UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA
MATEMATIKU I INFORMATIKU

Branko V. Sarić

Furijeov red jedne klase funkcija sa diskontinuitetima

- doktorska disertacija -

Novi Sad, *2007* .

Sadržaj

Predgovor

Teorija funkcija kompleksne promenljive i teorija računa ostataka (rezidijuma), u okviru nje, razvijale su se tokom prethodna dva veka intenzivno. Međutim, retka je pojava, naročito u matematici, da je neku fundamentalnu teoriju, kao što je to račun ostataka (rezidijuma), zasnovao i razvio samo jedan naučnik (matematičar), u ovom konkretnom slučaju francuski matematičar *Koši*. Sama ideja o ostatku (rezidijumu) interesantnija je sa stanovišta primene, naročito na izračunavanju određenih integrala, sumiranju redova, rešavanju kako običnih tako i parcijalnih diferencijalnih jednačina, kao i diferencnih i algebarskih jednačina itd. Uopšteno govoreći, *Koši* je ostatak (rezidijum), na početku intenzivnog rada na teoriji računa ostataka (rezidijuma), definisao kao graničnu integralnu vrednost, da bi negde pri kraju svog radnog i životnog ciklusa dao novu definiciju ostatka (rezidijuma), pa je na mesto granične integralne vrednosti uveo srednju integralnu vrednost, koja se zadržala sve do današnjih dana. Jasno, tu je reč o definiciji ostatka (rezidijuma) analitičkih funkcija. Kad je u pitanju definicija ostatka (rezidijuma) neanalitičkih funkcija, ponovo je u kompleksnu analizu vraćena definicija ostatka (rezidijuma) kao granične integralne vrednosti (Poor, 1930). Da se istorija ponavlja, dokaz je ponovno redefinisanje ostatka (rezidijuma) neanalitičkih funkcija, pa se na mesto granične integralne vrednosti ponovo uvodi konačna integralna vrednost (Poor, 1953).

Sa druge strane, početkom prošloga veka, postavljene su osnove postupka generalizacije pojma izvoda skalarne i vektorske funkcije (Jung, 1908), koji je u teoriji polja prepoznatljiv pod nazivom prostorno diferenciranje, dok se rezultat, do koga ovaj postupak vodi, naziva prostornim izvodom. U savremenoj literaturi, ovaj rezultat poznat je pod imenom integralna definicija (Acker, 1998; Arnold, 1978). Njegov značaj je u jasnom geometrijskom značenju. Na osnovu postupka prostornog diferenciranja, kao i generalizacije *Rimanove* integrabilnosti, sredinom prošlog veka i nadalje (Rudin, 1966; Pfeffer 1987; Nonnenmacher, 1994), razvijao se postupak generalizacije fundamentalnih integralnih teorema, kao što je primera radi *Stoksova* teorema (Grunsky, 1983). Prva od svih generalizacija *Rimanovog* integrala bio je *Henstok-Kurcvajlov* integral u $\mathbb{R}^1$ (Henstock, 1961; Kurzweil, 1957). Ovaj integral rešavao je problem formulisanja fundamentalne teoreme integralnog računa i u slučaju kada prvi izvod funkcije nije ni *Riman* integrabilan, odnosno čak ni *Lebeg* integrabilan. Tačnije, *Henstok-Kurcvajlov* integral je super *Lebegov* integral, u tom smislu da ako je funkcija *Lebeg* integrabilna ona je istovremeno i *Henstok-Kurcvajl* integrabilna do iste vrednosti. Međutim, *Henstok-Kurcvajlov* integral u $\mathbb{R}^n$, koji je i dalje super *Lebegov* integral, ne egzistira uvek. Da bi prevazišao ovaj problem *Mauhin* će dizajnirati svoj integral (Mawhin, 1981) i nazvati ga *rp* (regular partiton) integral, koji je takođe super *Lebegov* integral.

Shodno svemu prethodno rečenom, nameće se pitanje da li ovakav postupak generalizacije fundamentalnih integralnih teorema vodi konačnom rešenju problema. Drugim rečima, da li postoji alternativni, kvalitativno nov, put rešavanja problema generalizacije fundamentalnih integralnih teorema, koji bi bio zasnovan na fundamentalnim rezultatima, kako *Rimanovog* integralnog računa, tako i *Košijevog* računa ostataka (rezidijuma). Potvrdan odgovor na ovo postavljeno pitanje je u implicitnoj vezi sa poznatim rezultatom *Žordanove* teoreme o razvoju funkcije iz klase funkcija ograničene varijacije u beskonačni *Furijeov* trigonometrijski red, koji se konformnim preslikavanjem svodi na *Loranov* potencijalni red. Naime, funkcija iz ove klase *Riman* integrabilnih funkcija, koja je funkcija ograničene varijacije na nekom intervalu prave paralelne imaginarnoj osi real*i*realne ravni i na nekom rastojanju od nje, nije diferencijabilna na pomenutom intervalu, na kome njen beskonačni *Furijeov* trigonometrijski red konvergira.

Dakle, shodno tome, sasvim je moguće da na nekom intervalu prave paralelne imaginarnoj osi real*i*realne ravni i na nekom rastojanju od nje, postoji beskonačni *Furijeov* trigonometrijski red funkcije iz klase kompleksnih funkcija, koje su skoro svuda diferencijabilne na pomenutom intervalu i sa diskontinuitetima u formi beskonačnosti. Da bi se to i dokazalo, neophodno bi bilo prethodno redefinisati pojam *Rimanovih* integralnih suma, u smislu uvođenja u analizu i totalne vrednosti nesvojstvenih integrala, kao sume *Košijeve* glavne vrednosti i *Žordanove* singularne vrednosti, gde *Žordanove* singularne vrednosti nesvojstvenih integrala su granične integralne vrednosti u singularnim tačkama funkcije. Budući da su *Košijeve* glavne vrednosti, baš kao i *Žordanove* singularne vrednosti, granične integralne vrednosti, one mogu određeno divergirati ka $+\infty$ ili ka $-\infty$, tako da se njihova suma, u nekom konkretnom slučaju, može svesti na neodređeni izraz $\infty - \infty$, koji u svakom od konkretnih slučajeva ima i konkretnu konačnu ili beskonačnu integralnu vrednost. Shodno tome, neposredno nakon uvodnog dela, u *Poglavljima 2 i 3* disertacije definisaće se i to na osnovu redefinisanog pojma *Rimanovih* integralnih suma, pojam prostornog izvoda kompleksnih funkcija. Zatim, nakon definisanja pojma rezidualne vrednosti kompleksne funkcije i u vezi sa njim pojma ostatka (rezidijuma) funkcije, ponovo kao granične integralne vrednosti, definisaće se i pojam totalne vrednosti (vt) nesvojstvenih integrala, kao sume *Košijeve* glavne vrednosti (vp) i *Žordanove* singularne vrednosti (vs). Time će se steći uslovi za generalizaciju rezultata fundamentalnih integralnih teorema. Nakon svega toga, generalizovaće se i rezultati fundamentalnih *Žordanovih* teorema *Košijevog* računa ostataka (rezidijuma). Na kraju *Poglavlja 3* disertacije definisaće se sasvim nov pojam, pojam potencijala tačke real*i*realnih prostora. Sve ovo ilustrovaće se sa nekoliko reprezentativnih primera.

