UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO–MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA
MATEMATIKU I INFORMATIKU

Mirjana V. Vidanović

Sumacija redova sa specijalnim funkcijama

– doktorska disertacija –

Novi Sad, 2003.

Predgovor

Tema doktorske disertacije „Sumiranje redova sa specijalnim funkcijama" pripada oblasti matematičke analize i doprinos je teoriji specijalnih funkcija, koje imaju višestruku primenu u raznim naučnim oblastima. Ova disertacija tretira sumaciju redova na dva različita načina. Iako se prevashodno bavi nalaženjem sumacionih formula, u njoj se posmatraju i numerički postupci koji uključuju ubrzanje konvergencije.

Redovi sa specijalnim funkcijama sumirani su metodima koji se zasnivaju na korišćenju integralnih reprezentacija specijalnih funkcija, pri čemu se dolazi do redova sa trigonometrijskim funkcijama. Navode se postupci kojima se ova sumacija svodi na sumaciju redova preko Riemanove ζ-funkcije kao i njoj srodnih funkcija η, λ i β. Ovako dobijeni redovi konvergiraju mnogo brže nego polazni. Najznačajnije slučajeve predstavljaju takozvane formule zatvorenog tipa, što drugim rečima znači da se sumacija beskonačnih redova svodi na konačne sume.

Vrednost dobijenih rezultata ogleda se, s jedne strane, u tome što izvedene opšte formule u sebi sadrže dobro poznate partikularne slučajeve koji se nalaze u literaturi, a s druge strane omogućavaju i nalaženje velikog broja novih suma. Ovi rezultati mogu se iskoristiti i za rešavanje konturnih problema u matematičkoj fizici u konačnom obliku. Takođe se uspostavlja veza između nekih integralnih transformacija (Laplaceove, Mellinove, Besselove) i redova sa specijalnim funkcijama i dolazi se do suma novih redova, do kojih bi se teško moglo doći nekim od dosadašnjih pristupa. Pomoću izvedenih sumacionih formula sumirani su i redovi sa integralima trigonometrijskih i specijalnih funkcija. Neke od sumacionih formula opšteg tipa predstavljene su i tablicama koje sadrže sve pojedinačne sume koje se mogu izvesti kombinacijom parametara.

Ova disertacija zasnovana je delimično na ranijim istraživanjima autora u ovoj oblasti. Međutim, ona se najvećim delom oslanja na brojne rezultate ostvarene u saradnji sa koautorima, objavljene u poznatim međunarodnim časopisima kao što su *Journal of Mathematical Analysis and Applications, Integral Transforms and Special Functions, Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen, Applicable Analysis, Journal of Computational Analysis and Applications*, ili saopštene na međunarodnim konferencijama. U disertaciju su, osim toga, uključeni i neki rezultati koji su proizvod najnovijih istraživanja, a koji se ne nalaze u do sada objavljenim radovima. Ovi rezultati odnose se na sumiranje redova sa Bourgetovim funkcijama, redova čiji članovi sadrže proizvod specijalnih i trigonometrijskih funkcija, kao i redova sa proizvodom trigonometrijskih funkcija i integrala specijalnih funkcija. Prvi put je prikazan i metod sumiranja nekih redova sa specijalnim funkcijama pomoću Poissonove formule.

*

* *

Koristim priliku da izrazim veliku zahvalnost mentoru, dr Stevanu Pilipoviću, redovnom profesoru Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu, koji je svojim korisnim savetima i predlozima pomogao da ova doktorska disertacija dobije konačan oblik.

Zahvalnost dugujem i dr Miomiru Stankoviću, redovnom profesoru Fakulteta zaštite na radu Univerziteta u Nišu, na idejama i saradnji prilikom izrade naših zajedničkih radova, na značajnim sugestijama u vezi disertacije, kao i na pomoći prilikom nalaženja potrebne literature.

Posebno se zahvaljujem dr Slobodanu Tričkoviću, vanrednom profesoru Građevinsko-arhitektonskog fakulteta Univerziteta u Nišu, koji je rukovodio izradom ove doktorske disertacije i dao ogroman doprinos radovima čiji su rezultati ovde prikazani.

Na kraju, želim da se zahvalim i dr Dejanu Petkoviću, redovnom profesoru Fakulteta zaštite na radu Univerziteta u Nišu, čije su me ideje podstakle da se zainteresujem za istraživanja u ovoj oblasti i sa kojim sam bila koautor nekoliko radova.

Novi Sad, 24. aprila 2003. Mirjana Vidanović

Sadržaj

1

Uvod

Klasične specijalne funkcije igraju važnu ulogu u matematičkoj fizici, posebno kod graničnih problema. Obično se funkcija naziva specijalnom, ako kao logaritamske, eksponencijalne i trigonometrijske funkcije (elementarne transcedentne funkcije) spada u oruđa primenjenih matematičara, fizičara ili inženjera. Ova oblast matematike ima značajnu istoriju, sa velikim imenima kao što su Gauss, Euler, Fourier, Legendre, Bessel, Riemann, itd. Njihovi radovi pretežno su bili inspirisani fizikom i rešavanjem diferencijalnih jednačina nastalih u fizičkim problemima. Pre oko 70 godina sva ova istraživanja kulminirala su u poznatom delu o modernoj analizi E.T. Whittakera i G.N. Watsona, [61], koje je i do danas zadržalo svoj značaj.

U svom predavanju o specijalnim funkcijama, [55], F.G. Tricomi je najpre naveo Eulerovu gama-funkciju, $\Gamma(x)$, kao jedinu specijalnu funkciju od efektivnog interesa za primenu, koja ne zadovoljava nijednu algebarsku diferencijalnu jednačinu. Ostale specijalne funkcije klasifikovao je po značaju za razne oblasti nauke. Na primer, za teoriju brojeva potrebno je poznavanje Riemannove zeta funkcije i srodnih funkcija, a za algebarsku geometriju značajne su Abelove funkcije. Za primene u fizici i tehnici od važnosti su dve velike grupe specijalnih funkcija: eliptičke funkcije i hipergeometrijske funkcije i njihovi granični slučajevi. U ovu drugu grupu spadaju, između ostalih, Besselove funkcije, polinomi Legendrea, Laguerra, Чебышева, Gegenbauera, Jacobija, Hermitea, itd.

Besselove funkcije su od velikog značaja za sve veći broj matematičara i fizičara koji ih koriste u svojim istraživanjima. S jedne strane, veoma su pogodne za razvoj primena teorije funkcija kompleksne promenljive, dok se u teoriji Fourierovih redova češće primenjuju nego trigonometrijske funkcije. Besselove funkcije se u novije vreme koriste za rešavanje raznih problema matematičke fizike, akustike, hidrodinamike, radio-fizike, nuklearne fizike itd. Numeričke vrednosti suma sa Besselovim i srodnim funkcijama, kao i suma sa proizvodom Besselovih i trigonometrijskih funkcija, potrebne su kod određenih problema teorije telekomunikacija, elektrostatike, itd. U svakom slučaju, kad god je to moguće, korisno je da ove sume budu u zatvorenom obliku.

U mnogim zadacima matematičke fizike, čije je rešavanje vezano s primenom cilindričnih i sfernih koordinata, metod razdvajanja promenljivih dovodi do diferencijalne jednačine, [60], [23], [31]

$$z^2\frac{d^2u}{dz^2} + z\frac{du}{dz} + (z^2 - \nu^2)u = 0, \tag{1.1}$$

koja se naziva jednačinom Bessela, a njena rešenja predstavljaju cilindrične ili Besselove funkcije.

Rešenje se traži u obliku stepenog reda $u(z) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} a_m z^{m+\alpha}$, $a_0 \neq 0$ i dobija se da je $\alpha = \pm\nu$. Partikularno rešenje

$$J_\nu(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2m}}{m!\,\Gamma(\nu+m+1)}$$

naziva se Besselova funkcija prve vrste i reda ν [40],[31]. Opšte rešenje Besselove diferencijalne jednačine predstavlja linearnu kombinaciju dva nađena partikularna rešenja:

$$u(z) = C_1 J_\nu(z) + C_2 J_{-\nu}(z), \quad \nu \neq n, n \in Z,$$

pri čemu redovi $J_\nu(z)$ i $J_{-\nu}(z)$ konvergiraju u celoj kompleksnoj ravni, osim za $z = 0$, a C_1 i C_2 su proizvoljne konstante.

Opšte rešenje jednačine (1.1) može se predstaviti još na dva načina [31]:

$$u(z) = C_1' J_\nu(z) + C_2' Y_\nu(z),$$
$$u(z) = C_1'' H_\nu^{(1)}(z) + C_2'' H_\nu^{(2)}(z),$$

gde su C_1', C_2', C_1'', C_2'' proizvoljne konstante. Funkcija $Y_\nu(z)$ naziva se Neumannova funkcija, ili Besselova funkcija druge vrste, a $H_\nu^{(j)}(z), j = 1, 2$, Hankelova funkcija, ili Besselova funkcija treće vrste. Ove funkcije mogu se izraziti pomoću Besselove funkcije prve vrste na sledeći način ([40], str.727):

$$\begin{aligned}
Y_\nu(z) &= \frac{1}{\sin \nu\pi}[J_\nu(z)\cos \nu\pi - J_{-\nu}(z)], \ \ \nu \neq \pm n, n \in N \\
H_\nu^{(1)}(z) &= J_\nu(z) + i\, Y_\nu(z) \\
H_\nu^{(2)}(z) &= J_\nu(z) - i\, Y_\nu(z).
\end{aligned}$$

Besselove funkcije prve, druge i treće vrste poznate su i kao cilindrične funkcije.

Ako se posmatra modifikovana Besselova diferencijalna jednačina, [60]

$$z^2\frac{d^2u}{dz^2} + z\frac{du}{dz} - (z^2 + \nu^2)u = 0, \tag{1.2}$$

opšte rešenje se izražava na dva načina:

$$\begin{aligned}
u(z) &= C_1 I_\nu(z) + C_2 I_{-\nu}(z), \qquad \nu \neq n, n \in Z \\
u(z) &= C_1' I_\nu(z) + C_2' K_\nu(z),
\end{aligned}$$

gde su C_1, C_2, C_1', C_2' proizvoljne konstante. Funkcija $I_\nu(z)$ naziva se modifikovana Besselova funkcija prve vrste, a $K_\nu(z)$, modifikovana Besselova funkcija druge vrste ili MacDonaldova funkcija, ([26], str.23). Ove funkcije mogu se predstaviti u obliku ([40], str.729):

$$\begin{aligned}
I_\nu(z) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2m}}{m!\,\Gamma(\nu+m+1)}, \\
K_\nu(z) &= \frac{\pi}{2\sin \nu\pi}[I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)], \ \ \nu \neq \pm n, n \in N.
\end{aligned}$$

Struveova funkcija je rešenje nehomogene Besselove diferencijalne jednačine [60], [23]

$$z^2\frac{d^2u}{dz^2} + z\frac{du}{dz} + (z^2 - \nu^2)u = \frac{4\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+1}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}, \tag{1.3}$$

koje se izražava stepenim redom

$$\mathbf{H}_\nu(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2m+1}}{\Gamma(m+\frac{3}{2})\,\Gamma(\nu+m+\frac{3}{2})}.$$

Definicija Besselove funkcije koju je uveo Lommel, predstavlja u stvari integralnu reprezentaciju ove funkcije ([1]):

$$J_\nu(z) = \frac{2\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \int_0^{\pi/2} \sin^{2\nu}\theta\ \cos(z\cos\theta)\,d\theta, \quad \operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}. \tag{1.4}$$

Ovaj integral naziva se i integral Poissona. Poisson, [38], i Lommel, [24], su dokazali da za $2\nu \in N_0$ on predstavlja rešenje Besselove diferencijalne jednačine (1.1).

Integralna reprezentacija Struveove funkcije ima sličan oblik:

$$\mathbf{H}_\nu(z) = \frac{2\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \int_0^{\pi/2} \sin^{2\nu}\theta\ \sin(z\cos\theta)\,d\theta, \quad \operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}, \tag{1.5}$$

što omogućava da se Besselova i Struveova funkcija izraze jednim integralom, (3.4).

Besselov integral

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(n\theta - z\sin\theta)\,d\theta, \quad n \in N_0 \tag{1.6}$$

u stvari je Besselova definicija funkcije $J_n(z)$ ([6], str.34). Može se pokazati da se ovaj integral dobija iz Poissonovog integrala (1.4) za $\nu = n \in N_0$.

S druge strane, Besselov integral se može uopštiti uzimajući da je red funkcije, n, realan broj. Na taj način je definisana tzv. Angerova funkcija, i predstavlja se integralom [60]

$$\mathbf{J}_\nu(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(\nu\theta - z\sin\theta)d\theta,$$

koji se za $\nu = m \in N_0$ svodi na Besselovu funkciju. Takodje, posmatrajmo integral

$$\mathbf{E}_\nu(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(\nu\theta - z\sin\theta)d\theta,$$

koji definiše Weberovu funkciju. Oba integrala mogu se napisati odjednom, kao u relaciji (3.8).

Pomenućemo još jednu specijalnu funkciju čija definicija na sasvim drugi način uopštava Besselov integral (1.6). Naime, to je Bourgetova funkcija [7]:

$$J_{n,k}(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(2\cos\theta)^k \cos(n\theta - z\sin\theta)\,d\theta, \qquad n \in N_0, k \in N,$$

koja se, očigledno, za $k = 0$ svodi na Besselov integral (1.6). Ovu funkciju proučavao je K.K. Gorowara, [17], dok je H.M. Srivastava u radu [44] definisao funkciju, analognu Bourgetovoj :

$$I_{n,k}(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(2\cos\theta)^k \sin(n\theta - z\sin\theta)\,d\theta, \qquad n \in N_0, k \in N.$$

Uopštene funkcije Angera i Webera, (videti [29], str.288) definisane su integralima

$$J_\nu^\mu(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(2\sin\theta)^\mu \cos(\nu\theta - z\sin\theta)\,d\theta,$$

i

$$E_\nu^\mu(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(2\sin\theta)^\mu \sin(\nu\theta - z\sin\theta)\,d\theta,$$

i za $\mu = 0$ svode se na Angerovu i Weberovu funkciju, redom. Ove funkcije proučavao je T.N. Verma u radu [58].

Sferna Besselova funkcija prve vrste, $j_k(z)$,([1], str.437), može se izraziti pomoću Besselove funkcije prve vrste čiji je red polovina neparnog celog broja, naime:

$$j_k(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}J_{k+\frac{1}{2}}, \qquad k \in N_0.$$

Ova funkcija koristi se u mnogim oblastima matematičke fizike i stoga su je mnogi autori različito označavali (videti [60]). Značajno je i to što se sferna Besselova funkcija može izraziti u konačnom obliku preko algebarskih i trigonometrijskih funkcija promenljive z. Pomenimo da postoje i sferne Besselove funkcije druge i treće vrste, $y_\nu(z)$ i $h_\nu^{(j)}(z), j = 1, 2$, a izražavaju se pomoću $Y_\nu(z)$ i $H_\nu^{(j)}(z), j = 1, 2$, redom, na isti način kao $j_k(z)$ pomoću $J_k(z)$.

Hipergeometrijska funkcija Gaussa definiše se redom ([27], str.37)

$$ {}_2F_1(a, b; c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!}, $$

koji konvergira za $|z| < 1$. Simbol Pochhammera, $(a)_n$, označava

$$ (a)_n = a(a+1)(a+2)...(a+n-1) = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}, $$

gde je $\Gamma(z)$ gama funkcija.

Generalisana hipergeometrijska funkcija Gaussa je ([27], str.62)

$$ {}_pF_q(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p; \beta_1, \beta_2, ..., \beta_q; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_n ... (\alpha_p)_n}{(\beta_1)_n ... (\beta_q)_n} \frac{z^n}{n!}. $$

Neke više transcedentne funkcije predstavljaju specijalne slučajeve hipergeometrijske funkcije. Na primer, Besselova funkcija reda ν može se izraziti pomoću generalisane hipergeometrijske funkcije kod koje je $p = 0$, $q = 1$, naime

$$ J_\nu(z) = \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\Gamma(\nu+1)} {}_0F_1(\nu+1; -\frac{1}{4}z^2), $$

a slično se mogu predstaviti i modifikovane Besselove funkcije.

Lommelova funkcija takođe se može prikazati pomoću ove funkcije (videti [27], str.108):

$$ s_{\mu,\nu}(z) = \frac{z^{\mu+1}}{(\mu+\nu+1)(\mu-\nu+1)} {}_1F_2(1; \frac{\mu-\nu+3}{2}, \frac{\mu+\nu+3}{2}; -\frac{1}{4}z^2), $$

gde je $\mu \pm \nu \neq -1, -2, -3, ...$.

Gegenbauerova funkcija data je kao ([27], str.199):

$$ C_\alpha^\nu(z) = \frac{\Gamma(\alpha+2\nu)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(2\nu)} {}_2F_1\left(\alpha+2\nu, -\alpha; \nu+\frac{1}{2}; \frac{1}{2} - \frac{1}{2}z\right). $$

Legendreovi polinomi mogu se takođe predstaviti hipergeometrijskom funkcijom Gaussa ([27], str.229):

$$P_n(x) = {}_2F_1\left(-n, n+1; 1; \frac{1-x}{2}\right).$$

Ovo važi i za polinome Gegenbauera, Jacobija, Legendrea, Чебышева, itd.

U literaturi je proučavano više tipova redova sa Besselovim i srodnim specijalnim funkcijama. To su, na primer, Neumannovi redovi, Kapteynovi redovi, Fourier-Besselovi i Dinijevi redovi, itd. [60]. Redovi koji će biti ovde razmatrani spadaju u klasu Schlömilchovih redova, (videti [3], [60]), koji se odlikuju time što je argument Besselove funkcije u svakom članu reda proporcionalan indeksu tog člana. Naime, Schlömilchovi redovi su redovi oblika

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n B_\nu(nx),$$

gde B_ν označava Besselovu, J_ν, Neumannovu, Y_ν, Struveovu, $\mathbf{H}_\nu$ ili MacDonaldovu, K_ν funkciju. Ovakve redove prvi je proučavao Schlömilch, u radu [41], ali samo za Besselovu funkciju i za specijalne slučajeve kod kojih je $\nu = 0$ ili $\nu = 1$.

Redovi sa Besselovim funkcijama sumirani su u mnogim radovima, koji sadrže samo pojedinačne slučajeve nekih generalnih formula iz trećeg poglavlja. To su radovi M.L. Glassera, [16], B.C. Berndta, [2], [5], P.J. De Doeldera, [9], [10], B. Berkeša, [4], L. Lorcha i P. Szegoa, [25], D.Đ. Tošića, [54], A.G. Williamsona, [62], kao i radovi [13], [37] i [56]. Neke pojedinačne sume iz trećeg i četvrtog poglavlja mogu se naći i u literaturi koja sadrži tablice suma redova sa specijalnim funkcijama, kao što su, na primer, [19], [28], [40] i [63].

Većina generalnih formula iz trećeg, četvrtog i petog poglavlja izvedena je u zajedničkim radovima autora sa koautorima, [46], [47], [48], [49], [50], [51], [52], [53] i [57], i svaka od njih predstavlja novi rezultat za dotada poznatu literaturu. Ostale sumacione formule su prvi put izvedene u ovoj disertaciji, a prikazane su u odeljcima **3.2**, **3.5**, **5.2** i **5.4**, i delimično u **4.1** i **4.3**.

Ako se u Schlömilchovim redovima Besselova ili neka druga srodna funkcija izraze svojom integralnom reprezentacijom, tada se nakon zamene redosleda sumacije i integracije dolazi do redova sa trigonometrijskim funkcijama. Na taj način se javlja potreba za nalaženjem suma određenih tipova redova sa sinusnom i kosinusnom funkcijom. U stvari, to su redovi kod kojih je trigonometrijska funkcija pomnožena negativnim stepenom indeksa člana reda, a argument trigonometrijske funkcije je proporcionalan tom indeksu. Izvedene su i sumacione formule za redove ovog istog tipa, ali sa proizvodom dve trigonometrijske funkcije. Pored toga, sumirani su i opštiji redovi dobijeni uvođenjem realnog parametra. Pokazano je da granični proces pri kome ovaj parametar teži nuli, dovodi do sumacionih formula za redove bez parametra. Međutim, izvedene formule same po sebi predstavljaju značajne rezultate, najpre zato što su opšteg tipa, u smislu da obuhvataju neke do tada poznate sume kao specijalne slučajeve, a pored toga omogućavaju i dobijanje novih suma. Zatim, sumacione formule su u određenim slučajevima u zatvorenom obliku, što se može iskoristiti kod rešavanja graničnog problema, za ubrzavanje konvergencije nekih redova, itd.

U literaturi ima radova u kojima se sumiraju neki od ovih redova sa trigonometrijskim funkcijama, na primer, [32] i [42]. Pojedinačni slučajevi sa konačnim sumama redova sa trigonometrijskim funkcijama mogu se naći u poznatim knjigama sa tablicama suma, na primer, [18], [39] i [63]. Međutim, sve sumacione formule opšteg tipa prvi put su izvedene u zajedničkim radovima autora sa koautorima, [45], [48], [50] i [53].

Sadržaj **drugog poglavlja** upravo čini sumiranje redova sa trigonometrijskim funkcijama. Polazne osnove ovih razmatranja date su u odeljku **2.1**. Kako se u radu [42] razmatraju neki od ovih redova, sa koeficijentima koji sadrže negativne stepene od n ili $2n-1$, $n \in N$, u radu [48] dali smo generalnu formulu koja predstavlja reprezentaciju svih ovih redova:

$$T_\alpha^f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(s)^{n-1} f((an-b)x)}{(an-b)^\alpha} = \frac{c\pi x^{\alpha-1}}{2\Gamma(\alpha) f(\frac{\pi\alpha}{2})} + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i F(\alpha-2i-\delta)}{(2i+\delta)!} x^{2i+\delta}, \tag{1.7}$$

gde je $a = \left\{ {1 \atop 2} \right\}$ $b = \left\{ {0 \atop 1} \right\}$, $s = 1$ ili -1, $f = \left\{ {\sin \atop \cos} \right\}$ $\delta = \left\{ {1 \atop 0} \right\}$, $\alpha \in R^+$, a vrednosti c i F na određen način zavise od izbora parametara a, b i s. Ova zavisnost, kao i oblasti konvergencije, prikazani su Tabelom I. Simbol F označava Riemannovu zeta funkciju $\zeta(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-z}$ i njoj srodne funkcije (videti [1], [15])

$$\begin{aligned}
\eta(z) &= \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}k^{-z} = (1-2^{1-z})\,\zeta(z),\\
\lambda(z) &= \sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)^{-z} = (1-2^{-z})\,\zeta(z),\\
\beta(z) &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}(2k+1)^{-z}.
\end{aligned}$$

Sumaciona formula (1.7) dobija zatvoren oblik

$$T_\alpha^f = (-1)^m \frac{c\pi}{2(\alpha-1)!}x^{\alpha-1} + \sum_{i=0}^{m} \frac{(-1)^i F(\alpha-2i-\delta)}{(2i+\delta)!}x^{2i+\delta}, \tag{1.8}$$

kad je α prirodan broj, paran ili neparan u zavisnosti od funkcija f i F. U stvari, za α treba uzeti paran broj ako je $f = \cos$, a F predstavlja ζ, η ili λ funkciju, ili ako je $f = \sin$, $F = \beta$, a neparan, ako je $f = \sin$, $F = \zeta, \eta, \lambda$ ili $f = \cos$, $F = \beta$. U tim slučajevima suma na desnoj strani je konačna pošto se funkcije F anuliraju počevši od $m+1$-vog člana sume, jer je $\zeta(-2m) = 0$, $\eta(-2m) = 0$, $\lambda(-2m) = 0$, $\beta(-2m-1) = 0$, $m \in N$ (videti [1], str.807).

Sumaciona formula (1.8) izvedena je i na drugi način, uzastopnom integracijom redova (1.7) sa sinusnom i kosinusnom funkcijom za $\alpha = 1$, odnosno $\alpha = 2$. Pritom je promena redosleda sumiranja i integracije moguća zbog uniformne konvergencije ovih redova u odgovarajućim intervalima. Tako dobijena formula dokazana je matematičkom indukcijom.

Za neke od redova koje obuhvata generalna formula (1.8) sume se mogu naći u literaturi, u stvari u poznatim tablicama sa sumama redova. To su, na primer, formule 5.4.2. (2,4–8,12,13), str.726 i formule 5.4.6. (3–14), str.732 u [39], ili iste takve sume u [18],[63].

Opšta sumaciona formula (1.8), zbog svog zatvorenog oblika, pogodna je za lakše rešavanje raznovrsnih problema. Na primer, uz pomoć metoda Krylova ([11], str.217), koristi se za ubrzavanje konvergencije sporokonvergentnih trigonometrijskih redova.

Zatim, za određene vrednosti promenljive x formula (1.8) postaje formula za sumiranje numeričkih redova. Na taj način su izvedene rekurzivne relacije za izračunavanje Riemannove zeta funkcije i srodnih funkcija.

Generalna formula (1.8) primenjena je i za sumiranje redova sa generalisanim integralnim sinusom. Izvedena je formula generalnog tipa, (2.13), koja obuhvata partikularne slučajeve poznate u literaturi. Naime, za $\nu = 0$ dobija se formula koja sadrži, na primer, sumacione formule 2, 4, 5 u [40] str. 649.

Konačno, iz formule (1.8), primenom integralnih transformacija (Laplaceove, Mellinove, Besselove), mogu se dobiti sume novih numeričkih redova, ali i nekih redova Schlömilchovog tipa.

Odeljak **2.2** odnosi se na sumiranje redova

$$T^f_{\alpha,\omega} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(s)^{n-1} f((an-b)x)}{(an-b)^{\alpha}((an-b)^2 - \omega^2)} \tag{1.9}$$

za $\alpha = 2m + d - 1, m \in N_0, d = 0$ ili $1, \omega \in R, \omega \neq an - b$, čija suma je prvi put izvedena u radu [50]. U literaturi (npr. [18], [39], [63]) se mogu naći sume ovog reda za $m = 0$. Sve te sume ovde su predstavljene jednom generalnom formulom, iz koje se pomoću rastavljanja na parcijalne razlomke i primenom formule (1.8) izvodi opšta formula (2.16) za $m \in N_0$. Ova formula je zatvorenog tipa, a može se izvesti i uzastopnom integracijom poznatih suma kod kojih je $m = 0$. Osim toga, kad parametar $\omega \to 0$, formula (2.16) postaje formula (1.8) za sumiranje odgovarajućeg reda bez parametra.

Za određene vrednosti promenljive x formula (2.16) postaje formula za sumiranje numeričkih redova. Na taj način se dobijaju relacije između bilo koje dve od funkcija ζ, η, λ i β.

U literaturi su poznati samo neki slučajevi sumacionih formula koje obuhvata generalna formula (2.16). U knjizi [39], to su formule 5.4.6. (24–27), str.733. Sve takve sume, naime za $\alpha = 0$ i $\alpha = -1$, nalaze se i u tablicama [63], gde se može naći i nekoliko suma za koje je $\alpha = 1$. Jedna od njih je data formulom ΓB6, str. 407, a isti rezultat se dobija iz formule (2.16) za $f = \sin$, $a = 1$, $b = 0$, $s = -1$. Dakle, generalna formula (2.16) je opštiji rezultat, jer važi za $\alpha = 2m + d - 1$, $m \in N_0$, $d = 0$ ili 1.

U sledećem odeljku, **2.3**, sumirani su redovi koji sadrže proizvod dve trigonometrijske funkcije (videti [45])

$$T_{\alpha}^{f,g} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(s)^{n-1} f((an-b)y) g((an-b)x)}{(an-b)^{\alpha}}, \tag{1.10}$$

gde f i g označavaju sinusnu ili kosinusnu funkciju. Sumaciona formula (2.33) izvedena je opet na dva načina, pomoću formule za sumiranje reda sa jednom trigonometrijskom funkcijom, ili uzastopnom integracijom određenih polaznih suma. Rezultat je red sa Riemannovom zeta funkcijom i ostalim srodnim funkcijama, zbog čijeg anuliranja u negativnim celobrojnim vrednostima argumenta, formula u takvim slučajevima daje konačnu sumu.

Za određene vrednosti promenljive x (ili y) generalna formula (2.33) svodi se na formulu (1.8).

Generalna formula (2.33) za sumiranje reda (1.10) obuhvata neke poznate rezultate iz literature, koji se slažu sa našim rezultatima. Međutim, formula (2.33) važi za sve prirodne brojeve α (parne ili neparne, zavisno od izbora parametara reda), dok u poznatim knjigama [39], [63] postoje slučajevi samo za $\alpha = 1$ ili 2 ($\alpha = 3$ u jednom slučaju). Osim toga, oblasti konvergencije u [39], [63] samo su podskupovi naših oblasti ili najviše jednaki sa njima. Na primer, formula 8, str. 743 u [39], ili formula 3Г3, str. 435 u [63]. Treba primetiti da neki rezultati u navedenim knjigama nisu tačni. Naime, formula 3, str.743 u [39] treba da ima rezultat $-\frac{x}{2}$ umesto $-\frac{1}{2}$, a formula 337, str. 445 u [63], $-\frac{\pi}{4}y$ umesto $\frac{\pi}{4}y$. U formuli 3Ж8 str.443 u [63] ili rezultati ili oblasti nisu tačni.

Generalna formula (2.33) može se primeniti prilikom rešavanja graničnog problema. Naime, rešenje je beskonačni trigonometrijski red oblika (1.10), koji po formuli (2.33) ima konačnu sumu. Tako se rešenje izražava u pogodnijem, zatvorenom obliku.

U odeljku **2.4** sumiran je red sa proizvodom trigonometrijskih funkcija i sa realnim parametrom ω:

$$T_{\alpha,\omega}^{f,g} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(s)^{n-1} f((an-b)y)\, g((an-b)x)}{(an-b)^{\alpha}((an-b)^2-\omega^2)}. \tag{1.11}$$

Sumaciona formula (2.39), dobijena na dva načina, svodi se na formulu (2.33) za sumiranje odgovarajućeg reda bez parametra kad parametar teži nuli. Konačno, generalna formula (2.39), prvi put izvedena u našem radu [53], predstavlja potpuno novi rezultat, jer u literaturi nisu sumirani ni partikularni slučajevi redova oblika (1.11).

U **trećem poglavlju** sumiraju se redovi sa Besselovom funkcijom i drugim specijalnim funkcijama, kao i neki opštiji redovi sa realnim parametrom. Sumirani su i redovi sa proizvodom Besselovih funkcija i nekih drugih specijalnih funkcija. U odeljku **3.1** razmatra se red

$$S_\alpha^\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(s)^{n-1}\varphi_\nu((an-b)x)}{(an-b)^\alpha}, \tag{1.12}$$

gde je $\alpha \in R$, $a = \left\{ \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\}$ $b = \left\{ \begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\}$, $s = 1$ ili -1, a φ_ν predstavlja $J_\nu(x)$, Besselovu funkciju prve vrste i reda ν, ili neku od srodnih specijalnih funkcija.

Red (1.12) sumiran je pomoću metoda prikazanog u radovima [47] i [48], ali samo za slučaj Besselove funkcije. Međutim, u [50] dat je opštiji rezultat jer obuhvata i red sa Struveovim funkcijama. U ovim radovima polazi se od poznatih integralnih reprezentacija Besselove i Struveove funkcije ([1]), koje se zbog sličnog oblika mogu izraziti jednom formulom

$$\varphi_\nu(z) = \frac{2\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \int_0^{\pi/2} \sin^{2\nu}\theta \; f(z\cos\theta)\, d\theta, \tag{1.13}$$

gde je $\operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}$, i gde postoji zavisnost $\varphi_\nu = \left\{ \begin{smallmatrix} J_\nu \\ \mathbf{H}_\nu \end{smallmatrix} \right\}$ $f = \left\{ \begin{smallmatrix} \cos \\ \sin \end{smallmatrix} \right\}$.

Nakon zamene ove integralne reprezentacije u redu (1.12), promenom redosleda sumiranja i integracije dolazi se do reda sa trigonometrijskom funkcijom čija suma se izračunava pomoću formule (1.7) ili (1.8). Tako je tražena suma reda (1.12), data generalnom formulom (3.6), izražena pomoću redova sa Riemannovom zeta funkcijom i ostalim srodnim funkcijama. Ovi redovi imaju konačne sume za celobrojne negativne vrednosti argumenta, jer se tada pomenute funkcije anuliraju (ζ, η i λ za parne, a β za neparne vrednosti). Zbog toga i formula (3.6) za takve vrednosti dobija zatvoren oblik.

U literaturi postoje mnogi partikularni slučajevi generalne formule (3.6). Međutim, oni se odnose samo na redove kod kojih je $\alpha = \nu + m$, $m \in N$, dok (3.6) važi za $\alpha > \nu > -\frac{1}{2}$, $\alpha > 0$. To su, na primer, formule 13 i 14 iz [40], str. 678. Ova dva partikularna slučaja dokazali su matematičkom indukcijom i L.Lorch i P.Szego u radu [25], mada su ove sume već bile poznate. U tom radu su, takođe indukcijom, dokazana i dva slučaja formule (3.6) za $\varphi_\nu = \mathbf{H}_\nu$ i $\alpha = \nu + 2k, k \in N, a = 1, b = 0, s = \pm 1$; u tablicama [19] postoje tri posebne sume ovog tipa, (59.2.2), (59.2.3) i (59.2.4).

Red (1.12) zatim je sumiran u slučaju kad φ_ν predstavlja Angerovu ili Weberovu funkciju. Zbog toga se polazi od jedinstvene integralne reprezentacije ovih funkcija, date relacijom (3.8). Izvedena sumaciona formula (3.10) je takođe generalnog karaktera; u knjizi [40] mogu se naći neki partikularni slučajevi ove formule, ali samo za $\varphi_\nu = J_\nu$. Naime, to su formule 3–9, str.678.

Odeljak **3.2** odnosi se na Bourgetove funkcije. Ako se u redu (1.12) zameni zajednička reprezentacija Bourgetove i modifikovane Bourgetove funkcije, (3.14), sličnim postupkom dobija se sumaciona formula i za redove sa ovim funkcijama koje predstavljaju uopštenje Besselove funkcije. Naravno, u određenim slučajevima i ove sume su konačne. U literaturi ovakvi redovi nisu sumirani, pa je sumaciona formula novi rezultat, izveden prvi put u ovoj disertaciji. Formula je proverena za slučaj kad se Bourgetova funkcija svodi na Besselovu, jer tada postaje formula (3.6) za sumiranje reda sa Besselovom funkcijom.

U odeljku **3.3** sumiran je red sa proizvodom dve Besselove funkcije

$$S_\alpha^{J,J} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(s)^{n-1} J_\mu((an-b)x) J_\nu((an-b)x)}{(an-b)^\alpha}. \tag{1.14}$$

Kako se proizvod dve Besselove funkcije može predstaviti integralnom reprezentacijom sa jednom Besselovom funkcijom, (videti [60]), naime

$$J_\mu(z)J_\nu(z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} J_{\mu+\nu}(2z\cos\theta)\cos(\mu-\nu)\theta d\theta, \quad \mu+\nu > -1, \tag{1.15}$$

to se red koji treba sumirati svodi na red sa jednom Besselovom funkcijom, pa se zato koristi jedna od izvedenih formula (3.6) ili (3.10) za $\varphi_{\mu+\nu} = J_{\mu+\nu}$.

Tako dobijene generalne formule (3.19) i (3.20) imaju zatvoreni oblik za $\alpha - \mu - \nu + 1 + \delta$ parno, gde je $\delta = 1$ ako je $F = \beta$ a $\delta = 0$ ako je $F = \zeta, \eta, \lambda$. Ovi rezultati prvi put su objavljeni u radu [48].

Sumacione formule (3.19) i (3.20) obuhvataju neke poznate rezultate iz literature. Na primer, ako je $\alpha - \mu - \nu$ parnan broj i $s = 1, a = 1, b = 0$, dobija se formula (13) iz rada M.L. Glassera, [16]. U radu [54], D.Đ. Tošić je sumirao red (1.14) u slučaju kad je $s = 1, a = 1, b = 0$.

Dve sume reda oblika (1.14) postoje u radu [10] P.J. De Doeldera, a mogu se dobiti iz formule (3.20) pogodnim izborom parametara. Naime, u jednom slučaju je potrebno da $\mu + \nu$, $\mu - \nu$ i α budu parni prirodni brojevi, a u drugom, da budu neparni. Pored toga, jedan rezultat nije tačan ($\mu = 1, \nu = 0, \alpha = 1, s = 1$). Na ovu grešku ukazano je i u radu [54].

U poznatoj knjizi [40] ima takođe nekoliko suma koje se mogu dobiti kao specijalni slučajevi formula (3.19) i (3.20). Iz prve slede formule 10 i 12, str.684, a iz druge 2 i 4, str.683.

Odeljak **3.4** odnosi se na sumiranje jednog reda opštijeg tipa nego što je red (1.12), koji se dobija uvođenjem realnog parametra:

$$S^{\varphi}_{\alpha,\omega} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(s)^{n-1}\varphi_\nu((an-b)x)}{(an-b)^\alpha((an-b)^2-\omega^2)}, \tag{1.16}$$

gde je $\omega \in R$, $\omega \neq an - b$. Postupkom koji je sličan izvođenju sume reda (1.12) dobija se tražena sumaciona formula (3.21), koja je prvi put izvedena u radu [50]. Naime, polazi se od integralne reprezentacije (1.13) Besselove i Struveove funkcije, a kasnije se koristi sumaciona formula (2.16) za trigonometrijski red tipa (1.9).

U knjizi [40] postoji samo jedan partikularni slučaj formule (3.21), a to je formula 24, str.679. Međutim, nema nijedne sume kod koje je $m \neq 0$. U radu [20] E.R. Hansen je izveo sumu $S^J_{2m+\nu,\omega}$, za $a = 1, b = 0, s = -1, m \neq 0$, a u radu [25], L. Lorch i P. Szego su dali četiri partikularna slučaja, $S^J_{2m+\nu,\omega}$ i $S^{\mathbf{H}}_{2m-1+\nu,\omega}$, za $a = 1, b = 0, s = \pm 1, m \neq 0$. U tablicama [19] postoji još jedna formula, (59.2.7), za sumiranje ovog reda sa Struveovom funkcijom, naime suma $S^{\mathbf{H}}_{\nu+1,\omega}$, za $a = 1, b = 0, s = -1$, koja se dobija iz prethodne za $m = 1$.

Red tipa (1.16) sumiran je i za funkcije Angera i Webera. Partikularni slučajevi tako dobijene sumacione formule (3.22) mogu se naći u [40], ali samo za $m = 0$ i $\varphi = J$. Na primer, takva je formula 22 u [40], str. 679. Za $m \neq 0$ u literaturi nema odgovarajućih rezultata.

U odeljku **3.5** prikazan je jedan drugi način za sumiranje redova (1.12) i (1.14) kad je $a = 1$, $b = 0$, $s = 1$ i $\varphi = J$. Ovaj metod zasniva se na formuli Poissona i na Fourierovoj transformaciji pogodno odabrane funkcije. Dobijene sumacione formule (3.30) i (3.35), u slučaju konačnih suma, poklapaju se sa generalnim formulama (3.10) i (3.20) za taj isti izbor parametara. U literaturi takođe postoje primeri koji se mogu izvesti iz ovih naših formula. To su, na primer, formule 8 i 9 u [40], str.678, koje slede iz formule (3.30), kao i sume 1,2,3,9, str.683, iz iste knjige, a koje su specijalni slučajevi formule (3.35). Napomenimo da su rezultati iz ovog odeljka novi, kako u odnosu na ranije radove autora, tako i u odnosu na poznatu literaturu.

Odeljak **3.6** sadrži sumacione formule za neke redove sa drugim specijalnim funkcijama. To su, na primer, redovi sa sfernim Besselovim funkcijama, zatim sa Neumannovom funkcijom i modifikovanim Besselovim funkcijama. Za razliku od prethodno izvedenih sumacionih formula u ovom poglavlju, ovde se ne koriste formule za sumiranje trigonometrijskih redova, već formula (3.6) za sumiranje reda sa Besselovom funkcijom.

Četvrto poglavlje odnosi se na određivanje formula u zatvorenom obliku za sumiranje redova sa proizvodom Besselove ili Struveove i trigonometrijske funkcije, zatim opštijeg reda sa realnim parametrom, kao i reda sa proizvodom dve Besselove i jedne trigonometrijske funkcije.

U prvom odeljku, **4.1**, sumiran je red

$$S_{\alpha}^{\varphi,f} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(s)^{n-1}\varphi_{\nu}((an-b)x)f((an-b)y)}{(an-b)^{\alpha}}, \tag{1.17}$$

gde je $\alpha \in R$, $a = \left\{ {1 \atop 2} \right\}$ $b = \left\{ {0 \atop 1} \right\}$, $s = 1$ ili $-1, f = \sin$ ili $\cos$, a φ_{ν} predstavlja Besselovu ili Struveovu funkciju prve vrste i reda ν. Pritom se ponovo polazi od zajedničke integralne reprezentacije Besselove i Struveove funkcije (1.13), a u daljem postupku se dolazi do reda sa proizvodom dve trigonometrijske funkcije, koji se sumira pomoću formule (2.33). Na kraju se dobija generalna formula (4.5), koja je izražena redom sa Riemannovom zeta i srodnim funkcijama, što znači da se u određenim slučajevima radi o konačnim sumama. Ova formula može se lako proveriti upoređivanjem sa nekim formulama iz prethodnih poglavlja, jer se za određeni izbor promenljivih x, y i parametara a, b, s, μ, ν, svodi na te formule. Na primer, za $\varphi = J$, $\nu = 0$ i $x = 0$ formula (4.5) postaje formula (1.7) za sumiranje redova sa trigonometrijskim funkcijama (jer je $J_0(0) = 1$, videti [1], str.390). Zatim, ako je $\nu = \pm\frac{1}{2}$, tada je $J_{\pm 1/2} = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} f(z)$, $f = \left\{ {\sin \atop \cos} \right\}$, pa se formula (4.5) svodi na formulu (2.27) za sumiranje redova sa proizvodom dve trigonometrijske funkcije. Ova činjenica pritom dokazuje i da formula (4.5) važi čak i kad je $\nu = -\frac{1}{2}$. Ili, ako izaberemo y tako da je $|f((an-b)y)| = 1$, formula (4.5) postaje formula (3.6) za sumiranje redova sa Besselovim/Struveovim funkcijama.

