi_\ell}], [I_{\eta_1}], ..., [I_{\eta_m}]]$.

($\Leftarrow$) Neka je $\mathbf{B} \models \sigma[[I_{\psi_1}], ..., [I_{\psi_\ell}], [I_{\eta_1}], ..., [I_{\eta_m}]]$. Tada postoje $Z^1, ..., Z^\ell \subset I$ da su ispunjeni sledeći uslovi:

a) $[Z^k] \leq [I_{\psi_k}], k = 1, ..., \ell$;

b) $s_i \cup s_j = s_k \Rightarrow [Z^i][Z^j] = [Z^k]$;

c) $\tau([Z^1], ..., [Z^m]$;

d) $[Z^k] \setminus [I_{\eta_k}] \in \Lambda/\equiv, k = 1, ..., m$.

Zato postoje skupovi $F^k, F^{ijk}, G^k \in \Psi$ da važi:

a1) $Z^k \cap F^k \subset I_{\psi_k}, k = 1, ..., \ell$;

b1) $s_i \cup s_j = s_k \Rightarrow Z^i \cap Z^j \cap F^{ijk} = Z^k \cap F^{ijk}$;

d1) $Z^k \setminus I_{\eta_k} \cap G^k \in \Lambda, k = 1, ..., m$.

Neka je $F = \bigcap_{k=1}^{\ell} F^k \cap \bigcap_{s_i \cup s_j = s_k} F^{ijk} \cap \bigcap_{k=1}^{m} G^k \in \Psi$. Tada važi:

a2) $Z^k \cap F \subset I_{\psi_k}, k = 1, ..., \ell$;

b2) $s_i \cup s_j = s_k \Rightarrow Z^i \cap Z^j \cap F = Z^k \cap F$;

d2) $Z^k \setminus I_{\eta_k} \cap F \in \Lambda, k = 1, ..., m$.

Kao u 4^0, iz (b2) se indukcijom dokazuje da važi sledeća relacija

$$\text{b3)}\ s_{j_1} \cup s_{j_2} \cup ... \cup s_{j_r} = s_h \Rightarrow Z^{j_1} \cap ... \cap Z^{j_r} \cap F = Z^h \cap F.$$

Za $i \in \bigcup_{k=1}^{m} (Z^k \setminus I_{\eta_k} \cap F) = L$ definišemo skup

$$s(i) = \{j \in \{1, ..., m\} \mid i \in Z^j\}.$$

Tada za neko $h \in \{1, ..., \ell\}$ važi:

$$s(i) = s_h = \{j_1, ..., j_r\} = s_{j_1} \cup ... \cup s_{j_r}$$

pa na osnovu (b3) i (a2) imamo

$$i \in \bigcap_{j \in s(i)} Z^j = Z^{j_1} \cap ... \cap Z^{j_r} \cap F = Z^h \cap F \subset I_{\psi_h}$$

pa $S_i \models \psi_h[g_i, \overline{f}_i, \overline{U}_i]$ pa možemo odabrati $V_i \in \mathcal{B}_i$ da važi

$$g_i \in V_i \quad \text{i} \quad S_i \models \bigwedge_{j \in s(i)} \theta_j[g_i, \overline{f}_i, \overline{U}_i, V_i].$$

Za $i \notin L$ definišimo $V_i = S_i$. L je konačna unija elemenata Λ pa je $L \in \Lambda$. Zato $V = \prod V_i \in \mathcal{B}^{\Lambda}$. Dokažimo da je $S \models \alpha[[g], \overline{[f]}, \overline{q(U)}, q(V)]$. Neka je

$$I_{\theta_k} = \{i \in I \mid S_i \models \theta_k[g_i, \overline{f}_i, \overline{U}_i, V_i]\}, \quad k = 1, ..., m.$$

Neka $j_0 \in \{1, ..., m\}$ i neka $i \in Z^{j_0} \cap F$. Tada je moguće:

i) $i \in L$. Tada $S_i \models \bigwedge_{j \in s(i)} \theta_j[g_i, \overline{f}_i, \overline{U}_i, V_i]$ pa kako $j_0 \in s(i)$ to $S_i \models \theta_{j_0}[g_i, \overline{f}_i, \overline{U}_i, V_i]$ pa $i \in I_{\theta_{j_0}}$.