U uvodnom delu *Poglavlja 4* disertacije prezentovaće se i to na osnovu rezultata prethodno pomenute *Žordanove* teoreme, rezultat u formi teoreme, koji generalizuje rezultat *Loranove* teoreme. Veći deo ovog poglavlja disertacije, u kome će se dobiti važni rezultati, biće posvećen izvođenju fundamentalnih graničnih integralnih vrednosti. Zbog njihovog ogromnog značaja za generalizaciju fundamentalnih integralnih transformacija, kao što su *Laplasova* i *Furijeova* integralna transformacija, kao i za dobijanje integralne relacije konačne *Laplasove* integralne transformacije, odnosno za dalju generalizaciju rezultata *Loranove* teoreme, prezentovaće se i njihovo alternativno izvođenje. Kao kruna svega što je prethodilo i implicitni i eksplicitno će se dokazati rezultat u formi teoreme, koji generalizuje rezultate *Žordanove* i *Dirihlejeve* teoreme, odnosno rezultat koji daje dovoljne uslove za razvoj funkcija, iz klase kompleksnih funkcija i sa diskontinuitetima u formi beskonačnosti, u beskonačni *Furijeov* trigonometrijski red. Ako se ima u vidu koliko je širok dijapazon primene *Furijeovih* redova, kako u teorijskoj tako i u primenjenoj matematici, od fundamentalnog je značaja da se jedan ovakav rezultat i dokaže. Najvažniji rezultati ovog poglavlja disertacije, baš kao i prethodnog, ilustrovaće se na kraju sa nekoliko reprezentativnih primera.

Novi Sad, 13. januar 2007. godine *Branko V. Sarić*

Glava 1

Uvod

1.1 Real*i*realni vektorski prostor

Neka je ortonormirani realni vektorski sistem $\{\mathbf{e}_k\}$ $(k = 1, 2, ..., n)$ baza n-dimenzionalnog vektorskog prostora $\mathbb{R}^n$, koji se definiše nad poljem realnih brojeva $\mathbb{R}$ (Perić, 1987). *Dekartov* proizvod dva realna vektorska prostora $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{R}^m$, u oznaci $\mathbb{R}^n \times i\,\mathbb{R}^m$ (i je imaginarna jedinica), sa definisanim osobinama da svakom uređenom paru elemenata (vektora) $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, takvih da $\mathbf{x} = \sum_k x^k \mathbf{e}_k \in \mathbb{R}^n$ i $\mathbf{y} = \sum_l y^l \mathbf{e}_l \in \mathbb{R}^m$, korespondira elemenat (vektor) $\mathbf{x} + i\,\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \times i\,\mathbb{R}^m$, pri čemu je $\mathbb{R}^n \times i\,\mathbb{R}^m$ komutativna grupa, drugim rečima aditivna *Abelova* grupa, u odnosu na vektorsko sabiranje, kao i da svakom paru elemenata $(a, \boldsymbol{\varrho})$, takvih da $a \in \mathbb{R}$ i $\boldsymbol{\varrho} \in \mathbb{R}^n \times i\,\mathbb{R}^m$, korespondira elemenat (vektor) $a\,\boldsymbol{\varrho} \in \mathbb{R}^n \times i\,\mathbb{R}^m$, pri čemu je zadovoljen i aksiom unitarizma i aksiom asocijativnosti u odnosu na množenje skalarom i aksiom distributivnosti u odnosu na vektorsko i skalarno sabiranje: $(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) + (\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2) = (\mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_2, \mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_2)$ i $a\,(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (a\,\mathbf{x}, a\,\mathbf{y})$, je real*i*realni vektorski prostor, dobijen *i*direktnom sumom, sa oznakom $\oplus i$, realnih vektorskih prostora $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{R}^m$: $\mathbb{R}^n \oplus i\,\mathbb{R}^m$.

Potprostor $\mathbb{R}^n \oplus i\,\{0\}$ real*i*realnog vektorskog prostora $\mathbb{R}^n \oplus i\,\mathbb{R}^m$, izomorfan sa realnim n-dimenzionalnim vektorskim prostorom $\mathbb{R}^n$, je realni potprostor $\mathbb{R}^n$ real*i*realnog vektorskog prostora $\mathbb{R}^n \oplus i\,\mathbb{R}^m$. Uz to, potprostor $\{0\} \oplus i\,\mathbb{R}^m$, izomorfan sa realnim m-dimenzionalnim vektorskim prostorom $\mathbb{R}^m$, je *i*realni, odnosno imaginarni, potprostor real*i*realnog vektorskog prostora $\mathbb{R}^n \oplus i\,\mathbb{R}^m$. Jasno, ova dva potprostora su komplementarna. Dimenzija real*i*realnog vektorskog prostora $\mathbb{R}^n \oplus i\,\mathbb{R}^m$ jednaka je sumi dimenzija vektorskih prostora $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{R}^m$.

1.1.1 Real*i*realna ravan

Ortonormirani realni vektorski sistem $\{\mathbf{e}_k^\star\}$ $(k = 1, 2, ..., n)$ je baza n-dimenzionalnog kompleksnog vektorskog prostora $\mathbb{C}^n$. Za razliku od realnih i real*i*realnih vektorskih prostora, koji su definisani nad poljem realnih brojeva $\mathbb{R}$, svi kompleksni vektorski prostori definisani su nad poljem kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$, tako da su elementi $\mathbf{z} = \sum_k z^k \mathbf{e}_k^\star$ $(z^k \in \mathbb{C})$, kompleksnog vektorskog prostora $\mathbb{C}^n$, kompleksni vektori $\mathbf{z}$, upravo kao i elementi $\boldsymbol{\varrho} = \sum_k x^k \mathbf{e}_k + \sum_l y^l\, \mathbf{e}_l$, gde $\mathbf{e}_k = \mathbf{e}_k$ i $\mathbf{e}_l = i\mathbf{e}_l$, svakog $n + m$-dimenzionalnog real*i*realnog vektorskog prostora. Sa jedne strane, svi $n+m$-dimenzionalni real*i*realni vektorski prostori, u slučaju kada oba realna vektorska prostora, koja u *i*direktnoj sumi tvore real*i*realni vektorski prostor, imaju zajedničku vektorsku bazu, izomorfni su sa n-dimenzionalnim kompleksnim vektorskim prostorima $\mathbb{C}^n$. Drugim rečima, svaki n-dimenzionalni realni vektorski prostor $\mathbb{R}^n$ tvori, u *i*direktnoj sumi, n-dimenzionalni real*i*realni vektorski prostor $\mathbb{R}^n \oplus i\,\mathbb{R}^n$, koji je izomorfan sa n-dimenzionalnim kompleksnim vektorskim prostorom $\mathbb{C}^n$.

Sa druge strane, svaki $2n$-dimenzionalni kompleksni vektorski prostor $\mathbb{C}^{2n}$, sa elementima $\mathbf{z} = \sum_k z^k \mathbf{e}_k^\star + \sum_l z^l \mathbf{e}_l^\star$, u slučaju kada je $z^{k+n} = \bar{z}^k$, gde $\bar{z}$ je konjugovano kompleksni broj, svodi se na vektorski prostor, koji je izomorfan sa $2n$-dimenzionalnim real*i*realnim vektorskim prostorom

$$\boldsymbol{\varrho} = \sum_k \{\Re^k(z)\,[\mathbf{e}_k^\star + \mathbf{e}_{(k+n)}^\star]\} + i \sum_k \{\Im^k(z)\,[\mathbf{e}_k^\star - \mathbf{e}_{(k+n)}^\star]\},$$

gde $\Re(z)$ i $\Im(z)$ su realni i imaginarni deo kompleksnog broja z, respektivno.