Generalna formula (4.5) obuhvata neke rezultate iz literature. Naime, sume redova oblika (1.17) postoje samo za $\varphi = J$, $\alpha - \nu = 0, 1, 2$ i $a = 1, b = 0$, dok naša formula (4.5) važi za $\alpha > \nu > -1/2$, pri čemu se sume u zatvorenom obliku dobijaju za $\alpha - \nu \in N_0$. Na primer, to su formule (74.1.18–22) iz knjige [19], zatim suma III4.D.12 u [28]. Za slučaj Struveove funkcije pomenućemo dva rezultata iz [19], koji se takođe mogu dobiti iz generalne formule (4.5) za odgovarajući izbor parametara. To su formule (74.7.1) i (74.7.2).

Osim toga, iz generalne formule (4.5) mogu se izvesti i sume redova kojih nema u literaturi. Ako razmatramo samo konačne sume, nema sumiranih redova kod kojih je $\alpha - \nu \geq 3$, $\alpha - \nu \in N_0$, a formula (4.5) obuhvata i te slučajeve.

Red (1.17) zatim je sumiran za slučaj Angerove i Weberove funkcije. Sume (74.1.16) i (74.1.17) u [19] predstavljaju partikularne slučajeve tako dobijene formule (4.7).

Svi rezultati ovog odeljka prvi put se pojavljuju u ovoj disertaciji, osim formule (4.5) za slučaj Besselove funkcije, koja je izvedena u našem ranijem radu [49].

Iz ovog istog rada potiču i rezultati odeljka **4.2**, koji se odnosi na sumiranje redova sa proizvodom jedne trigonometrijske i dve Besselove funkcije

$$S_\alpha^{J,J,f} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(s)^{n-1} J_\mu((an-b)x) J_\nu((an-b)x)}{(an-b)^\alpha} f((an-b)y), \qquad (1.18)$$

gde se polazi od integralne reprezentacije (1.15) proizvoda dve Besselove funkcije. Red (1.18) svodi se na red tipa (1.17), pa se koristi prethodno izvedena formula (4.5) za odgovarajući izbor parametara. Na kraju se dobija generalna formula (4.11), koja sadrži neke pojedinačne rezultate iz literature. To su, na primer, sume (74.5.6) i (74.5.7) u [19] ili sume (5.7.28.1) i (5.7.28.2) u [40].

Iz formule (4.11) dobijaju se mnogi rezultati u zatvorenom obliku, kojih nema u literaturi. U stvari, mogu se sumirati svi redovi oblika (1.18), kod kojih je $\mu + \nu \in N_0, \alpha \in N$, a izbor parametara i trigonometrijske funkcije je u određenoj međusobnoj zavisnosti.

Na kraju, u odeljku **4.3** određena je i suma reda opštijeg karaktera od reda (1.17)

$$S_{\alpha,\omega}^{\varphi,f} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(s)^{n-1}\varphi_\nu((an-b)x)f((an-b)y)}{(an-b)^\alpha((an-b)^2-\omega^2)}, \tag{1.19}$$

gde je uveden parametar $\omega \in R, \omega \neq an-b$. Sličnim postupkom kao kod izvođenja formule za red (1.17), ali pomoću formule (2.39) za sumiranje odgovarajućeg trigonometrijskog reda sa parametrom, dolazi se do generalne formule (4.12). Naravno, kad parametar ω teži nuli, ova formula se svodi na formulu (4.5) za sumiranje reda (1.17) bez parametra.

Generalna formula (4.12) uključuje četiri partikularna slučaja navedena u [40], str. 683, a ove iste rezultate predstavljaju i formule (74.1.24–27) iz knjige [19]. Napomenimo da je u disertaciji izvedena opštija formula za sumiranje reda (1.19) nego u radu [56], gde je $\alpha = 0$ ili $\alpha = 1$.

U **petom poglavlju** sumirani su redovi sa trigonometrijskim i nekim drugim integralima. Pre svega, u odeljku **5.1** razmatraju se redovi oblika (1.12), koji umesto specijalne funkcije, označene sa φ, imaju jedan od trigonometrijskih integrala

$$S(x) = \int_0^1 \psi(y) \sin xy \, dy, \qquad C(x) = \int_0^1 \psi(y) \cos xy \, dy, \tag{1.20}$$

koji se mogu posmatrati kao generalizacija Besselovih i drugih srodnih specijalnih funkcija. U postupku izvođenja sumacione formule dobija se red sa trigonometrijskom funkcijom za čije sumiranje se koristi formula (1.8) iz drugog poglavlja, naravno uz odgovarajući izbor parametara. Na kraju se dobija generalna formula (5.4).

Zatim su sumirani redovi opštijeg tipa, dobijeni iz prethodnih uvođenjem realnog parametra. Izvođenje tražene sumacione formule ovog puta se zasniva na poznatoj sumi (2.16) za trigonometrijske redove sa parametrom. Rezultati ovog odeljka prvi put su objavljeni u našem radu [52].

U odeljku **5.2** predstavljeni su potpuno novi rezultati. Naime, izvedene su sume redova koji se iz dva prethodna reda dobijaju množenjem opšteg člana trigonometrijskom funkcijom. Tražene formule dobijene su pomoću odgovarajućih formula za sumiranje redova sa proizvodom trigonometrijskih funkcija iz drugog poglavlja. Dakle, i sume svih ovih redova sa trigonometrijskim integralima izražene su preko redova sa Riemannovom ζ funkcijom i ostalim srodnim funkcijama. Zbog toga u određenim slučajevima i one imaju zatvoren oblik.

Sumacione formule (5.4), (5.8), (5.12) i (5.13) iz prethodna dva odeljka su novi rezultati u odnosu na do tada poznatu literaturu. Prve dve formule mogu se lako proveriti upoređivanjem sa formulama iz prethodnih poglavlja, tako što se na pogodan način izabere funkcija $\psi(y)$ u integralima (1.20). Na ovaj način, specificiranjem funkcije $\psi(y)$ i pomoću izvedenih formula, sumirani su i neki redovi ovog tipa, koji sadrže određene specijalne funkcije umesto trigonometrijskih integrala.

Odeljak **5.3** odnosi se na redove sa integralima koji sadrže Besselove ili Struveove funkcije. Naime, ako se u integralima (1.20) funkcije sin i cos zamene Besselovom i Struveovom funkcijom, dobijaju se integrali

$$B_\nu(x) = \int_0^1 J_\nu(xy)\psi(y)dy, \quad S_\nu(x) = \int_0^1 \mathbf{H}_\nu(xy)\psi(y)dy. \tag{1.21}$$

Sumirani su novi redovi, nastali zamenom specijalne funkcije $\varphi(y)$ u redu (1.12) ovim integralima. Pritom se postupak izvođenja tražene formule zasniva na sumacionoj formuli (3.6) za redove sa specijalnim funkcijama iz trećeg poglavlja.

Sumirani su i redovi opštijeg tipa, sa realnim parametrom. Prilikom izvođenja sumacione formule koristi se odgovarajuća formula (3.21) za sumiranje redova sa specijalnom funkcijom i realnim parametrom. Rezultati ovog odeljka potiču iz radova [56] i [57].

U odeljku **5.4** formirani su novi redovi, dobijeni iz prethodnih množenjem opšteg člana reda sinusnom ili kosinusnom funkcijom. Ovi redovi sumirani su pomoću odgovarajućih sumacionih formula za redove sa proizvodom specijalne i trigonometrijske funkcije iz četvrtog poglavlja. Sumacione formule ovog odeljka prvi put su izvedene u disertaciji.

Glavne rezultate odeljaka **5.3** i **5.4** predstavljaju sumacione formule (5.18), (5.21), (5.24) i (5.25), izražene preko redova sa Riemannovom zeta i srodnim funkcijama, pa zato mogu imati i zatvoren oblik. Ove formule ne postoje u literaturi, a nema ni odgovarajućih partikularnih slučajeva. Na kraju su dati primeri koji pokazuju kako se specificiranjem funkcije $\psi(y)$ u integralima (1.21), mogu izvesti sume nekih konkretnih redova sa specijalnim funkcijama.

U prilogu su date tablice konačnih suma, izračunatih pomoću izvedenih opštih formula iz prethodnih poglavlja. Kako za sve opšte formule nije bilo prostora, izvršen je izbor koji omogućava da budu zastupljeni rezultati iz svih poglavlja. Većina tablica izvedena je prvi put u ovoj disertaciji, a uključene su i one iz naših ranijih radova, [45], [47], [52], [56].

Koncepcija metoda u disertaciji zasnivala se na principu dobijanja formula opšteg tipa iz kojih se, kombinacijom parametara, mogu izvesti svi pojedinačni slučajevi. To je i bio razlog da svi oni budu navedeni u tablicama, iako se neke od suma iz tablica mogu dobiti pomoću nekih drugih.

Na kraju je dat spisak literature koja je direktno korišćena ili citirana u radu.

2

Sume nekih redova sa trigonometrijskim funkcijama

U ovom poglavlju biće izloženi rezultati sumiranja određenih tipova redova sa sinusnom i kosinusnom funkcijom. Prvobitna motivacija za nalaženje ovih suma bila je da se pomoću njih odrede sume nekih redova sa specijalnim funkcijama. Međutim, izvedene formule i nezavisno od toga predstavljaju značajne rezultate. Naime, pored toga što obuhvataju neke do tada poznate sume kao specijalne slučajeve, iz ovih formula se mogu izvesti i nove sume. Zatim, sumacione formule su u određenim slučajevima u zatvorenom obliku, što se može iskoristiti kod rešavanja graničnog problema, za ubrzavanje konvergencije nekih redova, itd. Svi rezultati ovog poglavlja prvi put su izvedeni u zajedničkim radovima autora sa koautorima, [45], [48], [50] i [53].

Metod za određivanje suma redova sa Besselovim i srodnim specijalnim funkcijama zasniva se na sumiranju trigonometrijskih redova

$$T_\alpha^f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(s)^{n-1} f((an-b)x)}{(an-b)^\alpha} \tag{2.1}$$

$$T_{\alpha,\omega}^f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(s)^{n-1} f((an-b)x)}{(an-b)^\alpha((an-b)^2-\omega^2)} \tag{2.2}$$

$$T_\alpha^{f,g} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(s)^{n-1} f((an-b)y) g((an-b)x)}{(an-b)^\alpha} \tag{2.3}$$

$$T_{\alpha,\omega}^{f,g} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(s)^{n-1} f((an-b)y)\, g((an-b)x)}{(an-b)^\alpha((an-b)^2-\omega^2)} \tag{2.4}$$

gde $f(x)$ i $g(x)$ predstavljaju trigonometrijske funkcije $\sin(x)$ ili $\cos(x)$, $\alpha \in R$, $a = \left\{ {1 \atop 2} \right\}$ $b = \left\{ {0 \atop 1} \right\}$, $s = 1$ ili -1, $\omega \in R$, $\omega \neq an - b$. U određenim slučajevima ovi trigonometrijski redovi imaju sume u zatvorenom obliku.

2.1 Suma reda s jednom trigonometrijskom funkcijom

U radu [42] razmatraju se redovi sa trigonometrijskim funkcijama čiji koeficijenti su negativni stepeni od n ili $2n-1$, gde je $n \in N$. Reprezentacija ovih redova data je u [48] u opštem obliku

$$T_\alpha^f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(s)^{n-1} f((an-b)x)}{(an-b)^\alpha} = \frac{c\pi x^{\alpha-1}}{2\Gamma(\alpha) f(\frac{\pi\alpha}{2})} + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i F(\alpha-2i-\delta)}{(2i+\delta)!} x^{2i+\delta}, \tag{2.5}$$

gde je $f = \left\{ {\sin \atop \cos} \right\}$ $\delta = \left\{ {1 \atop 0} \right\}$, $\alpha \in R^+$, a svi ostali značajni parametri dati su u Tabeli I, u kojoj ζ, η, λ i β predstavljaju Riemannovu zeta funkciju $\zeta(z) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{-z}$ i njoj srodne funkcije (videti [1])

$$\eta(z) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}k^{-z} = (1-2^{1-z})\zeta(z),$$
$$\lambda(z) = \sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)^{-z} = (1-2^{-z})\zeta(z),$$
$$\beta(z) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(2k+1)^{-z}.$$

Primetimo da, kad je $f(x) = \sin x$ i $\alpha \to 2m$ ili $f(x) = \cos x$ i $\alpha \to 2m+1$, $m \in N_0$, treba uzeti graničnu vrednost na desnoj strani formule (2.5), kao što je pokazano u radovima [30] i [42].

Tabela I: zavisnost F i c od a, b i s

a	b	s	c	F	za
1	0	1	1	ζ	$0 < x < 2\pi$
		-1	0	η	$-\pi < x < \pi$
2	1	1	$\frac{1}{2}$	λ	$0 < x < \pi$
		-1	0	β	$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

Specijalni slučajevi ove formule, koji se odnose na redove kod kojih je stepen α prirodan broj (paran ili neparan u zavisnosti od izbora funkcija F i f u Tabeli II), imaju zatvoren oblik

$$T_\alpha^f = (-1)^m \frac{c\pi}{2(\alpha-1)!}x^{\alpha-1} + \sum_{i=0}^{m} \frac{(-1)^i F(\alpha-2i-\delta)}{(2i+\delta)!}x^{2i+\delta}, \qquad (2.6)$$

gde je $\alpha \in N$, $f = \left\{ {\sin \atop \cos} \right\}$ $\delta = \left\{ {1 \atop 0} \right\}$.

Tabela II: slučajevi u zatvorenom obliku

F	f	α
ζ, η, λ	sin	$2m+1, m \in N_0$
	cos	$2m, m \in N$
β	sin	$2m, m \in N$
	cos	$2m+1, m \in N_0$

Suma na desnoj strani fornule (2.6) je konačna jer se funkcije F anuliraju počevši od $m+1$-vog člana sume. Naime, poznato je da za Riemannovu zeta funkciju i ostale sume negativnog stepena važi da za celobrojne negativne vrednosti argumenta imaju vrednost 0, t,j. $\zeta(-2m) = 0$, $\eta(-2m) = 0$, $\lambda(-2m) = 0$, $\beta(-2m-1) = 0$, $m \in N$ [1], str.807. Pored toga, u još dva slučaja je i poslednji član ove sume jednak nuli. Jedan od njih nastupa kad je $F = \lambda$, jer je i $\lambda(0) = 0$, što sledi iz gore pomenute veze λ i ζ funkcije.

Drugi slučaj odnosi se na izbor $F = \beta$ i $f = \sin$ u formuli (2.6), kad je poslednji član sume jednak nuli, jer je $\beta(-1) = 0$. Da bismo dokazali da je $\beta(-1) = 0$, potrebna nam je generalisana Riemannova zeta funkcija $\zeta(z, a)$ (videti [40], str.723)

$$\zeta(z,a) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+a)^z}, \qquad \operatorname{Re} z > 1; a \neq 0, -1, -2 \ldots,$$

koja se može analitički proširiti na celu kompleksnu ravan, osim za $z = 1$, gde ima pol. Funkcija $\beta(z)$ može se predstaviti na sledeći način

$$\beta(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^z} = \frac{1}{2^{2z}}\left(\zeta\left(z, \frac{1}{4}\right) - \zeta\left(z, \frac{3}{4}\right)\right),$$

i takođe je analitička u celoj kompleksnoj ravni, osim za $z = 1$. Koristeći integralnu reprezentaciju generalisane Riemannove zeta funkcije (videti [39], str.652)

$$\zeta(z,a) = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^{+\infty} \frac{x^{z-1}e^{-ax}}{1-e^{-x}} dx \quad (\mathrm{Re}\, z > 1),$$

funkcija $\beta(z)$ se sada može predstaviti u obliku

$$\beta(z) = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^{+\infty} \frac{x^{z-1}}{e^x + e^{-x}} dx.$$

Za $\mathrm{Re}\, z \geq 1$ integral na desnoj strani definiše analitičku funkciju. Primenjujući dva puta parcijalnu integraciju, lako dolazimo do sledeće reprezentacije

$$\beta(z) = \frac{1}{\Gamma(z+2)} \int_0^{+\infty} x^{z+1} \frac{e^{5x} - 6e^{3x} + e^x}{(e^{2x}+1)^3} dx,$$

gde integral na desnoj strani definiše analitičku funkciju za $\mathrm{Re}\, z \geq -1$. Iz poslednje relacije sledi

$$\beta(-1) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{5x} - 6e^{3x} + e^x}{(e^{2x}+1)^3} dx = \frac{e^x - e^{-x}}{(e^x + e^{-x})^2} \Big|_0^{+\infty} = 0.$$

Sume nekih od redova koje obuhvata generalna formula (2.6) mogu se naći u poznatim knjigama, na primer u [39], formule 5.4.2. (2,4–8,12,13), str.726 i formule 5.4.6. (3–14), str.732. Iste ove sume postoje i u [18],[63].

Za određene vrednosti promenljive x formula (2.6) postaje formula za sumiranje numeričkih redova. Ova činjenica može se iskoristiti za izvođenje nekih rekurzivnih relacija za Riemannovu zeta funkciju i ostale srodne funkcije.

Na primer, uzimajući $f = \cos$ u formuli (2.6) i stavljajući $x = \pi$ ako je $F = \zeta, \eta, \lambda$, a $x = \pi/2$ ako je $F = \beta$, dobija se rekurzivna relacija ([36], [48])

$$F(2m+d) = c\frac{(-1)^{m+1}\pi^{2m}}{2(2m)!} + \sum_{i=1}^{m} \frac{(-1)^{i+1}F(2m-2i+d)\pi^{2i}}{2^{2id}(2i+1-d)!}, \quad m \geq 1$$

gde je $d = \begin{cases} 0, & F = \zeta, \eta, \lambda \\ 1, & F = \beta. \end{cases}$ a c je u Tabeli I. Kako se prilikom primene ove relacije na desnoj strani pojavljuje $F(d)$, potrebno je znati odgovarajuće vrednosti Riemannove zeta funkcije i ostalih srodnih funkcija ([1], str.807) : $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$, $\eta(0) = \frac{1}{2}$, $\lambda(0) = 0$, $\beta(1) = \frac{\pi}{4}$. Primetimo da u radu [21] ovakva rekurzivna relacija postoji samo za slučaj ζ funkcije.

Formula (2.6) može se izvesti i na drugi način, koji će ovde biti ilustrovan na primeru sumiranja reda (2.1) za $s = 1, a = 1, b = 0$. Za ove vrednosti parametara uvedimo oznake

$$T_\alpha^{\sin} = S_\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^\alpha}, \qquad T_\alpha^{\cos} = C_\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^\alpha}, \qquad \alpha \in N.$$

S obzirom da postupak zahteva integraciju ovih redova član po član, treba pokazati da su ovi redovi uniformno konvergentni. Jasno je da ovo važi za $\alpha \geq 2$ na osnovu Weierstrassovog kriterijuma, pa ostaje da se pokaže uniformna konvergencija za $\alpha = 1$. Kako se funkcije $\frac{\pi - x}{2}$ i $-\ln 2 \sin \frac{x}{2}$ mogu razviti u Fourierov red na intervalu $0 < x < 2\pi$, pri čemu je

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}, \quad -\ln 2 \sin \frac{x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}, \tag{2.7}$$

to su ovi redovi na svakom zatvorenom podintervalu uniformno konvergentni na osnovu Dirichetovog kriterijuma, pa su oni uniformno konvergentni na $0 < x < 2\pi$, i moguće je izvršiti promenu redosleda sumacije i integracije. Najpre integralimo prvu sumu

$$\int_0^x S_\alpha dx = \zeta(\alpha + 1) - C_{\alpha+1}, \tag{2.8}$$

a zatim i drugu

$$\int_0^x C_\alpha dx = S_{\alpha+1}. \tag{2.9}$$

Primetimo da je $\zeta(\alpha)$ Riemannova zeta funkcija. Integracijom relacije

$$S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi - x}{2}, \quad 0 < x < 2\pi$$

i primenom formule (2.8), sledi da je

$$\int_0^x S_1 dx = \zeta(2) - C_2 \quad \Rightarrow \quad C_2 = \zeta(2) - \frac{\pi}{2}x + \frac{x^2}{4}.$$

Integraleći sada C_2 i primenjujući (2.9), dobija se

$$\int_0^x C_2 dx = S_3 = \zeta(2)x - \frac{\pi}{4}x^2 + \frac{x^3}{12}.$$

Na isti način, koristeći integraciju i naizmenično (2.8) i (2.9), dobijaju se C_4, S_5, C_6 itd. Pomoću metoda matematičke indukcije može se doći do formula u zatvorenom obliku za S_{2m+1} i C_{2m}, $m \in N_0$

$$\begin{aligned} S_{2m+1} &= \frac{(-1)^m \pi x^{2m}}{2(2m)!} + \sum_{i=0}^{m} \frac{(-1)^i \zeta(2m-2i)}{(2i+1)!} x^{2i+1}, \\ C_{2m} &= \frac{(-1)^m \pi x^{2m-1}}{2(2m-1)!} + \sum_{i=0}^{m} \frac{(-1)^i \zeta(2m-2i)}{(2i)!} x^{2i}. \end{aligned}$$

Istom ovom procedurom dobija se još šest formula za sumiranje reda (2.1) za ostale vrednosti parametara s, a i b. Konačno, može se postaviti opšta formula (2.6), koja sadrži svih ovih osam formula.

2.1.1 Ubrzavanje konvergencije

Formula (2.6) uz pomoć metoda Krylova ([11], str.217) može se iskoristiti za ubrzavanje konvergencije trigonometrijskih redova. Na primer, razmatraćemo red

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1} \sin nx. \tag{2.10}$$

Za svaki prirodan broj M dokazuje se, metodom matematičke indukcije, da važi

$$\begin{aligned} \frac{n}{n^2+1} &= \frac{n}{n^2} \cdot \frac{1}{1+\dfrac{1}{n^2}} = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4} - \cdots\right) \\ &= \sum_{m=1}^{M} \frac{(-1)^{m-1}}{n^{2m-1}} + \frac{(-1)^M}{n^{2M-1}(n^2+1)}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Zamenom (2.11) u formulu (2.10), dobija se

$$T = \sum_{m=1}^{M} (-1)^{m-1} T_{2m-1}^{\sin} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^M \sin nx}{(n^2+1)n^{2M-1}},$$

gde se $T_{2m-1}^{\sin}$ predstavlja pomoću formule (2.6), dakle konačnom sumom. Prema tome, što je broj M veći, to je brža konvergencija preostalog reda, pa zbog toga i red T brže konvergira. Sledećom tabelom prikazano je koliko članova reda je potrebno sabrati da bi se postigla tačnost ε za zadato M.

ε	10^{-1}	10^{-2}	10^{-5}	10^{-8}
$M=1$	3	8	224	7072
$M=3$	2	2	6	16
$M=10$	1	2	2	3

2.1.2 Redovi sa integralnim sinusom

Generalna formula (2.6) može se primeniti kod sumiranja redova sa generalisanim integralnim sinusom. Počećemo od integrala ([39] str.387, formula 13, za $n=1, b=1$)

$$\int_0^\infty t^{\nu-1} \sin t dt = 2^{\nu-1}\sqrt{\pi}\frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\Gamma(1-\frac{\nu}{2})}, \qquad |\mathrm{Re}\,\nu| < 1$$

i integral na levoj strani predstavićemo zbirom dva integrala

$$\int_0^\infty t^{\nu-1} \sin t dt = \int_0^x t^{\nu-1} \sin t dt + \int_x^\infty t^{\nu-1} \sin t dt.$$

Prvi integral na desnoj strani označimo sa $\mathrm{Si}\,(x,\nu)$. On je generalizacija integralnog sinusa $\mathrm{Si}\,(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$, jer je $\mathrm{Si}\,(x,0) = \mathrm{Si}\,(x)$. Drugi integral je generalisani Fresnelov integralni sinus $S(x,\nu)$, $\mathrm{Re}\,\nu < 1$. Dakle,

$$2^{\nu-1}\sqrt{\pi}\frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\Gamma(1-\frac{\nu}{2})} = \mathrm{Si}\,(x,\nu) + S(x,\nu), \qquad |\mathrm{Re}\,\nu| < 1. \tag{2.12}$$

Polazeći od

$$\operatorname{Si}\left((an-b)x,\nu\right)=\int\limits_0^{(an-b)x} t^{\nu-1}\sin t\,dt=\int\limits_0^x \frac{z^{\nu-1}\sin(an-b)z}{(an-b)^{-\nu}}dz,$$

dobija se da je

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(s)^{n-1}\operatorname{Si}\left((an-b)x,\nu\right)}{(an-b)^{\alpha}}=\int\limits_0^x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{\nu-1}\sin(an-b)z}{(an-b)^{\alpha-\nu}}dz.$$

Sada se koristi formula (2.6), gde je $f=\sin,\delta=1$, a $\alpha-\nu$ igra ulogu α u Tabeli II. Tako se dobija

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}&\frac{(s)^{n-1}\operatorname{Si}\left((an-b)x,\nu\right)}{(an-b)^{\nu+2m+r}}\\&=\frac{(-1)^m c\pi x^{\nu+2m}}{2(\nu+2m)(2m)!}+\sum_{i=0}^{m}\frac{(-1)^i F(2m-2i-1+r)}{(2i+\nu+1)(2i+1)!}x^{2i+\nu+1}\end{aligned}\tag{2.13}$$

gde je $r=\begin{cases}1, & F=\zeta,\eta,\lambda\\ 0, & F=\beta\end{cases}$ i a,b,s,c,F su u Tabeli I.

Pomoću ove formule i formule (2.12) može se odrediti još jedna suma. Naime, formulu (2.12) treba pomnožiti sa $\dfrac{(s)^{n-1}}{(an-b)^{\nu+2m+r}}$, pa onda izvršiti sumiranje po n, gde n prolazi skupom svih prirodnih brojeva. Promenom redosleda integracije i sumacije, kao i uzimajući u obzir formulu (2.13), konačno se dobija

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(s)^{n-1}S((an-b)x,\nu)}{(an-b)^{\nu+2m+r}}&=\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{\nu+1}{2})\,F(\nu+2m+r)}{2^{1-\nu}\,\Gamma(1-\frac{\nu}{2})}\\&-\frac{(-1)^m c\pi x^{\nu+2m}}{2(\nu+2m)(2m)!}-\sum_{i=0}^{m}\frac{(-1)^i F(2m-2i-1+r)}{(2i+\nu+1)(2i+1)!}x^{2i+\nu+1},\quad |\operatorname{Re}\nu|<1.\end{aligned}$$

Generalna formula (2.13) je novi rezultat koji obuhvata partikularne slučajeve poznate u literaturi. Tako se iz formule (2.13) za $\nu=0$ dobija formula

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}&\frac{(s)^{n-1}\operatorname{Si}\left((an-b)x\right)}{(an-b)^{2m+r}}\\&=\frac{(-1)^m c\pi x^{2m}}{4m(2m)!}+\sum_{i=0}^{m}\frac{(-1)^i F(2m-2i-1+r)}{(2i+1)(2i+1)!}x^{2i+1},\end{aligned}$$

koja sadrži, na primer, sumacione formule 2, 4, 5 u [40] str. 649.

2.1.3 Integralne transformacije

Na primer, uzimajući da je $f = \cos$, $\delta = 0$ u formuli (2.6), i primenom Laplaceove transformacije, dobija se

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(s)^{n-1}p}{(an-b)^{\alpha}(p^2+(an-b)^2)} = (-1)^{\alpha/2}\frac{c\pi}{2p^{\alpha}} + \sum_{i=0}^{M} \frac{(-1)^i F(\alpha-2i)}{p^{2i+1}}.$$

Ako se zatim odabere da je $s=1$, $a=1, b=0$, sledi da je $F=\zeta$, $c=1$, i dobija se

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p}{n^{\alpha}(p^2+n^2)} = (-1)^{\alpha/2}\frac{\pi}{2p^{\alpha}} + \sum_{i=0}^{M} \frac{(-1)^i \zeta(\alpha-2i)}{p^{2i+1}}.$$

Na ovaj red sada se može primeniti inverzna Mellinova transformacija, znajući da je ([35], str. 166, 2.16 i str. 167, 2.25)

$$M^{-1}\left(\frac{z}{z^2+n^2}\right) = \begin{cases} \cos(n\log x) & x<1 \\ 0 & x>1, \end{cases}$$

$$M^{-1}\left(\frac{1}{z^{\nu}}\right) = \begin{cases} \dfrac{(\log\frac{1}{x})^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)} & x<1 \\ 0 & x>1, \end{cases}$$

i dobija se

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\log x)}{n^{\alpha}} = \frac{(-1)^{\alpha/2}\pi}{2(\alpha-1)!}\left(\log\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1} + \sum_{i=0}^{M} \frac{(-1)^i\zeta(\alpha-2i)}{(2i)!}\left(\log\frac{1}{x}\right)^{2i}.$$

Ako na prethodno posmatrani red hoćemo da primenimo Besselovu umesto Mellinove transformacije, najpre primetimo da je ([34], str. 36, 4.23 i str. 33, 4.6)

$$B\left(\frac{x^{\nu+\frac{1}{2}}}{(a^2+x^2)^{\mu}}\right) = \frac{a^{\nu-\mu+1}y^{\mu-\frac{1}{2}}}{2^{\mu-1}\Gamma(\mu)}K_{\nu-\mu+1}(ay),$$

$$B(x^{\mu}) = \frac{2^{\mu+\frac{1}{2}}}{y^{\mu+1}}\frac{\Gamma(\frac{\nu}{2}+\frac{\mu}{2}+\frac{3}{4})}{\Gamma(\frac{\nu}{2}-\frac{\mu}{2}+\frac{1}{4})},$$

gde je K_{ν} Hankelova funkcija. Na taj način se dobija suma jednog od Schlömilchovih redova

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_{\frac{1}{2}}(ny)}{n^{\alpha-\frac{1}{2}}} = (-1)^{\frac{\alpha}{2}}\frac{\pi\, y^{\alpha-\frac{3}{2}}\,\Gamma(1-\frac{\alpha}{2})}{2^{\alpha+\frac{1}{2}}\,\Gamma(\frac{\alpha+1}{2})} + \sum_{i=0}^{M} \frac{(-1)^i\zeta(\alpha-2i)\,y^{2i-\frac{1}{2}}\,\Gamma(\frac{1}{2}-i)}{2^{2i+\frac{1}{2}}\,i!}.$$

2.2 Suma opštijeg reda s jednom trigonometrijskom funkcijom

U ovom odeljku izložićemo proceduru za sumiranje reda (2.2), čija suma je prvi put izvedena u radu [50]. Neka je $\alpha = 2m + d - 1$, $m \in N_0$, a d je dato Tabelom III, tj. može biti 0 ili 1, zavisno od izbora parametara. U literaturi (npr. [18], [39], [63]) se mogu naći sume reda (2.2) za $m = 0$. Svi ti slučajevi obuhvaćeni su jednom generalnom formulom:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(s)^{n-1} f((an-b)x)}{(an-b)^{d-1}((an-b)^2 - \omega^2)} = \frac{sd(1-b)}{2\omega^2} - \frac{s\pi \sin^{b-1} \frac{\pi\omega}{2}}{4\omega^d \cos \frac{\pi\omega}{2}} f_\omega(x), \tag{2.14}$$

gde je $f_\omega(x) = f\left(\omega x - \frac{\pi(s+1)(b+\omega)}{2a}\right), \omega \in R$, $\omega \neq an - b$, a sve ostale relevantne parametre sadrži Tabela III.

Koristeći rastavljanje na parcijalne razlomke:

$$\frac{1}{k^{2m}(k^2 - \omega^2)} = \frac{1}{\omega^{2m}(k^2 - \omega^2)} - \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{k^{2i}\omega^{2m-2i+2}}, \tag{2.15}$$

red (2.2) se može prikazati kao:

$$\begin{aligned} T^f_{2m+d-1,\omega} = {} & \frac{1}{\omega^{2m}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(s)^{n-1} f((an-b)x)}{(an-b)^{d-1}((an-b)^2 - \omega^2)} \\ & - \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\omega^{2m-2i+2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(s)^{n-1} f((an-b)x)}{(an-b)^{2i+d-1}}. \end{aligned}$$

Za određivanje prve sume na desnoj strani koristi se formula (2.14), dok je za drugu potrebna formula (2.6) gde je $\alpha = 2i + d - 1$. Tako se na kraju dobija generalna formula:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(s)^{n-1} f((an-b)x)}{(an-b)^{2m+d-1}((an-b)^2 - \omega^2)} = {} & \frac{sd(1-b)}{2\omega^{2m+2}} - \frac{s\pi \sin^{b-1} \frac{\pi\omega}{2}}{4\omega^{2m+d} \cos \frac{\pi\omega}{2}} f_\omega(x) \\ + \frac{c\pi}{2} \sum_{i=1}^{m} \frac{(-1)^{i+d} x^{2i+d-2}}{\omega^{2m-2i+2}(2i+d-2)!} & - \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=0}^{M} \frac{(-1)^k F(2i-2k+d-1-\delta)}{\omega^{2m-2i+2}(2k+\delta)!} x^{2k+\delta}, \end{aligned} \tag{2.16}$$

gde je $\omega \in R$, $\omega \neq an - b$, $f = \left\{ {\sin \atop \cos} \right\}$ $\delta = \left\{ {1 \atop 0} \right\}$, $M = i - 1 + d(1 - \delta)$, oznaka $f_\omega(x)$ ima isto značenje kao kod formule (2.14), a ostali parametri dati su u Tabeli III.

Ako posmatramo granični proces kad $\omega \to 0$ u formulama (2.14) i (2.16), dobijamo formulu (2.6) za sumiranje reda (2.1). Na primer, formula (2.14) za $s = 1, a = 1, b = 0, d = 1, f = \cos$, postaje (Tablica I, ili [19] 17.3.9, str. 243):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2 - \omega^2} = \frac{1}{2\omega^2} - \frac{\pi \cos(\omega x - \omega\pi)}{2\omega \sin \omega\pi}. \tag{2.17}$$

Kad $\omega \to 0$, dobija se

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} = -\frac{\pi x}{2} + \frac{\pi^2}{6} + \frac{x^2}{4}.$$

Ako izaberemo da je $a = 1, b = 0, s = 1, \alpha = 2, f = \cos$ u formuli (2.6), ostali parametri su $\delta = 0, c = 1, m = 1, F = \zeta$, tako da se dobija

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} = -\frac{\pi x}{2} + \zeta(2) - \frac{\zeta(0)}{2} x^2.$$

To isto se dobija i ako $\omega \to 0$ u formuli (2.17), pošto je poznato da je $\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$, a vrednost $\zeta(0) = -\dfrac{1}{2}$ se određuje na osnovu analitičkog proširenja funkcije $\zeta(z)$ na celu kompleksnu ravan (osim za $z = 1$, gde ima pol, [22]).

Tabela III

<table>
<tr><th>a</th><th>b</th><th>s</th><th>c</th><th>F</th><th>f</th><th>d</th><th>za</th></tr>
<tr><td rowspan="4">1</td><td rowspan="4">0</td><td rowspan="2">1</td><td rowspan="2">1</td><td rowspan="2">ζ</td><td>sin</td><td>0</td><td rowspan="2">$0 < x < 2\pi$</td></tr>
<tr><td>cos</td><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">-1</td><td rowspan="2">0</td><td rowspan="2">η</td><td>sin</td><td>0</td><td rowspan="2">$-\pi < x < \pi$</td></tr>
<tr><td>cos</td><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="4">2</td><td rowspan="4">1</td><td rowspan="2">1</td><td rowspan="2">$\frac{1}{2}$</td><td rowspan="2">λ</td><td>sin</td><td>0</td><td rowspan="2">$0 < x < \pi$</td></tr>
<tr><td>cos</td><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">-1</td><td rowspan="2">0</td><td rowspan="2">β</td><td>sin</td><td>1</td><td rowspan="2">$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$</td></tr>
<tr><td>cos</td><td>0</td></tr>
</table>

2.2.1 Rekurzivne relacije

Kao i u slučaju formule (2.6), za određene vrednosti promenljive x formula (2.16) postaje formula za sumiranje numeričkih redova. To omogućava da se dobiju relacije između bilo koje dve od funkcija ζ, η, λ i

β. Ovde će biti prikazane relacije između funkcija ζ i η, kao i između funkcija λ i β.

Najpre, formula (2.16) za $a=1, b=0, s=-1, f=\cos, p=1$ postaje

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cos nx}{n^{2m}(n^2-\omega^2)}=-\frac{1}{2\omega^{2m+2}}+\frac{\pi\cos\omega x}{2\omega^{2m+1}\sin\pi\omega} -\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{\omega^{2m-2i+2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cos nx}{n^{2i}}.$$

Stavljajući $x=\pi$, dobija se

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2m}(n^2-\omega^2)}=\frac{1}{2\omega^{2m+2}}-\frac{\pi\operatorname{ctg}\omega\pi}{2\omega^{2m+1}}+\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{\omega^{2m-2i+2}}\sum_{j=0}^{i}\frac{(-1)^j\eta(2i-2j)}{(2j)!}\pi^{2j}. \tag{2.18}$$

Ovde je upotrebljena sumaciona formula (2.6) za isti izbor parametara.

Posmatrajmo rastavljanje na parcijalne razlomke (2.15) za $k=n$. Tada je

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2m}(n^2-\omega^2)}=\frac{1}{\omega^{2m}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-\omega^2}-\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{\omega^{2m-2i+2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2i}}. \tag{2.19}$$

Kako je (formula 4 u [39], str. 685)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-\omega^2}=\frac{1}{2\omega^2}-\frac{\pi}{2\omega}\operatorname{ctg}\pi\omega,$$

formula (2.19) postaje

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2m}(n^2-\omega^2)}=\frac{1}{2\omega^{2m+2}}-\frac{\pi\operatorname{ctg}\pi\omega}{2\omega^{2m+1}}-\sum_{i=1}^{m}\frac{\zeta(2i)}{\omega^{2m-2i+2}}. \tag{2.20}$$

Upoređivanjem formula (2.18) i (2.20), dobija se

$$\zeta(2i)=\sum_{j=0}^{i}\frac{(-1)^{j+1}\eta(2i-2j)}{(2j)!}\pi^{2j}.$$

U sledećem primeru posmatra se formula (2.16) za $a=2, b=1, s=-1, f=\sin, p=1$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\sin(2n-1)x}{(2n-1)^{2m}((2n-1)^2-\omega^2)}=\frac{\pi\sin\omega x}{4\omega^{2m+1}\cos\frac{\omega\pi}{2}} -\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{\omega^{2m-2i+2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\sin(2n-1)x}{(2n-1)^{2i}}.$$

Za izračunavanje sume na desnoj strani koristi se formula (2.6) za isti izbor parametara, pa se zatim za $x = \frac{\pi}{2}$ dobija

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)^{-2m}}{(2n-1)^2-\omega^2} = \frac{\pi \operatorname{tg}\frac{\omega\pi}{2}}{4\omega^{2m+1}} - \sum_{i=1}^{m}\frac{1}{\omega^{2m-2i+2}}\sum_{j=0}^{i}\frac{(-1)^j\beta(2i-2j-1)\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2j+1}}{(2j+1)!}.$$

Na sličan način kao u prethodnom primeru, najpre se zamenjuje ([39], str. 688)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2-\omega^2} = \frac{\pi}{4\omega}\operatorname{tg}\frac{\pi\omega}{2}$$

u formuli

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)^{-2m}}{(2n-1)^2-\omega^2} = \frac{1}{\omega^{2m}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2-\omega^2} - \sum_{i=1}^{m}\frac{1}{\omega^{2m-2i+2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^{2i}},$$

koja se dobija kao formula (2.19) iz rastavljanja na parcijalne razlomke. Stoga je

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)^{-2m}}{(2n-1)^2-\omega^2} = \frac{\pi \operatorname{tg}\frac{\omega\pi}{2}}{4\omega^{2m+1}} - \sum_{i=1}^{m}\frac{\lambda(2i)}{\omega^{2m-2i+2}},$$

odakle se na kraju dobija

$$\lambda(2i) = \sum_{j=0}^{i-1}\frac{(-1)^j\beta(2i-2j-1)}{(2j+1)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2j+1}.$$

Primetimo da ovde j ide do $i-1$ jer sabirak koji se dobija za $j = i$ sadrži $\beta(-1) = 0$.