(ii) $i \notin L$. Tada je $V_i = S_i$. Takodje, $i \notin (Z^{j_0} \cap F) \setminus I_{\eta_{j_0}}$ pa kako i $i \in Z^{j_0} \cap F$ imamo $i \in I_{\eta_{j_0}} = I_{\theta^Y_{j_0}}$. Pretpostavimo da $i \notin I_{\theta_{j_0}}$. Tada

$$S_i \models \theta^Y_{j_0}[g_i, \overline{f}_i, \overline{U}_i, S_i] \quad \text{i nije} \quad S_i \models \theta_{j_0}[g_i, \overline{f}_i, \overline{U}_i, S_i]$$

što je nemoguće zbog leme 8.2.1. Zato opet $i \in I_{\theta_{j_0}}$.

Iz (i) i (ii) sledi $Z^{j_0} \cap F \subset I_{\theta_{j_0}}$ pa je

$$[Z^j] \leq [I_{\theta_j}], \quad j = 1, ..., m.$$

Sada iz (c) i monotonosti τ sledi $\mathbf{B} \models \tau[[I_{\theta_1}], ..., [I_{\theta_m}]]$ pa indukcijska hipoteza daje

$$S \models \alpha[[g], \overline{[f]}, \overline{q(U)}, q(V)].$$

Dalje, $g \in V$ pa $[g] \in q(V)$, a kako $V \in \mathcal{B}^{\Lambda}$, to $q(V) \in \mathcal{B}^{\Lambda}_{\Psi}$. Dakle, postoji $q(V) \in \mathcal{B}^{\Lambda}_{\Psi}$ da $S \models [g] \in q(V) \wedge \alpha[[g], \overline{[f]}, \overline{q(U)}, q(V)]$ to jest važi

$$S \models \exists Y(x \in Y \wedge \varphi(Y))[[g], \overline{[f]}, \overline{q(U)}])$$

što je trebalo dokazati. □

Napomena 8.2.1 U prethodnoj teoremi je (specijalno) dokazano da za svaku L_t- rečenicu φ važi:

$$(\prod{}^{\Lambda}_{\Psi} S_i, \mathcal{B}^{\Lambda}_{\Psi}) \models \varphi \quad \text{akko} \quad \mathbf{B} \models \sigma[[I_{\psi_1}], ..., [I_{\psi_m}]].$$

Naime, skupovne promenljive su se kretale kroz fiksiranu bazu $\mathcal{B}^{\Lambda}_{\Psi}$ topologije $\mathcal{O}^{\Lambda}_{\Psi}$ redukovanog ideal - proizvoda $\prod^{\Lambda}_{\Psi} S_i$, pa se gornja teorema odnosi na tačnost formule φ u slaboj strukturi $(\prod_{\Psi}^{\Lambda} S_i, \mathcal{B}_{\Psi}^{\Lambda})$. No. reč je o L_t- formulama koje su invarijantne za topologije (definicija 8.1.2) pa, na osnovu teorema 8.1.1 i 8.1.2, za svaku topološku strukturu $(S, \mathcal{O})$ važi:

- ako postoji baza $\mathcal{B}$ topologije $\mathcal{O}$ da $(S, \mathcal{B}) \models \varphi$, onda je $(S, \mathcal{O}) \models \varphi$,
- ako $(S, \mathcal{O}) \models \varphi$, onda za svaku bazu $\mathcal{B}$ topologije $\mathcal{O}$ $(S, \mathcal{B}) \models \varphi$.