Shodno tome, dvo-dimenzionalni real*i*realni vektorski prostor $\boldsymbol{\varrho} = (\sqrt{2}/2)\,(\bar{z}\mathbf{e}_1^\star + z\mathbf{e}_2^\star)$ izomorfan je sa dvo-dimenzionalnim real*i*realnim vektorskim prostorom $\boldsymbol{\varrho} = \Re\,(z)\mathbf{e}_1 + \Im\,(z)\mathbf{e}_2$, gde $\mathbf{e}_1 = (\sqrt{2}/2)\,(\mathbf{e}_1^\star + \mathbf{e}_2^\star)$ i $\mathbf{e}_2 = (\sqrt{2}/2i)\,(\mathbf{e}_1^\star - \mathbf{e}_2^\star)$. Uz to, *Jakobijan* transformacije, u ovom slučaju, svodi se na determinantu $J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \bar{z}}{\partial \Re(z)} & \frac{\partial \bar{z}}{\partial \Im(z)} \\ \frac{\partial z}{\partial \Re(z)} & \frac{\partial z}{\partial \Im(z)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{vmatrix} = 2i$. Jasno, na mesto odrednice kompleksna ravan, za ova dva izomorfna vektorska prostora, tačnija je odrednica real*i*realna ravan. Ako je $\Re\,(z) = x$, $\Im\,(z) = y$ i $\varphi = \arctan\,(y/x)$, na osnovu funkcionalne jednakosti (Overdijk i ostali, 2001; Sarić, 2002a)

$$e^{2i\arctan(y/x)} = \frac{[1 + i\,(y/x)]^2}{1 + (y/x)^2} = \frac{x + iy}{x - iy},$$

sledi da $\bar{z} = ze^{-2i\varphi}$, odnosno $\boldsymbol{\varrho} = (\sqrt{2\,(\overline{\boldsymbol{\varrho}} \cdot \boldsymbol{\varrho})}/2)(e_1^{-i\varphi}\mathbf{e}_1^\star + e_2^{i\varphi}\mathbf{e}_2^\star) = |\boldsymbol{\varrho}|\,\boldsymbol{\varrho}_0$, gde $|\boldsymbol{\varrho}| = \sqrt{\overline{\boldsymbol{\varrho}} \cdot \boldsymbol{\varrho}}$ ($\cdot$ je oznaka za unutrašnji proizod dva vektora) i $\boldsymbol{\varrho}_0 = (\sqrt{2}/2)\,(e^{-i\varphi}\mathbf{e}_1^\star + e^{i\varphi}\mathbf{e}_2^\star)$.

Vektorski prostor $\mathfrak{r} = x\mathbf{e}_1 + y\,\mathbf{e}_2 + \varkappa\mathfrak{n}$, gde $\mathfrak{n} = i\mathbf{n}$, definisan nad poljem realnih brojeva $\mathbb{R}$ i uz to pozitivno definitne *Hermitove* metrike $|d\mathfrak{r}|^2 = dx^2 + dy^2 + d\varkappa^2$ ($|d\mathfrak{r}|^2 = d\bar{\mathfrak{r}} \cdot d\mathfrak{r}$), gde $d\bar{\mathfrak{r}}$ je konjugovano kompleksni vektor, je tro-dimenzionalni real*i*realni prostor $\mathbb{R}^1 \oplus i\,\mathbb{R}^2$. Vektor $\mathbf{n}$ je jedinični vektor glavne normale dvo-dimenzionalnog real*i*realnog vektorskog prostora $\boldsymbol{\varrho} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2$ ($\overline{\mathbf{e}}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta = \delta_{\overline{\alpha}\beta}$, gde $\delta_{\overline{\alpha}\beta}$ je *Kronekerov* delta simbol, preciznije jedinična 2×2 matrica), koji je pozitivno definitne *Hermitove* metrike $d\overline{\boldsymbol{\varrho}} \cdot d\boldsymbol{\varrho} = dx^2 + dy^2$ (Sarić, 2003). Shodno tome $|d\mathbf{r}|^2 = |d\boldsymbol{\varrho}|^2 + d\varkappa^2$, gde $|d\boldsymbol{\varrho}|^2 = d\overline{\boldsymbol{\varrho}} \cdot d\boldsymbol{\varrho}$.

1.1.2 Algebra real*i*realnih prostora Budući da svakom uređenom paru realnih brojeva (x, y) korespondira kompleksni broj $z = x + iy$, a vektori $\sum_k x^k\mathbf{e}_k^\star$ i $\sum_k y^k\mathbf{e}_k^\star$ ($\mathbf{z} = \sum_k \left(x^k + iy^k\right)\mathbf{e}_k^\star$) su elementi (vektori) n-dimenzionalnog realnog vektorskog prostora $\mathbb{R}^n$, sa sistemom baznih vektora $\{\mathbf{e}_k^\star\}$, *i*ndirektna suma n-dimenzionalnog realnog vektorskog prostora $\mathbb{R}^n$: $\mathbb{R}^n \oplus i\,\mathbb{R}^n$, koja je vektorski prostor, nije potprostor kompleksnog vektorskog prostora $\mathbb{C}^n$, imajući u vidu činjenicu da potprostori bilo kog n-dimenzionalnog kompleksnog vektorskog prostora $\mathbb{C}^n$, sa elementima (vektorima) $\mathbf{z} = \sum_k z^k\mathbf{e}_k^\star$, mogu biti samo kompleksni vektorski prostori. Shodno tome, svaki uređeni par realnih brojeva (x, y) je u korespondenciji sa elementom (vektorom) $\mathbf{z} = z\mathbf{e}^\star$ jedno-dimenzionalnog kompleksnog vektorskog prostora $\mathbb{C}^1$, odnosno sa elementom (vektorom) $\mathbf{z} = (x + iy)\mathbf{e}^\star$ jedno-dimenzionalnog real*i*realnog vektorskog prostora $\mathbb{R}^1 \oplus i\,\mathbb{R}^1$, dva izomorfna vektorska prostora. Ako se oba ova vektorska prostora, kao aditivne grupe, dopune i binarnom operacijom proizvoda elemenata $\mathbf{z}_1$ i $\mathbf{z}_2$, gde $\mathbf{z}_1 \to (a, b)$ i $\mathbf{z}_2 \to (c, d)$, na taj način da

$$(a, -b)\,(c, d) = (ac + bd, ad - bc) \to (\overline{\mathbf{z}}_1 \cdot \mathbf{z}_2)\,\mathbf{e}^\star,$$

tada jedno-dimenzionalni kompleksni vektorski prostor $\mathbb{C}^1$, odnosno sa njim izomorfni jedno-dimenzionalni real*i*realni vektorski prostor $\mathbb{R}^1 \oplus i\,\mathbb{R}^1$, postaje polje, polje kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$. Sa druge strane, svakom uređenom paru (z^1, z^2) kompleksnih brojeva korespondira jedan elemenat (vektor) $\mathbf{z}$ dvo-dimenzionalnog kompleksnog vektorskog prostora $\mathbb{C}^2$. Jasno, jedno-dimenzionalni kompleksni vektorski prostori, sa elementima $z^1\mathbf{e}_1^\star$ i $z^2\mathbf{e}_2^\star$, su potprostori dvo-dimenzionalnog kompleksnog vektorskog prostora $\mathbb{C}^2$.

Ako je $\bar{z}^\alpha = z^\beta$ ($\alpha \neq \beta$), odnosno $z^1 = \bar{z}$ i $z^2 = z$, svakom uređenom paru konjugovano kompleksnog i kompleksnog broja $(\bar{z}, z)$ korespondira elemenat (vektor)

$$\boldsymbol{\varrho} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sum_\alpha z^\alpha\mathbf{e}_\alpha^\star = \frac{\sqrt{2}}{2}\,(\bar{z}\mathbf{e}_1^\star + z\mathbf{e}_2^\star) = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2,$$