Formula (2.16) može se izvesti i na drugi način. Na primer, za vrednosti parametara $s = 1, a = 1, b = 0$ označimo $T^{\sin}_{2m-1,\omega} = S_{2m-1}$ i $T^{\cos}_{2m,\omega} = C_{2m}$. Lako se može pokazati da je

$$\int_0^x S_{2m-1}dx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2m}(n^2-\omega^2)} - C_{2m}. \tag{2.21}$$

Da bismo odredili sumu na desnoj strani, najpre koristimo (2.15). Tako se tražena suma dobija u obliku

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2m}(n^2-\omega^2)} = \frac{1}{\omega^{2m}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-\omega^2} - \sum_{i=1}^{m}\frac{1}{\omega^{2m-2i+2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2i}}. \tag{2.22}$$

Kako je (po formuli 4 iz [39] str. 685)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-\omega^2} = \frac{1}{2\omega^2} - \frac{\pi}{2\omega} \operatorname{ctg} \pi\omega,$$

i kako poslednja suma na desnoj strani predstavlja ζ funkciju, formula (2.22) može se napisati kao

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2m}(n^2-\omega^2)} = \frac{1}{2\omega^{2m+2}} - \frac{\pi \operatorname{ctg} \pi\omega}{2\omega^{2m+1}} - \sum_{i=1}^{m} \frac{\zeta(2i)}{\omega^{2m-2i+2}}. \tag{2.23}$$

Uzimajući u obzir ovu relaciju (2.23), formula (2.21) postaje

$$\int_0^{\pi} S_{2m-1} dx = \frac{1}{2\omega^{2m+2}} - \frac{\pi \operatorname{ctg} \pi\omega}{2\omega^{2m+1}} - \sum_{i=1}^{m} \frac{\zeta(2i)}{\omega^{2m-2i+2}} - C_{2m}. \tag{2.24}$$

Lako se može naći i integral druge polazne sume

$$\int_0^{x} C_{2m} dx = S_{2m+1}. \tag{2.25}$$

Postupak izvođenja započećemo od sume (formula 2., Tablica II)

$$S_{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin nx}{n^2-\omega^2} = -\frac{\pi \sin(\omega x - \omega\pi)}{2 \sin \omega\pi},$$

koja je sadržana u generalnoj reprezentaciji (2.14), i dobija se iz nje izborom odgovarajućih parametara. Integracijom se dobija da je

$$\int_0^{x} S_{-1} dx = -\frac{\pi}{\omega} \left(\sin^2 \frac{\omega x}{2} \operatorname{ctg} \omega\pi - \frac{1}{2} \sin \omega x \right).$$

S druge strane, formula (2.24) za $m = 0$ glasi:

$$\int_0^{x} S_{-1} dx = \frac{1}{2\omega^2} - \frac{\pi}{2\omega} \operatorname{ctg} \pi\omega - C_0.$$

Upoređivanjem dveju poslednjih relacija, sledi da je

$$C_0 = \frac{1}{2\omega^2} - \frac{\pi}{2\omega} \operatorname{ctg} \pi\omega + \frac{\pi}{\omega} \sin^2 \frac{\omega x}{2} \operatorname{ctg} \pi\omega - \frac{\pi}{2\omega} \sin \omega x.$$

U sledećem koraku, u cilju određivanja $S_1 = \int_0^x C_0 dx$, koristimo (2.25) za $m = 0$ i nalazimo

$$S_1 = \frac{x}{2\omega^2} + \frac{\pi}{2\omega^2}(\cos\omega x - \operatorname{ctg}\pi\omega \sin\omega x - 1).$$

Ponavljanjem ove procedure određuju se $S_3, S_5, \ldots$ i $C_2, C_4, \ldots$. Pomoću metoda matematičke indukcije dokazuje se da važi

$$S_{2m-1} = -\frac{\pi\sin(\omega(x-\pi))}{2\omega^{2m}\sin\omega\pi} - \sum_{i=1}^{m}\frac{T_{2i-1}^{\sin}}{\omega^{2m-2i+2}},$$

$$C_{2m} = \frac{1}{2\omega^{2m+2}} - \frac{\pi\cos(\omega(x-\pi))}{2\omega^{2m+1}\sin\omega\pi} - \sum_{i=1}^{m}\frac{T_{2i}^{\cos}}{\omega^{2m-2i+2}}.$$

Na sličan način dobijaju se formule za ostale vrednosti parametara s, a, b. Konačno dolazimo do generalne formule koja obuhvata sve ove slučajeve

$$T_{2m+d-1,\omega}^{f} = \frac{sd(1-b)}{2\omega^{2m+2}} - \frac{s\pi\sin^{b-1}\frac{\pi\omega}{2}}{4\omega^{2m+d}\cos\frac{\pi\omega}{2}} f_\omega(x) - \sum_{i=1}^{m}\frac{T_{2i+d-1}^{f}}{\omega^{2m-2i+2}}, \tag{2.26}$$

gde je $\omega \in R, \omega \neq an - b$, parametri a, b, s i oblasti važenja nalaze se u Tabeli I, a parametar d u Tabeli III. Za određivanje sume T_{2i+d-1}^{f} koristi se (2.6), a oznaka $f_\omega(x)$ znači isto što i u (2.14). Konačno, formula (2.26) postaje formula (2.16).

U literaturi se pojavljuju samo neki slučajevi sumacionih formula koje obuhvata generalna formula (2.16). U knjizi [39], to su formule 5.4.6. (24–27), str.733. Ako posmatramo bilo koju od tih formula, na primer 5.4.6.24

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\sin((2k+1)x)}{(2k+1)^2-\omega^2} = \frac{\pi\sin\omega x}{4\omega\cos\frac{\omega\pi}{2}}, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2},$$

očigledno je da se ona za $k = n - 1$ poklapa sa formulom 8. iz Tablice I. Sve takve sume, naime za $\alpha = 0$ i $\alpha = -1$, nalaze se i u tablicama [63], gde se može naći i nekoliko suma za koje je $\alpha = 1$. Jedna od njih je data formulom ГВ6, str. 407

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin(nx)}{n(n^2-\omega^2)} = \frac{x}{2\omega^2} - \frac{\pi\sin\omega x}{2\omega^2\sin\omega\pi}, \quad \omega \neq n,\ 0 \leq x \leq \pi,$$

a isti rezultat se dobija iz formule (2.16) za $f = \sin$, $a = 1$, $b = 0$, $s = -1$.

Kako su u literaturi poznate sume redova oblika (2.2) samo za slučajeve kad je $\alpha = 0$ i $\alpha = -1$ (Tablica I), i neke za $\alpha = 1$, to je generalna formula (2.16) novi rezultat, jer važi za $\alpha = 2m + d - 1$, $m \in N_0$, d u Tabeli III.

2.3 Suma reda s proizvodom dveju trigonometrijskih funkcija

U ovom odeljku razmatraćemo klasu redova (2.3) koji sadrže proizvod dve trigonometrijske funkcije (videti [45]). Za $\alpha \in R^+$, red (2.3) može se predstaviti pomoću Riemannove zeta funkcije i funkcija η, λ i β.

Proceduru za dobijanje tražene sume objasnićemo na primeru sledećeg reda

$$T_\alpha^{\sin,\cos} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(s)^{n-1} \sin(an-b)y \cos(an-b)x}{(an-b)^\alpha}.$$

Uzimajući u obzir da je

$$\sin(an-b)y\cos(an-b)x = \frac{1}{2}(\sin(an-b)(y-x) + \sin(an-b)(y+x)),$$

dobijamo

$$T_\alpha^{\sin,\cos} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(s)^{n-1}\sin(an-b)(y-x)}{(an-b)^\alpha} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(s)^{n-1}\sin(an-b)(y+x)}{(an-b)^\alpha}.$$

Primenom formule (2.5) na oba reda, dobija se da je

$$\begin{aligned} T_\alpha^{\sin,\cos} &= c\pi \frac{(y-x)^{\alpha-1} + (y+x)^{\alpha-1}}{4\Gamma(\alpha)\sin\frac{\pi\alpha}{2}} \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i F(\alpha-2i-1)}{(2i+1)!}((y-x)^{2i+1} + (y+x)^{2i+1}), \ (x,y) \in K_i, \end{aligned}$$

gde oblasti $K_i (i = 1,2,3,4)$, bez granica, i c, F zavise od parametara s, a, b, kao u Tabeli IV. Pomoću binomne formule dobijamo na kraju

$$T_\alpha^{\sin,\cos} = c\pi \frac{(y-x)^{\alpha-1} + (y+x)^{\alpha-1}}{4\Gamma(\alpha)\sin\frac{\pi\alpha}{2}} + \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{i} \frac{(-1)^i F(\alpha-2i-1) x^{2j} y^{2i-2j+1}}{(2i-2j+1)!(2j)!}.$$

Generalna formula, koja obuhvata sve slučajeve, može se predstaviti u obliku :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(s)^{n-1}f((an-b)y)g((an-b)x)}{(an-b)^{\alpha}}=(-1)^{d\delta}c\pi\frac{(y+x)^{\alpha-1}+(-1)^{\delta}(y-x)^{\alpha-1}}{4\Gamma(\alpha)\,h(\frac{\pi\alpha}{2})}$$
$$+\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{i}\frac{(-1)^{i}F(\alpha-2i-d-\delta)x^{2j+\delta}y^{2i-2j+d}}{(2i-2j+d)!(2j+\delta)!}, \tag{2.27}$$

gde je $f=\left\{\begin{smallmatrix}\sin\\ \cos\end{smallmatrix}\right\}$ $d=\left\{\begin{smallmatrix}1\\ 0\end{smallmatrix}\right\}$, i nezavisno od toga, $g=\left\{\begin{smallmatrix}\sin\\ \cos\end{smallmatrix}\right\}$ $\delta=\left\{\begin{smallmatrix}1\\ 0\end{smallmatrix}\right\}$. Funkciju h biramo na sledeći način: $h=\begin{cases}\cos, & f=g\\ \sin, & f\neq g.\end{cases}$ Sve ostale značajne parametre sadrži Tabela IV:

Tabela IV

a	b	s	c	F	Oblasti konvergencije
1	0	1	1	ζ	$K_1=\{(x,y)\mid -\pi<x<\pi, \lvert x\rvert<y<2\pi-\lvert x\rvert\}$
1	0	-1	0	η	$K_2=\{(x,y)\mid -\pi<x<\pi, \lvert x\rvert-\pi<y<\pi-\lvert x\rvert\}$
2	1	1	$\frac{1}{2}$	λ	$K_3=\{(x,y)\mid -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}, \lvert x\rvert<y<\pi-\lvert x\rvert$
2	1	-1	0	β	$K_4=\{(x,y)\mid -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}, \lvert x\rvert-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}-\lvert x\rvert\}$

Na primer, za $a=1, b=0, s=1 \;\Rightarrow\; c=1, F=\zeta$ i ako je $f=\sin \;\Rightarrow\; d=1$, $g=\cos \;\Rightarrow \delta=0$, $h=\sin$, formula (2.27) postaje

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin ny\cos nx}{n^{\alpha}}=\pi\frac{(y+x)^{\alpha-1}+(y-x)^{\alpha-1}}{4\Gamma(\alpha)\sin(\frac{\pi\alpha}{2})}+\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{i}\frac{(-1)^{i}\zeta(\alpha-2i-1)x^{2j}y^{2i-2j+1}}{(2i-2j+1)!(2j)!}.$$

U slučaju da je $h(x)=\sin x$ i $\alpha\to 2m+1, m\in N_0$, treba uzeti u obzir graničnu vrednost desne strane formule (2.27).

Za $\alpha\in N$, t.j. $\alpha=2m-r$, gde r može biti 0 ili 1, suma reda na desnoj strani formule (2.27) sastoji se od konačnog broja članova zbog anuliranja ζ,η,λ,β funkcija, pa svih 16 tako dobijenih formula u zatvorenom obliku čine Tablicu II, a prvi put su izvedene i objavljene u radu [45].

Suma reda (2.3) za $\alpha=2m-r$ ($r=0$ ili $r=1$, $m\in N$) može se izvesti i na drugi način. Ovaj postupak prikazaćemo na primeru reda $T_{2m-1}^{\sin,\cos}$ za $a=1, b=0, s=1$, koji ćemo označiti sa S_{2m-1}:

$$S_{2m-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin ny\cos nx}{n^{2m-1}}, \qquad m\in N. \tag{2.28}$$

Posmatrajmo ovaj red za $m = 1$:

$$S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin ny \cos nx}{n}. \tag{2.29}$$

Pomoću relacije $\sin ny \cos nx = \frac{1}{2}(\sin n(y-x) + (\sin n(y+x))$, dobijamo

$$S_1 = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n(y-x)}{n} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n(y+x)}{n}. \tag{2.30}$$

Polazeći od prve formule iz (2.7) nalazimo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n(y-x)}{n} = \frac{1}{2}(\pi - (y-x)), \quad 0 < y - x < 2\pi$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n(y+x)}{n} = \frac{1}{2}(\pi - (y+x)), \quad 0 < y + x < 2\pi.$$

Stoga, u oblasti

$$K_1 = \{(x, y) \mid 0 < y - x < 2\pi, 0 < y + x < 2\pi\},$$

t.j.

$$K_1 = \{(x, y) \mid -\pi < x < \pi, |x| < y < 2\pi - |x|\},$$

važi $S_1 = \frac{1}{2}(\pi - y)$, što je suma reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin ny}{n}$ (videti prvu formulu iz (2.7) za $x = y$), pa upoređujući sa (2.29) dobijamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin ny \cos nx}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin ny}{n}, \quad (x, y) \in K_1. \tag{2.31}$$

Integracijom po x u K_1, promenom redosleda integracije i sumiranja, t.j.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin ny}{n} \int_0^x \cos nx \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin ny}{n} \int_0^x dx,$$

imamo da je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin ny \sin nx}{n^2} = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin ny}{n}, \quad (x, y) \in K_1$$

uključujući i granice oblasti. Ponavljanjem ovog postupka nekoliko puta, dobijamo formule za sume $S_3, S_5, \ldots$ itd., tako da možemo pretpostaviti da će nakon ponavljanja $2m$ puta, konačna formula biti oblika

$$S_{2m-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin ny \cos nx}{n^{2m-1}} = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{(-1)^i x^{2i}}{(2i)!} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin ny}{n^{2m-2i-1}}, \tag{2.32}$$

za $(x, y) \in K_1$, uključujući granice, osim za $m = 1$.

Dokazaćemo formulu (2.32) metodom matematičke indukcije. Očigledno, formula (2.31) znači da formula (2.32) važi za $m = 1$. Pretpostavljajući da formula (2.32) važi za $m = k > 1$ $(k \in N)$, treba dokazati da važi i za $m = k + 1$. Integracijom pretpostavljene jednakosti

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin ny \cos nx}{n^{2k-1}} = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(-1)^i x^{2i}}{(2i)!} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin ny}{n^{2k-2i-1}},$$

dobija se

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin ny}{n^{2k-1}} \int_0^x \cos nx \, dx = \int_0^x \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(-1)^i x^{2i}}{(2i)!} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin ny}{n^{2k-2i-1}} \, dx,$$

t.j.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin ny \sin nx}{n^{2k}} = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(-1)^i x^{2i+1}}{(2i+1)!} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin ny}{n^{2k-2i-1}}.$$

Ponavljanjem integracije,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin ny}{n^{2k}} \int_0^x \sin nx \, dx = \int_0^x \sum_{i=1}^{k} \frac{(-1)^{i-1} x^{2i-1}}{(2i-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin ny}{n^{2k-2i+1}} \, dx,$$

gde je suma na desnoj strani šiftovana, dobijamo

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin ny \cos nx}{n^{2k+1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin ny}{n^{2k+1}} = -\sum_{i=1}^{k} \frac{(-1)^i x^{2i}}{(2i)!} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin ny}{n^{2k-2i+1}},$$

i konačno

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin ny \cos nx}{n^{2k+1}} = \sum_{i=0}^{k} \frac{(-1)^i x^{2i}}{(2i)!} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin ny}{n^{2k-2i+1}},$$

a to je formula (2.32) za $m = k + 1$. Dakle, formula (2.32) je dokazana.

Na sličan način dobija se svih 16 formula koje se mogu predstaviti generalnom formulom:

$$T^{f,g}_{2m-r} = \sum_{i=0}^{m-1-d\delta} \frac{(-1)^i x^{2i+\delta}}{(2i+\delta)!} T^{f}_{2m-2i-\delta-r} + (b-1)\frac{sd(-1)^{m-\delta}x^{2m-\delta}}{2(2m-\delta)!}, \quad m \in N, \tag{2.33}$$

gde je $f = \left\{\begin{smallmatrix}\sin\\ \cos\end{smallmatrix}\right\}$ $t = \left\{\begin{smallmatrix}1\\ 0\end{smallmatrix}\right\}$ i nezavisno od toga, $g = \left\{\begin{smallmatrix}\sin\\ \cos\end{smallmatrix}\right\}$ $\delta = \left\{\begin{smallmatrix}1\\ 0\end{smallmatrix}\right\}$. Parametar r određuje se na sledeći način: $r = \begin{cases} 0, & f = g \\ 1, & f \neq g \end{cases}$ za $F = \zeta, \eta, \lambda$, ali kad je $F = \beta$, treba uzeti da je $r = \begin{cases} 1, & f = g \\ 0, & f \neq g \end{cases}$. U formuli (2.33) izraz

$$T^{f}_{2m-2i-\delta-r} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(s)^{n-1} f((an-b)y)}{(an-b)^{2m-2i-\delta-r}} = c\frac{(-1)^{m-i-1+d-d\delta}\pi y^{2m-2i-\delta-r-1}}{2(2m-2i-\delta-r-1)!} + \sum_{j=0}^{m} \frac{(-1)^j F(2m-2i-\delta-r-2j-t) y^{2j+t}}{(2j+t)!} \tag{2.34}$$

se izračunava po formuli (2.6) stavljajući y umesto x. Ostali potrebni parametri nalaze se u Tabeli IV, osim parametra d čije se vrednosti mogu naći u Tabeli III. Primetimo da su u ovom slučaju intervali za x i y zatvoreni, osim za $2m-r = 1$. Formula (2.33) obuhvata neke partikularne rezultate iz [39].

Treba pomenuti da ako se koristi druga trigonometrijska jednakost:

$$\sin ny \cos nx = \frac{1}{2}(\sin n(x+y) - \sin(n(x-y)))$$

na početku opisane procedure, za red (2.28) se dobija formula

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin ny \cos nx}{n^{2m-1}} = \sum_{i=0}^{m-2} \frac{(-1)^i y^{2i+1}}{(2i+1)!} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^{2m-2i-2}} - \frac{(-1)^{m-1}y^{2m-1}}{2(2m-1)!}, \tag{2.35}$$

koja je različita od formule (2.32). To je zbog toga što formula (2.35) važi u oblasti K_1', dualnoj oblasti K_1. Naime,

$$K_1' = \Big\{(x,y)\Big| -\pi \le y \le \pi \ \text{ i } \ |y| \le x \le 2\pi - |y|\Big\}.$$

Međutim, ista ta formula (2.35) važi u oblasti K_1 kad se međusobno razmene promenljive x i y u redu (2.28), ali to je formula

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos ny \sin nx}{n^{2m-1}} = \sum_{i=0}^{m-2} \frac{(-1)^i x^{2i+1}}{(2i+1)!} \Big(\frac{(-1)^{m-i-1}\pi y^{2m-2i-3}}{2(2m-2i-3)!} + \sum_{j=0}^{m-i-1} \frac{(-1)^j \zeta(2m-2i-2j-2)}{(2j)!} y^{2j} \Big) - \frac{(-1)^{m-1} x^{2m-1}}{2(2m-1)!},$$

za $(x, y) \in K_1$, koja se dobija iz formule (2.32) za pogodan izbor funkcija f i g. Ovo razmatranje pokazuje da nema potrebe za izvođenjem formula za dualne oblasti.

Za određene vrednosti promenljive x (ili y) generalna formula (2.33) svodi se na formulu (2.6). Na primer, za $a = 2$, $b = 1$, $s = -1$, $c = 0$, $F = \beta$, $d = 0$, $f = \cos$, $t = 0$, $g = \sin$, $\delta = 1$, $r = 0$, formula (2.33) postaje

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cos(2n-1)y \sin(2n-1)x}{(2n-1)^{2m}} = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{(-1)^i x^{2i+1}}{(2i+1)!} \sum_{j=0}^{m-i-1} \frac{(-1)^j \beta_{ij}}{(2j)!} y^{2j},$$

gde je $\beta_{ij} = \beta(2m - 2i - 2j - 1)$, $(x, y) \in K_4$. Ova formula za $y = 0$ postaje

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \sin(2n-1)x}{(2n-1)^{2m}} = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{(-1)^i x^{2i+1} \beta(2m-2i-1)}{(2i+1)!},$$

a to je upravo formula (2.6) za $f = \sin$, $\alpha = 2m$, $s = -1$, $a = 2$, $b = 1$.

S druge strane, za $f = g = \cos$, $\alpha = 2m - 1$, $s = -1$, $c = 0$, $a = 2$, $b = 1$, $d = 0$, $r = 1$, $t = 0$, $\delta = 0$ (β_{ij} je isto kao gore) formula (2.33) glasi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cos(2n-1)y \cos(2n-1)x}{(2n-1)^{2m-1}} = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{(-1)^i x^{2i}}{(2i)!} \sum_{j=0}^{m-i-1} \frac{(-1)^j \beta_{ij}}{(2j)!} y^{2j}.$$

Za $x = y = 0$ dobija se $\beta(2m - 1)$.

Izvedena generalna formula (2.33) obuhvata neke rezultate koji su poznati u literaturi. Pored toga što oni potvrđuju tačnost naše formule, jasno je da nema rezultata za sve redove koji se pomoću nje mogu sumirati. Naime, primetimo da formula (2.33) važi za $\alpha = 2m - r$, $r = 0$ ili

$r = 1$, $m \in N$, dok u poznatim knjigama [39], [63] postoje slučajevi samo za $\alpha = 1$ ili 2 ($\alpha = 3$ u jednom slučaju). Još više, oblasti konvergencije u [39], [63] samo su podskupovi naših oblasti K_i ($i = 1, 2, 3, 4$) ili najviše jednaki sa njima. Na primer, formula 8, str. 743 u [39] daje rezultat

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^3} \sin kx \cos ky = \frac{x}{12}(\pi^2 - x^2 - 3y^2), \qquad |x \pm y| \leq \pi$$

u oblasti koja je jednaka našoj oblasti K_2. Upoređivanjem sa sumom

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cos ny \sin nx}{n^{2m-1}} = \sum_{i=0}^{m-2} \frac{(-1)^i x^{2i+1}}{(2i+1)!} \sum_{j=0}^{m-i-1} \frac{(-1)^j \eta_{ij}}{(2j)!} y^{2j} + \frac{(-1)^{m-1} x^{2m-1}}{2(2m-1)!},$$

koja se može dobiti kao partikularni slučaj formule (2.33) za odgovarajuće parametre ($\eta_{ij} = \eta(2m - 2i - 2j - 2)$ i $(x, y) \in K_2$), jasno je da se za $m = 1$ dobija isti rezultat.

Posmatrajmo sada formulu 3Γ3, str. 435 u [63] :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)y \cos(2n-1)x}{2n-1} = \begin{cases} \frac{\pi}{4}, & -y < x < y \\ 0, & y < x < \pi - y \end{cases} \qquad (0 < y \leq \frac{\pi}{2}).$$

Razmotrimo prvu oblast koja je polovina naše oblasti K_3. Pomoću formule

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)y \cos(2n-1)x}{(2n-1)^{2m-1}} = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{(-1)^i x^{2i}}{(2i)!} \Big(\frac{(-1)^{m-i-1} \pi y^{2m-2i-2}}{4(2m-2i-2)!} + \sum_{j=0}^{m-i-1} \frac{(-1)^j \lambda(2m-2i-2j-2)}{(2j+1)!} y^{2j+1} \Big), \quad (x, y) \in K_3 \tag{2.36}$$

koja je specijalan slučaj formule (2.33), za $m = 1$ dobija se takođe rezultat $\frac{\pi}{4}$. Druga oblast je polovina dualne oblasti K_3', pa zato posmatramo odgovarajuću formulu, sadržanu u (2.33)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)y \sin(2n-1)x}{(2n-1)^{2m-1}} = \sum_{i=0}^{m-2} \frac{(-1)^i x^{2i+1}}{(2i+1)!} \Big(\frac{(-1)^{m-i-1} \pi y^{2m-2i-3}}{4(2m-2i-3)!} + \sum_{j=0}^{m-i-1} \frac{(-1)^j \lambda(2m-2i-2j-2)}{(2j)!} y^{2j} \Big), \quad (x, y) \in K_3$$

koja za $m = 1$ daje takođe 0, kao gore.

Treba primetiti da neki rezultati u navedenim knjigama nisu tačni. Naime, formula 3, str.743 u [39] treba da ima rezultat $-\frac{x}{2}$ umesto $-\frac{1}{2}$, a formula 337, str. 445 u [63], $-\frac{\pi}{4}y$ umesto $\frac{\pi}{4}y$. U formuli 3Ж8 str.443 u [63] ili rezultati ili oblasti nisu tačni, jer je suma

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos(2n-1)y}{(2n-1)^2}\sin(2n-1)x$$

jednaka 0 za $x=0$, dok formula 3Ж8 daje $\frac{\pi^2}{8}(1-y)$ u oblasti $0<y\le\frac{\pi}{2}$, $-y\le x\le\frac{\pi}{2}+y$.

Generalna formula (2.33) može se primeniti na dobijanje rešenja graničnog problema u zatvorenom obliku. Na primer, poznato je da je rešenje sledećeg graničnog problema

$$U''_{tt}=a^2U''_{xx}\qquad U(x,0)=\frac{4hx(L-x)}{L^2}\qquad U'_t(x,0)=0$$

za $0\le x\le L$, $t\ge 0$, dato sa ([59])

$$U(x,t)=\frac{32h}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{\pi(2n-1)at}{L}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{L}}{(2n-1)^3}.$$

Pomoću formule (2.36) za $m=2$, dobija se da je u oblasti: $0\le\frac{at}{L}\le\frac{1}{2}$, $\left|\frac{at}{L}\right|\le\frac{x}{L}\le 1-\left|\frac{at}{L}\right|$, rešenje dato u zatvorenom obliku

$$U(x,t)=\frac{4h}{L^2}(xL-x^2-a^2t^2),$$

u kome se jednostavnije može koristiti.

Kao drugi primer posmatrajmo granični problem

$$\begin{aligned} U''_{tt} &= U''_{xx}+x(x-L)\\ U(x,0) &= U'_t(x,0)=U(0,t)=U(L,t)=0 \end{aligned}$$

za $0\le x\le L$, $t\ge 0$ čije je rešenje ([59])

$$U(x,t)=\frac{8L^4}{\pi^5}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{(2m-1)\pi t}{L}\sin\frac{(2m-1)\pi x}{L}}{(2m-1)^5}-\frac{x}{12}(x^3-2x^2L+L^3).$$

Koristeći formulu (2.36) za $m=3$, ovo rešenje dobija zatvoren oblik

$$U(x,t)=\frac{1}{2}x^2t^2-\frac{1}{2}Lxt^2+\frac{1}{12}t^4$$

za $0\le t\le\frac{L}{2}$, $t\le x\le L-t$.

2.4 Suma opštijeg reda s proizvodom dveju trigonometrijskih funkcija

U ovom odeljku izložićemo proceduru za sumiranje reda (2.4), čija suma je prvi put izvedena u radu [53]. Najpre je potrebno sumirati ovaj red za specijalne slučajeve kad je $\alpha = p-1$, gde p može biti 0 ili 1. Sumaciona formula, koja obuhvata 16 formula iz Tablice III, glasi :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(s)^{n-1} f((an-b)y) g((an-b)x)}{(an-b)^{p-1}((an-b)^2-\omega^2)} = g(0)\frac{sp(1-b)}{2\omega^2} - \frac{s\pi \sin^{b-1}\frac{\pi\omega}{2}}{4\omega^p \cos\frac{\pi\omega}{2}} f\left(\omega y - \frac{\pi(s+1)(b+\omega)}{2a}\right) g(\omega x), \tag{2.37}$$

gde je $\omega \in R$, $\omega \neq an-b$, a parametri a, b, s i oblasti konvergencije dati su Tabelom IV. Funkcije f i g mogu biti sin ili cos a parametar p bira se tako da bude $p = \begin{cases} 0, & f \neq g \\ 1, & f = g \end{cases}$ za $F = \zeta, \eta, \lambda$, dok je $p = \begin{cases} 1, & f \neq g \\ 0, & f = g \end{cases}$ za $F = \beta$. Svaka od ovih 16 formula dobijena je korišćenjem trigonometrijskih identičnosti oblika:

$$\sin(an-b)y\cos(an-b)x = \frac{1}{2}(\sin(an-b)(y-x) + \sin(an-b)(y+x))$$

u redu (2.4) za $\alpha = p-1$ i zatim primenom formule (2.14) na oba dobijena reda.

Posmatrajmo sada red (2.4) za $\alpha = 2m+p-1$. Pomoću relacije (2.15) ovaj red postaje :

$$T^{f,g}_{2m+p-1,\omega} = \frac{1}{\omega^{2m}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(s)^{n-1} f((an-b)y) g((an-b)x)}{(an-b)^{p-1}((an-b)^2-\omega^2)} - \sum_{i=1}^{m}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(s)^{n-1} f((an-b)y) g((an-b)x)}{\omega^{2m-2i+2}(an-b)^{2i+p-1}}.$$

Za određivanje prve sume koristi se formula (2.37), a za drugu sumu je potrebna formula u zatvorenom obliku, (2.33), za $r = 1 - p$:

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(s)^{n-1} f((an-b)y) g((an-b)x)}{(an-b)^{2m+p-1}} \\
&= \frac{(b-1)sd(-1)^{m-\delta} x^{2m-\delta}}{2(2m-\delta)!} + \frac{c\pi}{2} \sum_{i=0}^{m-1-d\delta} \frac{(-1)^{m-1+d-d\delta}\, x^{2i+\delta}\, y^{2m-2i-\delta+p-2}}{(2i+\delta)!(2m-2i-\delta+p-2)!} \\
&+ \sum_{i=0}^{m-1-d\delta} \sum_{j=0}^{M} \frac{(-1)^{i+j} F(2m-2i-2j-\delta+p-1-t)\, x^{2i+\delta}\, y^{2j+t}}{(2i+\delta)!(2j+t)!}
\end{aligned} \tag{2.38}$$

gde je $m \in N$, $g = \left\{ {\sin \atop \cos} \right\}$ $\delta = \left\{ {1 \atop 0} \right\}$, i nezavisno od toga, $f = \left\{ {\sin \atop \cos} \right\}$ $t = \left\{ {1 \atop 0} \right\}$. Parametar p bira se na isti način kao kod formule (2.37). Ostali parametri dati su u Tabeli IV, osim parametra d koji je u Tabeli III. Konačno se dobija formula

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(s)^{n-1} f((an-b)y)\, g((an-b)x)}{(an-b)^{2m+p-1}((an-b)^2-\omega^2)} = \frac{g(0)sp(1-b)}{2\omega^{2m+2}} \\
&- \frac{s\pi \sin^{b-1}\frac{\pi\omega}{2}}{4\omega^{2m+p}\cos\frac{\pi\omega}{2}} f_\omega(y)\, g(\omega x) + \frac{sd(1-b)}{2} \sum_{i=1}^{m} \frac{(-1)^{i-\delta} x^{2i-\delta}}{\omega^{2m+2-2i}(2i-\delta)!} \\
&+ \frac{c\pi}{2} \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=0}^{i-1-d\delta} \frac{(-1)^{i-d-d\delta}\, x^{2k+\delta} y^{2i-2k-\delta+p-2}}{\omega^{2m-2i+2}(2k+\delta)!(2i-2k-\delta+p-2)!} \\
&- \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=0}^{i-1-d\delta} \sum_{j=0}^{M} \frac{(-1)^{k+j} F(2i-2k-2j-\delta-t+p-1) x^{2k+\delta} y^{2j+t}}{\omega^{2m-2i+2}(2k+\delta)!(2j+t)!},
\end{aligned} \tag{2.39}$$

gde je $\omega \in R$, $\omega \neq an - b$, $g = \left\{ {\sin \atop \cos} \right\}$ $\delta = \left\{ {1 \atop 0} \right\}$ i nezavisno od toga, $f = \left\{ {\sin \atop \cos} \right\}$ $t = \left\{ {1 \atop 0} \right\}$, $M = i - k - 1 + (-1)^\delta (1-p)d$, dok parametar p treba izabrati na sledeći način: $p = \begin{cases} 1, & f = g \\ 0, & f \neq g \end{cases}$ za $F = \zeta, \eta, \lambda$, ali kad je $F = \beta$, treba uzeti da je $p = \begin{cases} 0, & f = g \\ 1, & f \neq g \end{cases}$. Oznaka $f_\omega(y)$ uvedena je radi preglednosti, na isti način kao u formuli (2.14). Svi ostali relevantni parametri navedeni su u Tabeli IV, dok je d u Tabeli III.

Kao što se formula (2.6) može dobiti kad $\omega \to 0$ u formulama (2.14) i (2.16), isto tako se može doći do formule (2.38) graničnim procesom u formulama (2.37) i (2.39) kad $\omega \to 0$.

Generalna formula (2.39) može se dobiti i na drugi način, koji će ovde biti izložen na slučaju kad je $s = 1, a = 1, b = 0$. Neka je

$$S_{2m}^{c} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos ny}{n^{2m}(n^2 - \omega^2)},$$

$$S_{2m}^{c,c} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos ny \, \cos nx}{n^{2m}(n^2 - \omega^2)}, \qquad S_{2m-1}^{c,s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos ny \, \sin nx}{n^{2m-1}(n^2 - \omega^2)}.$$

Integracijom druge i treće sume dobijaju se dve relacije:

$$\int_0^x S_{2m}^{c,c} dx = S_{2m+1}^{c,s} \tag{2.40}$$

i

$$\int_0^x S_{2m-1}^{c,s} dx = S_{2m}^{c} - S_{2m}^{c,c}. \tag{2.41}$$

Na početku procedure posmatra se formula 4. iz Tablice III:

$$S_{-1}^{c,s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos ny \sin nx}{n^{-1}(n^2 - \omega^2)} = -\frac{\pi}{2 \sin \omega\pi} \cos(\omega y - \omega\pi) \sin \omega x, \quad (x, y) \in K_1.$$

Integracijom od 0 do x, pa zatim korišćenjem relacije (2.41) za $m = 0$, dolazi se do

$$S_0^{c} - S_0^{c,c} = \frac{\pi}{2\omega \sin \omega\pi} \cos(\omega y - \omega\pi)(\cos \omega x - 1),$$

i na taj način je određena suma $S_0^{c,c}$. Pomoću integracije ove sume i relacije (2.40) za $m = 0$, dobija se

$$S_1^{c,s} = S_0^{c} x - \frac{\pi}{2\omega \sin \omega\pi} \cos(\omega y - \omega\pi) \left(\frac{\sin \omega x}{\omega} - x \right).$$

Ponavljanjem ovog postupka, i naizmeničnim korišćenjem relacija (2.40) i (2.41) za pogodan izbor m, dobijaju se sume $S_2^{c,c}$, $S_3^{c,s}$, $S_4^{c,c}$, $S_5^{c,s}, \ldots$

Metodom matematičke indukcije mogu se dokazati formule

$$S_{2m-1}^{c,s} = -\frac{\pi \cos(\omega y - \omega\pi)}{2\omega^{2m} \sin \omega\pi} \sin \omega x + \sum_{i=0}^{m-1} \frac{(-1)^{m-i-1} x^{2m-2i-1}}{(2m - 2i - 1)!} S_{\omega,i}(y) \tag{2.42}$$

i

$$S_{2m}^{c,c} = -\frac{\pi \cos(\omega y - \omega\pi)}{2\omega^{2m+1}\sin\omega\pi}\cos\omega x + \sum_{i=0}^{m} \frac{(-1)^{m-i}x^{2m-2i}}{(2m-2i)!} S_{\omega,i}(y) \qquad (2.43)$$

gde je, zbog preglednosti, uvedena oznaka $S_{\omega,i}(y) = \dfrac{\pi\cos(\omega y - \omega\pi)}{2\omega^{2i+1}\sin\omega\pi} + S_{2i}^{c}$. Suma reda S_{2i}^{c}, u stvari reda $T_{2i,\omega}^{\cos}$, izračunava se po formuli (2.26) sa promenljivom y umesto x i za odabrane parametre. Na kraju, formule (2.42) i (2.43) postaju

$$S_{2m-1}^{c,s} = -\frac{\pi\cos(\omega y - \omega\pi)}{2\omega^{2m}\sin\omega\pi}\sin\omega x - \sum_{i=0}^{m-1}\frac{(-1)^{m-i}x^{2m-2i-1}}{(2m-2i-1)!}\left(\frac{1}{2\omega^{2i+2}} - \sum_{j=1}^{i}\frac{T_{2j}^{\cos}(y)}{\omega^{2i-2j+2}}\right)$$

i

$$S_{2m}^{c,c} = -\frac{\pi\cos(\omega y - \omega\pi)}{2\omega^{2m+1}\sin\omega\pi}\cos\omega x + \sum_{i=0}^{m}\frac{(-1)^{m-i}x^{2m-2i}}{(2m-2i)!}\left(\frac{1}{2\omega^{2i+2}} - \sum_{j=1}^{i}\frac{T_{2j}^{\cos}(y)}{\omega^{2i-2j+2}}\right).$$

Na sličan način mogu se izvesti još dve formule za sume $S_{2m-1}^{s,c}$ i $S_{2m}^{s,s}$, polazeći od formule 3. iz Tablice III. Za ostale vrednosti parametara s, a, b dobijaju se još tri grupe od po četiri formule. Konačno, sve one zajedno mogu se predstaviti jednom generalnom formulom (2.39). Napomenimo da je za određivanje sume $T_{\alpha}^{f}(y)$ upotrebljena formula (2.6) sa promenljivom y umesto x.

Izvedene generalne formule (2.37) i (2.39) ne samo što su novi rezultati, već u literaturi nisu sumirani ni partikularni slučajevi redova oblika (2.4).

3

Redovi sa Besselovim i drugim specijalnim funkcijama

Ovo poglavlje sadrži neke nove rezultate (odeljci **3.2** i **3.5**), kao i rezultate iz zajedničkih radova autora sa koautorima iz oblasti sumiranja redova sa specijalnim funkcijama, [46], [47], [48], [50], [51] i [53].

Najpre će biti određena suma reda oblika

$$S_{\alpha}^{\varphi} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(s)^{n-1}\varphi_{\nu}((an-b)x)}{(an-b)^{\alpha}}, \tag{3.1}$$

gde je $\alpha \in R$, $a = \left\{ \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\}$ $b = \left\{ \begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\}$, $s = 1$ ili -1, a φ_{ν} predstavlja $J_{\nu}(x)$, Besselovu funkciju prve vrste i reda ν, ili neku od srodnih specijalnih funkcija.

Zatim će biti sumiran red čiji članovi sadrže proizvod dve Besselove funkcije

$$S_{\alpha}^{J,J} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(s)^{n-1}J_{\mu}((an-b)x)J_{\nu}((an-b)x)}{(an-b)^{\alpha}}. \tag{3.2}$$

Na kraju, razmatraće se i red opštijeg karaktera

$$S_{\alpha,\omega}^{\varphi} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(s)^{n-1}\varphi_{\nu}((an-b)x)}{(an-b)^{\alpha}((an-b)^{2}-\omega^{2})}, \tag{3.3}$$

gde je $\omega \in R$, $\omega \neq an - b$.

Sume svih ovih redova sa Besselovim ili drugim specijalnim funkcijama (3.1) i (3.3), kao i sa proizvodom dve Besselove funkcije (3.2), biće izražene pomoću redova sa Riemannovom zeta funkcijom i njoj srodnim funkcijama. Poznato je da se ove funkcije anuliraju za celobrojne negativne vrednosti argumenta, i to ζ, η i λ funkcija za parne, a β funkcija za neparne vrednosti. Zbog toga u takvim slučajevima pomenuti redovi imaju konačne sume, pa odatle i formule za sumiranje specijalnih funkcija dobijaju zatvoren oblik.

3.1 Sumiranje reda sa jednom specijalnom funkcijom

Za sumiranje reda (3.1) koristi se metod opisan u [47] i [48], gde red sadrži samo Besselovu funkciju. Međutim, u [50] dat je opštiji rezultat jer obuhvata i red sa Struveovim funkcijama. U ovim radovima polazi se od poznatih integralnih reprezentacija Besselove i Struveove funkcije ([1]), koje se zajedno mogu predstaviti jednim integralom

$$\varphi_\nu(z) = \frac{2\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \int_0^{\pi/2} \sin^{2\nu}\theta \; f(z\cos\theta)\, d\theta, \tag{3.4}$$

gde je $\operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}$ i postoje dva slučaja: $\varphi_\nu = \left\{ {J_\nu \atop \mathbf{H}_\nu} \right\} f = \left\{ {\cos \atop \sin} \right\}$. Pritom $\mathbf{H}_\nu$ predstavlja Struveovu funkciju prve vrste i reda ν.

Posmatrajmo najpre red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(s)^{n-1} \sin^{2\nu}\theta f((an-b)x\cos\theta)}{(an-b)^{\alpha-\nu}}.$$

Parcijalne sume $\sum_{k=1}^{n}(s)^{k-1}\sin^{2\nu}\theta\, f((ak-b)x\cos\theta)$ ograničene su uniformno na svakom segmentu intervala $0<\theta<2\pi$, a niz $1/(an-b)^{\alpha-\nu}$ monotono teži nuli, pa je prema Dirichletovom kriterijumu gornji red uniformno konvergentan. Sada se on može integraliti član po član, čime se dobija red (3.1) u kome je funkcija $\varphi_\nu(z)$ zamenjena integralnom reprezentacijom (3.4), to jest važi

$$\frac{2(\frac{x}{2})^\nu}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}\int\limits_0^{\pi/2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(s)^{n-1}\sin^{2\nu}\theta f((an-b)x\cos\theta)}{(an-b)^{\alpha-\nu}}d\theta$$
$$=\frac{2(\frac{x}{2})^\nu}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{(s)^{n-1}\sin^{2\nu}\theta f((an-b)x\cos\theta)}{(an-b)^{\alpha-\nu}}d\theta.$$

Na ovaj način imamo

$$S_\alpha^\varphi=\frac{2\left(\frac{x}{2}\right)^\nu}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\int\limits_0^{\pi/2}\sin^{2\nu}\theta\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(s)^{n-1}f\left((an-b)\,x\cos\theta\right)}{(an-b)^{\alpha-\nu}}d\theta,\qquad \alpha-\nu>0.$$

Deo podintegralne funkcije je trigonometrijski red, čija suma je određena formulom (2.5) za $x\cos\theta$ umesto x i za $\alpha-\nu$ umesto α. Tako se dobija da je

$$S_\alpha^\varphi=\frac{2\left(\frac{x}{2}\right)^\nu}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\int\limits_0^{\pi/2}\sin^{2\nu}\theta\left(\frac{c\pi(x\cos\theta)^{\alpha-\nu-1}}{2\Gamma(\alpha-\nu)f\left(\pi\frac{\alpha-\nu}{2}\right)}\right.$$
$$\left.+\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^iF(\alpha-\nu-2i-\delta)}{(2i+\delta)!}(x\cos\theta)^{2i+\delta}\right)d\theta,$$

i dalje,

$$S_\alpha^\varphi=\frac{c\pi x^{\alpha-1}}{G_\nu\Gamma(\alpha-\nu)f\left(\pi\frac{\alpha-\nu}{2}\right)}\int\limits_0^{\pi/2}\sin^{2\nu}\theta\cos^{\alpha-\nu-1}\theta d\theta$$
$$+\frac{2x^\nu}{G_\nu}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^iF(\alpha-\nu-2i-\delta)}{(2i+\delta)!}x^{2i+\delta}\int\limits_0^{\pi/2}\sin^{2\nu}\theta\cos^{2i+\delta}\theta d\theta,$$

gde je zbog preglednosti uvedena oznaka $G_\nu=2^\nu\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)$. Dobijeni integrali izračunavaju se na osnovu formule iz [12]:

$$\int\limits_0^{\pi/2}\sin^{\mu-1}x\cos^{\nu-1}x\,dx=\frac{1}{2}B\left(\frac{\mu}{2},\frac{\nu}{2}\right),\quad \operatorname{Re}\mu>0,\operatorname{Re}\nu>0,\qquad (3.5)$$

pa se nakon sređivanja dobija generalna formula za sumiranje reda (3.1)

$$S_\alpha^\varphi = \frac{c\pi\left(\frac{x}{2}\right)^{\alpha-1}}{2\Gamma\left(\frac{\alpha-\nu+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha+\nu+1}{2}\right)f\left(\pi\frac{\alpha-\nu}{2}\right)} + \sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i F(\alpha-\nu-2i-\delta)\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2i+\delta}}{\Gamma\left(i+1+\frac{\delta}{2}\right)\Gamma\left(\nu+i+1+\frac{\delta}{2}\right)}, \tag{3.6}$$

gde je $\alpha,\nu \in R^+$, $\nu > -\frac{1}{2}$, $\alpha > \nu$, $\varphi_\nu = \left\{ {J_\nu \atop \mathbf{H}_\nu} \right\}$ $f = \left\{ {\cos \atop \sin} \right\}$ $\delta = \left\{ {0 \atop 1} \right\}$, s, a, b, c, F su u Tabeli I. U slučaju da je $\alpha - \nu = \left\{ {2k+1 \atop 2k} \right\}$, $k \in N_0$, a da je funkcija $f = \left\{ {\cos \atop \sin} \right\}$, potrebno je uzeti granične vrednosti ili glavne vrednosti gama funkcije. Napomenimo da formula (3.6) važi i kad je $\alpha - \nu = 1$.