Zato, uz pretpostavke i oznake gornje teoreme važi:

$$(\prod{}_{\Psi}^{\Lambda} S_i, \mathcal{O}_{\Psi}^{\Lambda}) \models \varphi \quad \text{akko} \quad \mathbf{B} \models \sigma[[I_{\psi_1}], ..., [I_{\psi_m}]].$$

Na kraju, elementarnom indukcijom se dokazije da ako je φ L_t- rečenica a $(\sigma, \psi_1, ..., \psi_m)$ njoj pridružen niz formula, onda su i formule $\psi_1, ..., \psi_m$ takodje L_t- rečenice. Zato važi

Teorema 8.2.2. *Za svaku L_t- rečenicu φ postoji niz formula $(\sigma; \psi_1, ..., \psi_m)$, takav da važi:*

(A') Za sve $j \in \{1, ..., m\}$ formule ψ_j su L_t- rečenice.

(B') σ je formula na jeziku $\mathcal{L}_{B,\Lambda}$ i monotona je.

(C') Za proizvoljan skup I, ideal Λ i filter Ψ na I, za proizvoljnu familiju topoloških struktura $\{(S_i, \mathcal{O}_i) \mid i \in I\}$ važi:

$$(\prod{}_{\Psi}^{\Lambda} S_i, \mathcal{O}_{\Psi}^{\Lambda}) \models \varphi \quad \textit{akko} \quad \mathbf{B} \models \sigma[[I_{\psi_1}], ..., [I_{\psi_m}]]$$

gde je $I_{\psi_j} = \{i \in I \mid (S_i, \mathcal{O}_i) \models \psi_j\}$. □

U nastavku dokazujemo da r.i.p. čuva L_t- ekvivalenciju.

Definicija 8.2.2. *Topološke strukture $(\mathcal{S}, \mathcal{O}^S)$ i $(\mathcal{T}, \mathcal{O}^T)$ jezika L su L_t- ekvivalentne akko za svaku L_t- rečenicu jezika L važi:*

$$(\mathcal{S}, \mathcal{O}^S) \models \varphi \quad \textit{akko} \quad (\mathcal{T}, \mathcal{O}^T) \models \varphi.$$

Ovo označavamo sa $(\mathcal{S}, \mathcal{O}^S) \equiv^t (\mathcal{T}, \mathcal{O}^T)$.

Teorema 8.2.3. *R.i.p. topoloških prostora čuva L_t- ekvivalenciju.*

Dokaz. Neka su $(\mathcal{S}_i, \mathcal{O}^{S_i}), (\mathcal{T}, \mathcal{O}^{T_i})$, gde $i \in I$, topološke strukture jezika L i neka je za sve $i \in I$

$$(\mathcal{S}_i, \mathcal{O}^{\mathcal{S}_i}) \equiv^t (\mathcal{T}, \mathcal{O}^{\mathcal{T}_i}). \quad (*)$$

Neka je Λ ideal a Ψ filter na I i neka je φ L_t- rečenica jezika L a $(\sigma; \psi_1, ..., \psi_m)$ niz koji odredjuje rečenicu φ. Prema prethodnoj teoremi, ψ_j su L_t- rečenice pa zbog $(*)$ važi:

$$\{i \in I \mid (\mathcal{S}_i, \mathcal{O}^{\mathcal{S}_i}) \models \psi_j\} = \{i \in I \mid (\mathcal{T}, \mathcal{O}^{\mathcal{T}_i}) \models \psi_j\}$$

to jest $I^{\mathcal{S}}_{\psi_j} = I^{\mathcal{T}}_{\psi_j} = I_{\psi_j}$. Zato, ponovo prema prethodnoj teoremi, imamo:

$$\begin{aligned} \prod{}^{\Lambda}_{\Psi} \mathcal{S}_i \models \varphi \quad & \text{akko} \quad \mathbf{B} \models \sigma[[I^{\mathcal{S}}_{\psi_1}], ..., [I^{\mathcal{S}}_{\psi_m}]] \\ & \text{akko} \quad \mathbf{B} \models \sigma[[I^{\mathcal{T}}_{\psi_1}], ..., [I^{\mathcal{T}}_{\psi_m}]] \\ & \text{akko} \quad \prod{}^{\Lambda}_{\Psi} \mathcal{T}_i \models \varphi \end{aligned}$$

što je trebalo dokazati. □

8.3 Očuvanje osobina u r.i.p.

Na osnovu rezultata izloženih u prethodnim glavama važi:

Teorema 8.3.1. *U r.i.p. u kome važi uslov* $(\Lambda\Psi)$ *očuvane su sledeće topološke osobine:* $T_0, T_1, T_2, T_3, T_{3\frac{1}{2}}$, *uniformizabilnost, totalna nepovezanost, nuladimenzionalnost, homogenost te osobine "biti* (T_1-) *topološka grupa" i "biti* (T_1-) *topološki prsten".* □

Pošto su, prema rezultatima treće glave, tihonovski proizvod, puni boks - proizvod, Knightov boks - proizvod i ultraproizvod posebni slučajevi $\Lambda\Psi-$ r.i.p. to na osnovu fakata iznesenih u prvoj glavi važi sledeće tvrdjenje.

Teorema 8.3.2. *Sledeće osobine nisu očuvane u r.i.p. (čak ako zadovoljava* $(\Lambda\Psi)$) : T_4, T_5, T_6, *prva i druga aksioma prebrojivosti, separabilnost,* $\chi(x) < \kappa, w(x) < \kappa, d(x) < \kappa$, *"biti prostor Frechet - Urisona", "biti sekvencijalan prostor", "biti* $k-$ *prostor", kompaktnost, lokalna kompaktnost, prebrojiva kompaktnost, pseudokompaktnost, sekvencijalna kompaktnost, Čech - kompletnost, "biti prostor Lindelöfa", parakompaktnost, kolektivna normalnost, prebrojiva parakompaktnost, slaba parakompaktnost, jaka* *parakompaktnost, metrizabilnost, povezanost, lokalna povezanost, jaka nuladimenzionalnost, ekstremna nepovezanost, $\kappa-$ otvorenost, "biti ccc - prostor", raspršenost i diskretnost.*

Dokaz. Sve osobine sem kompaktnosti, povezanosti i osobine "biti ccc - prostor" nisu očuvane već u tihonovskom proizvodu. Tri izdvojene osobine nisu očuvane u ultraproizvodu čime je dokaz završen. □

8.4 Istorijske i bibliografske napomene

Jezik L_t uvodi McKee u [33] i [34]. Teorema Feferman - Vaughta za logiku prvog reda data je u [15], dok analogon ove teoreme za ideal - proizvod familije topološkoh prostora daje Bertossi u [4]. Verzija pomenute teoreme za tihonovski proizvod data je u [16]. Specijalan slučaj teoreme 8.2.3 za boks - proizvod daje Garavaglia u [20].

LITERATURA

[1] P.Bankston, Topological ultraproducts, teza, Univ. of Wisconsin, (1974).

[2] P.Bankston, Ultraproducts in topology, Gen. Topology Appl. 7 (1977), 283-308.

[3] P.Bankston, Note on "Ultraproducts in topology", Gen. Topology Appl. 10 (1979), 231-232.

[4] L.E.Bertossi, The formal language L_t and topological products, Zeitschr. f. math. Logik und Grundlagen d. Math. 36 (1990), 89-94.

[5] N.Bourbaki, Topologie generale, ch I et II. (2-me ed.) (Paris, 1951).

[6] C.C.Chang, H.J.Keisler, Model theory (North - Holland, Amsterdam, 1973), [ruski prevod: Moskva, MIR, 1977].

[7] W.W.Comfort, S.Negrepontis, The theory of ultrafilters (Springer, Berlin 1974).

[8] D.Van Dantzig, Über topologisch homogene Kontinua, Fund. Math. 15 (1930), 102-125.

[9] J.Dieudonne, Sur les espaces uniformes completes, Ann. Sci. Ecole Normale Sup. 56 (1939), 277-291.

[10] E.K.van Douwen, The box product of countably many metrizable spaces need not be normal, Fund. Math. 88 (1975), 127-132.

[11] E.K.van Douwen, Covering and separation properties of box products, Surveys in General Topology (Academic Press, New York, 1980), 55-130.

[12] C.H.Dowker, Topology of metric complexes, Amer. J. of Math. 74 (1952), 555-577.

[13] F.R.Drake, Set theory, an introduction to large cardinals, (North - Holland, Amsterdam 1974).