gde $\sqrt{2}\mathbf{e}_1^\star \to (1,1)$ i $\sqrt{2}\mathbf{e}_2^\star \to (1,-1)$, u odnosu na vektorsku bazu $\{\mathbf{e}_\alpha\}$ dvo-dimenzionalnog real$i$realnog vektorskog prostora $\mathbb{R}^1 \oplus i\,\mathbb{R}^1$, koji očigledno nije potprostor dvo-dimenzionalnog kompleksnog vektorskog prostora $\mathbb{C}^2$. Drugim rečima, budući da su koordinantne promenljive (x,y) nezavisno promenljive, za razliku od koordinantnih promenljivih $(\bar{z},z)$, koje su zavisno promenljive, sistemi baznih vektora $\{\mathbf{e}_\alpha^\star\}$ i $\{\mathbf{e}_\alpha\}$ sistemi dva linearno nezavisna vektora i uz to vektorski prostor elementa $\boldsymbol{\varrho}$ zatvoren u odnosu na binarnu operaciju množenja skalarom, nad poljem realnih brojeva $\mathbb{R}$, sledi da vektorski prostor elemenata (vektora) $\sqrt{2}\boldsymbol{\varrho} = \bar{z}\mathbf{e}_1^\star + z\mathbf{e}_2^\star$, kao dvo-dimenzionalni vektorski prostor, nije potprostor dvo-dimenzionalnog kompleksnog vektorskog prostora $\mathbb{C}^2$, već dvo-dimenzionalni real$i$realni vektorski prostor $\mathbb{R}^1 \oplus i\,\mathbb{R}^1$. Jasno, u slučaju dvo-dimenzionalnog real$i$realnog vektorskog prostora $\mathbb{R}^1 \oplus i\,\mathbb{R}^1$, koji je potprostor tro-dimenzionalnog real$i$realnog vektorskog prostora $\mathbb{R}^1 \oplus i\,\mathbb{R}^2$, uređenim parovima realnih brojeva (x,y), kao i konjugovano kompleksnog i kompleksnog broja $(\bar{z},z)$, korespondiraju elementi (vektori) $\boldsymbol{\varrho} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2$ i $\sqrt{2}\boldsymbol{\varrho} = \bar{z}\mathbf{e}_1^\star + z\mathbf{e}_2^\star$, respektivno.

Shodno svemu tome, ako se i ovaj vektorski prostor, kao *Abelova* (aditivna) grupa, dopuni binarnom operacijom proizvoda elemenata $\boldsymbol{\varrho}_1 \to (a,b)$ i $\boldsymbol{\varrho}_2 \to (c,d)$, na taj način da

$$(a,-b)\,(c,d) = (ac+bd, ad-bc) \to (\overline{\boldsymbol{\varrho}}_1 \cdot \boldsymbol{\varrho}_2)\,\mathbf{e}_1 + (\boldsymbol{\varrho}_1 \wedge \boldsymbol{\varrho}_2) \wedge \mathbf{e}_1,$$

gde $\wedge$ je oznaka za spoljašnji (vektorski) proizvod dva vektora, odnosno

$$(z_1,\bar{z}_1)(\bar{z}_2,z_2) = (z_1\bar{z}_2, \bar{z}_1 z_2) \to \frac{1}{2}[(\overline{\boldsymbol{\varrho}}_1 \cdot \boldsymbol{\varrho}_2)\,(\mathbf{e}_1^\star + \mathbf{e}_2^\star) + (\boldsymbol{\varrho}_1 \wedge \boldsymbol{\varrho}_2) \wedge (\mathbf{e}_1^\star + \mathbf{e}_2^\star)] =$$

$$= \frac{1}{2}\,[(\overline{\boldsymbol{\varrho}}_1 \cdot \boldsymbol{\varrho}_2)\,\mathbf{e}_1^\star + (\boldsymbol{\varrho}_1 \wedge \boldsymbol{\varrho}_2) \wedge \mathbf{e}_2^\star + (\overline{\boldsymbol{\varrho}}_1 \cdot \boldsymbol{\varrho}_2)\,\mathbf{e}_2^\star + (\boldsymbol{\varrho}_1 \wedge \boldsymbol{\varrho}_2) \wedge \mathbf{e}_1^\star]\,,$$

dvo-dimenzionalni real$i$realni vektorski prostor $\mathbb{R}^1 \oplus i\,\mathbb{R}^1$, kao potprostor tro-dimenzionalnog real$i$realnog vektorskog prostora $\mathbb{R}^1 \oplus i\,\mathbb{R}^2$, postaje polje i to takođe polje kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$. Jasno, realnom delu kompleksnog broja, kao proizvodu neka druga dva kompleksna broja, koji su u korespondenciji sa elementima (vektorima) $\overline{\boldsymbol{\varrho}}_1$ i $\boldsymbol{\varrho}_2$ dvo-dimenzionalnog real$i$realnog vektorskog prostora $\mathbb{R}^1 \oplus i\,\mathbb{R}^1$, korespondira *Hermitov* (unutrašnji) proizvod $\overline{\boldsymbol{\varrho}}_1 \cdot \boldsymbol{\varrho}_2$ ova dva elementa (vektora), dok imaginarnom delu korespondira intenzitet spoljašnjeg (vektorskog) proizvoda elemenata (vektora) $\boldsymbol{\varrho}_1$ i $\boldsymbol{\varrho}_2$. Dakle, može se reći da je polje kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$ izomorfno *Hilbertovom* dvo-dimenzionalnom real$i$realnom vektorskom prostoru $\mathbb{R}^1 \oplus i\,\mathbb{R}^1$.

Ako se uvede geometrijski proizvod elemenata $\boldsymbol{\varrho}_1$ i $\boldsymbol{\varrho}_2$ dvo-dimenzionalnog real$i$realnog vektorskog prostora $\mathbb{R}^1 \oplus i\,\mathbb{R}^1$, takav da

$$\overline{\boldsymbol{\varrho}}_1\boldsymbol{\varrho}_2 = \boldsymbol{\varrho}_2\overline{\boldsymbol{\varrho}}_1 = (\overline{\boldsymbol{\varrho}}_1 \cdot \boldsymbol{\varrho}_2) + (\boldsymbol{\varrho}_1 \wedge \boldsymbol{\varrho}_2)\,, \tag{1.1}$$

na osnovu osobina komutativnosti unutrašnjeg i antikomutativnosti spoljašnjeg (vektorskog) proizvoda elemenata $\overline{\boldsymbol{\varrho}}_1$ i $\boldsymbol{\varrho}_2$, sledi da

$$(\overline{\boldsymbol{\varrho}}_1 \cdot \boldsymbol{\varrho}_2) = \frac{1}{2}\,(\overline{\boldsymbol{\varrho}}_1\boldsymbol{\varrho}_2 + \overline{\boldsymbol{\varrho}}_2\boldsymbol{\varrho}_1) = \frac{1}{2}\,(\overline{\boldsymbol{\varrho}}_1\boldsymbol{\varrho}_2 + \boldsymbol{\varrho}_1\overline{\boldsymbol{\varrho}}_2) \text{ i}$$

$$(\boldsymbol{\varrho}_1 \wedge \boldsymbol{\varrho}_2) = \frac{1}{2}\,(\overline{\boldsymbol{\varrho}}_1\boldsymbol{\varrho}_2 - \overline{\boldsymbol{\varrho}}_2\boldsymbol{\varrho}_1) = \frac{1}{2}\,(\overline{\boldsymbol{\varrho}}_1\boldsymbol{\varrho}_2 - \boldsymbol{\varrho}_1\overline{\boldsymbol{\varrho}}_2)\,. \tag{1.2}$$

Jasno, geometrijski proizvod dva elementa (vektora) real$i$realnog vektorskog prostora nije elemenat (vektor) tog prostora, već linearna kombinacija unutrašnjeg i spoljašnjeg proizvoda elemenata (vektora), pa shodno tome nosi naziv kovektor. Kovektor geometrijskog proizvoda baznih vektora real$i$realne ravni

$$\mathrm{E}_{\overline{\alpha}\beta} = \overline{\mathbf{e}}_\alpha\mathbf{e}_\beta = \delta_{\overline{\alpha}\beta} + e_{\alpha\beta}\boldsymbol{\eta} \text{ i } \mathrm{E}_\alpha^\beta = \mathbf{e}_\alpha\mathbf{e}^\beta = \delta_\alpha^\beta + \sum_\gamma \delta_{\overline{\alpha}\gamma}e^{\beta\gamma}\boldsymbol{\eta}, \tag{1.3}$$

gde $\mathbf{e}^\alpha = \overline{\mathbf{e}}_\alpha$ $(\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}^\beta = \delta^\beta_\alpha$ i $\sum_\alpha \mathbf{e}_\alpha \wedge \mathbf{e}^\alpha = 0)$, $e_{\alpha\beta} = (\mathbf{e}_\alpha \wedge \mathbf{e}_\beta) \cdot \overline{\mathbf{n}}$ i $e^{\alpha\beta} = \left(\mathbf{e}^\alpha \wedge \mathbf{e}^\beta\right) \cdot \mathbf{n}$ ($e_{\alpha\beta}$ je 2×2 matrica $\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}$, baš kao i $e^{\alpha\beta}$), je geometrički kovektor real$i$realne ravni $\mathbb{R}^1 \oplus i\,\mathbb{R}^1$.