Druga suma u formuli (3.6) sastoji se, za odredjene vrednosti parametara, od konačnog broja članova zbog anuliranja F funkcija, pa se tako dobijaju svi slučajevi u zatvorenom obliku.

Parametri takvih redova dati su u Tabeli II gde α treba zameniti sa $\alpha - \nu$. Tablica IV sadrži formule u zatvorenom obliku za sve slučajeve kod kojih je $\nu \in N_0$, $\alpha \in N$ i $\varphi = J$, a u Tablici V su analogne formule za $\varphi = \mathbf{H}$.

U literaturi su navedeni mnogi partikularni slučajevi generalne formule (3.6). Međutim, oni obuhvataju samo one redove kod kojih je $\alpha = \nu + m$, $m \in N$, dok (3.6) važi za $\alpha > \nu > -\frac{1}{2}$, $\alpha > 0$. Na primer, formula (3.6) za $a = 0$, $b = 0$, $s = \pm 1$, $\alpha = \nu + 2k$, $\varphi_\nu = J_\nu$, svodi se na formule 13 i 14 iz [40], str. 678, t.j.:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k+\nu}}J_\nu(nx) = \frac{(-1)^{k+1}x^{2k+\nu}}{(2k)!2^{\nu+1}\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{2k}\frac{\Gamma(k-(n-1)/2)}{\Gamma(k+\nu+1-n/2)}\binom{2k}{n}\left(\frac{2\pi}{x}\right)^n B_n,$$

gde je $k = 1,2,3,\ldots$; $\operatorname{Re}\nu > -2k - \frac{1}{2}$; $0 < x < 2\pi$, i

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{2k+\nu}}J_\nu(nx) = \frac{(-1)^{k+1}x^{2k+\nu}}{(2k)!2^{\nu+1}\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{2k}\binom{2k}{n}B_n\sum_{i=0}^{2k-n}\binom{2k-n}{i}\frac{2^n\pi^{n+i}}{x^{n+i}}G_{ik},$$

gde je $\operatorname{Re}\nu > -2k - \frac{1}{2}$; $-\pi < x < \pi$, $G_{ik} = \dfrac{\Gamma(k-(n+i-1)/2)}{\Gamma(k+\nu+1-(n+i)/2)}$. U obe sume B_n označava Bernoullijeve brojeve.

Ista ova dva partikularna slučaja dokazali su matematičkom indukcijom L.Lorch i P.Szego u radu [25], iako su ove sume već bile poznate. U tom radu su, takođe indukcijom, dokazana i dva slučaja formule (3.6) za $\varphi_\nu = \mathbf{H}_\nu$ i $\alpha = \nu + 2k, k \in N, a = 1, b = 0, s = \pm 1$; u [19] postoje tri posebne sume ovog tipa, (59.2.2), (59.2.3) i (59.2.4).

Korišćenjem formule (3.6) i Laplaceove transformacije, mogu se naći sume još nekih redova. Ako se, na primer, u formuli (3.6) izabere da je $\varphi_\nu = J_\nu$, sledi da je $f = \cos$, $\delta = 0$, i formula (3.6) postaje

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(s)^{n-1} J_\nu((an-b)x)}{(an-b)^\alpha} = \frac{c\pi x^{\alpha-1}}{2^\alpha \Gamma\left(\frac{\alpha-\nu+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha+\nu+1}{2}\right) \cos(\frac{\alpha-\nu}{2}\pi)} + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i F(\alpha-\nu-2i) x^{\nu+2i}}{2^{\nu+2i}\, i!\, \Gamma(\nu+i+1)}. \tag{3.7}$$

Primenom Laplaceove transformacije dobija se

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(s)^{n-1}(\sqrt{p^2+(an-b)^2}-p)^\nu}{(an-b)^{\alpha+\nu}\sqrt{p^2+(an-b)^2}}$$
$$= \frac{c\pi\Gamma(\alpha)(2p)^{-\alpha}}{\Gamma\left(\frac{\alpha-\nu+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha+\nu+1}{2}\right)\cos(\frac{\alpha-\nu}{2}\pi)} + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i F(\alpha-\nu-2i)\Gamma(\nu+2i+1)}{2^{\nu+2i} p^{\nu+2i+1}\, i!\, \Gamma(\nu+i+1)}.$$

Razmotrimo sada funkciju Angera, koja se definiše integralom ([60])

$$\mathbf{J}_\nu(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(\nu\theta - z\sin\theta)d\theta,$$

i koja se za $\nu = m \in N_0$ svodi na Besselovu funkciju. Takođe, posmatrajmo integral

$$\mathbf{E}_\nu(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(\nu\theta - z\sin\theta)d\theta,$$

koji definiše Weberovu funkciju. Oba integrala mogu se predstaviti jednom formulom

$$\varphi_\nu(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(\nu\theta - x\sin\theta)d\theta, \qquad \varphi_\nu = \begin{Bmatrix} \mathbf{J}_\nu \\ \mathbf{E}_\nu \end{Bmatrix} f = \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} \tag{3.8}$$

koja dobija pogodan oblik za $\nu = m \in N_0$ ako se razdvoje slučajevi za parno i neparno m:

$$\varphi_{2k+\delta}(x) = \frac{\tau}{\pi}\int_0^{\pi} g((2k+\delta)\theta)h(x\sin\theta)d\theta, \quad g = \begin{Bmatrix}\sin\\ \cos\end{Bmatrix}\ \delta = \begin{Bmatrix}1\\ 0\end{Bmatrix},\ k \in N_0, \tag{3.9}$$

gde je $\varphi_{2k+\delta} = \left\{\begin{smallmatrix}\mathrm{J}_{2k+\delta}\\ \mathrm{E}_{2k+\delta}\end{smallmatrix}\right\}$ $h = \left\{\begin{smallmatrix}g\\ \overline{g}\end{smallmatrix}\right\}$ $\tau = \left\{\begin{smallmatrix}1\\ (-1)^{\delta+1}\end{smallmatrix}\right\}$ i $\overline{g} = \left\{\begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix}\right\}$. Na osnovu toga, možemo odrediti sumu reda (3.1), gde $\varphi_\nu(x)$ predstavlja Angerovu ili Weberovu funkciju. Zamenom reprezentacije (3.9), red (3.1) postaje

$$S_\alpha^{\varphi*} = \frac{\tau}{\pi}\int_0^{\pi} g((2k+\delta)\theta)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(s)^{n-1}\,h\left((an-b)\,x\sin\theta\right)}{(an-b)^\alpha}d\theta,$$

gde je zbog uniformne konvergencije odgovarajućeg reda, kao u prethodnom slučaju, promenjen redosled sumiranja i integracije. U okviru podintegralne funkcije je trigonometrijski red, čija suma je određena formulom (2.5) za $x\sin\theta$ umesto x, pa je

$$S_\alpha^{\varphi*} = \frac{\tau}{\pi}\int_0^{\pi} g((2k+\delta)\theta)\left(\frac{c\pi(x\sin\theta)^{\alpha-1}}{2\Gamma(\alpha)h\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)}\right.$$
$$\left. + \sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i F(\alpha-2i-d)}{(2i+d)!}(x\sin\theta)^{2i+d}\right)d\theta,$$

gde je umesto δ uveden novi parametar d koji zavisi od izbora funkcije h, naime, $h = \left\{\begin{smallmatrix}\sin\\ \cos\end{smallmatrix}\right\}$ $d = \left\{\begin{smallmatrix}1\\ 0\end{smallmatrix}\right\}$. Dalje se dobija da je

$$S_\alpha^{\varphi*} = \frac{c\tau x^{\alpha-1}}{2\Gamma(\alpha)h\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)}\int_0^{\pi} g((2k+\delta)\theta)\sin^{\alpha-1}\theta d\theta$$
$$+\frac{\tau}{\pi}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i F(\alpha-2i-d)}{(2i+d)!}x^{2i+d}\int_0^{\pi} g((2k+\delta)\theta)\sin^{2i+d}\theta d\theta,$$

pa se pomoću formule (videti [39]) za integrale tipa:

$$\int_0^{\pi}\sin^\mu x\, f(\nu x)dx = \frac{\pi f\left(\frac{\nu\pi}{2}\right)\Gamma\left(\mu+1\right)}{2^\mu\,\Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{\mu-\nu}{2}+1\right)},\ f = \begin{Bmatrix}\sin\\ \cos\end{Bmatrix}, \mathrm{Re}\,\mu > -1$$

dolazi do sumacione formule za red (3.1)

$$S_\alpha^{\varphi*} = \tau(-1)^k \left[\frac{c\pi \left(\frac{x}{2}\right)^{\alpha-1}}{2h(\frac{\pi\alpha}{2}) G_k} + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i F(\alpha - 2i - d) \left(\frac{x}{2}\right)^{2i+d}}{G_{i,k}} \right], \tag{3.10}$$

u kojoj su, u cilju preglednosti, uvedene oznake

$$G_k = \Gamma\left(\frac{\alpha+\delta+1}{2} + k\right) \Gamma\left(\frac{\alpha-\delta+1}{2} - k\right),$$
$$G_{i,k} = \Gamma\left(\frac{d+\delta}{2} + i + 1 + k\right) \Gamma\left(\frac{d-\delta}{2} + i + 1 - k\right),$$

gde je $\alpha \in R^+$, $g = \begin{Bmatrix} \sin \\ \cos \end{Bmatrix}$ $\delta = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$, $\varphi_{2k+\delta} = \begin{Bmatrix} \mathbf{J}_{2k+\delta} \\ \mathbf{E}_{2k+\delta} \end{Bmatrix}$ $h = \begin{Bmatrix} g \\ \bar{g} \end{Bmatrix}$ $\tau = \begin{Bmatrix} 1 \\ (-1)^{\delta+1} \end{Bmatrix}$, s, a, b, c, F određuju se po Tabeli I. Dalje, ako je $h = \sin$, tada je $d = 1$ a ako je $h = \cos$, tada je $d = 0$. Za razliku od formule (3.6) kod koje se zahteva uslov $\alpha > \nu$, formula (3.10) važi i za $\alpha < 2k + \delta$. Ako je $\alpha - 2k - \delta \in N$ ili $2k + \delta - \alpha \in N$, formula (3.10) dobija zatvoren oblik i tada $\alpha - 2k - \delta$, odnosno $2k + \delta - \alpha$ igra ulogu α u Tabeli II.

Kako se Angerova funkcija za $\nu \in N$ svodi na Besselovu funkciju, to se formula (3.10) poklapa sa formulom (3.6) u slučaju Besselove funkcije, kad je $\nu \in N_0$ i $\alpha \in N$.

U knjizi [40] mogu se naći neki partikularni slučajevi formule (3.10), ali samo za $\varphi_\nu = J_\nu$. Naime, to su formule 3–9, str.678.

3.2 Sumiranje reda sa Bourgetovom funkcijom

Posmatrajmo jedno uopštenje Besselove funkcije, tj. funkciju Bourgeta:

$$J_{p,q}(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (2\cos\theta)^q \cos(p\theta - z\sin\theta)\, d\theta, \quad p \in N_0, q \in N, \tag{3.11}$$

koja se, očigledno, za $q = 0$ svodi na Besselov integral (1.6). Najpre ćemo Bourgetovu funkciju napisati u pogodnijem obliku. Naime, u formuli (3.11) posmatraćemo odvojeno svaki od četiri slučaja koji nastaju za parno ili neparno p i q. Koristeći formulu za kosinus razlike uglova, neki od tako dobijenih integrala će se anulirati, tako da se Bourgetova funkcija (3.11) može izraziti kao

$$J_{p,q}(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (2\cos\theta)^q f(p\theta) f(z\sin\theta)\,d\theta, \tag{3.12}$$

gde je $f = \left\{ \begin{smallmatrix} \cos \\ \sin \end{smallmatrix} \right\}$ $\delta = \left\{ \begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\}$, $p + q = 2m + \delta$, $m \in N$.

H.M. Srivastava u radu [44] definisao je funkciju, analognu Bourgetovoj :

$$I_{p,q}(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (2\cos\theta)^q \sin(p\theta - z\sin\theta)\,d\theta, \quad p \in N_0, q \in N.$$

I ova funkcija može se transformisati kao i Bourgetova, pa je

$$I_{p,q}(z) = \frac{(-1)^{\delta+1}}{\pi}\int_0^\pi (2\cos\theta)^q f(p\theta)\overline{f}(z\sin\theta)\,d\theta, \tag{3.13}$$

gde $\overline{f}$ označava kofunkciju funkcije f. Integralne reprezentacije (3.12) i (3.13) imaju sličan oblik, pa se mogu predstaviti jednom zajedničkom formulom

$$\varphi_{p,q}(z) = \frac{\tau}{\pi}\int_0^\pi (2\cos\theta)^q f(p\theta) h(z\sin\theta)\,d\theta, \tag{3.14}$$

gde je $f = \left\{ \begin{smallmatrix} \cos \\ \sin \end{smallmatrix} \right\}$ $\delta = \left\{ \begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\}$, $p + q = 2m + \delta$; $\varphi_{p,q} = \left\{ \begin{smallmatrix} J_{p,q} \\ I_{p,q} \end{smallmatrix} \right\}$ $h = \left\{ \begin{smallmatrix} f \\ \overline{f} \end{smallmatrix} \right\}$ $\tau = \left\{ \begin{smallmatrix} 1 \\ (-1)^{\delta+1} \end{smallmatrix} \right\}$.

Sumiraćemo red (3.1) u kome φ_ν predstavlja $\varphi_{p,q}$, tj. Bourgetovu, $J_{p,q}$, ili njoj analognu funkciju $I_{p,q}$, naime

$$S_\alpha^{\varphi_{p,q}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(s)^{n-1}\varphi_{p,q}((an-b)x)}{(an-b)^\alpha}. \tag{3.15}$$

Zamenom reprezentacije (3.14), a zatim promenom redosleda sumiranja i integracije, red (3.15) postaje

$$S_\alpha^{\varphi_{p,q}} = \frac{\tau 2^q}{\pi}\int_0^\pi \cos^q\theta f(p\theta) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(s)^{n-1}\, h\left((an-b)\,x\sin\theta\right)}{(an-b)^\alpha}\,d\theta.$$

Podintegralna funkcija sadrži trigonometrijski red, čija suma je određena formulom (2.5) za $x\sin\theta$ umesto x, pa je

$$S_\alpha^{\varphi_{p,q}} = \frac{\tau 2^q}{\pi}\int_0^\pi \cos^q\theta f(p\theta)\left(\frac{c\pi(x\sin\theta)^{\alpha-1}}{2\Gamma(\alpha)h\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)} + \sum_{i=0}^\infty \frac{(-1)^i F(\alpha-2i-d)}{(2i+d)!}(x\sin\theta)^{2i+d}\right)d\theta,$$

gde je uveden novi parametar d koji zavisi od izbora funkcije h u formuli (2.5), tj. $h = \left\{\begin{smallmatrix}\sin\\ \cos\end{smallmatrix}\right\}$ $d = \left\{\begin{smallmatrix}1\\ 0\end{smallmatrix}\right\}$. Tako se dobija da je

$$S_\alpha^{\varphi_{p,q}} = \frac{c\tau 2^{q-1}x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)h\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)}\int_0^\pi \cos^q\theta f(p\theta)\sin^{\alpha-1}\theta d\theta + \frac{\tau 2^q}{\pi}\sum_{i=0}^\infty \frac{(-1)^i F(\alpha-2i-d)}{(2i+d)!}x^{2i+d}\int_0^\pi \cos^q\theta f(p\theta)\sin^{2i+d}\theta d\theta.$$

Potrebni integrali mogu se izračunati pomoću formule

$$\int_0^\pi \cos^q\theta f(p\theta)\sin^\alpha\theta d\theta = \sum_{j=0}^M (-1)^j\binom{p}{2j+\delta}B\left(\frac{\alpha+1+2j+\delta}{2}, \frac{2m-2j+1}{2}\right),$$

gde je $f = \left\{\begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix}\right\}$ $\delta = \left\{\begin{smallmatrix}0\\ 1\end{smallmatrix}\right\}, p+q = 2m+\delta$; $M = \frac{p}{2}$ za p parno, a $M = \frac{p-1}{2}$ za p neparno. Na taj način se dobija konačna formula

$$S_\alpha^{\varphi_{p,q}} = \frac{c\tau 2^{q-1}x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)h\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)}\sum_{j=0}^M P_j B\left(\frac{\alpha+2j+\delta}{2}, \frac{2m-2j+1}{2}\right) + \frac{\tau 2^q}{\pi}\sum_{i=0}^\infty \frac{(-1)^i F(\alpha-2i-d)}{(2i+d)!}x^{2i+d}\sum_{j=0}^M P_j B\left(\frac{2i+2j+2d+1}{2}, \frac{2m-2j+1}{2}\right), \tag{3.16}$$

gde je uvedena oznaka $P_j = (-1)^j\binom{p}{2j+\delta}$. Osim toga je $f = \left\{\begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix}\right\}$ $\delta = \left\{\begin{smallmatrix}0\\ 1\end{smallmatrix}\right\}, p+q = 2m+\delta$; $\varphi_{p,q} = \left\{\begin{smallmatrix}J_{p,q}\\ I_{p,q}\end{smallmatrix}\right\}$ $h = \left\{\begin{smallmatrix}f\\ f\end{smallmatrix}\right\}$ $\tau = \left\{\begin{smallmatrix}1\\ (-1)^{\delta+1}\end{smallmatrix}\right\}$; $h = \left\{\begin{smallmatrix}\sin\\ \cos\end{smallmatrix}\right\}$ $d = \left\{\begin{smallmatrix}1\\ 0\end{smallmatrix}\right\}$; $M = \frac{p}{2}$ za p parno, a $M = \frac{p-1}{2}$ za p neparno.

Formula (3.16) dobija zatvoren oblik u slučaju da je argument funkcije F paran broj (neparan za $F = \beta$), što znači da je α prirodan broj. Kao i kod prethodno izvedenih generalnih formula, suma tada postaje konačna jer se funkcije ζ, η i λ anuliraju za parne negativne vrednosti argumenta, a funkcija β za neparne.

Ako se u formuli (3.16) izabere da je $\varphi_{p,q} = J_{p,q}$ i da je $q = 0$, dobija se formula (3.6) za $\varphi_\nu = J_\nu$, kao što se i moglo očekivati, jer se za $q = 0$ Bourgetova funkcija svodi na Besselovu funkciju.

Napomenimo da su sume iz ovog odeljka novi rezultati i da se prvi put pojavljuju u ovoj disertaciji.

3.3 Sumiranje reda sa proizvodom Besselovih funkcija

Da bi se odredila suma reda (3.2) čiji članovi sadrže proizvod Besselovih funkcija, potrebna je sledeća integralna reprezentacija proizvoda dve Besselove funkcije (videti [60]), koju je izveo L. Gegenbauer, [14]

$$J_\mu(z)J_\nu(z) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} J_{\mu+\nu}(2z\cos\theta)\cos(\mu-\nu)\theta d\theta, \quad \mu+\nu > -1. \tag{3.17}$$

Ovu integralnu reprezentaciju treba zameniti u redu (3.2) čija suma se traži. Slično kao kod sumiranja reda (3.1), i ovde se može pokazati da je, zbog uniformne konvergencije odgovarajućeg reda, dozvoljena promena redosleda sumiranja i integracije. Na taj način se dobija

$$S_\alpha^{J,J} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos(\mu-\nu)\theta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(s)^{n-1} J_{\mu+\nu}(2(an-b)x\cos\theta)}{(an-b)^\alpha} d\theta, \quad \alpha > 0. \tag{3.18}$$

Red u podintegralnoj funkciji je red tipa (3.1) u kome je $\varphi = J$, pa se za $\alpha > \mu+\nu > -\frac{1}{2}$ suma određuje formulom (3.7) za $2x\cos\theta$ umesto x i $\mu+\nu$ umesto ν. Tako se dobija

$$S_\alpha^{J,J} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos(\mu-\nu)\theta \left[\frac{c\pi(2x\cos\theta)^{\alpha-1}}{2^\alpha\Gamma\left(\frac{\alpha-\mu-\nu+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha+\mu+\nu+1}{2}\right)\cos(\frac{\alpha-\mu-\nu}{2}\pi)} + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i F(\alpha-\mu-\nu-2i)(2x\cos\theta)^{\mu+\nu+2i}}{2^{\mu+\nu+2i}\, i!\, \Gamma(\mu+\nu+i+1)} \right] d\theta,$$

a nakon sređivanja,

$$S_{\alpha}^{J,J}=\frac{cx^{\alpha-1}}{\Gamma\left(\frac{\alpha-\mu-\nu+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha+\mu+\nu+1}{2}\right)\cos(\frac{\alpha-\mu-\nu}{2}\pi)}\int\limits_0^{\pi/2}\cos^{\alpha-1}\theta\cos(\mu-\nu)\theta d\theta$$
$$+\frac{2}{\pi}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i F(\alpha-\mu-\nu-2i)x^{\mu+\nu+2i}}{i!\,\Gamma(\mu+\nu+i+1)}\int\limits_0^{\pi/2}\cos^{\mu+\nu+2i}\theta\cos(\mu-\nu)\theta d\theta.$$

Dobijeni integrali izračunavaju se po formuli

$$\int\limits_0^{\pi/2}\cos^{\mu}x\cos\nu x dx=\frac{\pi}{2^{\mu+1}}\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\frac{\mu+\nu}{2}+1)\Gamma(\frac{\mu-\nu}{2}+1)},$$

i tražena generalna formula za sumiranje reda (3.2) čiji opšti član sadrži proizvod dve Besselove funkcije, glasi

$$S_{\alpha}^{J,J}=\frac{c\Gamma(\alpha)\Gamma(\frac{\mu+\nu-\alpha+1}{2})(\frac{x}{2})^{\alpha-1}}{2\Gamma(\frac{\alpha+\mu+\nu+1}{2})\Gamma(\frac{\alpha+\mu-\nu+1}{2})\Gamma(\frac{\alpha-\mu+\nu+1}{2})}$$
$$+\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i\Gamma(2i+\mu+\nu+1)F(\alpha-\mu-\nu-2i)(\frac{x}{2})^{2i+\mu+\nu}}{i!\,\Gamma(i+\mu+\nu+1)\,\Gamma(i+\mu+1)\Gamma(i+\nu+1)}, \tag{3.19}$$

gde je $\alpha,\mu,\nu\in R$, $\alpha>0$, $\alpha>\mu+\nu>-1/2$.

S druge strane, ako je $\mu+\nu\in N_0$, suma reda u podintegralnoj funkciji u relaciji (3.18) određuje se formulom (3.10) u kojoj treba izabrati da je $\varphi=J$. Analognim postupkom dolazi se do konačne formule

$$S_{\alpha}^{J,J}=\frac{c\pi(-1)^{\frac{\mu+\nu-\delta}{2}}\Gamma(\alpha)(\frac{x}{2})^{\alpha-1}}{2\Gamma(\frac{\alpha+\mu+\nu+1}{2})\Gamma(\frac{\alpha+\mu-\nu+1}{2})\Gamma(\frac{\alpha-\mu+\nu+1}{2})\Gamma(\frac{\alpha-\mu-\nu+1}{2})f\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)}$$
$$+\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i\binom{2i+\mu+\nu}{i}F(\alpha-\mu-\nu-2i)(\frac{x}{2})^{2i+\mu+\nu}}{\Gamma(i+\mu+1)\Gamma(i+\nu+1)}, \tag{3.20}$$

gde je $\alpha,\mu,\nu\in R$, $\alpha>0$. Osim toga je $\mu+\nu=\left\{\begin{smallmatrix}2k+1\\2k\end{smallmatrix}\right\}$ $f=\left\{\begin{smallmatrix}\sin\\\cos\end{smallmatrix}\right\}$ $\delta=\left\{\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right\}$, $k\in N_0$, F i c dati su u Tabeli I, u kojoj treba uzeti $2x$ umesto x. Kao i pre, treba raditi sa graničnim ili glavnim vrednostima gama funkcija kad je $\alpha-\mu-\nu=2k+1$ u (3.19) i kad je $\mu+\nu-\alpha=2k+1$ u (3.20), $k\in N_0$. Primetimo da je važenje formule (3.19) ograničeno uslovom

$\alpha > \mu + \nu > -1/2$, koji je posledica odgovarajućeg uslova za formulu (3.6). Da bi se izbegao ovaj uslov, izvedena je formula (3.20), ali samo za $\mu + \nu \in N_0$.

Generalne formule (3.19) i (3.20) dobijaju zatvoreni oblik ako je zbir parametara $\alpha - \mu - \nu + 1 + \delta$ paran broj, gde je $\delta = 1$ ako je $F = \beta$, a $\delta = 0$ ako je $F = \zeta, \eta, \lambda$. Ovi rezultati prvi put su objavljeni u radu [48].

Za određeni izbor parametara, formule (3.19) i (3.20) dovode do poznatih rezultata iz literature. Na primer, za paran zbir $\alpha - \mu - \nu$ i za $s = 1, a = 1, b = 0$, dobija se formula (13) iz rada M.L. Glassera, [16]. U radu [54], D.Đ. Tošić je sumirao red (3.2) u slučaju kad je $s = 1, a = 1, b = 0$.

P.J. De Doelder u radu [10] daje dva rezultata koji se odnose na sumiranje reda (3.2), i koji se mogu dobiti iz formule (3.20) pogodnim izborom parametara. Naime, u jednom slučaju je potrebno da $\mu + \nu$, $\mu - \nu$ i α budu parni prirodni brojevi, a u drugom, da budu neparni. Pored toga, jedan rezultat nije tačan ($\mu = 1, \nu = 0, \alpha = 1, s = 1$). Ova primedba postoji i u radu [54], koji je i sam delimično netačan.

I u knjizi [40] ima nekoliko suma koje se mogu dobiti kao specijalni slučajevi formula (3.19) i (3.20). Iz prve slede formule 10 i 12, str.684., a iz druge formule 2 i 4, str.683.

3.4 Sumiranje opštijeg reda sa jednom specijalnom funkcijom

Sumiraćemo sada redove opštijeg tipa (3.3), gde φ_ν označava Besselovu, $J_\nu(x)$, ili Struveovu, $\mathbf{H}_\nu(x)$, funkciju prve vrste i reda ν. Metod za sumiranje ovog reda, čija suma je prvi put izvedena u [50], sličan je metodu kojim je sumiran red (3.1). Naime, posmatrajmo red (3.3) za $\alpha = 2m - \mu$, $m \in N_0$. Korišćenjem integralne reprezentacije (3.4), pa zatim promenom redosleda sumiranja i integracije, dobija se

$$S^{\varphi}_{2m-\mu,\omega} = \frac{2\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \int_0^{\pi/2} \sin^{2\nu}\theta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(s)^{n-1} f((an-b)x\cos\theta)}{(an-b)^{2m-\mu-\nu}((an-b)^2-\omega^2)} d\theta$$

gde se red u podintegralnoj funkciji sumira pomoću formule (2.16) za $\mu+\nu=1-d$ i za $x\cos\theta$ umesto x, tako da je

$$S^{\varphi}_{2m-\mu,\omega}=\Omega_3\int\limits_0^{\pi/2}\sin^{2\nu}\theta\Bigg[\Omega_4-\frac{\Omega_2}{\omega^{-1-\mu-\nu}}f(\omega x\cos\theta-\Omega_1)$$
$$+\frac{c\pi}{2}\sum_{i=1}^{m}\frac{(-1)^{i+1-\mu-\nu}(x\cos\theta)^{2i-\mu-\nu-1}}{\omega^{-2i}(2i-\mu-\nu-1)!}$$
$$-\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{M}\frac{(-1)^kF(2i-2k-\mu-\nu-\delta)}{\omega^{-2i}(2k+\delta)!}(x\cos\theta)^{2k+\delta}\Bigg]d\theta$$

gde su, u cilju preglednosti, uvedene oznake

$$\Omega_1=\frac{\pi(\omega+b)(s+1)}{2a},\qquad \Omega_2=\frac{s\pi\sin^{b-1}(\frac{\pi\omega}{2})}{4\cos(\frac{\pi\omega}{2})},$$
$$\Omega_3=\frac{2\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}}{\omega^{2m+2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)},\qquad \Omega_4=\frac{s(1-\mu-\nu)(1-b)}{2}.$$

Transformacijom izraza $f(\omega x\cos\theta-\Omega_1)$ pomoću formule za sinus ili kosinus razlike dva ugla, dobijaju se integrali

$$\int\limits_0^{\pi/2}\sin^{2\nu}\theta\; f(\omega x\cos\theta)\,d\theta,$$

koji se prema integralnoj reprezentaciji (3.4) Besselove ili Struveove funkcije, mogu izraziti preko funkcija $J_\nu(\omega x)$ i $\mathbf{H}_\nu(\omega x)$. Na taj način sledi da je

$$S^{\varphi}_{2m-\mu,\omega}=\Omega_3\Bigg[\int\limits_0^{\pi/2}\sin^{2\nu}\theta d\theta-\frac{\Omega_2}{\omega^{-1-\mu-\nu}}\Big[(-1)^{\delta}f(\Omega_1)J_\nu(\omega x)+\overline{f}(\Omega_1)\mathbf{H}_\nu(\omega x)\Big]$$
$$+\frac{c\pi}{2}\sum_{i=1}^{m}\frac{(-1)^{i+1-\mu-\nu}x^{2i-\mu-\nu-1}}{\omega^{-2i}(2i-\mu-\nu-1)!}\int\limits_0^{\pi/2}\sin^{2\nu}\theta\cos^{2i-\mu-\nu-1}\theta d\theta$$
$$-\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{M}\frac{(-1)^kF(2i-2k-\mu-\nu-\delta)}{\omega^{-2i}(2k+\delta)!}x^{2k+\delta}\int\limits_0^{\pi/2}\sin^{2\nu}\theta\cos^{2k+\delta}\theta d\theta\Bigg]$$

odakle se, koristeći formulu (3.5) za izračunavanje integrala, izvodi konačni rezultat, odnosno opšta formula za sumiranje reda (3.3):

$$
\begin{aligned}
S^{\varphi}_{2m-\mu,\omega} = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}}{\omega^{2m+2}} \Bigg[& \frac{\Omega_4}{\Gamma(\nu+1)} + \frac{c\sqrt{\pi}}{2} \sum_{i=1}^{m} \frac{(-1)^{i+1-\mu-\nu}\Gamma\left(i-\frac{\mu+\nu}{2}\right)\omega^{2i}x^{2i-\mu-\nu-1}}{(2i-\mu-\nu-1)!\,\Gamma\left(i+\frac{\nu-\mu+1}{2}\right)} \\
& - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{M} \frac{(-1)^k F(2i-2k-\mu-\nu-\delta)\,\Gamma\left(k+\frac{\delta+1}{2}\right)\omega^{2i}x^{2k+\delta}}{(2k+\delta)!\,\Gamma\left(\nu+k+1+\frac{\delta}{2}\right)}\Bigg] \\
& - \frac{\Omega_2}{\omega^{2m+1-\mu}}\left[(-1)^{\delta} f(\Omega_1) J_\nu(\omega x) + \overline{f}(\Omega_1)\mathbf{H}_\nu(\omega x)\right],
\end{aligned}
\tag{3.21}
$$

gde se za $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_4$ koriste prethodno uvedene oznake i gde je $\operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}$, $\varphi_\nu = \left\{\begin{matrix} J_\nu \\ \mathbf{H}_\nu \end{matrix}\right\}$ $f = \left\{\begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix}\right\}$ $\overline{f} = \left\{\begin{matrix} \sin \\ \cos \end{matrix}\right\}$ $\delta = \left\{\begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}\right\}$, $M = i-1+(1-\mu-\nu)(1-\delta)$ a ostali parametri dati su u Tabeli III, u kojoj je $d = 1-\mu-\nu$.

U knjizi [40] postoji samo jedan partikularni slučaj formule (3.21), a to je formula 24, str.679:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\pm 1)^k}{k^{\nu}(k^2-p^2)} J_\nu(kx) \\
&= \frac{x^{\nu}}{2^{\nu+1}p^2\Gamma(\nu+1)} - \frac{\pi}{2p^{\nu+1}}\left[J_\nu(px)\left\{\begin{matrix} \operatorname{ctg} p\pi \\ \operatorname{cosec} p\pi \end{matrix}\right\} + \mathbf{H}_\nu(px)\left\{\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}\right\}\right],
\end{aligned}
$$

koja važi za $\left\{\begin{matrix} 0<x<2\pi \\ 0<x\le\pi \end{matrix}\right\}$; $\operatorname{Re}\nu > -\frac{5}{2}$. Primetimo da je ovo red $S^{J}_{\nu,p}$ za $a=1, b=0, s=\pm 1$ u našim oznakama, i da nema slučajeva kod kojih je $m \neq 0$. U radu [20] E.R. Hansen je izveo sumu $S^{J}_{2m+\nu,\omega}$, za $a=1, b=0, s=-1, m\neq 0$, a u radu [25], L. Lorch i P. Szego su dali četiri partikularna slučaja,$S^{J}_{2m+\nu,\omega}$ i $S^{\mathbf{H}}_{2m-1+\nu,\omega}$, za $a=1, b=0, s=\pm 1, m\neq 0$. U knjizi [19] postoji još jedna formula, (59.2.7), za sumiranje ovog reda sa Struveovom funkcijom, naime suma $S^{\mathbf{H}}_{\nu+1,\omega}$, za $a=1, b=0, s=-1$, koja se dobija iz prethodne za $m=1$.

U cilju prevazilaženja ograničenja $\mu+\nu=0$ ili 1, izvešćemo formulu za sumiranje reda (3.3) sa Angerovim/Weberovim funkcijama, i to za $\mu, \nu \in N_0$ ($\alpha = 2m-\mu$, $\nu = 2p-r$, $p \in N_0$, $m \in N_0$). Polazeći ovog puta od integralne reprezentacije (3.9) za Angerove/Weberove funkcije, isti postupak dovodi do formule

$$
\begin{aligned}
S^{\varphi *}_{2m-\mu,\omega} = (-1)^{\delta}\frac{rs(1-t)(1-b)}{\pi\omega^{2m+2}(2p-1)} &+ \frac{(-1)^{\delta r}}{\omega^{2m+2}}\left[\frac{c\pi}{2}\sum_{i=1}^{m}\frac{(-1)^{i+1-t+p-r}\left(\frac{x}{2}\right)^{2i-t-1}}{C_i}\right. \\
&\left.-\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{M}\frac{(-1)^{k+p-r}F(2i-2k-t-\delta)\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\delta}}{E_{ik}}\right] \\
-\frac{\Omega_2}{\omega^{2m+1-t}}&\left[(-1)^{\delta}f(\Omega_1)\mathbf{J}_{2p-r}(\omega x) + \overline{f}(\Omega_1)\mathbf{E}_{2p-r}(\omega x)\right],
\end{aligned}
\tag{3.22}
$$

gde oznake Ω_1 i Ω_2 imaju isto značenje kao u formuli (3.21) i gde je $\varphi_{2p-r} = \begin{Bmatrix} \mathbf{J}_{2p-r} \\ \mathbf{E}_{2p-r} \end{Bmatrix}$ $f = \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix}$ $\delta = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$. Kad je $t = \begin{Bmatrix} 1-d \\ d \end{Bmatrix}$, tada je $r = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$. Ako je $f = \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix}$, tada je $\overline{f} = \begin{Bmatrix} \sin \\ \cos \end{Bmatrix}$. Svi ostali relevantni parametri nalaze se u Tabeli III, a $M = i-1+(1-t)(1-\delta)$. Takođe, uvedene su oznake

$$
C_i = \omega^{-2i}\Gamma\left(i+p-\frac{t+r-1}{2}\right)\Gamma\left(i-p-\frac{t-r-1}{2}\right),
$$

$$
E_{ik} = \omega^{-2i}\Gamma\left(k+p+1+\frac{\delta-r}{2}\right)\Gamma\left(k-p+1+\frac{\delta+r}{2}\right).
$$

Partikularni slučajevi formule (3.22) mogu se naći u [40], ali samo za $m=0$ i $\varphi = J$. Na primer, formula 22 u [40], str. 679.:

$$
\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{k^2-p^2}J_{2n+1}(kx) = -\frac{\pi}{2}\left[\mathbf{H}_{2n+1}(px) + \operatorname{ctg} p\pi J_{2n+1}(px)\right], \qquad 0<x<2\pi.
$$

Za $m \neq 0$ u literaturi nema odgovarajućih rezultata.

3.5 Sumiranje pomoću Poissonove formule

Na potpuno drugačiji način mogu se sumirati redovi (3.1) i (3.2), za slučaj kad je $a=1$, $b=0$, $s=1$ i $\varphi = J$. Ovaj metod bazira se na formuli Poissona i na Fourierovoj transformaciji pogodno odabrane funkcije.

Poissonova formula ([8], [33], [43]) je:

$$
\sqrt{\alpha}\left(\frac{1}{2}f(0) + \sum_{n=1}^{\infty}f(n\alpha)\right) = \sqrt{\beta}\left(\frac{1}{2}F_c(0) + \sum_{n=1}^{\infty}F_c(n\beta)\right), \quad \alpha\beta = 2\pi,\ \alpha>0.
\tag{3.23}
$$

$F_c(\omega)$ je Fourierova transformacija funkcije $f(x)$, t.j.

$$\mathcal{F}_c\left(f(x),\omega\right) = F_c(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\cos\omega x dx. \tag{3.24}$$

Za $f(x) = \dfrac{J_\mu(x)}{x^\nu}$, $|\arg x| < \pi$ je

$$\mathcal{F}_c\left(f(x),\omega\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \frac{J_\mu(x)}{x^\nu}\cos\omega x dx.$$

Zamenom ove funkcije u formuli (3.23), dobija se:

$$\sqrt{\alpha}\left(\frac{1}{2}f(0)+\sum_{n=1}^\infty \frac{J_\mu(n\alpha)}{(n\alpha)^\nu}\right) = \sqrt{\frac{2\beta}{\pi}}\left(\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{J_\mu(x)}{x^\nu}dx+\sum_{n=1}^\infty\int_0^\infty \frac{J_\mu(x)}{x^\nu}\cos(n\beta x)dx\right). \tag{3.25}$$

Iz formule (3.23) je $\beta = \dfrac{2\pi}{\alpha}$, pa (3.25) postaje:

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{J_\mu(n\alpha)}{(n\alpha)^\nu} = \frac{2}{\alpha}\left(\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{J_\mu(x)}{x^\nu}dx+\sum_{n=1}^\infty\int_0^\infty \frac{J_\mu(x)}{x^\nu}\cos\frac{2n\pi x}{\alpha}dx\right)-\frac{1}{2}f(0). \tag{3.26}$$

Na osnovu [18], str. 698. je:

$$\int_0^\infty \frac{J_\mu(x)}{x^\nu}dx = 2^{-\nu}\frac{\Gamma\left(\frac{1+\mu-\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\mu+\nu}{2}\right)},\qquad \operatorname{Re}\mu+1 > \operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}. \tag{3.27}$$

Iz [40], str. 192. je:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{J_\mu(x)}{x^\nu}\cos\frac{2n\pi x}{\alpha}dx &= \frac{1}{2^{2\mu-\nu+1}}\left(\frac{\alpha}{n\pi}\right)^{\mu-\nu+1}\cos\frac{(\mu-\nu+1)\pi}{2}\\ &\times\frac{\Gamma(\mu-\nu+1)}{\Gamma(\mu+1)}\,{}_2F_1\left(\frac{\mu-\nu+1}{2},\frac{\mu-\nu+2}{2},\mu+1,\left(\frac{\alpha}{2n\pi}\right)^2\right),\end{aligned} \tag{3.28}$$

za $\alpha < 2n\pi$, $-\operatorname{Re}\mu < \operatorname{Re}(1-\nu) < \frac{3}{2}$. Iz [18], str. 965. je:

$$f(x) = \frac{J_\mu(x)}{x^\nu} = \frac{x^{\mu-\nu}}{2^\mu}\sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k x^{2k}}{2^{2k}\,k!\,\Gamma(\mu+k+1)},$$

pa je $f(0) = 0$ za $\mu > \nu$, a $f(0) = \dfrac{1}{2^\mu \Gamma(\mu+1)}$ za $\mu = \nu$, t.j.

$$f(0) = \frac{1}{2^\mu \Gamma(\mu+1)} \delta_{\mu,\nu}, \tag{3.29}$$

gde je $\delta_{\mu,\nu} = \begin{cases} 1, & \mu = \nu \\ 0, & \mu \neq \nu. \end{cases}$

Zamenjujući (3.27),(3.28) i (3.29) u (3.26), konačno se dobija :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_\mu(n\alpha)}{n^\nu} = \frac{\alpha^{\nu-1}\Gamma\left(\frac{1+\mu-\nu}{2}\right)}{2^\nu\,\Gamma\left(\frac{1+\mu+\nu}{2}\right)} + \frac{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^\mu (2\pi)^{\nu-\mu}\Gamma(\mu-\nu+1)}{\Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu-\nu+1}{2}\right)\left(\Gamma\left(\frac{\mu-\nu+2}{2}\right)\right)^2} \tag{3.30}$$
$$\times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{\mu-\nu+1}{2}+k\right)\Gamma\left(\frac{\mu-\nu+2}{2}+k\right)\left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^{2k}\zeta(2k+\mu-\nu+1)}{k!\,\Gamma(\mu+1+k)} - \frac{\alpha^\nu \delta_{\mu,\nu}}{2^{\mu+1}\Gamma(\mu+1)}$$

za $0 < \alpha < 2\pi$, $\mathrm{Re}\,\mu > \mathrm{Re}\,\nu > -\dfrac{1}{2}$.