[14] R.Engelking, General topology (Polish Scientific Publishers, Warszawa, 1977). [ruski prevod: Moskva, MIR, 1986].

[15] S.Feferman, R.L.Vaught, The first - order properties of algebraic systems, Fund. Math. 47 (1959), 57-103.

[16] J.Flum, M.Ziegler, Topological Model Theory (Springer - Verlag, Berlin Heidelberg, New York, 1980).

[17] S.P.Franklin, Spaces in which sequences suffice, Fund. Math. 57 (1965), 107-115.

[18] S.P.Franklin, Spaces in which sequences suffice II, Fund. Math. 61 (1967), 51-56.

[19] M.Frechet, Les dimensions d'un ensemble abstrait, Math. Ann. 68, (1910), 145-168.

[20] S.Garavaglia, Model theory of topological structures, Annals of Math. Logic 14 (1978) 13-37.

[21] M.Z.Grulović, M.S.Kurilić, On preservation of separation axioms in products, Comment. Math. Univ. Carol. 33.4 (1992).

[22] E.Hewitt, On two problems of Urysohn, Ann. of Math. 47 (1946), 503-509.

[23] J.R.Isbell, Uniform spaces, Amer. Math. Soc. Surveys, 12 (1964).

[24] S.Kaplan, Homology properties of arbitrary subsets of Euclidean spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 62 (1947), 248-271.

[25] A.Kato, Realcompactness of box products, Mem. Defense Acad. Japan, 19 (1979), 1-4.

[26] J.L.Kelley, General Topology (D. Van Nostrand Comp. Inc., Princeton, New Jersey, 1957), [ruski prevod: Moskva, Nauka, 1980].

[27] C.J.Knight, Box topologies, Quart. J. Math. (12) 15, (1964), 41-54.

[28] K.Kunen, On paracompactness of box products of compact spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 240 (1978), 307-316.

[29] K.Kunen, Set Theory. An Introduction to Independence Proofs (North - Holland, Amsterdam 1980).

[30] M.S.Kurilić, Disconnectedness of the reduced ideal - product, Indian J. pure appl. Math., 23(9) (1992), 619-624.

[31] M.S.Kurilić, Openess of the reduced ideal - product, Math. Japonica, (u štampi).

[32] E.Marczewski (E.Szpilrajn), Séparabilité et multiplication cartésienne des espaces topologiques, Fund. Math. 34 (1947), 127-143.

[33 T.A.McKee, Infinitary Logic and topological homeomorphisms, Zeitschr. f. math. Logik und Grundl. der Math. 21 (1975) 405-408.

[34] T.A.McKee, Sentences preserved between equivalent topological bases, Zeitschr. f. math. Logik und Grundl. der Math. 22 (1976) 79-84.

[35] K.Morita, Star-finite coverings and star-finite property, Math. Japonicae 1 (1948), 60-68.

[36] N.Noble, M.Ulmer, Factoring functions on Cartesian products, Trans. Amer. Math. Soc. 163 (1972), 329-339.

[37] J.Novak, On the Cartesian product of two compact spaces, Fund. Math. 40 (1953), 106-112.

[38] E.S.Pondiczery, Power problems in abstract spaces, Duke Math. J. 11 (1944), 835-837.

[39] M.E.Rudin, Lectures on Set Theoretic Topology, A.M.S. (1975).

[40] T.Shirota, A class of topological spaces, Osaka Math. J. 4 (1952), 23-40.

[41] R.H.Sorgenfrey, On the topological product of paracompact spaces, Bull. Amer. Math. Soc. 53 (1947), 631-632.

[42] H.Tietze, Beitrage zur allgemeinen topologie I, Math. Ann. 88, (1923), 280-312.

[43] A.N.Tihonov, Über die topologische Erweiterung von Räumen, Math. Ann. 102, (1930), 544-561.

[44] A.N.Tihonov, Ein Fixpunktsatz, Math. Ann. 111, (1936), 767-776.

[45] S.W.Williams, Box products, in : Handbook of Set - Theoretic Topology, K.Kunen and J.E. Vaughan ed. (North - Holland, Amsterdam, 1984).