U tom slučaju

$$\mathrm{E}_{\overline{\alpha}\beta}\overline{\boldsymbol{\varrho}} = \delta_{\overline{\alpha}\beta}\overline{\boldsymbol{\varrho}} + e_{\alpha\beta}\mathbf{n} \wedge \boldsymbol{\varrho} = \delta_{\overline{\alpha}\beta}\left(\mathbf{e}_1 \cdot \overline{\boldsymbol{\varrho}}\right)\mathbf{e}_1 + e_{\alpha\beta}\left[\left(\mathbf{n} \wedge \mathbf{e}_1\right) \cdot \overline{\boldsymbol{\varrho}}\right]\mathbf{e}_1 -$$

$$-\delta_{\overline{\alpha}\beta}\left(\mathbf{e}_1 \wedge \boldsymbol{\varrho}\right) \wedge \mathbf{e}_1 - e_{\alpha\beta}\left[\left(\mathbf{n} \wedge \mathbf{e}_1\right) \wedge \boldsymbol{\varrho}\right] \wedge \mathbf{e}_1 \text{ i}$$

$$\mathrm{E}_{\overline{\alpha}\beta}\mathbf{e}_1\overline{\boldsymbol{\varrho}}\mathbf{e}_1 = \delta_{\overline{\alpha}\beta}\mathbf{e}_1\overline{\boldsymbol{\varrho}}\mathbf{e}_1 + e_{\alpha\beta}\left[\left(\mathbf{n} \wedge \mathbf{e}_1\right) \cdot \overline{\boldsymbol{\varrho}}\right]\mathbf{e}_1 - e_{\alpha\beta}\left[\left(\mathbf{n} \wedge \mathbf{e}_1\right) \wedge \boldsymbol{\varrho}\right] \wedge \mathbf{e}_1 =$$

$$= \delta_{\overline{\alpha}\beta}\left(\mathbf{e}_1 \cdot \overline{\boldsymbol{\varrho}}\right)\mathbf{e}_1 - \delta_{\overline{\alpha}\beta}\left(\mathbf{e}_1 \wedge \boldsymbol{\varrho}\right) \wedge \mathbf{e}_1 + e_{\alpha\beta}\left[\left(\mathbf{n} \wedge \mathbf{e}_1\right) \cdot \overline{\boldsymbol{\varrho}}\right]\mathbf{e}_1 - e_{\alpha\beta}\left[\left(\mathbf{n} \wedge \mathbf{e}_1\right) \wedge \boldsymbol{\varrho}\right] \wedge \mathbf{e}_1. \tag{1.4}$$

Iz prethodne dve kovektorske jednakosti, koje su očigledno ekvivalentne, sledi da jedinični bazni vektor $\mathbf{e}_1$ je unitarni element (vektor) real$i$realne ravni, koji geometrijskom proizvodu dva elementa (vektora) ili dva kovektora, odnosno kovektoru, korespondira elemenat (vektor) real$i$realne ravni, korespondentan proizvodu dva kompleksna broja, dok drugi jedinični bazni vektor $\mathbf{e}_2$, real$i$realne ravni $\mathbb{R}^1 \oplus i\,\mathbb{R}^1$, geometrijskom proizvodu dva elementa (vektora) ili dva kovektora, odnosno kovektoru, korespondira elemenat (vektor) real$i$realne ravni, ortogonalan na element (vektor), korespondentan kovektoru, budući da

$$\left(\boldsymbol{\varrho}_1\overline{\boldsymbol{\varrho}}_2\mathbf{e}_1\right) \cdot \left(\overline{\boldsymbol{\varrho}}_1\boldsymbol{\varrho}_2\mathbf{e}_2\right) = \left[\left(\boldsymbol{\varrho}_1 \cdot \overline{\boldsymbol{\varrho}}_2\right)\mathbf{e}_1 - \left(\boldsymbol{\varrho}_1 \wedge \boldsymbol{\varrho}_2\right) \wedge \mathbf{e}_1\right] \cdot \left[\left(\overline{\boldsymbol{\varrho}}_1 \cdot \boldsymbol{\varrho}_2\right)\mathbf{e}_2 + \left(\boldsymbol{\varrho}_1 \wedge \boldsymbol{\varrho}_2\right) \wedge \overline{\mathbf{e}}_2\right] =$$

$$= \left(\boldsymbol{\varrho}_1 \cdot \overline{\boldsymbol{\varrho}}_2\right)\left\{\mathbf{e}_1 \cdot \left[\left(\boldsymbol{\varrho}_1 \wedge \boldsymbol{\varrho}_2\right) \wedge \overline{\mathbf{e}}_2\right] - \left[\left(\boldsymbol{\varrho}_1 \wedge \boldsymbol{\varrho}_2\right) \wedge \mathbf{e}_1\right] \cdot \mathbf{e}_2\right\} = 0.$$

Sa druge strane, na osnovu prve od dve kovektorske jednakosti (1.3), sledi da

$$\sum_\alpha \mathrm{E}_{\overline{\alpha}\beta}\mathbf{e}^\alpha = \overline{\mathbf{e}}_\beta + \sum_\alpha e_{\alpha\beta}\mathbf{n} \wedge \overline{\mathbf{e}}^\alpha = \mathbf{0} \text{ i}$$

$$\sum_\alpha \mathrm{E}_{\overline{\alpha}\beta}\overline{\mathbf{e}}^\alpha = \mathbf{e}_\beta + \sum_\alpha e_{\alpha\beta}\mathbf{n} \wedge \mathbf{e}^\alpha = 2\mathbf{e}_\beta, \tag{1.5}$$

odnosno

$$\sum_\alpha\sum_\beta \mathrm{E}_{\overline{\alpha}\beta}\overline{\mathbf{e}}^\alpha\mathbf{e}^\beta = 2\sum_\beta \mathbf{e}_\beta\mathbf{e}^\beta = 2\sum_\beta \delta^\beta_\beta = 4 \text{ i}$$

$$\sum_\alpha\sum_\beta \mathrm{E}_{\overline{\alpha}\beta}\overline{\mathbf{e}}^\alpha\varrho^\beta = \sum_\beta \mathbf{e}_\beta\varrho^\beta + \sum_\alpha\sum_\beta e_{\alpha\beta}\mathbf{n} \wedge \mathbf{e}^\alpha\varrho^\beta = 2\boldsymbol{\varrho}. \tag{1.6}$$

Uz to

$$\sum_\alpha\sum_\beta \mathrm{E}_{\overline{\alpha}\beta}\varrho^\alpha_{(1)}\varrho^\beta_{(2)} = \sum_\beta \varrho_{(1)\beta}\varrho^\beta_{(2)} + \sum_\alpha\sum_\beta e_{\alpha\beta}\varrho^\alpha_{(1)}\varrho^\beta_{(2)}\mathbf{n} = \overline{\boldsymbol{\varrho}}_1\boldsymbol{\varrho}_2. \tag{1.7}$$