Ovom formulom (3.30) sumira se red (3.1) za $a = 1$, $b = 0$, $s = 1$ i $\varphi = J$, dakle jedan od redova koji se sumiraju formulom (3.6). Međutim, formula (3.6) važi za $\nu > \mu$, dok formula (3.30) važi za $\mu > \nu$, pa ne mogu da se uporede. Ali ako posmatramo slučajeve za koje formula (3.30) dobija zatvoren oblik, videćemo da oni ne nastaju kao posledica anuliranja ζ funkcije (jer njen argument u ovoj formuli ne može biti paran negativan broj), već zbog funkcije $\Gamma((\nu-\mu)/2)$ u imeniocu drugog sabirka u formuli(3.30). Naime, za $\nu - \mu = -2n, n \in N_0$, ova funkcija ima pol, pa je taj drugi sabirak (koji sadrži beskonačnu sumu) jednak nuli. Tako formula (3.30) ima zatvoren oblik za $\mu - \nu = 2n, n \in N_0$, i u tom slučaju se poklapa sa formulom (3.10) za isti izbor parametara.

Posmatrajmo sada formulu 9 u [40], str.678:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_\nu(kx)}{k^{\nu-2n}} = \frac{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}{(2n+1)\Gamma\left(\nu-n+\frac{1}{2}\right)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu-2n-1},$$

gde je $n = 1, 2, 3, \ldots$, $\mathrm{Re}\,\nu > 2n - \frac{1}{2}$, $0 \leq x < 2\pi$. Može se pokazati da naša formula (3.30) važi pri ovim uslovima i da se pomoću nje dobija ovaj isti rezultat. Formula 8, str.678 iz iste knjige takođe predstavlja primer partikularnog slučaja koji se može dobiti iz naše formule (3.30).

Navešćemo još jedan primer primene Poissonove formule (3.23). Neka je

$$f(x)=\frac{J_\mu(x)J_\nu(x)}{x^\gamma}.$$

Za ovu funkciju, Fourierova transformacija (3.24) je:

$$F_c(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty\frac{J_\mu(x)J_\nu(x)}{x^\gamma}\cos\omega x dx.$$

Poissonova formula (3.23) sada postaje:

$$\sum_{n=1}^\infty\frac{J_\mu(n\alpha)J_\nu(n\alpha)}{(n\alpha)^\gamma}=-\frac{1}{2}f(0)$$
$$+\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty\frac{J_\mu(x)J_\nu(x)}{x^\gamma}dx+\sum_{n=1}^\infty\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty\frac{J_\mu(x)J_\nu(x)}{x^\gamma}\cos(n\beta x)dx\right).$$

Kako je $\beta=\dfrac{2\pi}{\alpha}$, množenjem prethodne jednakosti sa α^γ, sledi da je:

$$\sum_{n=1}^\infty\frac{J_\mu(n\alpha)J_\nu(n\alpha)}{n^\gamma}$$
$$=\alpha^{\gamma-1}\left(\int\limits_0^\infty\frac{J_\mu(x)J_\nu(x)}{x^\gamma}dx+2\sum_{n=1}^\infty\int\limits_0^\infty\frac{J_\mu(x)J_\nu(x)}{x^\gamma}\cos\frac{2n\pi x}{\alpha}dx-\frac{\alpha}{2}f(0)\right). \tag{3.31}$$

Iz [40], str. 211. je:

$$\int\limits_0^\infty\frac{J_\mu(x)J_\nu(x)}{x^\gamma}dx=2^{-\gamma}\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma\left(\frac{1+\mu+\nu-\gamma}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\mu-\nu+\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+\mu+\nu+\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\mu+\nu+\gamma}{2}\right)}, \tag{3.32}$$

za $\mathrm{Re}\,(1-\gamma)<1$, $\mathrm{Re}\,(1-\gamma+\mu+\nu)>0$. Na osnovu [40], str. 226. je:

$$\int\limits_0^\infty\frac{J_\mu(x)J_\nu(x)\cos\frac{2n\pi x}{\alpha}}{x^\gamma}dx=\frac{\left(\frac{2n\pi}{\alpha}\right)^{\gamma-1-\mu-\nu}\Gamma(1-\gamma+\mu+\nu)\cos\frac{(1-\gamma+\mu+\nu)\pi}{2}}{2^{\nu+\mu}\,\Gamma(\mu+1)\Gamma(\nu+1)}$$
$$\times{}_4F_3\left(\frac{2+\mu+\nu-\gamma}{2},\frac{\mu+\nu+1-\gamma}{2},\frac{1+\mu+\nu}{2},1+\frac{\mu+\nu}{2};1+\mu+\nu,1+\nu,1+\mu;\frac{\alpha^2}{n^2\pi^2}\right), \tag{3.33}$$

za $\alpha>0$, $\mathrm{Re}\,(1-\gamma)<1$, $\mathrm{Re}\,(1-\gamma+\mu+\nu)>0$. Iz [31], str. 124. je:

$$\frac{J_\mu(x)J_\nu(x)}{x^\gamma}=\frac{x^{\mu+\nu-\gamma}}{2^{\mu+\nu}}\sum_{n=0}^\infty\frac{(-1)^n\Gamma(\mu+\nu+2n+1)}{n!\,\Gamma(\mu+n+1)\Gamma(\nu+n+1)\Gamma(\mu+\nu+n+1)}x^{2n},$$

odakle sledi da je $f(0) = 0$ za $\mu+\nu > \gamma$ i $f(0) = \dfrac{1}{2^{\mu+\nu}\Gamma(\mu+1)\Gamma(\nu+1)}$ za $\mu+\nu=\gamma$, t.j.

$$f(0) = \frac{1}{2^{\mu+\nu}\Gamma(\mu+1)\Gamma(\nu+1)}\delta_{\mu+\nu,\gamma}. \tag{3.34}$$

Konačno, zamenjujući (3.32), (3.33) i (3.34) u (3.31), dobija se formula za sumiranje reda (3.2) za $a=1$, $b=0$, $s=1$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_\mu(n\alpha)J_\nu(n\alpha)}{n^\gamma} &= \frac{\alpha^{\mu+\nu}2^{\gamma-2\mu-2\nu}\pi^{\gamma-\mu-\nu}\Gamma(1+\mu+\nu-\gamma)\Gamma(1+\mu+\nu)}{G_1 G_2}\\ &\times\sum_{k=0}^{\infty}\frac{G_3\,\zeta(2k+1-\gamma+\mu+\nu)}{\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{2k}\Gamma(k+1+\mu+\nu)\Gamma(k+1+\nu)\Gamma(k+1+\mu)k!}\\ &+\frac{\alpha^{\gamma-1}\Gamma(\gamma)\Gamma\left(\frac{1+\mu+\nu-\gamma}{2}\right)}{2^\gamma G_4}-\frac{\alpha^\gamma}{2^{\mu+\nu+1}\Gamma(\mu+1)\Gamma(\nu+1)}\delta_{\mu+\nu,\gamma}\end{aligned} \tag{3.35}$$

gde je $0 < \alpha < \pi$, $\mathrm{Re}(\gamma) > 0$, $\mathrm{Re}(\mu+\nu-\gamma) > -1$ i gde su u cilju preglednosti uvedene oznake

$$\begin{aligned}G_1 &= \Gamma\left(\frac{2+\mu+\nu-\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2+\mu+\nu-\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma-\mu-\nu}{2}\right),\\ G_2 &= \Gamma\left(\frac{1+\mu+\nu-\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+\mu+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2+\mu+\nu}{2}\right),\\ G_3 &= \Gamma\left(k+\frac{2+\mu+\nu-\gamma}{2}\right)\Gamma\left(k+\frac{1+\mu+\nu-\gamma}{2}\right)\Gamma\left(k+\frac{1+\mu+\nu}{2}\right)\Gamma\left(k+\frac{2+\mu+\nu}{2}\right)\\ G_4 &= \Gamma\left(\frac{1+\mu-\nu+\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+\mu+\nu+\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\mu+\nu+\gamma}{2}\right).\end{aligned}$$

Može se pokazati da je formula (3.35) zatvorenog oblika u slučajevima kad je $\gamma-\mu-\nu = -2n, n \in N_0$, jer za ove vrednosti Γ funkcija u izrazu G_1 ima pol, pa se prvi sabirak u formuli (3.35) anulira. Dakle, za $\mu+\nu-\gamma = 2n, n \in N_0$, formula (3.35) poklapa se sa formulom (3.20) za sumiranje reda (3.2) sa istim izborom parametara $a=1$, $b=0$, $s=1$.

Primeri iz literature koji se mogu uporediti sa formulom (3.35) nalaze se u knjizi [40]; to su sume 1,2,3,9, str.683. Međutim, generalne formule iz ovog odeljka predstavljaju nove rezultate, izvedene prvi put u disertaciji.

3.6 Sumiranje redova sa drugim specijalnim funkcijama

Ovaj odeljak odnosi se na sumiranje redova sa drugim specijalnim funkcijama, kao što su sferne Besselove funkcije, modifikovane Besselove i njoj srodne funkcije. Izvođenje odgovarajućih sumacionih formula ne zasniva se, kao u odeljcima **3.1**–**3.4**, na sumiranju redova sa trigonometrijskim funkcijama, nego na sumacionoj formuli (3.6) za red sa Besselovom funkcijom. Sve izvedene formule izražene su pomoću Riemannove zeta funkcije i srodnih funkcija i predstavljaju konačne sume.

3.6.1 Red sa Neumannovom funkcijom

Na primer, posmatrajmo formulu (35 u [40], str. 179)

$$\int_0^\infty \frac{x^{\nu+1}}{x^2-y^2} J_\nu(nx)dx = -\frac{\pi}{2} y^\nu Y_\nu(ny), \qquad n \in N, y > 0,\ -1 < \operatorname{Re}\nu < \frac{3}{2},$$

gde je Y_ν Besselova funkcija druge vrste, poznata i kao Neumannova funkcija. Množenjem obe strane sa $1/n^\alpha$, a zatim sumiranjem, dobija se

$$\int_0^\infty \frac{x^{\nu+1}}{x^2-y^2} \sum_{n=1}^\infty \frac{J_\nu(nx)}{n^\alpha} dx = -\frac{\pi}{2} y^\nu \sum_{n=1}^\infty \frac{Y_\nu(ny)}{n^\alpha}.$$

Formula (3.6) koristi se za određivanje sume na levoj strani, pri čemu je $\alpha - \nu = 2m$, $m \in N$, $\varphi_\nu = J_\nu$, odakle sledi da je $f = \cos, \delta = 0$. U ovom slučaju je $a = 1, b = 0, s = 1$ pa zato mora biti $c = 1, F = \zeta$. U daljem izvođenju potreban je integral

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^\mu}{x^2-y^2} = \frac{\pi |y|^{\mu+1} \operatorname{tg} \frac{\mu\pi}{2}}{2y^2},$$

da bi se konačno dobila nova suma

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{Y_\nu(ny)}{n^{2m+\nu}} = \frac{(-1)^{m-1}\pi\, |y|^{2m+2\nu+1} \operatorname{tg}(m+\nu)\pi}{2^{2m+\nu}\, y^{\nu+2}\, \Gamma(m+\frac{1}{2})\Gamma(m+\nu+\frac{1}{2})} - \sum_{i=0}^{m} \frac{(-1)^i \zeta(2m-2i)\, |y|^{2\nu+2i+2} \operatorname{tg}(\nu+i+\frac{1}{2})\pi}{2^{\nu+2i}\, y^{\nu+2}\, i!\, \Gamma(\nu+i+1)}.$$

3.6.2 Red sa MacDonaldovom funkcijom

Kao drugi primer posmatraćemo formulu (28 u [40], str.179)

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^\nu + 1}{(x^2+z^2)^\rho} J_\nu(nx)dx = \frac{n^{\rho-1}z^{\nu-\rho+1}}{2^{\rho-1}\Gamma(\rho)} K_{\nu-\rho+1}(nz),$$

$n \in N, \operatorname{Re} z > 0, -1 < \operatorname{Re} \nu < 2\operatorname{Re}\rho - \frac{1}{2}$, gde $K_\nu(z)$ označava modifikovanu Besselovu funkciju druge vrste, poznatu i kao MacDonaldova funkcija. Ponavljanjem procedure iz prethodnog primera, sledi da je

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^\nu + 1}{(x^2+z^2)^\rho} \sum_{n=1}^\infty \frac{J_\nu(nx)}{n^\alpha} dx = \frac{z^{\nu-\rho+1}}{2^{\rho-1}\Gamma(\rho)} \sum_{n=1}^\infty \frac{K_{\nu-\rho+1}(nz)}{n^{\alpha-\rho+1}}.$$

Pomoću integrala

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^\mu}{(x^2+z^2)^\rho} = \frac{|z|^{\mu+1}\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{\mu}{2})\Gamma(-\frac{1}{2}-\frac{\mu}{2}+\rho)}{2z^{2\rho}\Gamma(\rho)},$$

dobija se sledeća sumaciona formula

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{K_{\nu-\rho+1}(nz)}{n^{2m+\nu-\rho+1}} = \frac{(-1)^m\pi|z|^{2m+2\nu+1}\Gamma(\rho-m-\nu-\frac{1}{2})}{2^{2m+\nu-\rho+2}z^{\nu+\rho+1}\Gamma(m+\frac{1}{2})} + \sum_{i=0}^m \frac{(-1)^i\zeta(2m-2i)|z|^{2\nu+2i+2}\Gamma(\rho-\nu-i-1)}{2^{\nu+2i-\rho+2}z^{\nu+\rho+1}i!}.$$

3.6.3 Red sa modifikovanim Besselovim funkcijama prve i druge vrste

Pođimo sada od formule (30, [40], str. 179)

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{-\nu}}{(x^2+z^2)^{\nu+\frac{1}{2}}} J_\nu(nx)dx = \frac{(2n)^\nu\,\Gamma(\nu+1)}{z^{2\nu}\,\Gamma(2\nu+1)} I_\nu\left(\frac{nz}{2}\right) K_\nu\left(\frac{nz}{2}\right),$$

$n \in N, \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}$, gde su $I_\nu(z)$ i $K_\nu(z)$ modifikovane Besselove funkcije prve i druge vrste, redom. Kao u prethodnom primeru, važi

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{-\nu}}{(x^2+z^2)^{\nu+\frac{1}{2}}} \sum_{n=1}^\infty \frac{J_\nu(nx)}{n^\alpha} dx = \frac{2^\nu\,\Gamma(\nu+1)}{z^{2\nu}\,\Gamma(2\nu+1)} \sum_{n=1}^\infty \frac{I_\nu\left(\frac{nz}{2}\right) K_\nu\left(\frac{nz}{2}\right)}{n^{\alpha-\nu}},$$

a pomoću integrala iz prethodnog primera, sledi da je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_\nu\left(\frac{nz}{2}\right) K_\nu\left(\frac{nz}{2}\right)}{n^{2m}} = \frac{|z|}{\nu} \sum_{i=0}^{m} \frac{\zeta(2m-2i)(2i-1)!!\, z^{2i-1}}{2^{3i+2}\, i!(\nu+i)(\nu)_i(1-\nu)_i} + \frac{(m-1)!\, z^{2m-1}}{2^{m+2}(2m-1)!! \left(\frac{1}{2}-\nu\right)_m \left(\frac{1}{2}+\nu\right)_m \nu},$$

gde je $(a)_n$ simbol Pochhammera.

3.6.4 Red sa sfernom Besselovom funkcijom

Posmatrajmo sfernu Besselovu funkciju prve vrste, $j_k(z)$, koja se može izraziti pomoću Besselove funkcije prve vrste čiji je red polovina neparnog celog broja, naime:

$$j_k(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} J_{k+\frac{1}{2}}, \quad k \in N_0.$$

Ako u redu (3.1) stavimo ovu funkciju umesto funkcije φ, dobićemo red sa sfernom Besselovom funkcijom prve vrste. Međutim, na osnovu prethodne relacije ovaj red postaje red sa Besselovom funkcijom prve vrste. Zato se koristi odgovarajući slučaj generalne formule (3.6), u stvari formula (3.7) za $\nu = k + \frac{1}{2}$, $k \in N_0$ i konačno se dobija

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(s)^{n-1} j_k((an-b)x)}{(an-b)^\alpha} = \frac{c\sqrt{\pi}\, \Gamma\left(\frac{k-\alpha+1}{2}\right) x^{\alpha-1}}{2^{\alpha+1}\, \Gamma\left(\frac{k+\alpha}{2}+1\right)} + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i F(\alpha-k-2i)\, x^{k+2i}}{(2i)!!(2k+2i+1)!!},$$

gde je $\alpha \in R$, $\alpha > k$. Primetimo da je ova formula generalnog tipa, jer se odnosi na sve redove, dobijene izborom parametara a, b i s. Na osnovu Tabele I određuju se, kao i ranije, odgovarajuće vrednosti za c i F. Za $\alpha - k$ parno (neparno, u slučaju da je $F = \beta$), formula dobija zatvoren oblik.

4

Redovi sa proizvodom Besselove ili Struveove i trigonometrijske funkcije

Cilj ovog poglavja je određivanje formula u zatvorenom obliku za redove sa proizvodom Besselove/Struveove i trigonometrijske funkcije

$$S_{\alpha}^{\varphi,f} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(s)^{n-1}\varphi_\nu((an-b)x)f((an-b)y)}{(an-b)^\alpha}, \tag{4.1}$$

gde je $\alpha \in R$, $a = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix}$ $b = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$, $s = 1$ ili -1, $f = \sin$ ili $\cos$, a φ_ν predstavlja Besselovu ili Struveovu funkciju prve vrste i reda ν.

Zatim će biti sumirani redovi sa proizvodom jedne trigonometrijske i dve Besselove funkcije

$$S_{\alpha}^{J,J,f} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(s)^{n-1}J_\mu((an-b)x)J_\nu((an-b)x)}{(an-b)^\alpha} f((an-b)y). \tag{4.2}$$

Na kraju, odredićemo i sumu reda opštijeg karaktera od reda (4.1)

$$S_{\alpha,\omega}^{\varphi,f} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(s)^{n-1}\varphi_\nu((an-b)x)f((an-b)y)}{(an-b)^\alpha((an-b)^2-\omega^2)}, \tag{4.3}$$

gde je $\omega \in R, \omega \neq an-b$.

Ove redove izrazićemo kao redove sa Riemannovom zeta funkcijom i sa ostalim srodnim funkcijama. U određenim slučajevima sumacione formule se svode na zatvoren oblik.

Sumacione formule izložene u ovom poglavlju su ili novi rezultati, ili su izvedene u našim ranijim radovima [49] i [56]. Naime, odeljak **4.1** sadrži novu sumacionu formulu (4.5), koja se za slučaj Besselove funkcije svodi na formulu iz rada [49]. Zatim, nova je i sumaciona formula iz odeljka **4.3**, jer kao specijalni slučaj sadrži odgovarajuću formulu iz rada [56].

4.1 Red sa proizvodom Besselove ili Struveove i trigonometrijske funkcije

U cilju određivanja sume reda (4.1) koristi se integralna reprezentacija (3.4) Besselove/Struveove funkcije, ali ovog puta sa funkcijom g umesto funkcije f, naime

$$\varphi_\nu(z) = \frac{2\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{2\nu}\theta\; g(z\cos\theta)\,d\theta, \tag{4.4}$$

gde je $\operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}$, $\varphi_\nu = \left\{\begin{smallmatrix} J_\nu \\ \mathbf{H}_\nu \end{smallmatrix}\right\}$ $g = \left\{\begin{smallmatrix} \cos \\ \sin \end{smallmatrix}\right\}$. Zamenom (4.4) u (4.1) a zatim promenom redosleda integracije i sumiranja, u podintegralnoj funkciji se dobija red sa proizvodom trigonometrijskih funkcija

$$S_\alpha^{\varphi,f} = \frac{2\left(\frac{x}{2}\right)^\nu}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\int\limits_0^{\pi/2}\sin^{2\nu}\theta\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(s)^{n-1}g\left((an-b)\,x\cos\theta\right)f((an-b)y)}{(an-b)^{\alpha-\nu}}\,d\theta,$$

gde je $\alpha-\nu>0$, za čiju sumu se koristi odgovarajuća sumaciona formula (2.27) sa promenljivom $x\cos\theta$ umesto x i za $\alpha-\nu$ umesto α. Tako se dobija

$$\begin{aligned} S_\alpha^{\varphi,f} = \frac{x^\nu}{G_\nu}\int\limits_0^{\pi/2}\sin^{2\nu}\theta\Bigg(&(-1)^{d\delta}c\pi\frac{(y+x\cos\theta)^{\alpha-\nu-1}+(-1)^\delta(y-x\cos\theta)^{\alpha-\nu-1}}{4\Gamma(\alpha-\nu)\,h\left(\pi\frac{\alpha-\nu}{2}\right)} \\ &+\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{i}\frac{(-1)^iF(\alpha-\nu-2i-d-\delta)(x\cos\theta)^{2j+\delta}y^{2i-2j+d}}{(2i-2j+d)!(2j+\delta)!}\Bigg)d\theta, \end{aligned}$$

gde je zbog preglednosti uvedena oznaka $G_\nu = 2^{\nu-1}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)$. Osim toga, zbog uslova za sumacionu formulu (2.27) važi da je $\alpha>\nu>-\frac{1}{2}$,

$f = \left\{ {\sin \atop \cos} \right\}$ $d = \left\{ {1 \atop 0} \right\}$ i nezavisno od toga, $\varphi_\nu = \left\{ {J_\nu \atop \mathbf{H}_\nu} \right\}$ $g = \left\{ {\cos \atop \sin} \right\}$ $\delta = \left\{ {0 \atop 1} \right\}$. Funkcija h zavisi od funkcija f i g, naime: $h = \begin{cases} \cos, & f = g \\ \sin, & f \neq g \end{cases}$. Nakon sređivanja, dobija se

$$S_\alpha^{\varphi,f} = \frac{x^\nu}{G_\nu}\Bigg(\frac{(-1)^{d\delta} c\pi}{2\Gamma(\alpha-\nu)\, h\left(\pi\frac{\alpha-\nu}{2}\right)} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\alpha-\nu-1}{2j+\delta} x^{2j+\delta} y^{\alpha-\nu-1-2j-\delta} I_{\nu,\delta}$$
$$+ \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{i} \frac{(-1)^i F(\alpha-\nu-2i-d-\delta) x^{2j+\delta} y^{2i-2j+d}}{(2i-2j+d)!(2j+\delta)!} I_{\nu,\delta} \Bigg) d\theta,$$

gde je integral

$$I_{\nu,\delta} = \int_0^{\pi/2} \sin^{2\nu}\theta \cos^{2j+\delta}\theta \, d\theta = \frac{1}{2}\,\mathrm{B}\left(\frac{2\nu+1}{2}, \frac{2j+\delta+1}{2} \right)$$

izračunat po formuli (3.5). Na kraju se dobija tražena sumaciona formula

$$S_\alpha^{\varphi,f} = \frac{(-1)^{d\delta} c\sqrt{\pi}\, 2^{-\nu-1}}{\Gamma(\alpha-\nu) h\left(\frac{\pi(\alpha-\nu)}{2}\right)} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\alpha-\nu-1}{2j+\delta} \frac{\Gamma(j+\frac{\delta+1}{2}) x^{\nu+2j+\delta} y^{\alpha-\nu-2j-1-\delta}}{\Gamma(j+\nu+1+\frac{\delta}{2})}$$
$$+ \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{i} \frac{(-1)^i x^{\nu+2j+\delta} y^{2i-2j+d} F(\alpha-\nu-2i-d-\delta)\Gamma(j+\frac{\delta+1}{2})}{2^\nu \sqrt{\pi}\,\Gamma(j+\nu+1+\frac{\delta}{2})(2i-2j+d)!(2j+\delta)!} \tag{4.5}$$

koja važi za $\alpha > \nu > -\frac{1}{2}$, $f = \left\{ {\sin \atop \cos} \right\}$ $d = \left\{ {1 \atop 0} \right\}$ i nezavisno od toga, za $\varphi_\nu = \left\{ {J_\nu \atop \mathbf{H}_\nu} \right\}$ $g = \left\{ {\cos \atop \sin} \right\}$ $\delta = \left\{ {0 \atop 1} \right\}$. Funkcija h određuje se na sledeći način: $h = \begin{cases} \cos, & f = g \\ \sin, & f \neq g \end{cases}$. Ostali parametri dati su u Tabeli IV.

Formula (4.5) za sumiranje reda (4.1) za nenegativne celobrojne vrednosti parametara α i ν, za koje se funkcija F anulira, dobija zatvoren oblik. U Tablici VI prikazane su sume ovakvih redova sa Besselovom funkcijom, a u Tablici VII, sa Struveovom funkcijom.

Neki rezultati u prethodnim poglavljima mogu se izvesti iz generalne formule (4.5) pogodnim izborom promenljivih x, y i parametara a, b, s, μ, ν.

Na primer, za $\varphi = J$, $\nu = 0$ i $x = 0$ formula (4.5) svodi se na formulu (2.5) za sumiranje redova sa trigonometrijskim funkcijama (jer je poznato da je $J_0(0) = 1$, videti [1], str.390). Dalje, ako je $\nu = \pm\frac{1}{2}$, tada je $J_{\pm 1/2} = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} f(z)$, $f = \left\{ {\sin \atop \cos} \right\}$ i stoga se formula (4.5) svodi na formulu (2.27) za sumiranje redova sa proizvodom dve trigonometrijske funkcije. To ujedno znači da formula (4.5) važi čak i kad je $\nu = -\frac{1}{2}$. Konačno, ako izaberemo y tako da je $|f((an-b)y)| = 1$, formula (4.5) postaje formula (3.6) za sumiranje redova sa Besselovim/Struveovim funkcijama.

Generalna formula (4.5) predstavlja novi rezultat, koji obuhvata i sadrži neke rezultate iz literature.

Naime, suma reda (4.1) data je samo za $\varphi = J$, $\alpha - \nu = 0, 1, 2$ i $a = 1, b = 0$, dok naša formula (4.5) važi za $\alpha > \nu > -1/2$, pri čemu se sume u zatvorenom obliku dobijaju za $\alpha - \nu \in N_0$. Na primer, razmotrimo formulu (74.1.19) u [19], za $\alpha - \nu = 2$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_\nu(nx)}{n^{\nu+2}} \cos nx = \frac{1}{3\Gamma(\nu+2)} 2^{-\nu-3} x^\nu [3x^2 + (\nu+1)(6x^2 - 12\pi x + 4\pi^2)],$$

gde je $0 < x < \pi$, $\mathrm{Re}\,\nu > -3/2$. Isti rezultat dobija se pomoću formule (4.5) za $y = x$, $\mathrm{Re}\,\nu > -1/2$. Slično se može pokazati i za formule (74.1.20), (74.1.21) i (74.1.22) iz iste knjige.

Sledeći primer je suma III4.D.12 u [28] za $\alpha - \nu = 0$ (ista kao suma (74.1.18) u [19])

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_\nu(nx)}{n^\nu} \cos ny = \begin{cases} -\frac{1}{2} \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu, & 0<x<y\leq\pi \\ \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \left[\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{\pi}}{x} \left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right)^{\nu-\frac{1}{2}}\right], & 0<y<x<\pi. \end{cases}$$

Za $0 < x < y \leq \pi$, što je tačno četvrtina oblasti K_1, formula (4.5) daje isti rezultat, iako ne bi trebalo da važi za $\alpha = \nu$.

Za slučaj Struveove funkcije pomenućemo dva rezultata iz [19], koji se takođe mogu dobiti iz generalne formule (4.5) za odgovarajući izbor parametara. To su formule (74.7.2):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{H}_\nu(nx)}{n^\nu} \sin ny = \begin{cases} 0, & 0<x<y \\ \frac{\sqrt{\pi}(x^2-y^2)^{\nu-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)(2x)^\nu}, & y<x\leq\pi \end{cases}$$

i formula (74.7.1).

Još više, pomoću generalne formule (4.5) mogu se izvesti i sume redova kojih nema u literaturi. Ako razmatramo samo konačne sume, nema suma za redove kod kojih je $\alpha - \nu \geq 3$, $\alpha - \nu \in N_0$, a formula (4.5) obuhvata i te slučajeve. Na primer, za izbor parametara $\alpha - \nu = 3, \varphi = J, f = \sin, a = 2, b = 1, s = 1$, iz formule (4.5) se dobija

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_\nu((2n-1)x)}{(2n-1)^{\nu+3}} \sin(2n-1)y = \frac{(\pi - y)\pi}{2^{\nu+3}\Gamma(\nu+1)} x^\nu y - \frac{\pi}{2^{\nu+4}\Gamma(\nu+2)} x^{\nu+2},$$

za $\nu > -\frac{1}{2}$, gde je oblast K_3.

Ako, na primer, izaberemo da je $\alpha - \nu = 4, \varphi = J, f = \cos, a = 1, b = 0, s = -1$, (4.5) postaje

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} J_\nu(nx)}{n^{\nu+4}} \cos ny = \frac{7\pi^4 - 30y^2\pi^2 + 15y^4}{45 \cdot 2^{\nu+4}\Gamma(\nu+1)} x^\nu + \frac{3y^2 - \pi^2}{3 \cdot 2^{\nu+4}\Gamma(\nu+2)} x^{\nu+2} + \frac{1}{2^{\nu+6}\Gamma(\nu+3)} x^{\nu+4},$$

za $\nu > -\frac{1}{2}$. Oblast konvergencije je sada K_2.

Sledeći primer predstavlja jednu sumu sa konkretnim parametrima: $\alpha = 5, \nu = 2, \varphi = \mathbf{H}, f = \sin, a = 2, b = 1, s = -1$, za koje formula (4.5) glasi:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\mathbf{H}_2((2n-1)x)}{(2n-1)^5} \sin(2n-1)y = \frac{1}{30} x^3 y,$$

a oblast u kojoj važi je K_4. Primetimo da je ovde $\alpha - \nu = 3$, što znači da je i ovo novi rezultat.

Odredimo sada sumu reda (4.1) za Angerovu/Weberovu funkciju, i za vrednosti parametara $\alpha = 2m - r, \nu = 2k + \delta$, gde je $m \in N, k \in N_0$, pri čemu r i δ mogu biti 0 ili 1. Ovde koristimo reprezentaciju ovih funkcija, datu u prethodnom poglavlju:

$$\varphi_{2k+\delta}(x) = \frac{\tau}{\pi} \int_0^\pi g((2k+\delta)\theta)\, h(x \sin\theta) d\theta, \quad g = \begin{Bmatrix} \sin \\ \cos \end{Bmatrix} \delta = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \; k \in N_0, \tag{4.6}$$

gde je $\varphi_{2k+\delta} = \left\{ \begin{smallmatrix} \mathbf{J}_{2k+\delta} \\ \mathbf{E}_{2k+\delta} \end{smallmatrix} \right\}$ $h = \left\{ \begin{smallmatrix} g \\ \overline{g} \end{smallmatrix} \right\}$ $\tau = \left\{ \begin{smallmatrix} 1 \\ (-1)^{\delta+1} \end{smallmatrix} \right\}$ i $\overline{g} = \left\{ \begin{smallmatrix} \cos \\ \sin \end{smallmatrix} \right\}$. Zamenom ovog izraza u formuli (4.1) i promenom redosleda integracije i sumiranja, dobijamo opet red sa proizvodom dve trigonometrijske funkcije

$$S_{2m-r}^{\varphi, f*} = \frac{\tau}{\pi} \int_0^{\pi/2} g((2k+\delta)\theta) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(s)^{n-1} h\left((an-b)\, x \sin\theta\right) f((an-b)y)}{(an-b)^{2m-r}} d\theta,$$

ali sada za $\alpha = 2m - r \in N$. Zato koristimo formulu u zatvorenom obliku (2.33) umesto formule (2.27), stavljajući $x\sin\theta$ umesto x i funkciju h umesto g. Naravno, uslovi važenja formule (2.33) odnosiće se i na sumacionu formulu koja se izvodi. Na taj način je

$$S_{2m-r}^{\varphi,f*} = \frac{\tau}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2} g((2k+\delta)\theta)\Bigg[\sum_{i=0}^{m-1-d\delta}\frac{(-1)^i(x\sin\theta)^{2i+\delta}}{(2i+\delta)!}T_{2m-2i-\delta-r}^f + \frac{(b-1)sd(-1)^{m-\delta}(x\sin\theta)^{2m-\delta}}{2(2m-\delta)!}\Bigg]d\theta,$$

ili

$$S_{2m-r}^{\varphi,f*} = \frac{\tau}{\pi}\Bigg[\sum_{i=0}^{m-1-d\delta}\frac{(-1)^i x^{2i+\delta}}{(2i+\delta)!}T_{2m-2i-\delta-r}^f\int\limits_0^{\pi/2}\sin^{2i+\delta}\theta\, g((2k+\delta)\theta)d\theta + \frac{(b-1)sd(-1)^{m-\delta}x^{2m-\delta}}{2(2m-\delta)!}\int\limits_0^{\pi/2}\sin^{2m-\delta}\theta\, g((2k+\delta)\theta)d\theta\Bigg].$$

Tako dolazimo do integrala tipa ([12])

$$\int\limits_0^{\pi}\sin^{\mu}x f(\nu x)dx = \frac{\pi}{2^{\mu}}f\left(\frac{\nu\pi}{2}\right)\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{\mu-\nu}{2}+1\right)},\ f = \begin{Bmatrix}\sin\\ \cos\end{Bmatrix},$$

za $\operatorname{Re}\mu > -1$, i konačno do formule u zatvorenom obliku

$$S_{2m-r}^{\varphi,f*} = \tau\left(\sum_{i=k}^{m-1-d\delta}\frac{(-1)^{i+k}(x/2)^{2i+\delta}}{(i+k+\delta)!(i-k)!}T_{2m-2i-\delta-r}^f + \frac{(b-1)sd(-1)^{m+k-\delta}(x/2)^{2m-\delta}}{2(m+k)!(m-k-\delta)!}\right) \tag{4.7}$$

za $m \geq k+\delta$, ali za $m < k+\delta$, suma je jednaka 0. Ovde je $T_{2m-2i-\delta-r}^f$ dato formulom (2.34) za y umesto x; $m \in N$, $k \in N_0$, $f = \left\{\begin{smallmatrix}\sin\\ \cos\end{smallmatrix}\right\}$ $t = \left\{\begin{smallmatrix}1\\ 0\end{smallmatrix}\right\}$, i nezavisno od toga, $g = \left\{\begin{smallmatrix}\sin\\ \cos\end{smallmatrix}\right\}$ $\delta = \left\{\begin{smallmatrix}1\\ 0\end{smallmatrix}\right\}$, i $\varphi_{2k+\delta} = \left\{\begin{smallmatrix}\mathrm{J}_{2k+\delta}\\ \mathrm{E}_{2k+\delta}\end{smallmatrix}\right\}$ $h = \left\{\begin{smallmatrix}g\\ \bar{g}\end{smallmatrix}\right\}$ $\tau = \left\{\begin{smallmatrix}1\\ (-1)^{\delta+1}\end{smallmatrix}\right\}$. Parametar r bira se na sledeći način: $r = \begin{cases}0, & f = h\\ 1, & f \neq h\end{cases}$ za

$F = \zeta, \eta, \lambda$, ali kad je $F = \beta$, uzima se da je $r = \begin{cases} 1, f = h \\ 0, f \neq h \end{cases}$. Ostali parametri određuju se iz Tabele IV, osim parametra d koji se nalazi u Tabeli III. U oblastima K_1, K_2, K_3, K_4 intervali za x i y su zatvoreni osim za $2m - r = 1$.

Može se pokazati da se formula (4.7) svodi na formulu (4.5) za slučaj funkcije Angera, jer ona za $\nu \in N_0$ postaje Besselova funkcija.

Sume (74.1.16) i (74.1.17) u [19] predstavljaju partikularne slučajeve naše formule (4.7), t.j. red $S_1^{J,\sin}$ za $\nu = 2k$ i red $S_1^{J,\cos}$ za $\nu = 2k+1$, redom, samo za $a = 1, b = 0, s = 1$ i $0 \leq x \leq y \leq \pi$, ili za $0 < x < y \leq \pi$. Primetimo da $k \in Z$ za (74.1.16) i (74.1.17) u [19], dok $k \in N_0$ u formuli (4.7).

4.2 Red sa proizvodom trigonometrijske i dve Besselove funkcije

Sumiranje redova sa proizvodom trigonometrijske i dve Besselove funkcije (4.2) zahteva integralnu reprezentaciju (3.17)

$$J_\mu(z)J_\nu(z) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} J_{\mu+\nu}(2z\cos\theta)\cos(\mu-\nu)\theta d\theta, \quad \mu+\nu > -1. \tag{4.8}$$

Stoga, kao što je i ranije urađeno, treba zameniti ovu reprezentaciju u redu (4.2). Promenom redosleda sumiranja i integracije, dobija se red tipa (4.1), naime:

$$S_\alpha^{J,J,f} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos(\mu-\nu)\theta\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(s)^{n-1}J_{\mu+\nu}(2(an-b)x\cos\theta)f((an-b)y)}{(an-b)^\alpha}d\theta,$$

gde je $\alpha > 0$. Da bi se odredila suma ovog reda, potrebna je formula (4.5) za $\varphi_{\mu+\nu} = J_{\mu+\nu}$, $2x\cos\theta$ umesto x i $\mu+\nu$ umesto ν, uz uslov da je $\alpha > \mu+\nu > -\frac{1}{2}$:

$$S_\alpha^{J,J,f} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos(\mu-\nu)\theta\left[\frac{2^{-1}c\pi}{f\left(\pi\frac{\alpha-\mu-\nu}{2}\right)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(x\cos\theta)^{\mu+\nu+2j}y^{\alpha-\mu-\nu-1-2j}}{\Gamma(\alpha-\mu-\nu-2j)\Gamma(\mu+\nu+j+1)j!}\right.$$
$$\left.+\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{i}\frac{(-1)^i F(\alpha-\mu-\nu-2i-d)(x\cos\theta)^{\mu+\nu+2j}y^{2i-2j+d}}{\Gamma(\mu+\nu+j+1)(2i-2j+d)!j!}\right]d\theta.$$

Dalje je

$$S_\alpha^{J,J,f} = \frac{c}{f\left(\pi\frac{\alpha-\mu-\nu}{2}\right)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^{\mu+\nu+2j} y^{\alpha-\mu-\nu-1-2j}}{\Gamma(\alpha-\mu-\nu-2j)\Gamma(\mu+\nu+j+1)j!} I_{\mu,\nu}$$
$$+\frac{2}{\pi}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{i} \frac{(-1)^i F(\alpha-\mu-\nu-2i-d) x^{\mu+\nu+2j} y^{2i-2j+d}}{\Gamma(\mu+\nu+j+1)(2i-2j+d)!j!} I_{\mu,\nu}.$$

Integral $I_{\mu,\nu} = \int_0^{\pi/2} \cos^{\mu+\nu+2j}\theta \cos(\mu-\nu)\theta \, d\theta$ izračunava se po formuli

$$\int_0^{\pi/2} \cos^\mu x \cos \nu x dx = \frac{\pi}{2^{\mu+1}} \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{\mu-\nu}{2}+1\right)}, \quad \operatorname{Re}\mu > -1 \qquad (4.9)$$

i konačno se dobija

$$S_\alpha^{J,J,f} = \frac{c\pi}{2f\left(\frac{\pi(\alpha-\mu-\nu)}{2}\right)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\mu+\nu+2j} y^{\alpha-\mu-\nu-2j-1}}{\Gamma(\alpha-\mu-\nu-2j)j!} \Gamma_{j;\mu,\nu}$$
$$+\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{i} \frac{(-1)^i F(\alpha-\mu-\nu-2i-d)\left(\frac{x}{2}\right)^{\mu+\nu+2j} y^{2i-2j+d}}{j!(2i-2j+d)!} \Gamma_{j;\mu,\nu}, \qquad (4.10)$$

gde je $\mu, \nu \in R$, $\alpha > \mu+\nu > -\frac{1}{2}$, $f = \begin{Bmatrix}\sin\\ \cos\end{Bmatrix}$ $d = \begin{Bmatrix}1\\ 0\end{Bmatrix}$. Zbog preglednosti, uvedena je oznaka

$$\Gamma_{j;\mu,\nu} = \frac{\Gamma(\mu+\nu+2j+1)}{\Gamma(\mu+\nu+j+1)\Gamma(j+\mu+1)\Gamma(j+\nu+1)}.$$

U Tabeli V mogu se naći ostali potrebni parametri.

Tabela V

a	b	s	c	F	$(x,y) \in K_i$		
1	0	1	1	ζ	K_5	$-\pi/2 < x < \pi/2$	$2\lvert x\rvert < y < 2\pi - 2\lvert x\rvert$
1	0	-1	0	η	K_6	$-\pi/2 < x < \pi/2$	$2\lvert x\rvert - \pi < y < \pi - 2\lvert x\rvert$
2	1	1	$\frac{1}{2}$	λ	K_7	$-\pi/4 < x < \pi/4$	$2\lvert x\rvert < y < \pi - 2\lvert x\rvert$
2	1	-1	0	β	K_8	$-\pi/4 < x < \pi/4$	$2\lvert x\rvert - \pi/2 < y < \pi/2 - 2\lvert x\rvert$

Slično kao kod formule (4.5), neophodne su granične ili glavne vrednosti gama funkcija kad je $f(x) = \sin x$ i $\alpha-\mu-\nu \to 2m$ ili kad je $f(x) = \cos x$ i $\alpha-\mu-\nu \to 2m+1$, $m \in N_0$.

Neka su sada u redu sa proizvodom trigonometrijske i dve Besselove funkcije t.j. u redu (4.2), i $\mu+\nu$ i α prirodni brojevi, tj. $\mu+\nu = 2k+\delta$, $\alpha = 2m-r$, gde je $k \in N_0$, $m \in N$, a δ i r mogu biti 0 ili 1. Zamenjujući reprezentaciju (4.8) u redu (4.2), i menjajući redosled integracije i sumiranja, dobija se red tipa (4.1):

$$S_{2m-r}^{J,J,f} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos(\mu-\nu)\theta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(s)^{n-1} J_{2k+\delta}(2(an-b)x\cos\theta) f((an-b)y)}{(an-b)^{2m-r}} d\theta,$$

Za sumiranje ovog reda sada možemo iskoristiti formulu (4.7) (za $\varphi = \mathbf{J} = J$) umesto formule (4.5), pa je

$$S_{2m-r}^{J,J,f} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos(\mu-\nu)\theta \left[\sum_{i=k}^{m-1-d\delta} \frac{(-1)^{i+k}(x\cos\theta)^{2i+\delta}}{(i+k+\delta)!(i-k)!} T_{2m-2i-\delta-r}^{f} \right.$$
$$\left. +(b-1)\frac{sd(-1)^{m+k-\delta}(x\cos\theta)^{2m-\delta}}{2(m+k)!(m-k-\delta)!} \right] d\theta,$$

gde je $T_{2m-2i-\delta-r}^{f}$ suma reda sa trigonometrijskom funkcijom, data formulom (2.34). U sledećem koraku se dobija

$$S_{2m-r}^{J,J,f} = \frac{2}{\pi}\sum_{i=k}^{m-1-d\delta} \frac{(-1)^{i+k}x^{2i+\delta}}{(i+k+\delta)!(i-k)!} T_{2m-2i-\delta-r}^{f} \int_0^{\pi/2} \cos^{2i+\delta}\cos(\mu-\nu)\theta\, d\theta$$
$$+\frac{(b-1)sd(-1)^{m+k-\delta}x^{2m-\delta}}{\pi(m+k)!(m-k-\delta)!} \int_0^{\pi/2} \cos^{2m-\delta}\cos(\mu-\nu)\theta\, d\theta.$$

Koristeći integral (4.9) dobija se formula u zatvorenom obliku

$$S_{2m-r}^{J,J,f} = \sum_{i=k}^{m-1-d\delta} \frac{(-1)^{i+k}(2i+\delta)!(\frac{x}{2})^{2i+\delta}}{(i+k+\delta)!(i-k)!G_{i1}} T_{2m-2i-\delta-r}^{f}$$
$$+\frac{(b-1)sd(-1)^{m+k-\delta}(2m-\delta)!(\frac{x}{2})^{2m-\delta}}{2(m+k)!(m-k-\delta)!G_{i2}} \tag{4.11}$$

za $m \geq k+\delta$, ali za $m < k+\delta$, suma je jednaka 0. Pritom su uvedene oznake

$$G_{i1} = \Gamma(\tfrac{\delta+\mu-\nu}{2}+i+1)\Gamma(\tfrac{\delta-\mu+\nu}{2}+i+1),$$
$$G_{i2} = \Gamma(\tfrac{-\delta+\mu-\nu}{2}+m+1)\Gamma(\tfrac{-\delta-\mu+\nu}{2}+m+1).$$

Osim toga je $m \in N, k \in N_0, \mu+\nu = 2k+\delta, \delta = \left\{\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right\}$ $g = \left\{\begin{smallmatrix}\sin\\\cos\end{smallmatrix}\right\}$, i nezavisno od toga, $f = \left\{\begin{smallmatrix}\sin\\\cos\end{smallmatrix}\right\}$ $t = \left\{\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right\}$, dok je suma $T^f_{2m-2i-\delta-r}$ data formulom (2.34). Ostali parametri nalaze se u Tabeli V, osim parametra d koji je u Tabeli III. U slučajevima kad je $F = \zeta, \eta, \lambda$ uzima se da je $r = \begin{cases} 0, & f = g \\ 1, & f \neq g \end{cases}$, ali za $F = \beta$ je $r = \begin{cases} 1, & f = g \\ 0, & f \neq g \end{cases}$. Oblasti konvergencije K_5, K_6, K_7, K_8 u Tabeli V su zatvorene, osim za $2m - r = 1$.

Što se tiče reda (4.2), sume (74.5.6) i (74.5.7) u [19] ili sume (5.7.28.1) i (5.7.28.2) u [40]:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_p(nx)J_{2q+p}(nt)}{n} \sin ny = (-1)^q \delta_{q,0}\delta_{p,0}\left(\frac{\pi - y}{2} + \pi\left[\frac{y}{2\pi}\right]\right),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_p(nx)\,J_{2q-p+1}(nt)}{n} \cos ny = (-1)^{q-1}\delta_{q,0}\left(\delta_{p,1}\frac{x}{4} + \delta_{p,0}\frac{x}{4}\right),$$

gde je $p, q \in N_0$, $|x| + |t| < \pi - |\pi - y + 2\pi\left[\frac{y}{2\pi}\right]|$, predstavljaju za $t = x$ u formuli (4.11), sumu $S_1^{J,J,\sin}$ za $\mu = p, \nu = 2q + p$, odnosno sumu $J_1^{J,J,\cos}$ za $\mu = p, \nu = 2q - p + 1$ samo za $a = 1, b = 0, s = 1$, redom. Primetimo da ova oblast postaje K_5 za $t = x$ i $0 < y < 2\pi$.

Iz formule (4.11) dobijaju se mnogi rezultati u zatvorenom obliku, kojih nema u literaturi. U stvari, mogu se sumirati svi redovi oblika (4.2), kod kojih je $\mu + \nu \in N_0, \alpha \in N$, a izbor parametara i trigonometrijske funkcije je u međusobnoj zavisnosti,kao što je objašnjeno kod formule (4.11). Na primer, jedan od tih novih rezultata je suma sledećeg reda:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}J_{\frac{1}{2}}((2n-1)x)J_{\frac{5}{2}}((2n-1)x)}{(2n-1)^4} \cos(2n-1)y = \frac{x^3}{30}.$$

Takođe, može se odrediti i suma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_{\frac{1}{2}}(nx)J_{-\frac{1}{2}}(nx)}{n^2} \cos ny = -\frac{\pi}{6} + \frac{2x^2}{3\pi},$$

i još mnoge druge.

4.3 Opštiji red sa proizvodom Besselove ili Struveove i trigonometrijske funkcije

Za određivanje sume reda opštijeg tipa, (4.3), čiji članovi sadrže proizvod Besselove/Struveove i trigonometrijske funkcije, koristi se reprezentacija (4.4). Promenom redosleda sumiranja i integracije, prethodni red postaje

$$S_{\alpha,\omega}^{\varphi,f}=\frac{2\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\int_{0}^{\pi/2}\sin^{2\nu}\theta\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(s)^{n-1}(an-b)^{\nu-\alpha}}{(an-b)^{2}-\omega^{2}}g_n f_n d\theta,$$

gde je $g_n=g((an-b)x\cos\theta), f_n=f((an-b)y)$. Sumirajući red u podintegralnoj funkciji pomoću formule (2.39), sa $x\cos\theta$ umesto x, i za $\alpha-\nu=2m+p-1$, dobija se

$$\begin{aligned}S_{\alpha,\omega}^{\varphi,f}=&\frac{2\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\int_{0}^{\pi/2}\sin^{2\nu}\theta\Bigg[\frac{g(0)sp(1-b)}{2\omega^{2m+2}}\\&-\frac{s\pi\sin^{b-1}\frac{\pi\omega}{2}}{4\omega^{2m+p}\cos\frac{\pi\omega}{2}}f_{\omega}(y)\,g(\omega x\cos\theta)+\frac{sd(1-b)}{2}\sum_{i=1}^{m}\frac{(-1)^{i-\delta}(x\cos\theta)^{2i-\delta}}{\omega^{2m+2-2i}(2i-\delta)!}\\&+\frac{c\pi}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{i-1-d\delta}\frac{(-1)^{i-d-d\delta}(x\cos\theta)^{2k+\delta}y^{2i-2k-\delta+p-2}}{\omega^{2m-2i+2}(2k+\delta)!(2i-2k-\delta+p-2)!}\\&-\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{i-1-d\delta}\sum_{j=0}^{M}\frac{(-1)^{k+j}F(2i-2k-2j-\delta-t+p-1)(x\cos\theta)^{2k+\delta}y^{2j+t}}{\omega^{2m-2i+2}(2k+\delta)!(2j+t)!}\Bigg]d\theta,\end{aligned}$$

gde je, kao u formuli (2.14), uvedena oznaka: $f_{\omega}(y)=f\left(\omega y-\frac{\pi(s+1)(b+\omega)}{2a}\right)$. U sledećem koraku je

$$\begin{aligned}S_{\alpha,\omega}^{\varphi,f}=A\Bigg[&\frac{g(0)sp(1-b)}{2\omega^{2m+2}}I(2\nu,0)+\frac{sd(1-b)}{2}\sum_{i=1}^{m}\frac{(-1)^{i-\delta}x^{2i-\delta}}{\omega^{2m+2-2i}(2i-\delta)!}I(2\nu,2i-\delta)\\&+\frac{c\pi}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{i-1-d\delta}\frac{(-1)^{i-d-d\delta}x^{2k+\delta}y^{2i-2k-\delta+p-2}}{\omega^{2m-2i+2}(2k+\delta)!(2i-2k-\delta+p-2)!}I(2\nu,2k+\delta)\\&-\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{i-1-d\delta}\sum_{j=0}^{M}\frac{(-1)^{k+j}F(2i-2k-2j-\delta-t+p-1)x^{2k+\delta}y^{2j+t}}{\omega^{2m-2i+2}(2k+\delta)!(2j+t)!}I(2\nu,2k+\delta)\Bigg]\\&-\frac{s\pi\sin^{b-1}\frac{\pi\omega}{2}}{4\omega^{2m+p}\cos\frac{\pi\omega}{2}}f_{\omega}(y)\frac{1}{\omega^{\nu}}\frac{2\left(\frac{\omega x}{2}\right)^{\nu}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\int_{0}^{\pi/2}\sin^{2\nu}\theta\,g(\omega x\cos\theta)d\theta,\end{aligned}$$

gde je označeno: $A = \dfrac{2\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}$ i $I(u,v) = \int_0^{\pi/2} \sin^u\theta\cos^v\theta d\theta$, a ovaj tip integrala izračunava se po formuli (3.5). Integral u poslednjem sabirku u prethodnoj formuli se, prema integralnoj reprezentaciji (4.4), predstavlja pomoću $\varphi_\nu(\omega x)$. Konačna formula glasi:

$$
\begin{aligned}
S_{\alpha,\omega}^{\varphi,f} = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}}{\omega^{2m+2}\sqrt{\pi}} \Bigg[& \frac{g(0)sp(1-b)\sqrt{\pi}}{2\Gamma(\nu+1)} + \frac{sd(1-b)}{2}\sum_{i=1}^{m}\frac{(-1)^{i-\delta}x^{2i-\delta}\Gamma(i+\frac{1-\delta}{2})\omega^{2i}}{(2i-\delta)!\Gamma(\nu+i+1-\frac{\delta}{2})} \\
& + \frac{c\pi}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{i-1-d\delta}\frac{(-1)^{i-d-d\delta}x^{2k+\delta}y^{2i-2k-\delta+p-2}\Gamma(k+\frac{1+\delta}{2})}{(2k+\delta)!(2i-2k-\delta+p-2)!\Gamma(\nu+k+1+\frac{\delta}{2})\omega^{-2i}} \\
& - \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{i-1-d\delta}\sum_{j=0}^{M}\frac{(-1)^{k+j}F(2i-2k-2j-\delta-t+p-1)x^{2k+\delta}y^{2j+t}\Gamma(k+\frac{1+\delta}{2})}{(2k+\delta)!(2j+t)!\Gamma(\nu+k+1+\frac{\delta}{2})\omega^{-2i}}\Bigg] \\
& - \frac{s\pi\sin^{b-1}\frac{\pi\omega}{2}}{4\omega^{2m+p+\nu}\cos\frac{\pi\omega}{2}} f_\omega(y)\varphi_\nu(\omega x),
\end{aligned}
\tag{4.12}
$$

gde je $\alpha = \nu + 2m + p - 1$, $m \in N$, $\omega \in R$, $\omega \neq an - b$, $\mathrm{Re}\,\nu > -\frac{1}{2}$, $\varphi = \left\{\begin{matrix} J \\ \mathrm{H} \end{matrix}\right\}$ $g = \left\{\begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix}\right\}$ $\delta = \left\{\begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}\right\}$ i nezavisno od toga, $f = \left\{\begin{matrix} \sin \\ \cos \end{matrix}\right\}$ $t = \left\{\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}\right\}$, $M = i - k - 1 + (-1)^{\delta}(1-p)d$. Parametar p bira se na sledeći način: $p = \begin{cases} 1, & f = g \\ 0, & f \neq g \end{cases}$ za $F = \zeta, \eta, \lambda$, dok se za $F = \beta$ uzima da je $p = \begin{cases} 0, & f = g \\ 1, & f \neq g \end{cases}$. Svi ostali relevantni parametri navedeni su u Tabeli IV, osim d, koji je u Tabeli III.

Generalna formula (4.12) uključuje četiri partikularna slučaja navedena u [40], str. 683:

$$
\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2-a^2}\left\{\begin{matrix} k\sin kb \\ \cos kb \end{matrix}\right\} J_0(kx) = \pm\frac{\pi\operatorname{cosec} a\pi}{2a}\left\{\begin{matrix} a\sin a(\pi-b) \\ \cos a(\pi-b) \end{matrix}\right\} J_0(ax) + \frac{1}{2a^2}\left\{\begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}\right\}
$$

gde je $0 < b + x < 2\pi$; $0 < b - x < 2\pi$, i

$$
\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\pm 1)^k k^{-\nu}}{k^2-a^2}\cos kx J_\nu(kx) = \frac{2^{-\nu-1}x^{\nu}}{a^2\Gamma(\nu+1)} - \frac{\pi\operatorname{cosec} a\pi}{2a^{\nu+1}}\left\{\begin{matrix} \cos a(x-\pi) \\ \cos ax \end{matrix}\right\} J_\nu(ax)
$$

gde je $\mathrm{Re}\,\nu > \frac{-(4\mp 1)}{2}$; $0 < x < (3 \pm 1)\frac{\pi}{4}$.

Ove iste rezultate predstavljaju i formule (74.1.24–27) u knjizi [19].

5

Redovi sa trigonometrijskim i drugim integralima

U ovom poglavlju razmatraće se najpre redovi sa trigonometrijskim integralima, koji se mogu posmatrati kao generalizacija Besselovih i drugih srodnih specijalnih funkcija; zatim, redovi dobijeni iz prethodnih množenjem opšteg člana trigonometrijskom funkcijom.

Osim toga, biće sumirani i redovi sa integralima koji sadrže Besselove ili Struveove funkcije, kao i redovi čiji opšti član sadrži proizvod ovih integrala i trigonometrijske funkcije.

Za izvođenje ovih sumacionih formula koristiće se u prvom slučaju generalne formule iz drugog poglavlja, a za redove sa Besselovim ili Struveovim integralima, rezultati iz trećeg i četvrtog poglavlja. To znači da će tražene sume biti izražene preko redova sa Riemannovom ζ funkcijom i ostalim srodnim funkcijama, i da će zbog toga u određenim slučajevima biti u zatvorenom obliku.

U primerima će biti prikazana primena izvedenih sumacionih formula na sumiranje nekih redova sa specijalnim funkcijama.

Rezultati izloženi u ovom poglavlju su delom prvi put izvedeni u ovoj disertaciji (odeljci **5.2** i **5.4**), a delom su bili objavljeni u našim ranijim radovima [52], [56] i [57] (odeljci **5.1** i **5.3**).

5.1 Sumiranje redova sa trigonometrijskim integralima

Posmatrajmo trigonometrijske integrale, definisane sa (videti [52])

$$S(x) = \int_0^1 \psi(y) \sin xy \, dy, \quad C(x) = \int_0^1 \psi(y) \cos xy \, dy. \tag{5.1}$$

Birajući $\psi(y) = (1 - y^2)^{\nu - 1/2}$, stavljajući zatim $y = \cos\theta$ i množeći integrale (5.1) sa $\dfrac{2(x/2)^\nu}{\Gamma(1/2)\Gamma(\nu + 1/2)}$, dobijamo formulu (3.4), koja predstavlja integralnu reprezantaciju Besselove odnosno Struveove funkcije. Na taj način integrale (5.1) možemo smatrati generalizacijom Besselovih i Struveovih funkcija.

Ako umesto Besselove ili Struveove funkcije φ_ν redovi (3.1) i (3.3) sadrže ove integrale, dobijaju se novi redovi

$$I_\alpha^T = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(s)^{n-1} T((an - b)x)}{(an - b)^\alpha} \tag{5.2}$$

i

$$I_{\alpha,\omega}^T = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(s)^{n-1} T((an - b)x)}{(an - b)^\alpha ((an - b)^2 - \omega^2)}, \tag{5.3}$$

gde $T(x)$ označava $S(x)$ ili $C(x)$, $\alpha, \omega \in R$, $\omega \neq an - b$, $\alpha > 0$, a parametri s, a, b dati su u Tabeli III.

5.1.1 Red sa trigonometrijskim integralom

Određivanje formula za sumiranje redova (5.2) i (5.3) zasniva se na korišćenju generalnih formula (2.5) i (2.16). Na taj način će i redovi (5.2) i (5.3) biti predstavljeni kao redovi sa Riemannovom zeta funkcijom i ostalim srodnim funkcijama.

U redu (5.2) zamenićemo trigonometrijski integral $T((an - b)x)$ u obliku

$$T(x) = \int_0^1 \psi(y) f(xy) dy,$$

gde je, na osnovu (5.1), funkcija $f = \sin$ ili $f = \cos$, i promenom redosleda sumiranja i integracije, dobija se:

$$I_\alpha^T = \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(s)^{n-1} f((an-b)xy)}{(an-b)^\alpha} \psi(y)\, dy.$$

Očigledno, deo podintegralne funkcije je red tipa (2.1), što znači da se njegova suma određuje formulom (2.5), ali za xy umesto x (granice za xy iste su kao i one za x u Tabeli I, jer je $0 \le y \le 1$). Na taj način dobija se tražena formula za sumiranje reda (5.2):

$$I_\alpha^T = \frac{c\pi x^{\alpha-1}}{2\Gamma(\alpha) f(\frac{\pi\alpha}{2})} \int_0^1 y^{\alpha-1}\psi(y)dy + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i F(\alpha-2i-\delta) x^{2i+\delta}}{(2i+\delta)!} \int_0^1 y^{2i+\delta}\psi(y)dy, \tag{5.4}$$

gde je $\alpha \in R^+, f = \begin{Bmatrix}\sin\\ \cos\end{Bmatrix}$ $T(x) = \begin{Bmatrix}S(x)\\ C(x)\end{Bmatrix}$ $\delta = \begin{Bmatrix}1\\ 0\end{Bmatrix}$. Ostali potrebni parametri nalaze se u Tabeli III.

U odredjenim slučajevima, za vrednosti parametara u Tabeli II, red na desnoj strani (5.4) sastoji se od konačnog broja članova zbog anuliranja F funkcija i formula dobija oblik:

$$\begin{aligned} I_\alpha^T = (-1)^m \frac{c\pi x^{\alpha-1}}{2(\alpha-1)!} \int_0^1 y^{\alpha-1}\psi(y)dy \\ + \sum_{i=0}^{m} \frac{(-1)^i F(\alpha-2i-\delta) x^{2i+\delta}}{(2i+\delta)!} \int_0^1 y^{2i+\delta}\psi(y)dy, \end{aligned} \tag{5.5}$$

gde je $\alpha = 2m$ ili $\alpha = 2m+1, m \in N_0$, zavisno od slučaja. Na primer, ako se izabere da je $a = 1, b = 0, s = 1$, iz Tabele III sledi da je $c = 1, F = \zeta$. Kako je $F = \zeta$, na osnovu Tabele II sledi da ako se odabere da je $T = S$, tada je $f = \sin$, a kako α mora da bude neparno, neka je $\alpha = 2m+1, m \in N_0$. Za ovakav izbor parametara, sledi da je $\delta = 1$ (iz uslova pod kojima važi formula (5.4)). Na taj način je određena suma

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S(nx)}{n^{2m+1}} = (-1)^m \frac{\pi x^{2m}}{2(2m)!} \int_0^1 y^{2m}\psi(y)dy \\ + \sum_{i=0}^{m} \frac{(-1)^i \zeta(2m-2i) x^{2i+1}}{(2i+1)!} \int_0^1 y^{2i+1}\psi(y)dy, \end{aligned}$$

što znači da se beskonačni red (5.2) može predstaviti konačnom sumom.

5.1.2 Opštiji red sa trigonometrijskim integralom

Istu proceduru primenićemo i na sumiranje specijalnog tipa redova (5.3), kod kojih je $\alpha = p-1$, a p može biti 0 ili 1. Zamenom trigonometrijskog integrala $T((an-b)x)$, a zatim promenom redosleda sumiranja i integracije, dolazi se do reda čija suma se određuje pomoću formule (2.14), ali za xy umesto za x. Zatim se koriste dobro poznate trigonometrijske formule, koje se mogu napisati u obliku

$$f(\alpha-\beta) = f(\alpha)\cos\beta \mp \overline{f}(\alpha)\sin\beta,$$

gde je $f = \left\{\begin{smallmatrix}\sin\\ \cos\end{smallmatrix}\right\}$ a $\overline{f} = \left\{\begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix}\right\}$. Ponovnim korišćenjem definicija (5.1), konačno se dobija sledeća formula

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(s)^{n-1}T((an-b)x)}{(an-b)^{p-1}((an-b)^2-\omega^2)} &= \frac{sp\,(1-b)}{2\omega^2}C(0)\\ &-\omega^{-p}\,\Omega_2\left(T(\omega x)\cos\Omega_1 \mp \overline{T}(\omega x)\sin\Omega_1\right),\end{aligned} \tag{5.6}$$

gde je $\overline{T}(x) = C(x)$ ako je $T(x) = S(x)$ i obrnuto, uvedene su oznake

$$\Omega_1 = \frac{\pi(\omega+b)(s+1)}{2a}, \quad \Omega_2 = \frac{s\pi\sin^{b-1}(\frac{\pi\omega}{2})}{4\cos(\frac{\pi\omega}{2})} \tag{5.7}$$

i $p=0$ ili $p=1$. U Tablici VIII dati su partikularni slučajevi ove formule.

Odredićemo sada sumu reda (5.3) za $\alpha = 2m+p-1, m \in N, p$ je 0 ili 1. Koristeći ovog puta formulu (2.16) umesto formule (2.14), na sličan način dobijamo generalnu formulu za određivanje sume reda (5.3):

$$\begin{aligned}I^T_{2m+p-1,\omega} &= \sum_{i=1}^{m}\frac{1}{\omega^{2m-2i+2}}\left(\frac{(-1)^{i+p}c\pi x^{2i+p-2}}{2(2i+p-2)!}\Psi(2i+p-2)\right.\\ &\left.-\sum_{k=0}^{L}\frac{(-1)^k F(2i+p-1-2k-\delta)x^{2k+\delta}}{(2k+\delta)!}\Psi(2k+\delta)\right) + \frac{1}{\omega^{2m}}I^T_{p-1}\end{aligned} \tag{5.8}$$

gde je $m \geq 1$, $\omega \in R$, $\omega \neq an-b$, $\delta = \left\{\begin{smallmatrix}1\\ 0\end{smallmatrix}\right\}, T(x) = \left\{\begin{smallmatrix}S(x)\\ C(x)\end{smallmatrix}\right\}$, $\overline{T}(x) = \left\{\begin{smallmatrix}C(x)\\ S(x)\end{smallmatrix}\right\}$, $L = i-1+p(1-\delta)$, a ostali potrebni parametri dati su u Tabeli III, u kojoj se p tretira kao d. Oznaka I^T_{p-1} ovde ne predstavlja odgovarajući red, već njegovu sumu, naime desnu stranu formule (5.6). Uvedena je i oznaka

$$\Psi(\nu) = \int_0^1 \psi(y)y^\nu dy. \tag{5.9}$$

Generalne formule (5.4) i (5.8) su glavni rezultati ovog odeljka. Primetimo da se formula (5.6) može dobiti iz generalne formule (5.8) za $m = 0$.

5.1.3 Primeri

Formule (5.4), (5.5), (5.6) i (5.8) su novi rezultati i ne mogu se naći u literaturi. Neki redovi tipa (5.2) i (5.3), koji sadrže specijalne tipove funkcija umesto trigonometrijskih integrala, mogu se na jednostavan način predstaviti pomoću Riemannove zeta funkcije i ostalih srodnih funkcija, specificiranjem funkcije $\psi(y)$. U vezi sa tim daćemo nekoliko primera. Prvi i drugi primer ujedno predstavljaju i proveru formule (5.8) pomoću upoređivanja sa formulama koje su izvedene u prethodnim poglavljima.

Primer 1. Ako se posmatra specijalni slučaj kad je $\psi(y) = 1$, t.j.

$$S(x) = \int_0^1 \sin xy \, dy = -\frac{1}{x}\cos x + \frac{1}{x} \quad \text{i} \quad C(x) = \int_0^1 \cos xy \, dy = \frac{1}{x}\sin x,$$

tada, zamenjujući da je, na primer, $C(x) = \frac{1}{x}\sin x$, i $\psi(y) = 1$ i u levoj i u desnoj strani formule (5.8) redom, nakon sređivanja dobija se formula (2.16) za sumiranje trigonometrijskog reda (2.2) za slučaj kad je $f(t) = \sin t$. Slično, koristeći $S(x)$, može se doći do formule (2.16) za $f(t) = \cos t$. Dakle, generalna formula (5.8) važi za $\psi(y) = 1$.

Primer 2. Poznata integralna reprezentacija Besselove/Struveove funkcije prve vrste i reda ν glasi (videti [60]):

$$\varphi_\nu(z) = \frac{2(\frac{z}{2})^\nu}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \int_0^1 (1 - y^2)^{\nu - \frac{1}{2}} f(zy) \, dy, \qquad \left(\operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}\right),$$

gde je $\varphi_\nu = \begin{Bmatrix} \mathbf{H}_\nu \\ J_\nu \end{Bmatrix}$, $f = \begin{Bmatrix} \sin \\ \cos \end{Bmatrix}$, ($J_\nu$ i $\mathbf{H}_\nu$ su Besselova i Struveova funkcija, redom). Zamenom $\psi(y) = (1 - y^2)^{\nu - \frac{1}{2}}$ u formuli (5.8), I_α^T se svodi na red (3.3) sa Besselovom ili Struveovom funkcijom, jer je

$$T(x) = \int_0^1 (1 - y^2)^{\nu - \frac{1}{2}} f(xy) \, dy = \frac{\varphi_\nu(x)\sqrt{\pi}\Gamma(\nu + \frac{1}{2})}{2(\frac{x}{2})^\nu}.$$

Time se formula (5.8) svodi na formulu (3.21) za sumiranje reda (3.3).

Primer 3. Neka je $\psi(y) = y(1-y^2)^{\nu-1/2}$. U ovom slučaju je ([18], str. 441, No 3.771.12)

$$\int_0^1 y(1-y^2)^{\nu-1/2}\cos(xy)dx = -\frac{1}{x^\nu}s_{\nu-1,\nu+1}(x),$$

gde je $s_{\nu-1,\nu+1}(x)$ Lommelova funkcija. Sledi da je

$$C(x) = -\frac{1}{x^\nu}s_{\nu-1,\nu+1}(x).$$

Prema formuli 8 iz Tablice VIII, koja je specijalni slučaj formule (5.6), važi

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2n-1)}{(2n-1)^2-\omega^2}\frac{1}{(nx)^\nu}s_{\nu-1,\nu+1}(nx) = \frac{\pi}{4(\omega x)^\nu}\sec\frac{\pi\omega}{2}s_{\nu-1,\nu+1}(\omega x).$$

Konačno je

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2n-1)}{n^\nu((2n-1)^2-\omega^2)}s_{\nu-1,\nu+1}(nx) = \frac{\pi}{4\omega^\nu}\sec\frac{\pi\omega}{2}s_{\nu-1,\nu+1}(\omega x).$$

Primer 4. Važi relacija ([18], str. 440, No 3.771.3)

$$\int_0^1 y^{2\nu-1}(1-y^2)^{\gamma-1}\sin(xy)\,dy = \frac{x}{2}\mathrm{B}\Big(\gamma,\nu+\frac{1}{2}\Big)_1F_2\Big(\nu+\frac{1}{2};\frac{3}{2},\gamma+\nu+\frac{1}{2};-\frac{x^2}{4}\Big),$$

gde je $\operatorname{Re}\gamma > 0, \operatorname{Re}\nu > -1/2$, a ${}_1F_2(\alpha;\beta,\gamma;z)$ je hipergeometrijska funkcija Gaussa. Ovde se može uzeti da je funkcija $\psi(y) = y^{2\nu-1}(1-y^2)^{\gamma-1}$. Tada je $S(x)$ desna strana prethodne formule. Kao $C(x)$ uzmimo desnu stranu od

$$\int_0^1 y^{2\nu-1}(1-y^2)^{\gamma-1}\cos(xy)\,dy = \frac{1}{2}\mathrm{B}(\gamma,\nu)_1F_2\Big(\nu;\frac{1}{2},\gamma+\nu;-\frac{x^2}{4}\Big),$$

gde je $\operatorname{Re}\gamma > 0, \operatorname{Re}\nu > 0$ ([18], str. 441, No 3.771.4). Zamenom $\psi(y), S(x)$ i $C(x)$ u (5.8) za $T(x) = S(x)$, i korišćenjem

$$\int_0^{\pi/2}\sin^{\mu-1}x\cos^{\nu-1}x\,dx = \frac{1}{2}\mathrm{B}\Big(\frac{\mu}{2},\frac{\nu}{2}\Big),$$

konačno imamo da je

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(s)^{n-1}{}_1F_2(\nu+\frac12;\frac32,\gamma+\nu+\frac12;-[\frac{(an-b)x}{2}]^2)}{(an-b)^{2m+p-2}((an-b)^2-\omega^2)}=$$
$$-\omega^{-2m-p}\,\Omega_2\Big({}_1F_2(\nu+\tfrac12;\tfrac32,\gamma+\nu+\tfrac12;-(\tfrac{\omega x}{2})^2)\omega\cos\Omega_1$$
$$\mp{}_1F_2(\nu;\tfrac12,\gamma+\nu;-(\tfrac{\omega x}{2})^2)\frac{\mathrm{B}(\gamma,\nu)}{x\mathrm{B}(\gamma,\nu+\frac12)}\sin\Omega_1\Big)$$
$$+\sum_{i=1}^{m}\nu_3\Big(\frac{(-1)^{i+p}c\pi x^{2i+p-3}\nu_1}{2(2i+p-2)!}-\sum_{k=0}^{L}\frac{(-1)^kF(2i+p-1-2k-\delta)x^{2k+\delta-1}\nu_2}{(2k+\delta)!}\Big),$$

gde je $\nu_1=\mathrm{B}(i+\nu-1+\frac{p}{2},\gamma)$, $\nu_2=\mathrm{B}(k+\nu+\frac{\delta}{2},\gamma)$, $\nu_3=\frac{1}{\mathrm{B}(\gamma,\nu+\frac12)\omega^{2m-2i+2}}$, a oznake Ω_1 i Ω_2 uvedene su u formuli (5.7).

Primer 5. Razmotrimo sada sledeću formulu

$$\int_0^1 y^{\alpha-1}P_{2n+\eta}(y)\begin{Bmatrix}\sin(xy)\\ \cos(xy)\end{Bmatrix}dy=\frac{(-1)^n(\frac{1-\alpha-\delta+\eta}{2})_n}{2(\frac{\alpha+\delta+\eta}{2})_{n+1}}x^{\delta}$$
$$\times\ {}_2F_3(\tfrac{\alpha}{2}+\delta,\tfrac{\alpha+1}{2};\tfrac{1+\alpha+\delta-\eta}{2}-n,\delta+\tfrac12,\tfrac{\alpha+\delta+\eta}{2}+n+1;-\tfrac{x^2}{4}),\quad \delta=\{{}^1_0\},$$

([40], str. 433, No 2.17.7.2) gde je ${}_2F_3(\gamma_1,\gamma_2;\beta_1,\beta_2,\beta_3;z)$ generalisana hipergeometrijska funkcija Gaussa, $P_n(x)$ označava Legendreove polinome, $\eta=0$ ili $\eta=1$ i $\mathrm{Re}\,\alpha>-\delta-\eta$. Ako se uzme da je $\psi(y)=y^{\alpha-1}P_{2n+\eta}(y)$, tada prethodni integral predstavlja $S(x)$ za $\delta=1$ ili $C(x)$ za $\delta=0$. Dalje, zamenom $S(x),C(x),\psi(y)$ u formuli (5.8) za $T(x)=S(x)$ i korišćenjem relacije

$$\int_0^1 y^{\alpha-1}P_{2n+\eta}(y)\,dy=\frac{(-1)^n(\frac{1-\alpha+\eta}{2})_n}{2(\frac{\alpha+\eta}{2})_{n+1}},\ \eta=0\text{ or }\eta=1,\ \mathrm{Re}\,\alpha>-\eta$$

([40], str. 420, No 2.17.1.1), dobija se

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(s)^{n-1}{}_2F_3(\frac{\alpha}{2}+1,\frac{\alpha+1}{2};\frac{\alpha-\eta}{2}+1-j,\frac32,\frac{\alpha+\eta+1}{2}+j+1;-[\frac{(an-b)x}{2}]^2)}{(an-b)^{2m+p-2}((an-b)^2-\omega^2)}=$$
$$-\frac{1}{\omega^{2m+p}}\,\Omega_2\Big({}_2F_3(\tfrac{\alpha}{2}+1,\tfrac{\alpha+1}{2};\tfrac{\alpha-\eta}{2}+1-j,\tfrac32,\tfrac{\alpha+\eta+1}{2}+j+1;-(\tfrac{\omega x}{2})^2)\omega\cos\Omega_1$$
$$\mp{}_2F_3(\tfrac{\alpha}{2},\tfrac{\alpha+1}{2};\tfrac{1+\alpha-\eta}{2}-j,\tfrac12,\tfrac{\alpha+\eta}{2}+j+1;-(\tfrac{\omega x}{2})^2)\frac{(\frac{1-\alpha+\eta}{2})_j(\frac{1+\alpha+\eta}{2})_{j+1}}{x(\frac{\eta-\alpha}{2})_j(\frac{\eta+\alpha}{2})_{j+1}}\sin\Omega_1\Big)$$
$$+\sum_{i=1}^{m}\alpha_3\Big(\frac{(-1)^{i+p}c\pi x^{2i+p-1}}{2(2i+p-2)!\alpha_1}-\sum_{k=0}^{L}\frac{(-1)^kF(2i+p-1-2k-\delta)x^{2k+\delta-1}}{(2k+\delta)!\alpha_2}\Big),$$

gde je $\alpha_1 = \frac{(\frac{\eta+\alpha+2i+p-2}{2})_{j+1}}{(\frac{\eta-\alpha-2i-p+3}{2})_j}$, $\alpha_2 = \frac{(\frac{\eta+\alpha+2k+\delta}{2})_{j+1}}{(\frac{\eta-\alpha+1-2k-\delta}{2})_j}$, $\alpha_3 = \frac{(\frac{1+\alpha+\eta}{2})_{j+1}}{\omega^{2m-2i+2}(\frac{\eta-\alpha}{2})_j}$, a oznake Ω_1 i Ω_2 date su relacijama (5.7).

Primer 6. Polazeći od formule

$$\int_0^1 y^{\alpha-1}(1-y^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} C_{2n+\eta}^{\lambda}(y)\begin{Bmatrix}\sin(xy)\\ \cos(xy)\end{Bmatrix} dy = \frac{(-1)^n}{2(2n+\eta)!}x^{\delta}(2\lambda)_{2n+\eta}\Big(\frac{1+\eta-\delta-\alpha}{2}\Big)_n$$
$$\times\frac{\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{\alpha+\delta+\eta}{2})}{\Gamma(\frac{1+\alpha+\delta+\eta}{2}+\lambda+n)}\,{}_2F_3\big(\tfrac{\alpha}{2}+\delta, \tfrac{1+\alpha}{2}; \tfrac{1+\alpha+\delta-\eta}{2}-n, \delta+\tfrac{1}{2}, \tfrac{1+\alpha+\delta+\eta}{2}+\lambda+n; -\tfrac{x^2}{4}\big),$$

za $\delta = \begin{Bmatrix}1\\0\end{Bmatrix}$,([40], str. 535, No 2.21.7.2), gde je $C_\eta^\lambda(y)$ Gegenbauerova funkcija, $\eta = 0$ ili $\eta = 1$ i $\mathrm{Re}\,\alpha > -(\eta+\delta)$, $\mathrm{Re}\,\lambda > -1/2$, uzmimo da je $\psi(y) = y^{\alpha-1}(1-y^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}C_{2n+\eta}^{\lambda}(y)$. Prethodni integral predstavlja $S(x)$ za $\delta = 1$ ili $C(x)$ za $\delta = 0$. Zamenom $S(x), C(x), \varphi(y)$ u formuli(5.8) za $T(x) = C(x)$ i korišćenjem relacije ([40], str. 518, No 2.21.2.5)

$$\int_0^1 y^{\alpha-1}(1-y^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}C_{2n+\eta}^{\lambda}(y)\,dy$$
$$= \frac{(-1)^n 2^{2n+\eta-1}}{(2n+\eta)!}(\lambda)_{n+\eta}\Big(\frac{\eta-\alpha+1}{2}\Big)_n \mathrm{B}\Big(\lambda+n+\frac{1}{2}, \frac{\alpha+\eta}{2}\Big),$$

gde je $\eta = 0$ ili $\eta = 1$, $\mathrm{Re}\,\alpha > -\eta$, $\mathrm{Re}\,\lambda > -1/2$, sledi da je

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(s)^{n-1}{}_2F_3(\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha+1}{2}; \frac{\alpha-\eta+1}{2}-j, \frac{1}{2}, \frac{\alpha+\eta+1}{2}+j+\lambda; -[\frac{(an-b)x}{2}]^2)}{(an-b)^{2m+p-1}((an-b)^2-\omega^2)} =$$
$$-\omega^{-2m-p}\,\Omega_2\Big({}_2F_3\Big(\tfrac{\alpha}{2}, \tfrac{\alpha+1}{2}; \tfrac{\alpha-\eta+1}{2}-j, \tfrac{1}{2}, \tfrac{\alpha+\eta+1}{2}+j+\lambda; -(\tfrac{\omega x}{2})^2\Big)\cos\Omega_1$$
$$\mp{}_2F_3\Big(\tfrac{\alpha}{2}+1, \tfrac{\alpha+1}{2}; \tfrac{2+\alpha-\eta}{2}-j, \tfrac{3}{2}, \tfrac{\alpha+\eta+2}{2}+j+\lambda; -(\tfrac{\omega x}{2})^2\Big)\omega x\eta_4\sin\Omega_1\Big)$$
$$+\eta_3\sum_{i=1}^{m}\Big(\frac{c\pi(-1)^{i+p}x^{2i+p-2}\eta_1}{2(2i+p-2)!} - \sum_{k=0}^{L}\frac{(-1)^k F(2i+p-1-2k-\delta)x^{2k+\delta}\eta_2}{(2k+\delta)!}\Big),$$

gde su oznake Ω_1 i Ω_2 iste kao u prethodna dva primera, i još je

$$\eta_1 = \Big(\frac{\eta-\alpha-2i-p+3}{2}\Big)_j \mathrm{B}\Big(\lambda+j+\frac{1}{2}, \frac{\eta+\alpha+2i+p-2}{2}\Big),$$
$$\eta_2 = \Big(\frac{\eta-\alpha+1-2k-\delta}{2}\Big)_j \mathrm{B}\Big(\lambda+j+\frac{1}{2}, \frac{\eta+\alpha+2k+\delta}{2}\Big),$$
$$\eta_3 = \frac{2^{2j+\eta}(\lambda)_{j+\eta}\Gamma(\frac{\eta+\alpha+1}{2}+\lambda+j)}{(2\lambda)_{2j+\eta}(\frac{\eta-\alpha+1}{2})_j\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{\alpha+\eta}{2})\omega^{2m-2i+2}},$$
$$\eta_4 = \frac{(\frac{\eta-\alpha}{2})_j\Gamma(\frac{\alpha+\eta+1}{2}+\lambda+j)\Gamma(\frac{1+\alpha+\eta}{2})}{(\frac{\eta-\alpha+1}{2})_j\Gamma(\frac{\eta+\alpha}{2})\Gamma(\frac{\alpha+\eta+2}{2}+\lambda+j)}.$$

5.2 Sumiranje redova sa trigonometrijskim integralom i trigonometrijskom funkcijom

U ovom odeljku prikazani su novi rezultati, koji se prvi put pojavljuju u ovoj disertaciji. Posmatrajmo redove (5.2) i (5.3) čiji članovi sadrže trigonometrijske integrale, definisane relacijom (5.1). Ako se u ovim redovima svaki član sume pomnoži trigonometrijskom funkcijom $\sin x$ ili $\cos x$, dobijaju se novi redovi:

$$I_\alpha^{T,g} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(s)^{n-1} T((an-b)x)}{(an-b)^\alpha} g((an-b)z), \tag{5.10}$$

$$I_{\alpha,\omega}^{T,g} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(s)^{n-1} T((an-b)x)}{(an-b)^\alpha((an-b)^2-\omega^2)} g((an-b)z), \tag{5.11}$$

gde je $a = \left\{ \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\}$ $b = \left\{ \begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\}$, $s = 1$ ili -1, $\alpha \in R^+$, $\omega \in R$, $\omega \neq an - b$, $g(x)$ može biti $\sin x$ ili $\cos x$, a $T(x)$ označava trigonometrijski integral $S(x)$ ili $C(x)$, definisan relacijom (5.1).