Shodno tome, konačno se dobija da

$$\sum_\alpha\sum_\beta \mathrm{E}_{\overline{\alpha}\beta}\varrho^\alpha_{(1)}\varrho^\beta_{(2)}\boldsymbol{\varrho}_3 = \sum_\alpha\sum_\beta \delta_{\overline{\alpha}\beta}\varrho^\alpha_{(1)}\varrho^\beta_{(2)}\boldsymbol{\varrho}_3 + \sum_\alpha\sum_\beta e_{\alpha\beta}\varrho^\alpha_{(1)}\varrho^\beta_{(2)}\mathbf{n} \wedge \overline{\boldsymbol{\varrho}}_3, \tag{1.8}$$

odnosno $\overline{\boldsymbol{\varrho}}_1\boldsymbol{\varrho}_2\boldsymbol{\varrho}_3 = \left(\overline{\boldsymbol{\varrho}}_1 \cdot \boldsymbol{\varrho}_2\right)\boldsymbol{\varrho}_3 + \left(\boldsymbol{\varrho}_1 \wedge \boldsymbol{\varrho}_2\right) \wedge \overline{\boldsymbol{\varrho}}_3$, što je u korespondentnoj formi proizvod tri kompleksna broja $(a, -b)(c, d)\,(g, h)$. Na osnovu toga sledi da

$$\left(\boldsymbol{\varrho}_1 \wedge \boldsymbol{\varrho}_2\right) \wedge \overline{\boldsymbol{\varrho}}_3 - \left(\boldsymbol{\varrho}_1 \wedge \boldsymbol{\varrho}_3\right) \wedge \overline{\boldsymbol{\varrho}}_2 = \left(\overline{\boldsymbol{\varrho}}_1 \cdot \boldsymbol{\varrho}_3\right)\boldsymbol{\varrho}_2 - \left(\overline{\boldsymbol{\varrho}}_1 \cdot \boldsymbol{\varrho}_2\right)\boldsymbol{\varrho}_3 \text{ i}$$

$$\overline{\boldsymbol{\varrho}}\boldsymbol{\varrho} = \sum_\alpha\sum_\beta \mathrm{E}_{\overline{\alpha}\beta}\varrho^\alpha\varrho^\beta = \sum_\beta \varrho_\beta\varrho^\beta = \overline{\boldsymbol{\varrho}} \cdot \boldsymbol{\varrho}. \tag{1.9}$$

Uz geometrički kovektor $\mathrm{Ȩ}_{\alpha\beta}$, koji je po definiciji geometrijski proizvod baznih vektora $\{\mathbf{ȩ}_\alpha\}$ real$i$realne ravni $\mathbb{R}^1 \oplus i\,\mathbb{R}^1$, od interesa za analizu su i geometrijski proizvodi baznih vektora višega reda:

$$\mathrm{Ȩ}_{\overline{\alpha}\beta}\overline{\mathbf{ȩ}}_\gamma = \delta_{\overline{\alpha}\beta}\overline{\mathbf{ȩ}}_\gamma + e_{\alpha\beta}\mathbf{ņ} \wedge \mathbf{ȩ}_\gamma \text{ i}$$

$$\begin{gathered}\mathrm{Ȩ}_{\overline{\alpha}\beta}\overline{\mathbf{ȩ}}_\gamma\mathbf{ȩ}_\delta\mathbf{ȩ}_1 = \left[\delta_{\overline{\alpha}\beta}\delta_{\overline{\gamma}\delta} + e_{\alpha\beta}\left(\mathbf{ņ} \wedge \mathbf{ȩ}_\gamma\right) \cdot \mathbf{ȩ}_\delta\right]\mathbf{ȩ}_1 + \\ +\delta_{\overline{\alpha}\beta}\left(\mathbf{ȩ}_\gamma \wedge \mathbf{ȩ}_\delta\right) \wedge \mathbf{ȩ}_1 - e_{\alpha\beta}\left[\left(\mathbf{ņ} \wedge \mathbf{ȩ}_\gamma\right) \wedge \overline{\mathbf{ȩ}}_\delta\right] \wedge \mathbf{ȩ}_1 = \\ = \left(\delta_{\overline{\alpha}\beta}\delta_{\overline{\gamma}\delta} - e_{\alpha\beta}e_{\gamma\delta}\right)\mathbf{ȩ}_1 + \left(\delta_{\overline{\alpha}\beta}e_{\gamma\delta} + e_{\alpha\beta}\delta_{\overline{\gamma}\delta}\right)\mathbf{ņ} \wedge \mathbf{ȩ}_1 = \\ = \delta_{\overline{\alpha}\beta}\left(\delta_{\overline{\gamma}\delta}\mathbf{ȩ}_1 + e_{\gamma\delta}\mathbf{ȩ}_2\right) + e_{\alpha\beta}\left(\delta_{\overline{\gamma}\delta}\mathbf{ȩ}_2 - e_{\gamma\delta}\mathbf{ȩ}_1\right) = \delta_{\overline{\alpha}\beta}\mathrm{Ȩ}_{\overline{\gamma}\delta}\mathbf{ȩ}_1 + e_{\alpha\beta}\mathrm{Ȩ}_{\overline{\gamma}\delta}\mathbf{ȩ}_2. \end{gathered} \tag{1.10}$$

Na bazi karakteristika geometrijskog proizvoda sledi da uz dvo-dimenzionalni *Hilbertov* real$i$realni vektorski prostor (real$i$realnu ravan) i dvo-dimenzionalni *Euklidov* realni vektorski prostor, sa sistemom $\{\mathbf{e}_\alpha\}$ $(\alpha = 1, 2)$ baznih vektora, koji je dopunjen binarnom operacijom proizvoda elemenata $\boldsymbol{\rho}_1 \to (a, b)$ i $\boldsymbol{\rho}_2 \to (c, d)$, na taj način da

$$(a, -b)\,(c, d) = (ac + bd, ad - bc) \to \left(\boldsymbol{\rho}_1 \cdot \boldsymbol{\rho}_2\right)\mathbf{e}_1 + \left(\boldsymbol{\rho}_1 \wedge \boldsymbol{\rho}_2\right) \wedge \mathbf{e}_1,$$

je takođe izomorfan polju kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$.

U tro-dimenzionalnom real$i$realnom vektorskom prostoru $\mathbb{R}^1 \oplus i\,\mathbb{R}^2$

$$\mathrm{Ȩ}_{\overline{j}k} = \delta_{\overline{j}k} + \sum_l e_{jkl}\mathbf{ȩ}^l, \tag{1.11}$$

gde $\mathbf{ȩ}_3 = \mathbf{ņ}$, $\overline{\mathbf{ȩ}}_j \cdot \mathbf{ȩ}_k = \delta_{\overline{j}k}$ i $\sum_l e_{jkl}\mathbf{ȩ}^l = \mathbf{ȩ}_j \wedge \mathbf{ȩ}_k$ $\left(\sum_l e^{jkl}\mathbf{ȩ}_l = \mathbf{ȩ}^j \wedge \mathbf{ȩ}^k\right)$.

Po analogiji, može se i ovaj vektorski prostor, koji je *Abelova* (aditivna) grupa, dopuniti binarnom operacijom proizvoda elemenata $\mathbf{ŗ}_1 \to (a, b, g)$ i $\mathbf{ŗ}_2 \to (c, d, h)$, na taj način da

$$(a, -b, -g)\,(c, d, h) = (bh - gd, gc - ah, ad - bc) \to \left(\mathbf{ŗ}_1 \wedge \mathbf{ŗ}_2\right) \text{ i}$$

$$ac + bd + gh \to \overline{\mathbf{ŗ}}_1 \cdot \mathbf{ŗ}_2.$$

Tada i tro-dimenzionalni real$i$realni vektorski prostor $\mathbb{R}^1 \oplus i\,\mathbb{R}^2$ postaje polje.

Ako se zna da je $\mathbf{ȩ}^j \cdot \mathbf{ȩ}_k = \delta^j_k$ i $\sum_j \mathbf{ȩ}^j \wedge \mathbf{ȩ}_j = 0$, odnosno

$$\mathbf{ȩ}^1 = \frac{\mathbf{ȩ}_2 \wedge \mathbf{ȩ}_3}{e},\ \mathbf{ȩ}^2 = \frac{\mathbf{ȩ}_3 \wedge \mathbf{ȩ}_1}{e},\ \mathbf{ȩ}^3 = \frac{\mathbf{ȩ}_1 \wedge \mathbf{ȩ}_2}{e},$$

$$\mathbf{ȩ}_1 = e\left(\mathbf{ȩ}^2 \wedge \mathbf{ȩ}^3\right),\ \mathbf{ȩ}_2 = e\left(\mathbf{ȩ}^3 \wedge \mathbf{ȩ}^1\right) \text{ i } \mathbf{ȩ}_3 = e\left(\mathbf{ȩ}^1 \wedge \mathbf{ȩ}^2\right), \tag{1.12}$$

gde $e = i^2 (\,e = e_{123} = e_{231} = e_{312})$, sledi

$$\sum_j\sum_k \mathbf{ȩ}^j\overline{\mathbf{ȩ}}^k\mathrm{Ȩ}_{\overline{j}k} = \sum_j\sum_k \mathrm{Ȩ}_{\overline{j}k}\overline{\mathbf{ȩ}}^j\mathbf{ȩ}^k = 1, \tag{1.13}$$

budući da

$$\sum_j\sum_k\sum_l e_{jkl}\mathbf{ȩ}^j\overline{\mathbf{ȩ}}^k\mathbf{ȩ}^l = \sum_j\sum_k\sum_l e_{jkl}\left(\overline{\mathbf{ȩ}}^j \wedge \overline{\mathbf{ȩ}}^k\right)\mathbf{ȩ}^l = \sum_j\sum_k\sum_l e_{jkl}\left(\overline{\mathbf{ȩ}}^l \wedge \overline{\mathbf{ȩ}}^j\right)\mathbf{ȩ}^k,$$

odnosno

$$\sum_j\sum_k\sum_l e_{jkl}\mathbf{ȩ}^j\overline{\mathbf{ȩ}}^k\mathbf{ȩ}^l = \sum_j\sum_k\sum_l e_{jkl}\mathbf{ȩ}^l\overline{\mathbf{ȩ}}^j\mathbf{ȩ}^k.$$

Uz sve to

$$\mathrm{E}_{j}^{\cdot k} = \sum_l \delta_{\bar{j}l} \overline{\mathbf{e}}^l \mathbf{e}^k = \mathbf{e}_j \mathbf{e}^k = \delta_j^k + \overline{\mathbf{e}}_j \wedge \mathbf{e}^k = \delta_j^k + \sum_l \sum_m \delta_{\bar{j}m} e^{mkl} \mathbf{e}_l, \tag{1.14}$$

odnosno

$$\mathrm{E}^{k}_{\cdot j} = \sum_l \delta_{\bar{j}l} \mathbf{e}^k \overline{\mathbf{e}}^l = \mathbf{e}^k \mathbf{e}_j = \delta_j^k + \overline{\mathbf{e}}^k \wedge \mathbf{e}_j = \delta_j^k + \sum_l \sum_m \delta_{\bar{j}m} e^{kml} \overline{\mathbf{e}}_l. \tag{1.15}$$

Na osnovu prethodnih rezultata

$$\overline{\mathbf{e}}_j \mathbf{e}_k \overline{\mathbf{e}}_l = \mathrm{E}_{\bar{j}k} \overline{\mathbf{e}}_l = \delta_{\bar{j}k} \overline{\mathbf{e}}_l + (\mathbf{e}_j \wedge \mathbf{e}_k) \overline{\mathbf{e}}_l = \delta_{jk} \overline{\mathbf{e}}_l + (\mathbf{e}_j \wedge \mathbf{e}_k) \cdot \overline{\mathbf{e}}_l + \left(\overline{\mathbf{e}}_j \wedge \overline{\mathbf{e}}_k\right) \wedge \overline{\mathbf{e}}_l \text{ i}$$

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{e}}_j \mathbf{e}_k \overline{\mathbf{e}}_l \mathbf{e}_m &= \delta_{\bar{j}k} \overline{\mathbf{e}}_l \mathbf{e}_m + e_{jk\bar{l}} \mathbf{e}_m + e_{jkl\overline{m}} + [(\mathbf{e}_j \wedge \mathbf{e}_k) \wedge \mathbf{e}_l] \wedge \mathbf{e}_m = \\ &= \delta_{\bar{j}k} \mathrm{E}_{\bar{l}m} + \delta_{jl} \mathrm{E}_{\bar{k}m} - \delta_{kl} \mathrm{E}_{\bar{j}m} + e_{jk\bar{l}} \mathbf{e}_m, \end{aligned} \tag{1.16}$$

gde

$$\begin{gathered} \delta_{jl} = (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_l), \; e_{jkl\overline{m}} = [(\mathbf{e}_j \wedge \mathbf{e}_k) \wedge \mathbf{e}_l] \cdot \overline{\mathbf{e}}_m = \delta_{\bar{k}m} \delta_{jl} - \delta_{\bar{j}m} \delta_{kl} \text{ i} \\ [(\mathbf{e}_j \wedge \mathbf{e}_k) \wedge \mathbf{e}_l] \wedge \mathbf{e}_m = \delta_{jl} \, (\mathbf{e}_k \wedge \mathbf{e}_m) - \delta_{kl} \, (\mathbf{e}_j \wedge \mathbf{e}_m), \end{gathered} \tag{1.17}$$

odnosno

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{e}}_j \mathbf{e}_k \overline{\mathbf{e}}_l \mathbf{e}_m \overline{\mathbf{e}}_n &= \delta_{\bar{j}k} \mathrm{E}_{\bar{l}m} \overline{\mathbf{e}}_n + e_{jk\bar{l}} \mathrm{E}_{m\bar{n}} + [(\mathbf{e}_j \wedge \mathbf{e}_k) \wedge \mathbf{e}_l] \overline{\mathbf{e}}_m \overline{\mathbf{e}}_n = \delta_{\bar{j}k} \mathrm{E}_{lm} \overline{\mathbf{e}}_n + e_{jk\bar{l}} \mathrm{E}_{m\bar{n}} + \\ &+ e_{jkl\overline{m}} \overline{\mathbf{e}}_n + e_{jklm\bar{n}} + \left\{\left[\left(\overline{\mathbf{e}}_j \wedge \overline{\mathbf{e}}_k\right) \wedge \overline{\mathbf{e}}_l\right] \wedge \overline{\mathbf{e}}_m\right\} \wedge \overline{\mathbf{e}}_n = \delta_{\bar{j}k} \mathrm{E}_{\bar{l}m} \overline{\mathbf{e}}_n + \\ &+ \delta_{jl} \mathrm{E}_{\bar{k}m} \overline{\mathbf{e}}_n - \delta_{kl} \mathrm{E}_{\bar{j}m} \overline{\mathbf{e}}_n + e_{jk\bar{l}} \mathrm{E}_{m\bar{n}}, \end{aligned} \tag{1.18}$$

gde

$$\begin{gathered} e_{jklm\bar{n}} = \{[(\mathbf{e}_j \wedge \mathbf{e}_k) \wedge \mathbf{e}_l] \wedge \mathbf{e}_m\} \cdot \overline{\mathbf{e}}_n = \delta_{jl} e_{km\bar{n}} - \delta_{kl} e_{jm\bar{n}} \text{ i} \\ \left\{\left[\left(\overline{\mathbf{e}}_j \wedge \overline{\mathbf{e}}_k\right) \wedge \overline{\mathbf{e}}_l\right] \wedge \overline{\mathbf{e}}_m\right\} \wedge \overline{\mathbf{e}}_n = \delta_{jl} \left(\delta_{kn} \overline{\mathbf{e}}_m - \delta_{mn} \overline{\mathbf{e}}_k\right) - \delta_{kl} \left(\delta_{jn} \overline{\mathbf{e}}_m - \delta_{mn} \overline{\mathbf{e}}_j\right). \end{gathered} \tag{1.19}$$

U $N+M$-dimenzionalnom real*i*realnom vektorskom prostoru ($N \geq 3$ i $M \geq 2$)

$$\mathrm{E}_{\bar{j}k} = \delta_{\bar{j}k} + \sum_l e_{jkl} \mathbf{e}^l, \tag{1.20}$$

gde $\overline{\mathbf{e}}_j \cdot \mathbf{e}_k = \delta_{\bar{j}k}$ i $\sum_j e_{jkl} \mathbf{e}^l = \mathbf{e}_j \wedge \mathbf{e}_k$ ($\sum_j e^{jkl} \mathbf{e}_l = \mathbf{e}^j \wedge \mathbf{e}^k$, $\mathbf{e}^j \cdot \mathbf{e}_k = \delta_k^j$ i $\sum_j \mathbf{e}^j \wedge \mathbf{e}_j = 0$).