5.2.1 Red sa trigonometrijskim integralom i trigonometrijskom funkcijom

U redu (5.10) zamenimo integral $T(x)$, pa zatim promenimo redosled sumiranja i integracije. Tako se dobija sledeći integral:

$$I_\alpha^{T,g} = \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(s)^{n-1} f((an-b)xy) g((an-b)z)}{(an-b)^\alpha} \right) \psi(y)dy, \quad \alpha \in R^+.$$

Sumu reda koji je deo podintegralne funkcije, u stvari reda sa proizvodom dve trigonometrijske funkcije, dobićemo pomoću formule (2.27) za $\alpha \in N$, tj. $\alpha = 2m - r, m \in N$, a r može biti 0 ili 1. Pritom se u ovoj formuli uzima xy umesto y, a z umesto x. Primetimo da su granice za xy iste kao za x jer je $0 \leq y \leq 1$. Na kraju se dobija konačna formula za sumiranje reda (5.10):

$$
\begin{aligned}
I^{T,g}_{2m-r} &= (b-1)\frac{sd(-1)^{m-\delta}z^{2m-\delta}}{2(2m-\delta)!}\int_0^1 \psi(y)dy \\
&+ \sum_{i=0}^{m-1-d\delta} \frac{(-1)^{m-1+d-d\delta}c\pi x^{2m-2i-\delta-r-1}z^{2i+\delta}}{(2i+\delta)!2(2m-2i-\delta-r-1)!}\int_0^1 \psi(y)y^{2m-2i-\delta-r-1}dy \\
&+ \sum_{i=0}^{m-1-d\delta}\sum_{j=0}^{m} \frac{(-1)^{i+j}F(2m-2i-\delta-r-2j-t)x^{2j+t}z^{2i+\delta}}{(2i+\delta)!(2j+t)!}\int_0^1 \psi(y)y^{2j+t}dy,
\end{aligned}
\tag{5.12}
$$

gde je $f = \left\{\begin{smallmatrix}\sin\\ \cos\end{smallmatrix}\right\}$ $t = \left\{\begin{smallmatrix}1\\ 0\end{smallmatrix}\right\}$ i nezavisno, $g = \left\{\begin{smallmatrix}\sin\\ \cos\end{smallmatrix}\right\}$ $\delta = \left\{\begin{smallmatrix}1\\ 0\end{smallmatrix}\right\}$. Parametar r određuje se na sledeći način: $r = \begin{cases} 0, & f = g \\ 1, & f \neq g \end{cases}$ za $F = \zeta, \eta, \lambda$, ali kad je $F = \beta$, treba uzeti da je $r = \begin{cases} 1, & f = g \\ 0, & f \neq g \end{cases}$. Vrednosti za d nalaze se u Tabeli III, a za ostale potrebne parametre u Tabeli VI:

Tabela VI

a	b	s	c	F	Oblasti konvergencije
1	0	1	1	ζ	$G_1 = \{(z,x) \mid -\pi < z < \pi, \lvert z\rvert < x < 2\pi - \lvert z\rvert\}$
1	0	-1	0	η	$G_2 = \{(z,x) \mid -\pi < z < \pi, \lvert z\rvert - \pi < x < \pi - \lvert z\rvert\}$
2	1	1	$\frac{1}{2}$	λ	$G_3 = \{(z,x) \mid -\frac{\pi}{2} < z < \frac{\pi}{2}, \lvert z\rvert < x < \pi - \lvert z\rvert$
2	1	-1	0	β	$G_4 = \{(z,x) \mid -\frac{\pi}{2} < z < \frac{\pi}{2}, \lvert z\rvert - \frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} - \lvert z\rvert\}$

5.2.2 Opštiji red sa trigonometrijskim integralom i trigonometrijskom funkcijom

Posmatrajmo red (5.11) za $\alpha = 2m + p - 1$, $m \in N$, p uzima vrednost 0 ili 1. Zamenom integrala $T(x)$, pa zatim promenom redosleda sumiranja i integracije, dobija se sledeći integral:

$$
I^{T,g}_{2m+p-1,\omega} = \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(s)^{n-1}f((an-b)xy)g((an-b)z)}{(an-b)^{2m+p-1}((an-b)^2-\omega^2)}\right)\psi(y)dy.
$$

Kako se u okviru podintegralne funkcije pojavljuje red sa proizvodom dve trigonometrijske funkcije opštijeg tipa, (2.4), njegovu sumu odredićemo pomoću odgovarajuće formule, (2.39). Pritom se u ovoj formuli uzima

xy umesto y, a z umesto x. Primetimo da su granice za xy iste kao za x jer je $0 \leq y \leq 1$. Konačno se dobija tražena suma

$$
\begin{aligned}
I_{2m+p-1,\omega}^{T,g} = & \frac{c\pi}{2} \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=0}^{i-1-d\delta} \frac{(-1)^{i-d-d\delta}\, z^{2k+\delta} x^{2i-2k-\delta+p-2} \Psi(2i-2k-\delta+p-2)}{\omega^{2m-2i+2}(2k+\delta)!(2i-2k-\delta+p-2)!} \\
& - \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=0}^{i-1-d\delta} \sum_{j=0}^{M} \frac{(-1)^{k+j} F(2i-2k-2j-\delta-t+p-1) z^{2k+\delta} x^{2j+t}}{\omega^{2m-2i+2}(2k+\delta)!(2j+t)!} \Psi(2j+t) \\
& + \frac{s(1-b)\Psi(0)}{2\omega^{2m+2}} \left(g(0)p + \sum_{i=1}^{m} \frac{(-1)^{i-\delta} z^{2i-\delta} d}{\omega^{-2i}(2i-\delta)!} \right) - \frac{\Omega_2\, g(\omega z)}{\omega^{2m+p}} \int_0^1 \psi(y) f_\omega(xy)\, dy,
\end{aligned}
\tag{5.13}
$$

gde je $m \in N$, $\omega \in R$, $\omega \neq an - b$, $g = \left\{ {\sin \atop \cos} \right\}$ $\delta = \left\{ {1 \atop 0} \right\}$ i nezavisno od toga, $f = \left\{ {\sin \atop \cos} \right\}$ $t = \left\{ {1 \atop 0} \right\}$, $M = i - k - 1 + (-1)^\delta (1-p)d$, dok parametar p treba izabrati na sledeći način: $p = \begin{cases} 1, & f = g \\ 0, & f \neq g \end{cases}$ za $F = \zeta, \eta, \lambda$, ali kad je $F = \beta$, treba uzeti da je $p = \begin{cases} 0, & f = g \\ 1, & f \neq g \end{cases}$. Oznaka $f_\omega(x)$ uvedena je radi preglednosti, na isti način kao u formuli (2.14), tj.

$$
f_\omega(x) = f\left(\omega x - \frac{\pi(s+1)(b+\omega)}{2a}\right), \tag{5.14}
$$

a Ω_2 i $\Psi(\nu)$ dati su relacijama (5.7) i (5.9). Svi ostali relevantni parametri navedeni su u Tabeli VI, dok je d dato u Tabeli III.

5.3 Sumiranje redova sa integralima Besselovih/Struveovih funkcija

Stavljajući u formuli (5.1) umesto funkcija cos i sin, Besselovu J_ν odnosno Struveovu $\mathbf{H}_\nu$ funkciju, dolazimo do integrala (videti [57])

$$
B_\nu(x) = \int_0^1 J_\nu(xy)\psi(y)dy, \quad S_\nu(x) = \int_0^1 \mathbf{H}_\nu(xy)\psi(y)dy. \tag{5.15}
$$

Sada se mogu tražiti sume novih redova, koji nastaju tako što se u redovima (3.1) i (3.3) Besselova ili Struveova funkcija zamene integralima (5.15), redom.

Korišćenjem formula (3.6) i (3.21) za sumiranje redova (3.1) i (3.3), mogu se odrediti sume sledećih redova

$$I_\alpha^D = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(s)^{n-1} D_\nu((an-b)x)}{(an-b)^\alpha}, \tag{5.16}$$

$$I_{\alpha,\omega}^D = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(s)^{n-1} D_\nu((an-b)x)}{(an-b)^\alpha((an-b)^2-\omega^2)}, \tag{5.17}$$

gde je $a = \left\{\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\right\}$ $b = \left\{\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right\}$, $s = 1$ ili -1, $\nu, \omega \in R$, $\omega \neq an - b$, $\alpha \in R^+$, a $D_\nu(x)$ označava $B_\nu(x)$ ili $S_\nu(x)$, tj.

$$D_\nu(x) = \int_0^1 \varphi_\nu(xy)\psi(y)dy,$$

gde φ_ν predstavlja, kao u trećem poglavlju, J_ν ili $\mathbf{H}_\nu$.

5.3.1 Red sa integralom Besselove ili Struveove funkcije

Da bi se odredila suma reda (5.16), najpre se u tom redu zameni integral oblika $D_\nu(x)$, pa se zatim promeni redosled sumiranja i integracije i dobija se

$$I_\alpha^D = \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(s)^{n-1}\varphi_\nu((an-b)xy)}{(an-b)^\alpha} \right) \psi(y)dy, \quad \alpha \in R^+.$$

Za sumiranje ovog reda koristi se formula (3.6), gde se uzima xy umesto x. Primetimo da su granice za xy iste kao za x jer je $0 \leq y \leq 1$. Tako se dobija konačna formula za sumiranje reda (5.16)

$$\begin{aligned} I_\alpha^D = & \frac{c\pi x^{\alpha-1}}{2^\alpha \Gamma(\frac{\alpha-\nu+1}{2})\Gamma(\frac{\alpha+\nu+1}{2}) f(\frac{\pi(\alpha-\nu)}{2})} \int_0^1 y^{\alpha-1}\psi(y)dy \\ & + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i F(\alpha-\nu-2i-\delta)x^{\nu+2i+\delta}}{2^{\nu+2i+\delta}\Gamma(i+1+\frac{\delta}{2})\Gamma(\nu+i+1+\frac{\delta}{2})} \int_0^1 \psi(y)y^{\nu+2i+\delta}dy, \end{aligned} \tag{5.18}$$

gde je $D_\nu = \left\{\begin{smallmatrix}B_\nu\\S_\nu\end{smallmatrix}\right\}$ $f = \left\{\begin{smallmatrix}\cos\\\sin\end{smallmatrix}\right\}$ $\delta = \left\{\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right\}$. Ostali parametri određeni su Tabelom III. Formula (5.18) postaje zatvorena u istim slučajevima kao formula (3.6).

5.3.2 Opštiji red sa integralom Besselove ili Struveove funkcije

Odredićemo sada sumu reda (5.17) za $\alpha = 2m - \mu$, $m \in N_0$, $\mu \in R$, i to prvo za slučaj $m = 0$. Najpre se zameni integral $D_\nu(x)$, pa se onda promeni redosled sumiranja i integracije. Zatim se koristi formula (3.21) za $m = 0$. Na taj način se dobija sledeća formula za sumiranje reda (5.17)

$$I^D_{-\mu,\omega} = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^\nu}{\omega^2} K\Psi(\nu) - \frac{\Omega_2}{\omega^{1-\mu}}[(-1)^\delta f(\Omega_1)B_\nu(\omega x) + \overline{f}(\Omega_1)S_\nu(\omega x)], \quad (5.19)$$

gde je $\omega \in R$, $\omega \neq an - b$. U cilju preglednosti, korišćene su oznake za Ω_1, Ω_2 i $\Psi(\nu)$ date relacijama (5.7) i (5.9), a uvedena je i nova oznaka

$$K = \frac{s(1-b)(1-\mu-\nu)}{2\Gamma(\nu+1)}. \quad (5.20)$$

Ovde je $D_\nu(x) = \left\{ \begin{smallmatrix} B_\nu(x) \\ S_\nu(x) \end{smallmatrix} \right\}$ $f = \left\{ \begin{smallmatrix} \cos \\ \sin \end{smallmatrix} \right\}$ $\overline{f} = \left\{ \begin{smallmatrix} \sin \\ \cos \end{smallmatrix} \right\}$ $\delta = \left\{ \begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\}$. Ostale parametre određujemo na osnovu Tabele III. Partikularni slučajevi 1–8 formule (5.19) navedeni su u Tablici IX.

Pomoću sličnog postupka, ali ovoga puta korišćenjem formule (3.21) za $m \geq 1$, nalazi se suma reda (5.17). Dakle, dobija se formula

$$\begin{aligned} I^D_{2m-\mu,\omega} &= \frac{-\Omega_2}{\omega^{2m+1-\mu}}[(-1)^\delta f(\Omega_1)B_\nu(\omega x) + \overline{f}(\Omega_1)S_\nu(\omega x)] \\ &+ \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^\nu}{\omega^{2m+2}}\left[\frac{c\sqrt{\pi}}{2}\sum_{i=1}^{m} A_i\Psi(2i-\mu-\nu-1) - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{M} B_{ik}\Psi(2k+\delta) + K\Psi(\nu)\right], \end{aligned} \quad (5.21)$$

gde su A_i i B_{ik} prethodno uvedeni u formuli (3.21), K je dato izrazom (5.20), a Ω_1, Ω_2 i $\Psi(\nu)$ relacijama (5.7) i (5.9). $D_\nu(x) = \left\{ \begin{smallmatrix} B_\nu(x) \\ S_\nu(x) \end{smallmatrix} \right\}$ $f = \left\{ \begin{smallmatrix} \cos \\ \sin \end{smallmatrix} \right\}$ $\overline{f} = \left\{ \begin{smallmatrix} \sin \\ \cos \end{smallmatrix} \right\}$ $\delta = \left\{ \begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\}, M = i - 1 + (1 - \mu - \nu)(1 - \delta), m \in N_0$, $\alpha = 2m - \mu$. Ostali parametri su u Tabeli III, gde je $d = 1 - (\mu + \nu)$.

Pomoću generalnih formula (5.18),(5.19) i (5.21) sumiraju se redovi koji do sada nisu razmatrani u literaturi.

Neki redovi oblika (5.16) i (5.17) koji sadrže specijalne tipove funkcija umesto Besselovih ili Struveovih integrala, specificiranjem funkcije $\psi(y)$ takođe se mogu predstaviti pomoću Riemannove zeta funkcije i srodnih funkcija.

Na primer, posmatrajmo $\psi(y) = \dfrac{y^{1-\nu}}{\sqrt{1-y^2}}$ u formuli (5.15). Kako je ([18], str.702)

$$\int_0^1 \frac{J_\nu(xy)y^{1-\nu}}{\sqrt{1-y^2}}dy = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\mathbf{H}_{\nu-1/2}(x),$$

to je $B_\nu(x) = \sqrt{\dfrac{\pi}{2x}}\mathbf{H}_{\nu-1/2}(x)$. Zamenom u formuli (5.16), dobija se

$$I_\alpha^B = \sum_{n=1}^\infty \frac{(s)^{n-1}B_\nu(nx)}{n^\alpha} = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\cdot\sum_{n=1}^\infty \frac{(s)^{n-1}\mathbf{H}_{\nu-1/2}(nx)}{n^{\alpha+1/2}}.$$

Uzimajući u obzir da je suma I_α^B data formulom (5.18), gde je $a = 1, b = 0, f = \cos, \delta = 0$ (sada je $D_\nu = B_\nu$), može se izračunati

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{(s)^{n-1}\mathbf{H}_{\nu-1/2}(nx)}{n^{\alpha+1/2}} = \frac{c\pi x^{\alpha-1/2}}{2^{\alpha+1/2}\Gamma(\frac{\alpha-\nu+2}{2})\Gamma(\frac{\alpha+\nu+1}{2})\cos(\frac{\pi(\alpha-\nu)}{2})} + \sum_{i=0}^\infty \frac{(-1)^i F(\alpha-\nu-2i)x^{\nu+2i+1/2}}{2^{\nu+1/2+2i}\Gamma(i+\frac{3}{2})\Gamma(\nu+i+1)},$$

a ostali parametri nalaze se u Tabeli I.

Kod drugog primera uzmimo da je $\psi(y) = y^\nu(1-y^2)^{\nu-1/2}$. U ovom slučaju je ([18], str.702)

$$B_\nu(x) = 2^{\nu-1}x^{-\nu}\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+\frac{1}{2})J_\nu^2\left(\frac{x}{2}\right).$$

Zamenjujući ovaj izraz u formuli (5.17) i stavljajući $a = 1, b = 0, s = -1, m = 0$, dobija se

$$I_{-\mu,\omega}^B = \frac{2^{\nu-1}\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}{x^\nu}\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1}n^{\mu-\nu}}{n^2-\omega^2}J_\nu^2\left(\frac{nx}{2}\right).$$

Pomoću formule (5.21) za $\varphi_\nu = B_\nu, m = 0, a = 1, b = 0, s = -1$, odakle sledi da je $\mu+\nu = 0$ (po Tabeli III gde je $\mu+\nu = 1-d$) izračunava se suma reda

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1}J_\nu^2(\frac{nx}{2})}{n^{2\nu}(n^2-\omega^2)} = \frac{2^{1-\nu}x^\nu}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}\Big[-\frac{(x/2)^\nu}{2\omega^2\Gamma(\nu+1)}\int_0^1 y^{2\nu}(1-y^2)^{\nu-\frac{1}{2}}dy + \frac{\pi\omega^{-\nu-1}}{2\sin\pi\omega}B_\nu(\omega x)\Big] = \frac{J_\nu^2(\frac{\omega x}{2})}{2\omega^{2\nu+1}\sin\pi\omega} - \frac{x^{2\nu}}{2^{4\nu+1}\omega^2\Gamma^2(\nu+1)}.$$

5.4 Sumiranje redova sa Besselovim ili Struveovim integralom i trigonometrijskom funkcijom

Odredićemo sume novih redova, koji se dobijaju tako što se u redovima (5.16) i (5.17) svaki član sume pomnoži trigonometrijskom funkcijom $\sin x$ ili $\cos x$. Naime, sumiraćemo sledeće redove:

$$I_{\alpha}^{D,f} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(s)^{n-1} D_{\nu}((an-b)x)}{(an-b)^{\alpha}} f((an-b)z), \tag{5.22}$$

$$I_{\alpha,\omega}^{D,f} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(s)^{n-1} D_{\nu}((an-b)x)}{(an-b)^{\alpha}((an-b)^2-\omega^2)} f((an-b)z), \tag{5.23}$$

gde je $a = \left\{ {1 \atop 2} \right\}$ $b = \left\{ {0 \atop 1} \right\}$, $s = 1$ ili -1, $\alpha \in R^+$, $\nu, \omega \in R$, $\omega \neq an - b$, $f(x)$ može biti $\sin x$ ili $\cos x$, a $D_{\nu}(x)$ označava integral Besselove ili Struveove funkcije, tj.

$$D_{\nu}(x) = \int_0^1 \varphi_{\nu}(xy)\psi(y)dy,$$

gde φ_{ν} predstavlja Besselovu, J_{ν}, ili Struveovu, $\mathbf{H}_{\nu}$, funkciju.

5.4.1 Red sa Besselovim ili Struveovim integralom i trigonometrijskom funkcijom

U redu (5.22) zamenimo integral $D_{\nu}(x)$, pa zatim promenimo redosled sumiranja i integracije. Tako se dobija sledeći integral:

$$I_{\alpha}^{D,f} = \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(s)^{n-1} \varphi_{\nu}((an-b)xy)}{(an-b)^{\alpha}} f((an-b)z) \right) \psi(y)dy, \quad \alpha \in R^+.$$

Sumiraćemo red koji je deo podintegralne funkcije, i to koristeći formulu (4.5), gde se uzima xy umesto x, a z umesto y. Primetimo da su granice za xy iste kao za x jer je $0 \leq y \leq 1$. Na kraju se dobija konačna formula za sumiranje reda (5.22):

$$I_\alpha^{D,f} = \frac{(-1)^{d\delta} c\sqrt{\pi}\, 2^{-\nu-1}}{\Gamma(\alpha-\nu)h(\frac{\pi(\alpha-\nu)}{2})} \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_1\, x^{\nu+2j+\delta} z^{\alpha-\nu-2j-1-\delta} \int_0^1 \psi(y) y^{\nu+2j+\delta} dy$$
$$+ \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{i} \frac{(-1)^i x^{\nu+2j+\delta} z^{2i-2j+d} F(\alpha-\nu-2i-d-\delta)}{\alpha_2} \int_0^1 \psi(y) y^{\nu+2j+\delta} dy, \tag{5.24}$$

gde su uvedene oznake:

$$\alpha_1 = \binom{\alpha-\nu-1}{2j+\delta} \frac{\Gamma(j+\frac{\delta+1}{2})}{\Gamma(j+\nu+1+\frac{\delta}{2})},$$
$$\alpha_2 = \frac{2^\nu \sqrt{\pi}\, \Gamma(j+\nu+1+\frac{\delta}{2})(2i-2j+d)!(2j+\delta)!}{\Gamma(j+\frac{\delta+1}{2})},$$

i gde je $\alpha > \nu > -\frac{1}{2}$, $f = \left\{ \begin{smallmatrix} \sin \\ \cos \end{smallmatrix} \right\}$ $d = \left\{ \begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix} \right\}$ i nezavisno od toga, $\varphi_\nu = \left\{ \begin{smallmatrix} J_\nu \\ \mathbf{H}_\nu \end{smallmatrix} \right\}$ $g = \left\{ \begin{smallmatrix} \cos \\ \sin \end{smallmatrix} \right\}$ $\delta = \left\{ \begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\}$. Funkcija h određuje se na sledeći način: $h = \begin{cases} \cos, & f = g \\ \sin, & f \neq g \end{cases}$. Ostali parametri određeni su Tabelom VII:

Tabela VII

a	b	s	c	F	Oblasti konvergencije
1	0	1	1	ζ	$R_1 = \{(x,z) \mid -\pi < x < \pi, \lvert x\rvert < z < 2\pi - \lvert x\rvert\}$
1	0	-1	0	η	$R_2 = \{(x,z) \mid -\pi < x < \pi, \lvert x\rvert - \pi < z < \pi - \lvert x\rvert\}$
2	1	1	$\frac{1}{2}$	λ	$R_3 = \{(x,z) \mid -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \lvert x\rvert < z < \pi - \lvert x\rvert$
2	1	-1	0	β	$R_4 = \{(x,z) \mid -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \lvert x\rvert - \frac{\pi}{2} < z < \frac{\pi}{2} - \lvert x\rvert\}$

Formula (5.24) postaje zatvorena u istim slučajevima kao formula (4.5), naime za nenegativne celobrojne vrednosti parametara α i ν, takve da se funkcija F anulira.

5.4.2 Opštiji red sa Besselovim ili Struveovim integralom i trigonometrijskom funkcijom

Red (5.23) sumiraćemo tako što ćemo u njemu zameniti integral $D_\nu(x)$, a onda promeniti redosled sumiranja i integracije. Tako se dobija sledeći integral:

$$I_{\alpha,\omega}^{D,f} = \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(s)^{n-1} \varphi_\nu((an-b)xy)}{(an-b)^\alpha ((an-b)^2 - \omega^2)} f((an-b)z) \right) \psi(y) dy.$$

Red koji je deo podintegralne funkcije je u stvari red sa proizvodom Besselove (Struveove) i trigonometrijske funkcije opštijeg tipa, (4.3). Za njegovo sumiranje upotrebićemo formulu (4.12) za $\alpha = \nu+2m+p-1$, $m \in N$, a p uzima vrednost 0 ili 1. Umesto promenljive x treba staviti xy, a umesto y, promenljivu z. Primetimo da su granice za xy iste kao za x jer je $0 \le y \le 1$. Na kraju se dobija konačna formula za sumiranje reda (5.23):

$$
\begin{aligned}
I_{\alpha,\omega}^{D,f} = & \frac{-\Omega_2 f_\omega(z)}{\omega^{2m+p+\nu}} D_\nu(\omega x) + \frac{(\frac{x}{2})^\nu}{\omega^{2m+2}\sqrt{\pi}} \Bigg[\Phi_1 \Psi(\nu) + \sum_{i=1}^{m} \frac{(-1)^{i-\delta} x^{2i-\delta}}{\Phi_2} \Psi(\nu+2i-\delta) \\
& + \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=0}^{i-1-d\delta} \frac{(-1)^{i-d-d\delta} x^{2k+\delta} z^{2i-2k-\delta+p-2}}{\Phi_3} \Psi(\nu+2k+\delta) \\
& - \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=0}^{i-1-d\delta} \sum_{j=0}^{M} \frac{(-1)^{k+j} F(2i-2k-2j-\delta-t+p-1) x^{2k+\delta} z^{2j+t}}{\Phi_4} \Psi(\nu+2k+\delta) \Bigg]
\end{aligned}
\tag{5.25}
$$

gde je $\alpha = \nu + 2m + p - 1$, $m \in N$, $\omega \in R$, $\omega \neq an - b$, $\operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}$, $\varphi = \left\{ \begin{smallmatrix} J \\ \mathbf{H} \end{smallmatrix} \right\}$ $g = \left\{ \begin{smallmatrix} \cos \\ \sin \end{smallmatrix} \right\}$ $\delta = \left\{ \begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\}$ i nezavisno od toga, $f = \left\{ \begin{smallmatrix} \sin \\ \cos \end{smallmatrix} \right\}$ $t = \left\{ \begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix} \right\}$, $M = i - k - 1 + (-1)^\delta (1-p)d$. Parametar p bira se na sledeći način: $p = \begin{cases} 1, & f = g \\ 0, & f \neq g \end{cases}$ za $F = \zeta, \eta, \lambda$, dok se za $F = \beta$ uzima da je $p = \begin{cases} 0, & f = g \\ 1, & f \neq g \end{cases}$. Svi ostali relevantni parametri navedeni su u Tabeli VII, osim d, koji je u Tabeli III. Oznaka $f_\omega(x)$ uvedena je formulom (5.14), a Ω_2 i $\Psi(\nu)$ dati su relacijama (5.7) i (5.9). Osim toga je označeno:

$$
\begin{aligned}
\Phi_1 &= \frac{g(0) sp(1-b)\sqrt{\pi}}{2\Gamma(\nu+1)}, \quad \Phi_2 = \frac{2(2i-\delta)!\Gamma(\nu+i+1-\frac{\delta}{2})}{sd(1-b)\Gamma(i+\frac{1-\delta}{2})\omega^{2i}}, \\
\Phi_3 &= \frac{2(2k+\delta)!(2i-2k-\delta+p-2)!\Gamma(\nu+k+1+\frac{\delta}{2})}{c\pi\Gamma(k+\frac{1+\delta}{2})\omega^{2i}}, \\
\Phi_4 &= \frac{(2k+\delta)!(2j+t)!\Gamma(\nu+k+1+\frac{\delta}{2})}{\Gamma(k+\frac{1+\delta}{2})\omega^{2i}}.
\end{aligned}
$$

Rezultati prikazani u ovom odeljku su novi i prvi put se pojavljuju u ovoj disertaciji.

6

Tablice

Sadržaj ovog priloga čini devet tablica konačnih suma. Svaka tablica izvedena je iz jedne formule opšteg tipa i sastoji se od svih pojedinačnih suma koje se iz nje dobijaju kombinacijom parametara. Opšte formule su birane tako da budu zastupljeni rezultati iz svih prethodnih poglavlja, s obzirom da nisu sve mogle biti prezentirane na ovaj način.

Primetimo da u nekim od ovih tablica ima suma koje se mogu izvesti jedna iz druge nekom smenom, diferenciranjem ili integraljenjem. Sve takve sume su ipak navedene, jer predstavljaju celokupnost svih pojedinačnih rezultata dobijenih iz odgovarajuće opšte formule. Osim toga, za primene je pogodnije imati svaku potrebnu sumu, nego je računati pomoću druge.

Neke od ovih tablica prvi put se pojavljuju u ranijim radovima, [45], [47], [52], [56], a ostale su izvedene u ovoj disertaciji (Tablica I, III, V, VI i VII).

Tablica I

1. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2-\omega^2} = \frac{1}{2\omega^2} - \frac{\pi \cos \omega(x-\pi)}{2\omega \sin \omega\pi}$$

2. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin nx}{n^2-\omega^2} = -\frac{\pi \sin \omega(x-\pi)}{2 \sin \omega\pi}$$

$x \in (0, 2\pi)$, $\omega \neq n$, $\omega \in R$ za 1 i 2.

3. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\cos nx}{n^2-\omega^2} = -\frac{1}{2\omega^2} + \frac{\pi\cos\omega x}{2\omega\sin\omega\pi}$$

4. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n\sin nx}{n^2-\omega^2} = \frac{\pi\sin\omega x}{2\sin\omega\pi}$$

$x \in (-\pi, \pi)$, $\omega \neq n$, $\omega \in R$ za 3 i 4.

5. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2-\omega^2} = -\frac{\pi\cos(\omega x - \frac{\pi}{2}(\omega+1))}{4\omega\cos\frac{\omega\pi}{2}}$$

6. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2-\omega^2} = -\frac{\pi\sin(\omega x - \frac{\pi}{2}(\omega+1))}{4\cos\frac{\omega\pi}{2}}$$

$x \in (0, \pi)$, $\omega \neq 2n-1$, $\omega \in R$ za 5 i 6.

7. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2n-1)\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2-\omega^2} = \frac{\pi\cos\omega x}{4\cos\frac{\omega\pi}{2}}$$

8. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2-\omega^2} = \frac{\pi\sin\omega x}{4\omega\cos\frac{\omega\pi}{2}}$$

$x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $\omega \neq 2n-1$, $\omega \in R$ za 7 i 8.

Tablica II

1. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos ny\,\cos nx}{n^{2m}} = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{x^{2i}}{(2i)!}\left(\frac{(-1)^m\pi y^{2m-2i-1}}{2(2m-2i-1)!} + \sum_{j=0}^{m-i} \frac{(-1)^{i+j}\zeta(2m-2i-2j)}{(2j)!} y^{2j}\right) - \frac{(-1)^m x^{2m}}{2(2m)!}$$

2. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin ny\,\sin nx}{n^{2m}} = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!}\left(\frac{(-1)^{m-1}\pi y^{2m-2i-2}}{2(2m-2i-2)!} + \sum_{j=0}^{m-i-1} \frac{(-1)^{i+j}\zeta(2m-2i-2j-2)}{(2j+1)!} y^{2j+1}\right)$$

3. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin ny\,\cos nx}{n^{2m-1}}=\sum_{i=0}^{m-1}\frac{x^{2i}}{(2i)!}\left(\frac{(-1)^{m-1}\pi y^{2m-2i-2}}{2(2m-2i-2)!}\right.\\ \left.+\sum_{j=0}^{m-i-1}\frac{(-1)^{i+j}\zeta(2m-2i-2j-2)}{(2j+1)!}y^{2j+1}\right)$$

4. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos ny\sin nx}{n^{2m-1}}=\sum_{i=0}^{m-2}\frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!}\left(\frac{(-1)^{m-1}\pi y^{2m-2i-3}}{2(2m-2i-3)!}\right.\\ \left.+\sum_{j=0}^{m-i-1}\frac{(-1)^{i+j}\zeta(2m-2i-2j-2)}{(2j)!}y^{2j}\right)-\frac{(-1)^{m-1}x^{2m-1}}{2(2m-1)!}$$

$(x,y)\in\{-\pi<x<\pi,\ |x|<y<2\pi-|x|\}$ za 1, 2, 3, 4.

5. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cos ny\,\cos nx}{n^{2m}}\\ =\sum_{i=0}^{m-1}\frac{x^{2i}}{(2i)!}\sum_{j=0}^{m-i}\frac{(-1)^{i+j}\eta(2m-2i-2j)}{(2j)!}y^{2j}+\frac{(-1)^{m}x^{2m}}{2(2m)!}$$

6. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\sin ny\,\sin nx}{n^{2m}}\\ =\sum_{i=0}^{m-1}\frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!}\sum_{j=0}^{m-i-1}\frac{(-1)^{i+j}\eta(2m-2i-2j-2)}{(2j+1)!}y^{2j+1}$$

7. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\sin ny\,\cos nx}{n^{2m-1}}\\ =\sum_{i=0}^{m-1}\frac{x^{2i}}{(2i)!}\sum_{j=0}^{m-i-1}\frac{(-1)^{i+j}\eta(2m-2i-2j-2)}{(2j+1)!}y^{2j+1}$$

8. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cos ny\,\sin nx}{n^{2m-1}}\\ =\sum_{i=0}^{m-2}\frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!}\sum_{j=0}^{m-i-1}\frac{(-1)^{i+j}\eta(2m-2i-2j-2)}{(2j)!}y^{2j}+\frac{(-1)^{m-1}x^{2m-1}}{2(2m-1)!}$$

$(x,y)\in\{-\pi<x<\pi,\ |x|-\pi<y<\pi-|x|\}$ za 5, 6, 7, 8.

9.
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)y\cos(2n-1)x}{(2n-1)^{2m}} = \sum_{i=0}^{m-1}\frac{x^{2i}}{(2i)!}\left(\frac{(-1)^m\pi y^{2m-2i-1}}{4(2m-2i-1)!}+\sum_{j=0}^{m-i}\frac{(-1)^{i+j}\lambda(2m-2i-2j)}{(2j)!}y^{2j}\right)$$

10.
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)y\sin(2n-1)x}{(2n-1)^{2m}} = \sum_{i=0}^{m-1}\frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!}\left(\frac{(-1)^{m-1}\pi y^{2m-2i-2}}{4(2m-2i-2)!}+\sum_{j=0}^{m-i-1}\frac{(-1)^{i+j}\lambda(2m-2i-2j-2)}{(2j+1)!}y^{2j+1}\right)$$

11.
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)y\cos(2n-1)x}{(2n-1)^{2m-1}} = \sum_{i=0}^{m-1}\frac{x^{2i}}{(2i)!}\left(\frac{(-1)^{m-1}\pi y^{2m-2i-2}}{4(2m-2i-2)!}+\sum_{j=0}^{m-i-1}\frac{(-1)^{i+j}\lambda(2m-2i-2j-2)}{(2j+1)!}y^{2j+1}\right)$$

12.
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)y\sin(2n-1)x}{(2n-1)^{2m-1}} = \sum_{i=0}^{m-2}\frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!}\left(\frac{(-1)^{m-1}\pi y^{2m-2i-3}}{4(2m-2i-3)!}+\sum_{j=0}^{m-i-1}\frac{(-1)^{i+j}\lambda(2m-2i-2j-2)}{(2j)!}y^{2j}\right)$$

$(x,y) \in \{-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2},\ |x| < y < \pi - |x|\}$ za 9, 10, 11, 12.

13.
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cos(2n-1)y\,\cos(2n-1)x}{(2n-1)^{2m-1}} = \sum_{i=0}^{m-1}\frac{x^{2i}}{(2i)!}\sum_{j=0}^{m-i-1}\frac{(-1)^{i+j}\beta(2m-2i-2j-1)}{(2j)!}y^{2j}$$

14.
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\sin(2n-1)y\,\sin(2n-1)x}{(2n-1)^{2m-1}} = \sum_{i=0}^{m-2}\frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!}\sum_{j=0}^{m-i-2}\frac{(-1)^{i+j}\beta(2m-2i-2j-3)}{(2j+1)!}y^{2j+1}$$

15.
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\sin(2n-1)y\,\cos(2n-1)x}{(2n-1)^{2m}} = \sum_{i=0}^{m-1}\frac{x^{2i}}{(2i)!}\sum_{j=0}^{m-i-1}\frac{(-1)^{i+j}\beta(2m-2i-2j-1)}{(2j+1)!}y^{2j+1}$$

16. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\cos(2n-1)y\,\sin(2n-1)x}{(2n-1)^{2m}} = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!} \sum_{j=0}^{m-i-1} \frac{(-1)^{i+j}\beta(2m-2i-2j-1)}{(2j)!} y^{2j}$$

$(x,y) \in \{-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2},\ |x| - \frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} - |x|\}$ za 13, 14, 15, 16.

Napomena: $m \in N$.

Tablica III

1. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos ny \cos nx}{n^2-\omega^2} = \frac{1}{2\omega^2} - \frac{\pi}{2\omega \sin \omega\pi} \cos(\omega y - \omega\pi) \cos \omega x$$

2. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin ny \sin nx}{n^2-\omega^2} = -\frac{\pi}{2\omega \sin \omega\pi} \sin(\omega y - \omega\pi) \sin \omega x$$

3. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin ny \cos nx}{n^2-\omega^2} = -\frac{\pi}{2 \sin \omega\pi} \sin(\omega y - \omega\pi) \cos \omega x$$

4. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cos ny \sin nx}{n^2-\omega^2} = -\frac{\pi}{2 \sin \omega\pi} \cos(\omega y - \omega\pi) \sin \omega x$$

$(x,y) \in \{-\pi < x < \pi,\ |x| < y < 2\pi - |x|\}$ za 1, 2, 3, 4.

5. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\cos ny \cos nx}{n^2-\omega^2} = -\frac{1}{2\omega^2} + \frac{\pi}{2\omega \sin \omega\pi} \cos \omega y \cos \omega x$$

6. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\sin ny \sin nx}{n^2-\omega^2} = \frac{\pi}{2\omega \sin \omega\pi} \sin \omega y \sin \omega x$$

7. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n \sin ny \cos nx}{n^2-\omega^2} = \frac{\pi}{2 \sin \omega\pi} \sin \omega y \cos \omega x$$

8. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n \cos ny \sin nx}{n^2-\omega^2} = \frac{\pi}{2 \sin \omega\pi} \cos \omega y \sin \omega x$$

$(x,y) \in \{-\pi < x < \pi,\ |x| - \pi < y < \pi - |x|\}$ za 5, 6, 7, 8.

$$9.\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)y\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2-\omega^2}=-\frac{\pi\cos\omega x}{4\omega\cos\frac{\omega\pi}{2}}\cos\left(\omega y-\frac{\pi}{2}(\omega+1)\right)$$

$$10.\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)y\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2-\omega^2}=-\frac{\pi\sin\omega x}{4\omega\cos\frac{\omega\pi}{2}}\sin\left(\omega y-\frac{\pi}{2}(\omega+1)\right)$$

$$11.\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)\sin(2n-1)y\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2-\omega^2}=-\frac{\pi\cos\omega x}{4\cos\frac{\omega\pi}{2}}\sin\left(\omega y-\frac{\pi}{2}(\omega+1)\right)$$

$$12.\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)\cos(2n-1)y\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2-\omega^2}=-\frac{\pi\sin\omega x}{4\cos\frac{\omega\pi}{2}}\cos\left(\omega y-\frac{\pi}{2}(\omega+1)\right)$$

$(x,y)\in\{-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2},\ |x|<y<\pi-|x|\}$ za 9, 10, 11, 12.

$$13.\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2n-1)\cos(2n-1)y\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2-\omega^2}=\frac{\pi\cos\omega x}{4\cos\frac{\omega\pi}{2}}\cos\omega y$$

$$14.\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2n-1)\sin(2n-1)y\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2-\omega^2}=\frac{\pi\sin\omega x}{4\cos\frac{\omega\pi}{2}}\sin\omega y$$

$$15.\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\sin(2n-1)y\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2-\omega^2}=\frac{\pi\cos\omega x}{4\omega\cos\frac{\omega\pi}{2}}\sin\omega y$$

$$16.\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cos(2n-1)y\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2-\omega^2}=\frac{\pi\sin\omega x}{4\omega\cos\frac{\omega\pi}{2}}\cos\omega y$$

$(x,y)\in\{-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2},\ |x|-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}-|x|\}$ za 13, 14, 15, 16.

Napomena: $\omega\neq n$ za 1–8, $\omega\neq 2n-1$ za 9–16, $\omega\in R$.

Tablica IV

$$1.\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_{2k+1}(nx)}{n^{2m+1}}=\frac{(2k-2m-1)!!}{(2k+2m+1)!!}x^{2m}\ \text{za } k>m,\ \text{odnosno}$$

$$\frac{(-1)^{k-m}x^{2m}}{(2m+2k+1)!!(2m-2k-1)!!}+\sum_{i=k}^{m}\frac{(-1)^{i+k}\zeta(2m-2i)\left(\frac{x}{2}\right)^{2i+1}}{(i+k+1)!(i-k)!}$$

za $0\leq k\leq m$

2. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_{2k}(nx)}{n^{2m}}=\frac{(2k-2m-1)!!}{(2k+2m-1)!!}x^{2m-1} \text{ za } k>m, \text{ odnosno}$$

$$\frac{(-1)^{k-m}x^{2m-1}}{(2m+2k-1)!!(2m-2k-1)!!}+\sum_{i=k}^{m}\frac{(-1)^{i+k}\zeta(2m-2i)\left(\frac{x}{2}\right)^{2i}}{(i+k)!(i-k)!}$$
$$\text{za } 0\le k<m, 0<k\le m$$

$x\in[0,2\pi]$ za 1 i 2.

3. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}J_{2k+1}(nx)}{n^{2m+1}}=0 \text{ za } k>m, \text{ odnosno}$$

$$\sum_{i=k}^{m}\frac{(-1)^{i+k}\eta(2m-2i)\left(\frac{x}{2}\right)^{2i+1}}{(i+k+1)!(i-k)!} \text{ za } 0\le k\le m$$

4. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}J_{2k}(nx)}{n^{2m}}=0 \text{ za } k>m, \text{ odnosno}$$

$$\sum_{i=k}^{m}\frac{(-1)^{i+k}\eta(2m-2i)\left(\frac{x}{2}\right)^{2i}}{(i+k)!(i-k)!} \text{ za } 0\le k<m, 0<k\le m$$

$x\in[-\pi,\pi]$ za 3 i 4.

5. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_{2k+1}((2n-1)x)}{(2n-1)^{2m+1}}=\frac{(2k-2m-1)!!}{2(2k+2m+1)!!}x^{2m} \text{ za } k\ge m, \text{ odnosno}$$

$$\frac{(-1)^{k-m}x^{2m}}{2(2m+2k+1)!!(2m-2k-1)!!}+\sum_{i=k}^{m}\frac{(-1)^{i+k}\lambda(2m-2i)\left(\frac{x}{2}\right)^{2i+1}}{(i+k+1)!(i-k)!}$$
$$\text{za } 0\le k\le m$$

6. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_{2k}((2n-1)x)}{(2n-1)^{2m}}=\frac{(2k-2m-1)!!}{2(2k+2m-1)!!}x^{2m-1} \text{ za } k\ge m, \text{ odnosno}$$

$$\frac{(-1)^{k-m}x^{2m-1}}{2(2m+2k-1)!!(2m-2k-1)!!}+\sum_{i=k}^{m}\frac{(-1)^{i+k}\lambda(2m-2i)\left(\frac{x}{2}\right)^{2i}}{(i+k)!(i-k)!}$$
$$\text{za } 0\le k<m, 0<k\le m$$

$x\in[0,\pi]$ za 5 i 6.

7. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}J_{2k+1}((2n-1)x)}{(2n-1)^{2m}}=0 \text{ za } k\geq m, \text{ odnosno}$$
$$\sum_{i=k}^{m}\frac{(-1)^{i+k}\beta(2m-2i-1)\left(\frac{x}{2}\right)^{2i+1}}{(i+k+1)!(i-k)!} \text{ za } 0\leq k<m, 0<k\leq m$$

8. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}J_{2k}((2n-1)x)}{(2n-1)^{2m+1}}=0 \text{ za } k\geq m, \text{ odnosno}$$
$$\sum_{i=k}^{m}\frac{(-1)^{i+k}\beta(2m-2i+1)\left(\frac{x}{2}\right)^{2i}}{(i+k)!(i-k)!} \text{ za } 0\leq k<m$$

$x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ za 7 i 8.

Napomena: $m\in N_0$ za 1,3,5,8, $m\in N$ za 2,4,6,7; $k\in N_0$. Oblasti važenja su otvorene samo za $m=0$ u 1,3,5,8, i za $m=1$ u 2,4,6,7.

Tablica V

1. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathbf{H}_{2k}(nx)}{n^{2m+1}}=\frac{(-1)^{k-m}\pi\left(\frac{x}{2}\right)^{2m}}{2(m-k)!(m+k)!}+\frac{2}{\pi}\sum_{i=k}^{m}\frac{(-1)^{i-k}\zeta(2m-2i)x^{2i+1}}{(2i-2k+1)!!(2i+2k+1)!!}$$

2. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathbf{H}_{2k+1}(nx)}{n^{2m}}$$
$$=\frac{(-1)^{k-m+1}\pi\left(\frac{x}{2}\right)^{2m-1}}{2(m-k-1)!(m+k)!}+\frac{2}{\pi}\sum_{i=k}^{m}\frac{(-1)^{i-k}\zeta(2m-2i-2)x^{2i+2}}{(2i-2k+1)!!(2i+2k+3)!!}$$

$x\in[0,2\pi]$ za 1 i 2.

3. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\mathbf{H}_{2k}(nx)}{n^{2m+1}}=\frac{2}{\pi}\sum_{i=k}^{m}\frac{(-1)^{i-k}\eta(2m-2i)x^{2i+1}}{(2i-2k+1)!!(2i+2k+1)!!}$$

4. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\mathbf{H}_{2k+1}(nx)}{n^{2m}}=\frac{2}{\pi}\sum_{i=k}^{m}\frac{(-1)^{i-k}\eta(2m-2i-2)x^{2i+2}}{(2i-2k+1)!!(2i+2k+3)!!}$$

$x\in[-\pi,\pi]$ za 3 i 4.

5. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathbf{H}_{2k}((2n-1)x)}{(2n-1)^{2m+1}} = \frac{(-1)^{k-m}\pi\left(\frac{x}{2}\right)^{2m}}{4(m-k)!(m+k)!}+\frac{2}{\pi}\sum_{i=k}^{m}\frac{(-1)^{i-k}\lambda(2m-2i)x^{2i+1}}{(2i-2k+1)!!(2i+2k+1)!!}$$

6. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathbf{H}_{2k+1}((2n-1)x)}{(2n-1)^{2m}} = \frac{(-1)^{k-m+1}\pi\left(\frac{x}{2}\right)^{2m-1}}{4(m-k-1)!(m+k)!}+\frac{2}{\pi}\sum_{i=k}^{m}\frac{(-1)^{i-k}\lambda(2m-2i-2)x^{2i+2}}{(2i-2k+1)!!(2i+2k+3)!!}$$

$x \in [0,\pi]$ za 5 i 6.

7. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\mathbf{H}_{2k}((2n-1)x)}{(2n-1)^{2m}} = \frac{2}{\pi}\sum_{i=k}^{m}\frac{(-1)^{i-k}\beta(2m-2i-1)x^{2i+1}}{(2i-2k+1)!!(2i+2k+1)!!}$$

8. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\mathbf{H}_{2k+1}((2n-1)x)}{(2n-1)^{2m+1}} = \frac{2}{\pi}\sum_{i=k}^{m}\frac{(-1)^{i-k}\beta(2m-2i-1)x^{2i+2}}{(2i-2k+1)!!(2i+2k+3)!!}$$

$x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ za 7 i 8.

Napomena: $m \in N_0$ za 2,4,6,8, $m \in N$ za 1,3,5,7; $k \in N_0$. Sume 2,4,6,8 se anuliraju za $m < k+1$, a sume 1,3,5,7 za $m < k$.

Tablica VI

1. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_{2k+1}(nx)}{n^{2m-1}}\cos(ny) = \frac{(-1)^{m+k}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m-1}}{2(m+k)!(m-k-1)!}+\sum_{i=k}^{m-2}\frac{(-1)^{i+k}\left(\frac{x}{2}\right)^{2i+1}}{(i+k+1)!(i-k)!} \times\left(\frac{(-1)^{m-i-1}\pi y^{2m-2i-3}}{2(2m-2i-3)!}+\sum_{j=0}^{m-i-1}\frac{(-1)^{j}\zeta(2m-2i-2j-2)}{(2j)!}y^{2j}\right)$$

2. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_{2k}(nx)}{n^{2m}}\cos(ny) = \sum_{i=k}^{m-1}\frac{(-1)^{i+k}\left(\frac{x}{2}\right)^{2i}}{(i+k)!(i-k)!}\left(\frac{(-1)^{m-i}\pi y^{2m-2i-1}}{2(2m-2i-1)!} +\sum_{j=0}^{m-i}\frac{(-1)^{j}\zeta(2m-2i-2j)}{(2j)!}y^{2j}\right)-\frac{(-1)^{m+k}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m}}{2(m+k)!(m-k)!}$$

3.
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_{2k+1}(nx)}{n^{2m}}\sin(ny)=\sum_{i=k}^{m-1}\frac{(-1)^{i+k}\left(\frac{x}{2}\right)^{2i+1}}{(i+k+1)!(i-k)!}$$
$$\times\left(\frac{(-1)^{m-i-1}\pi y^{2m-2i-2}}{2(2m-2i-2)!}+\sum_{j=0}^{m-i-1}\frac{(-1)^j\zeta(2m-2i-2j-2)}{(2j+1)!}y^{2j+1}\right)$$

4.
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_{2k}(nx)}{n^{2m-1}}\sin(ny)=\sum_{i=k}^{m-1}\frac{(-1)^{i+k}\left(\frac{x}{2}\right)^{2i}}{(i+k)!(i-k)!}$$
$$\times\left(\frac{(-1)^{m-i-1}\pi y^{2m-2i-2}}{2(2m-2i-2)!}+\sum_{j=0}^{m-i-1}\frac{(-1)^j\zeta(2m-2i-2j-2)}{(2j+1)!}y^{2j+1}\right)$$

$(x,y)\in\{-\pi<x<\pi,\ |x|<y<2\pi-|x|\}$ za 1, 2, 3, 4.

5.
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}J_{2k+1}(nx)}{n^{2m-1}}\cos(ny)=\sum_{i=k}^{m-2}\frac{(-1)^{i+k}\left(\frac{x}{2}\right)^{2i+1}}{(i+k+1)!(i-k)!}$$
$$\times\sum_{j=0}^{m-i-1}\frac{(-1)^j\eta(2m-2i-2j-2)}{(2j)!}y^{2j}+\frac{(-1)^{m+k-1}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m-1}}{2(m+k)!(m-k-1)!}$$

6.
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}J_{2k}(nx)}{n^{2m}}\cos(ny)=\sum_{i=k}^{m-1}\frac{(-1)^{i+k}\left(\frac{x}{2}\right)^{2i}}{(i+k)!(i-k)!}$$
$$\times\sum_{j=0}^{m-i}\frac{(-1)^j\eta(2m-2i-2j)}{(2j)!}y^{2j}+\frac{(-1)^{m+k}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m}}{2(m+k)!(m-k)!}$$

7.
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}J_{2k+1}(nx)}{n^{2m}}\sin(ny)$$
$$=\sum_{i=k}^{m-1}\frac{(-1)^{i+k}\left(\frac{x}{2}\right)^{2i+1}}{(i+k+1)!(i-k)!}\sum_{j=0}^{m-i-1}\frac{(-1)^j\eta(2m-2i-2j-2)}{(2j+1)!}y^{2j+1}$$

8.
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}J_{2k}(nx)}{n^{2m-1}}\sin(ny)$$
$$=\sum_{i=k}^{m-1}\frac{(-1)^{i+k}\left(\frac{x}{2}\right)^{2i}}{(i+k)!(i-k)!}\sum_{j=0}^{m-i-1}\frac{(-1)^j\eta(2m-2i-2j-2)}{(2j+1)!}y^{2j+1}$$

$(x,y)\in\{-\pi<x<\pi,\ |x|-\pi<y<\pi-|x|\}$ za 5, 6, 7, 8.

9. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_{2k+1}((2n-1)x)}{(2n-1)^{2m-1}}\cos((2n-1)y)=\sum_{i=k}^{m-2}\frac{(-1)^{i+k}\left(\frac{x}{2}\right)^{2i+1}}{(i+k+1)!(i-k)!}$$
$$\times\left(\frac{(-1)^{m-i-1}\pi y^{2m-2i-3}}{4(2m-2i-3)!}+\sum_{j=0}^{m-i-1}\frac{(-1)^j\lambda(2m-2i-2j-2)}{(2j)!}y^{2j}\right)$$

10. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_{2k}((2n-1)x)}{(2n-1)^{2m}}\cos((2n-1)y)=\sum_{i=k}^{m-1}\frac{(-1)^{i+k}\left(\frac{x}{2}\right)^{2i}}{(i+k)!(i-k)!}$$
$$\times\left(\frac{(-1)^{m-i}\pi y^{2m-2i-1}}{4(2m-2i-1)!}+\sum_{j=0}^{m-i}\frac{(-1)^j\lambda(2m-2i-2j)}{(2j)!}y^{2j}\right)$$

11. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_{2k+1}((2n-1)x)}{(2n-1)^{2m}}\sin((2n-1)y)=\sum_{i=k}^{m-1}\frac{(-1)^{i+k}\left(\frac{x}{2}\right)^{2i+1}}{(i+k+1)!(i-k)!}$$
$$\times\left(\frac{(-1)^{m-i-1}\pi y^{2m-2i-2}}{4(2m-2i-2)!}+\sum_{j=0}^{m-i-1}\frac{(-1)^j\lambda(2m-2i-2j-2)}{(2j+1)!}y^{2j+1}\right)$$

12. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_{2k}((2n-1)x)}{(2n-1)^{2m-1}}\sin((2n-1)y)=\sum_{i=k}^{m-1}\frac{(-1)^{i+k}\left(\frac{x}{2}\right)^{2i}}{(i+k)!(i-k)!}$$
$$\times\left(\frac{(-1)^{m-i-1}\pi y^{2m-2i-2}}{4(2m-2i-2)!}+\sum_{j=0}^{m-i-1}\frac{(-1)^j\lambda(2m-2i-2j-2)}{(2j+1)!}y^{2j+1}\right)$$

$(x,y)\in\{-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2},\ |x|<y<\pi-|x|\}$ za 9, 10, 11, 12.

13. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}J_{2k+1}((2n-1)x)}{(2n-1)^{2m}}\cos((2n-1)y)=$$
$$\sum_{i=k}^{m-1}\frac{(-1)^{i+k}\left(\frac{x}{2}\right)^{2i+1}}{(i+k+1)!(i-k)!}\sum_{j=0}^{m-i-1}\frac{(-1)^j\beta(2m-2i-2j-1)}{(2j)!}y^{2j}$$

14. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}J_{2k}((2n-1)x)}{(2n-1)^{2m-1}}\cos((2n-1)y)$$
$$=\sum_{i=k}^{m-1}\frac{(-1)^{i+k}\left(\frac{x}{2}\right)^{2i}}{(i+k)!(i-k)!}\sum_{j=0}^{m-i-1}\frac{(-1)^j\beta(2m-2i-2j-1)}{(2j)!}y^{2j}$$

15. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}J_{2k+1}((2n-1)x)}{(2n-1)^{2m-1}}\sin((2n-1)y) = \sum_{i=k}^{m-2}\frac{(-1)^{i+k}\left(\frac{x}{2}\right)^{2i+1}}{(i+k+1)!(i-k)!}\sum_{j=0}^{m-i-2}\frac{(-1)^j\beta(2m-2i-2j-3)}{(2j+1)!}y^{2j+1}$$

16. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}J_{2k}((2n-1)x)}{(2n-1)^{2m}}\sin((2n-1)y) = \sum_{i=k}^{m-1}\frac{(-1)^{i+k}\left(\frac{x}{2}\right)^{2i}}{(i+k)!(i-k)!}\sum_{j=0}^{m-i-1}\frac{(-1)^j\beta(2m-2i-2j-1)}{(2j+1)!}y^{2j+1}$$

$(x,y) \in \{-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2},\ |x| - \frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} - |x|\}$ za 13, 14, 15, 16.

Napomena: Sume 2,4,6,8,10,12,14,16 se anuliraju za $m < k$, a sume 1,3,5,7,9,11,13,15 za $m < k+1$; $k \in N_0$, $m \in N$.

Tablica VII

1. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathbf{H}_{2k+1}(nx)}{n^{2m}}\cos(ny) = \sum_{j=0}^{m-k-1}\frac{(-1)^{k-m+1}x^{2k+2j+2}y^{2m-2k-2j-3}}{(2m-2k-2j-3)!(2j+4k+3)!!(2j+1)!!} + \sum_{i=0}^{m-k-1}\sum_{j=0}^{i}\frac{(-1)^i 2x^{2k+2j+2}y^{2i-2j}\zeta(2m-2k-2i-2)}{\pi(2i-2j)!(2j+4k+3)!!(2j+1)!!}$$

2. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathbf{H}_{2k}(nx)}{n^{2m+1}}\cos(ny) = \sum_{j=0}^{m-k-1}\frac{(-1)^{k-m}x^{2k+2j+1}y^{2m-2k-2j-1}}{(2m-2k-2j-1)!(2j+4k+1)!!(2j+1)!!} + \sum_{i=0}^{m-k}\sum_{j=0}^{i}\frac{(-1)^i 2x^{2k+2j+1}y^{2i-2j}\zeta(2m-2k-2i)}{\pi(2i-2j)!(2j+4k+1)!!(2j+1)!!}$$

3. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{H}_{2k+1}(nx)}{n^{2m+1}} \sin(ny) = \sum_{j=0}^{m-k-1} \frac{(-1)^{k-m+1} x^{2k+2j+2} y^{2m-2k-2j-2}}{(2m-2k-2j-2)!(2j+4k+3)!!(2j+1)!!} + \sum_{i=0}^{m-k-1} \sum_{j=0}^{i} \frac{(-1)^i 2 x^{2k+2j+2} y^{2i-2j+1} \zeta(2m-2k-2i-2)}{\pi(2i-2j+1)!(2j+4k+3)!!(2j+1)!!}$$

4. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{H}_{2k}(nx)}{n^{2m}} \sin(ny) = \sum_{j=0}^{m-k-1} \frac{(-1)^{k-m+1} x^{2k+2j+1} y^{2m-2k-2j-2}}{(2m-2k-2j-2)!(2j+4k+1)!!(2j+1)!!} + \sum_{i=0}^{m-k-1} \sum_{j=0}^{i} \frac{(-1)^i 2 x^{2k+2j+1} y^{2i-2j+1} \zeta(2m-2k-2i-2)}{\pi(2i-2j+1)!(2j+4k+1)!!(2j+1)!!}$$

$(x,y) \in \{-\pi < x < \pi,\ |x| < y < 2\pi - |x|\}$ za 1, 2, 3, 4.

5. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\mathbf{H}_{2k+1}(nx)}{n^{2m}} \cos(ny) = \sum_{i=0}^{m-k-1} \sum_{j=0}^{i} \frac{(-1)^i 2 x^{2k+2j+2} y^{2i-2j} \eta(2m-2k-2i-2)}{\pi(2i-2j)!(2j+4k+3)!!(2j+1)!!}$$

6. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\mathbf{H}_{2k}(nx)}{n^{2m+1}} \cos(ny) = \sum_{i=0}^{m-k} \sum_{j=0}^{i} \frac{(-1)^i 2 x^{2k+2j+1} y^{2i-2j} \eta(2m-2k-2i)}{\pi(2i-2j)!(2j+4k+1)!!(2j+1)!!}$$

7. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\mathbf{H}_{2k+1}(nx)}{n^{2m+1}} \sin(ny) = \sum_{i=0}^{m-k-1} \sum_{j=0}^{i} \frac{(-1)^i 2 x^{2k+2j+2} y^{2i-2j+1} \eta(2m-2k-2i-2)}{\pi(2i-2j+1)!(2j+4k+3)!!(2j+1)!!}$$

8. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\mathbf{H}_{2k}(nx)}{n^{2m}} \sin(ny) = \sum_{i=0}^{m-k-1} \sum_{j=0}^{i} \frac{(-1)^i 2 x^{2k+2j+1} y^{2i-2j+1} \eta(2m-2k-2i-2)}{\pi(2i-2j+1)!(2j+4k+1)!!(2j+1)!!}$$

$(x,y) \in \{-\pi < x < \pi,\ |x| - \pi < y < \pi - |x|\}$ za 5, 6, 7, 8.

9. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathbf{H}_{2k+1}((2n-1)x)}{(2n-1)^{2m}}\cos((2n-1)y) = \sum_{j=0}^{m-k-1}\frac{(-1)^{k-m+1}x^{2k+2j+2}y^{2m-2k-2j-3}}{2(2m-2k-2j-3)!(2j+4k+3)!!(2j+1)!!} + \sum_{i=0}^{m-k-1}\sum_{j=0}^{i}\frac{(-1)^i 2x^{2k+2j+2}y^{2i-2j}\lambda(2m-2k-2i-2)}{\pi(2i-2j)!(2j+4k+3)!!(2j+1)!!}$$

10. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathbf{H}_{2k}((2n-1)x)}{(2n-1)^{2m+1}}\cos((2n-1)y) = \sum_{j=0}^{m-k-1}\frac{(-1)^{k-m}x^{2k+2j+1}y^{2m-2k-2j-1}}{2(2m-2k-2j-1)!(2j+4k+1)!!(2j+1)!!} + \sum_{i=0}^{m-k}\sum_{j=0}^{i}\frac{(-1)^i 2x^{2k+2j+1}y^{2i-2j}\lambda(2m-2k-2i)}{\pi(2i-2j)!(2j+4k+1)!!(2j+1)!!}$$

11. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathbf{H}_{2k+1}((2n-1)x)}{(2n-1)^{2m+1}}\sin((2n-1)y) = \sum_{j=0}^{m-k-1}\frac{(-1)^{k-m+1}x^{2k+2j+2}y^{2m-2k-2j-2}}{2(2m-2k-2j-2)!(2j+4k+3)!!(2j+1)!!} + \sum_{i=0}^{m-k-1}\sum_{j=0}^{i}\frac{(-1)^i 2x^{2k+2j+2}y^{2i-2j+1}\lambda(2m-2k-2i-2)}{\pi(2i-2j+1)!(2j+4k+3)!!(2j+1)!!}$$

12. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathbf{H}_{2k}((2n-1)x)}{(2n-1)^{2m}}\sin((2n-1)y) = \sum_{j=0}^{m-k-1}\frac{(-1)^{k-m+1}x^{2k+2j+1}y^{2m-2k-2j-2}}{2(2m-2k-2j-2)!(2j+4k+1)!!(2j+1)!!} + \sum_{i=0}^{m-k-1}\sum_{j=0}^{i}\frac{(-1)^i 2x^{2k+2j+1}y^{2i-2j+1}\lambda(2m-2k-2i-2)}{\pi(2i-2j+1)!(2j+4k+1)!!(2j+1)!!}$$

$(x,y)\in\{-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2},\ |x|<y<\pi-|x|\}$ za 9, 10, 11, 12.

13. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\mathbf{H}_{2k+1}((2n-1)x)}{(2n-1)^{2m+1}}\cos((2n-1)y) = \sum_{i=0}^{m-k-1}\sum_{j=0}^{i}\frac{(-1)^i 2x^{2k+2j+2}y^{2i-2j}\beta(2m-2k-2i-1)}{\pi(2i-2j)!(2j+4k+3)!!(2j+1)!!}$$

14. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\mathbf{H}_{2k}((2n-1)x)}{(2n-1)^{2m}}\cos((2n-1)y) = \sum_{i=0}^{m-k}\sum_{j=0}^{i}\frac{(-1)^i 2x^{2k+2j+1}y^{2i-2j}\beta(2m-2k-2i-1)}{\pi(2i-2j)!(2j+4k+1)!!(2j+1)!!}$$

15. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\mathbf{H}_{2k+1}((2n-1)x)}{(2n-1)^{2m}}\sin((2n-1)y) = \sum_{i=0}^{m-k-1}\sum_{j=0}^{i}\frac{(-1)^i 2x^{2k+2j+2}y^{2i-2j+1}\beta(2m-2k-2i-3)}{\pi(2i-2j+1)!(2j+4k+3)!!(2j+1)!!}$$

16. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\mathbf{H}_{2k}((2n-1)x)}{(2n-1)^{2m+1}}\sin((2n-1)y) = \sum_{i=0}^{m-k-1}\sum_{j=0}^{i}\frac{(-1)^i 2x^{2k+2j+1}y^{2i-2j+1}\beta(2m-2k-2i-1)}{\pi(2i-2j+1)!(2j+4k+1)!!(2j+1)!!}$$

$(x,y) \in \{-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2},\ |x| - \frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} - |x|\}$ za 13, 14, 15, 16.

Napomena: $m \in N_0$ za 2,3,6,7,10,11,13,16, $m \in N$ za 1,4,5,8,9,12, 14,15; $k \in N_0$. Sume 2 i 6 se anuliraju za $m < k$, a ostale za $m \leq k$.

Tablica VIII

$$S(x) = \int_0^1 \psi(y)\sin xy\,dy, \quad C(x) = \int_0^1 \psi(y)\cos xy\,dy$$

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2-\omega^2}S(nx) = \frac{\pi}{2}(C(\omega x) - \operatorname{ctg}\pi\omega\, S(\omega x)),$ $\qquad 0 < x < 2\pi$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-\omega^2}C(nx) = \frac{1}{2\omega^2}C(0) - \frac{\pi}{2\omega}(S(\omega x) + \operatorname{ctg}\pi\omega\, C(\omega x)),$ $\qquad 0 \leq x \leq 2\pi$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{n^2-\omega^2}S(nx) = \frac{\pi}{2}\csc\pi\omega\, S(\omega x),$ $\qquad -\pi < x < \pi$

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2-\omega^2} C(nx) = -\frac{1}{2\omega^2} C(0) + \frac{\pi}{2\omega} \csc \pi\omega \, C(\omega x), \quad -\pi \le x \le \pi$

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{(2n-1)^2-\omega^2} S(nx) = \frac{\pi}{4} (C(\omega x) + \operatorname{tg} \frac{\pi\omega}{2} S(\omega x)), \quad 0 < x < \pi$

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2-\omega^2} C(nx) = -\frac{\pi}{4\omega} (S(\omega x) - \operatorname{tg} \frac{\pi\omega}{2} C(\omega x)), 0 \le x \le \pi$

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2-\omega^2} S(nx) = \frac{\pi}{4\omega} \sec \frac{\pi\omega}{2} S(\omega x), \quad -\pi/2 \le x \le \pi/2$

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2n-1)}{(2n-1)^2-\omega^2} C(nx) = \frac{\pi}{4} \sec \frac{\pi\omega}{2} C(\omega x), \quad -\pi/2 < x < \pi/2$

Napomena: $\omega \neq n$ za 1–4, $\omega \neq 2n-1$ za 5–8, $\omega \in R$.

Tablica IX

$$B_\nu(x) = \int_0^1 J_\nu(xy)\psi(y)dy, \quad S_\nu(x) = \int_0^1 \mathbf{H}_\nu(xy)\psi(y)dy.$$

1. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^\mu B_\nu(nx)}{n^2-\omega^2} = \frac{(x/2)^\nu}{2\Gamma(\nu+1)} \int_0^1 \varphi(y) y^\nu dy - \frac{\pi\omega^{\mu-1}}{2} (\operatorname{ctg} \pi\omega B_\nu(\omega x) + S_\nu(\omega x))$$
$0 < x < 2\pi, \quad \mu + \nu = 0$

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^\mu S_\nu(nx)}{n^2-\omega^2} = \frac{\pi\omega^{\mu-1}}{2} (B_\nu(\omega x) - \operatorname{ctg} \pi\omega S_\nu(\omega x))$
$0 < x < 2\pi, \quad \mu + \nu = 1$

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n^\mu B_\nu(nx)}{n^2-\omega^2} = -\frac{(x/2)^\nu}{2\omega^2\Gamma(\nu+1)} \int_0^1 \varphi(y) y^\nu dy + \frac{\pi\omega^{\mu-1}}{2 \sin \pi\omega} B_\nu(\omega x)$
$-\pi < x < \pi, \quad \mu + \nu = 0$

4. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n^{\mu} S_{\nu}(nx)}{n^2 - \omega^2} = \frac{\pi \omega^{\mu-1}}{2 \sin \omega\pi} S_{\nu}(\omega x)$$

$$-\pi < x < \pi, \quad \mu + \nu = 1$$

5. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)^{\mu} B_{\nu}((2n-1)x)}{(2n-1)^2 - \omega^2} = \frac{\pi \omega^{\mu-1}}{4} (\operatorname{tg} \frac{\pi\omega}{2} B_{\nu}(\omega x) - S_{\nu}(\omega x))$$

$$0 < x < \pi, \quad \mu + \nu = 0$$

6. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)^{\mu} S_{\nu}((2n-1)x)}{(2n-1)^2 - \omega^2} = \frac{\pi \omega^{\mu-1}}{4} (B_{\nu}(\omega x) + \operatorname{tg} \frac{\pi\omega}{2} S_{\nu}(\omega x))$$

$$0 < x < \pi, \quad \mu + \nu = 1$$

7. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2n-1)^{\mu} B_{\nu}((2n-1)x)}{(2n-1)^2 - \omega^2} = \frac{\pi \omega^{\mu-1}}{4 \cos \frac{\pi\omega}{2}} B_{\nu}(\omega x)$$

$$-\tfrac{\pi}{2} < x < \tfrac{\pi}{2}, \quad \mu + \nu = 1$$

8. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2n-1)^{\mu} S_{\nu}((2n-1)x)}{(2n-1)^2 - \omega^2} = \frac{\pi \omega^{\mu-1}}{4 \cos \frac{\pi\omega}{2}} S_{\nu}(\omega x)$$

$$-\tfrac{\pi}{2} < x < \tfrac{\pi}{2}, \quad \mu + \nu = 0$$

Napomena: $\omega \neq n$ za 1–4, $\omega \neq 2n-1$ za 5–8, $\omega, \mu, \nu \in R$.

Literatura

[1] M. Abramowitz, A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions, with Formulas, Graphs and Mathematical Tables*, Dover Publications, New York, 1972.

[2] R.A. Askey, *Theory and Application of Special Functions*, Academic Press, Inc., N.Y., 1975.

[3] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Вышие Трансцендентные Функции*, II, Наука, Москва, 1974.

[4] B. Berkeš, *Einige Formeln über unendliche Reihen Besselscher Funktionen*, Glasnik Mat. Fiz. Astr. **10** (1955), 161–170.

[5] B.C. Berndt, *The evaluation of character series by contour integration*, Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. 386 (1972), 25–29.

[6] F.W. Bessel, *Untersuchung des Theils der planetarischen Störungen welcher aus der Bewegung der Sonne entsteht*, Berliner Abh.(1826), 1–52.

[7] J. Bourget, *Mémoire sur les nombres de Cauchy et leur application à divers problèmes de mécanique céleste*, Journal de Math.(2)**VI.** (1861), 33–54.

[8] S. Colombo, *Les Transformations de Mellin et de Hankel*, 1959.

[9] P.J. De Doelder, *On a series of product of Bessel functions of integral order*, Simon Stevin, oct. (1960), 54–57.

[10] P.J. De Doelder, *Two infinite sums, problem 79-12*, SIAM Rev. **21** (1979) 395–396.

[11] B.P. Demidovich, I.A. Maron, *Computational Mathematics*, English translation, Mir Publishers, Moscow, 1981.

[12] H.B. Dwight, *Tables of Integrals and Other Mathematical Data*, The Macmillian Co., New York, 1957.

[13] H.E. Fettis, *A summation of Bessel functions, problem 84–18, solution by E. Hansen*, SIAM Rev. **26** (1984), 430–431.

[14] L. Gegenbauer, *Über eine Relation des Herrn Hobson (May 22, 1902)*, Wiener Sitzungsberichte, CXI.(2a) (1902), 563–572.

[15] M.L. Glasser, *The evaluation of lattice sums.I.Analytic procedure*, J. Math. Phys. **14** (1973) 409–413.

[16] M.L. Glasser, *A class of Bessel summations*, Mathematics of Computation **37**(156) (1981) 499–501

[17] K.K. Gorowara, *On Bourget's function* $J_{n,k}(z)$, Ganita **22**, No.1, (1971), 21–26.

[18] И.С.Градштейн, И.М.Рыжик, *Таблицы Интегралов, Сумм, Рядов и Произведений.*, Наука, Москва, 1983.

[19] E.R. Hansen: *A Table of Series and Products*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1975.

[20] E.R. Hansen, *Solution of the problem 84-18* SIAM Rev. **27** (1985) 455–457.

[21] Z. Janković, *Two recurrence formulas for the sums* S_{2k}, Glas. Mat., Ser.II **8** (1953), 27–29.

[22] A. Карацуба, *Основы Аналитической Теории Чисел*, Наука, Москва, 1983.

[23] Б.Г. Коренев, *Введение в Теорию Бесселевых Функций*, Наука, Москва, 1971.

[24] E.C.J.Von Lommel, *Studien über die Besselschen Funktionen*, Leipzig, 1868.

[25] L. Lorch, P. Szego, *Closed expressions for some infinite series of Bessel and Struve functions*, J. Math. Anal. Appl. **122** (1987) 47–57.

[26] Y.L. Luke, *Integrals of Bessel Functions*, McGraw-Hill Book Company, Inc., 1962.

[27] W. Magnus, F. Oberhettinger, R.P. Soni, *Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1966.

[28] V. Mangulis, *Handbook of Series for Scientists and Engineers*, TRG, Control Data Corporation, Melville, New York, 1965.

[29] О.И. Маричев, *Метод Вычисления Интегралов от Специальных Функций (Теория и Таблицы Формул)*, Наука и техника, Минск, 1978.

[30] D.S. Mitrinović, D.D. Adamović, *Nizovi i redovi*, Beograd, Naučna knjiga, 1980.

[31] D.S. Mitrinović, *Specijalne funkcije, zbornik zadataka i problema*, Naučna knjiga, Beograd, 1986.

[32] А.И. Моисеев, *О разложении сумм* $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha}\cos 2\pi n\theta$ *и* $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha}\sin 2\pi n\theta$ *по степеням* θ, Изв. вузов. Мат. 4 (1986) 75–77.

[33] L.J. Mordell, *Poisson's summation formula and the Riemann zeta function*, J.London.Math.Soc. 4 (1929), 285–291.

[34] F. Oberhettinger, *Tables of Bessel Transform*, Springer-Verlag, 1972.

[35] F. Oberhettinger, *Tables of Mellin Transform*, Springer-Verlag,1974.

[36] D.M. Petković, *Problem H-381*, Fibonacci Quart., feb.(1985), 89.

[37] D.M. Petković, *Infinite sums of Bessel functions, problem 85–41, solution by M.L. Glasser*, SIAM Rev. **28** (1986), 402–403.

[38] S.D. Poisson, Journal de l'École Polytechnique, XII. (cahier 19),(1823), 300–340.

[39] А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев, *Интегралы и Ряды. Элементарные Функции*, Наука, Москва, 1981.

[40] А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев, *Интегралы и Ряды. Специальные Функции*, Наука, Москва, 1983.

[41] O.X. Schlömilch, *Über die Besselschen Funktion*, Zeitschrift für Math. und Phys. **II.** (1857), 137–165.

[42] D.V. Slavić, *On summation of trigonometric series,* Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. 263 (1969) 103–114.

[43] I.N. Sneddon, *The Use of Integral Transforms*, Mc.Graw Hill Book Company, Inc., 1972.

[44] H.M. Srivastava, *A note on functions analogous to Bourget's function*, Ganita **19**, No.2, (1968).

[45] M.S. Stanković, M.V. Đurić, D.M. Petković, *Closed form expressions for some series over product of two trigonometric functions*, Facta Universitatis, Ser. Math. Inform. **9** (1994) 69–82.

[46] M.S. Stanković, D.M. Petković, *O sumiranju nekih redova pomoću Riemannovih zeta funkcija*, Informatica '81, okt., Ljubljana (1981), 3 106.

[47] M.S. Stanković, D.M. Petković, M.V. Đurić, *Short table of summable series of Bessel functions*, Conf. Appl. Math. 5, Ljubljana (1986) 147–152.

[48] M.S. Stanković, D.M. Petković, M.V. Đurić, *Closed form expressions for some series involving Bessel functions of the first kind*, Numerical Methods and Approximation Theory, Electronic Faculty of Niš (1987) 379–389.

[49] M.S. Stanković, S.B. Tričković, M.V. Vidanović, *Series over the product of Bessel and trigonometric functions*, Int. Trans. Spec. Func. **11**, No 3 (2001) 281–290.

[50] M.S. Stanković, M.V. Vidanović, S.B. Tričković: *On the summation of series involving Bessel or Struve functions*, J. Math. Anal. Appl. **247** (2000) 15–26.

[51] M.S. Stanković, M.V. Vidanović, S.B. Tričković, *Some series over the product of two trigonometric functions and series involving Bessel functions*, Z. Anal. Anw. **20**, No 1 (2001) 235–246.

[52] M.S. Stanković, M.V. Vidanović, S.B. Tričković, *Closed form expressions for some series over certain trigonometric integrals*, Appl. Anal. **80**, No 1–2 (2001) 53-64.

[53] M.S. Stanković, M.V. Vidanović, S.B. Tričković, *Summation of some trigonometric and Schlömilch series*, J. Comp. Anal. Appl. **5**, No 3 (2003) 313–331.

[54] D.Đ. Tošić, *Some series of product of Bessel functions*, Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. 678-715 (1980) 105–110.

[55] F.G. Tricomi, *Funzioni speciali*, Conferenza del prof. Francesco G. Tricomi dell' Università di Torino. Atti del V Congresso dell' Unione Matematica Italiana. Pavia-Torino 1956, 85–102.

[56] S.B. Tričković, M.S. Stanković, V.N. Aleksić, *On the closed form expressions for some trigonometric series and series involving Bessel or Struve functions*, Z. Anal. Anw. **22**, No 1 (2003) 187–198.

[57] S.B. Tričković, M.S. Stanković, M.V. Vidanović, V.N. Aleksić, *Integral transforms and summation of some Schlömilch series*, Matematički vesnik (prihvaćeno za publikovanje).

[58] T.N. Verma, *On a generalized Weber transform*, J. Scient. Res. Banaras Hindu Univ. **17**, No 1, (1966–1967), 23–39.

[59] Е.А. Вуколов, А.В. Ефимов, *Зборник Задач по Математике*, Наука, Москва, 1984.

[60] G.N. Watson, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1948.

[61] E.T. Whittaker, G.N. Watson, *A Course of Modern Analysis*, 4th ed. Cambridge Univ. Press, Cambridge, England, 1952.

[62] A.G. Williamson, *A note on the summation of an infinite series involving a hypergeometric function*, Bull. Austral. Math. Soc. **10** (1974) 305–309.

[63] A.M. Заездный, *Гармонический Синтез в Радиотехнике и Електросвязи*, Ленинград, Энергия, 1972.

KRATKA BIOGRAFIJA

Rodjena sam 9. juna 1956. godine u Nišu. Osnovnu školu i Gimnaziju „Stevan Sremac" završila sam u Nišu kao nosilac diploma „Vuk Karadžić". Filozofski fakultet u Nišu, Grupa za matematiku, upisala sam 1975. godine, a diplomirala 22.2.1980. godine sa prosečnom ocenom 9,22. Od marta 1980. godine radila sam u Elektrotehničkoj školi „Nikola Tesla" u Nišu. Od 1.9.1981. godine radim na Fakultetu zaštite na radu u Nišu, gde sam izvodila vežbe na predmetima Matematika I, Matematika II i Planiranje i programiranje mera zaštite na radu. Sada držim vežbe iz predmeta Matematika. Magistarsku tezu „Generalisani inverzi i primene" odbranila sam 1987. godine na Grupi za matematiku Filozofskog fakulteta u Nišu. Autor sam ili koautor 15 naučnih radova. Učestvovala sam sa saopštenjima na četiri internacionalne konferencije.

Novi Sad, 24. aprila 2003.

Mirjana Vidanović

UNIVERZITET U NOVOM SADU .
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:

RBR

Identifikacioni broj

IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija

TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal

TZ

Vrsta rada: Doktorska disertacija

VR

Autor: Mirjana Vidanović

AU

Mentor: Prof. dr Stevan Pilipović

MN

Naslov rada: Sumiranje redova sa specijalnim funkcijama

MR

Jezik publikacije: Srpski (latinica)

JP

Jezik izvoda: s / e

JI

Zemlja publikovanja: Srbija i Crna Gora

ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina

UGP

Godina: 2003.

GO

Izdavač: Autorski reprint

IZ

Mesto i adresa: Novi Sad, Institut za matematiku, Prirodno-matematički fakultet, Trg Dositeja Obradovića 4

MA

Fizički opis rada: (5, 123, 63, 8, 0, 0, 9)

FO

Naučna oblast: Matematika

NO

Naučna disciplina: Matematička analiza

ND

Ključne reči: Specijalne funkcije, sumiranje redova, Besselova funkcija, Riemannova zeta funkcija

PO

UDK

Čuva se:

ČU

Važna napomena:

VN

Izvod:

IZ

Disertacija se bavi sumiranjem redova sa specijalnim funkcijama. Ovi redovi se posredstvom trigonometrijskih redova svode na redove sa Riemannovom zeta funkcijom i srodnim funkcijama. U određenim slučajevima sumacione formule se mogu dovesti na takozvani zatvoreni oblik, što znači da se beskonačni redovi predstavljaju konačnim sumama. Predloženi metodi sumacije omogućavaju ubrzanje konvergencije, a mogu se primeniti i kod nekih graničnih problema matematičke fizike. Sumacione formule uključuju kao specijalne slučajeve neke formule poznate iz literature, ali i nove sume, s obzirom da su opšteg karaktera. Pomoću ovih formula sumirani su i redovi sa integralima trigonometrijskih i specijalnih funkcija.

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 27. novembra 2002.

DP

Datum odbrane:

DO

Članovi komisije:

KO

Predsednik: dr Dušanka Perišić, redovni profesor
Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

Član: dr Stevan Pilipović, redovni profesor
Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

Član: dr Miomir Stanković, redovni profesor
Fakulteta zaštite na radu u Nišu

Član: dr Slobodan Tričković, vanredni profesor
Građevinsko-arhitektonskog fakulteta u Nišu

UNIVERSITY IN NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:

ANO

Identification number:

INO

Document type: Monograph type

DT

Type of record: Printed text

TR

Contents code: Ph. D. thesis

CC

Author: Mirjana Vidanović

AU

Mentor: Prof. dr Stevan Pilipović

MN

Title: Summation of series over special functions

TI

Language of text: Serbian

LT

Language of abstract: English

LA

Country of publication: Serbia and Montenegro

CP

Locality of publication: Vojvodina

LP

Publication year: 2003.

PY

Publisher: Author's reprint

PU

Publ. place: Novi Sad, Institute of Mathematics, Faculty of Science,
Trg Dositeja Obradovića 4

PP

Physical description: (5, 123, 63, 8, 0, 0, 9)

PD

Scientific field: Mathematics

SF

Scientific discipline: Mathematical analysis

SD

Key words: Special functions, summation of series, Bessel function, Riemann zeta function

SKW

UC

Holding data:

HD

Note:

N

Abstract:

AB

This dissertation deals with the summation of series over special functions. Through trigonometric series these series are reduced to series in terms of Riemann zeta and related functions. They can be brought in closed form in some cases, i.e. infinite series are expressed as finite sums. Closed form formulas make it possible to accelerate the convergence of some series, and have many applications in various scientific fields as well. For example, closed form solutions of the boundary value problem in mathematical physics can be obtained. Summation formulas include particular cases known from the literature, but because of their general character one can come to new sums. By means of these formulas the sums of series over integrals containing trigonometric or special functions have been found.

Accepted by Scientific Board on: November 27, 2002.

ASB

Defended:

DE

Thesis defend board:

DB

President: dr Dušanka Perišić, Full Professor,
Faculty of Science, University of Novi Sad

Member: dr Stevan Pilipović, Full Professor,
Faculty of Science, University of Novi Sad

Member: dr Miomir Stanković, Full professor,
Faculty of Environmental Engineering, University of Niš

Member: dr Slobodan Tričković, Associate Professor,
Faculty of Civil Engineering,, University of Niš