Sistemi e_{jkl} i e^{jkl} su permutacioni simboli, odnosno asimetrični e simboli (Anđelić, 1980), takvi da

1. $e_{jkl} = 0$, u slučaju kada su bilo koja dva indeksa jednakih vrednosti
2. $e_{jkl} = 0$, za $j \neq k$ $(1 \leq (j,k) \leq N)$ i $N < l \leq N+M$
3. $e_{jkl} = 0$, za $j \neq k$, $j \neq l$ i $k \neq l$ $(N < (j,k,l) \leq N+M)$
4. $e_{jkl} = 0$, za $j \neq l$ $(1 \leq (j,l) \leq N)$ i $N < k \leq N+M$
5. $e_{jkl} = \frac{\sqrt{N-2}}{N-2}$, za $j \neq k$, $j \neq l$ i $k \neq l$ $(1 \leq (j,k,l) \leq N)$ i pozitivno cikličnu kombinaciju indeksa j i k
6. $e_{jkl} = \frac{-\sqrt{N}}{N}$, za $j \neq k$ $(N < (j,k) \leq N+M)$ i pozitivno cikličnu kombinaciju indeksa j i k $(1 \leq l \leq N)$
7. $e_{jkl} = \frac{-\sqrt{M-1}}{M-1}$, za $k \neq l$ $(N < (k,l) \leq N+M)$ i pozitivno cikličnu kombinaciju indeksa j i k $(1 \leq j \leq N)$
8. $e_{jkl} = -e_{kjl}$, za $j \neq k$, $j \neq l$ i $k \neq l$ $(1 \leq l \leq N+M)$.

Pozitivno ciklična kombinacija indeksa j i k je kombinacija svih vrednosti indeksa od 1 do $N+M$, poređanih u krug, na taj način da se kombinuju indeksi od najmanje do najveće razlike svojih vrednosti, počevši od indeksa najmanje vrednosti ($j=1$), ciklično po krugu u pozitivnom matematičkom smeru (smeru suprotnom od kretanja kazaljki na satu).

Na osnovu prethodno definisanih e simbola moguće je i u slučaju $N+M$-dimenzionalnog real$i$realnog vektorskog prostora, prema algoritmu korišćenom u slučaju tro-dimenzionalnog real$i$realnog vektorskog prostora, definisati kovektore i vektore geometrijskog proizvoda više baznih vektora ovog real$i$realnog vektorskog prostora, koji su od krucijalnog značaja za dalju analizu. Shodno tome, spoljašnjem proizvodu tri bazna vektora, u $N+M$-dimenzionalnom real$i$realnom vektorskom prostoru, koordinira se jedinični vektor pomoću e simbola četvrtoga reda e_{jklm} itd.

Algebra real$i$realnih vektorskih prostora fundamentalno se razlikuje od *Grasmanove* i od *Klifordove* algebre vektorskih prostora. Ta fundamentalna razlika je u definisanju spoljašnjeg proizvoda dva ili više elemenata vektorskog prostora. Naime, za razliku i od *Grasmanove* i od *Klifordove* algebre, gde se pojam orjentisane duži, kao vektora iz klasične vektorske algebre, generalizuje na pojam bivektora, trivektora itd., drugim rečima na pojam orjentisanog dela ravni ili višedimenzionalnih prostora, pri čemu je element spoljašnjeg proizvoda od dva ili više elementa vektorskog prostora u ravni i višedimenzionalnim prostorima, definisanim tim elementima, u prethodno definisanoj algebri real$i$realnih vektorskih prostora ($N+M \geq 3$), spoljašnji proizvod dva i više elementa (vektora) je elemenat (vektor) vektorskog potprostora real$i$realnog vektorskog prostora na kome su ovi vektori ortogonalni. Spoljašnjem proizvodu dva i više vektora koordinira se elemenat real$i$realnog vektorskog prostora pomoću e simbola. Kovektori real$i$realnog vektorskog prostora, kao geometrijski proizvodi elemenata (vektora) vektorskog prostora, su linearna kombinacija unutrašnjeg i spoljašnjeg proizvoda elemenata (vektora).

Međutim i pored ove razlike, moguće je na bazi *Hestenesove* simplifikacije fundamentalne teoreme (integralnog) računa (Hestenes, 1968; Hestenes i Sobczyk, 1984; Hestenes i Ziegler, 1991), često apostrofirane kao *Stoksova* teorema, dalje generalizovati rezultat ove integralne teoreme. Kamen temeljac za buduću analizu, odnosno dalju generalizaciju, činiće redefinisani pojam ostatka funkcije u real$i$realnim vektorskim prostorima, odnosno novodefinisani pojam rezidualnih vrednosti funkcija skalarnog i vektorskog polja, analogan pojmu diferencijalnih formi geometrijskog računa. Na osnovu, prethodno zasnovanog, izomorfizma real$i$realne ravni i polja kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$, moguće je neke od dobijenih rezultata proveriti upoređujući ih sa fundamentalnim rezultatima kompleksne analize. Jednostavnost izvođenja ovih rezultata trebalo bi da ima prednost u poređenju sa izvođenjima u kompleksnoj analizi, koja su često veoma komplikovana. Naime, formulacija, pa i dokaz, generalizovane fundamentalne teoreme (integralnog) računa, zasnivaće sa na pojmu prostornog (integralnog) izvoda, koji će biti tako koncipiran, odnosno definisan, da će učiniti formulaciju i dokaz generalizovane fundamentalne teoreme što je moguće jednostavnijim.

Ono što će biti fundamentalno novo, u odnosu na *Hestenesovu* i sve ostale generalizacije fundamentalne teoreme (integralnog) računa, to je uvođenje u analizu pojma singularne, kao i totalne vrednosti nesvojstvenih integrala, čime će se otvoriti mogućnost generalizacije pojma integrabilnosti skalarnih i vektorskih polja, u smislu mogučnosti integraljenja i po konturnim prostorima, koji su singularni prostori skalarnih i vektorskih polja, drugim rečima vektorski potprostori real$i$realnih vektorskih prostora, čije pojedine tačke su singularne tačke skalarnih i vektorskih polja.

Glava 2

O diferencijabilnosti i integrabilnosti u real$i$realnim prostorima

Problem pronalaženja neke funkcije na osnovu njenog izvoda je takozvani problem primitivne funkcije. *Rimanov* integral, najpoznatiji od svih integrala, integrali ograničene izvode koji su kontinualni skoro svuda, a *Košijeva* ekstenzija *Rimanovog* integrala (poznatija pod imenom nesvojstveni integral) uvedena je da integrali izvode, kontinualne skoro svuda, sa prebrojivim skupom tačaka neograničenosti. Uz sve to, *Harnakovom* ekstenzijom ova klasa integrabilnih izvoda može se i dalje proširiti. Na sličan način, klasu *Lebeg* integrabilnih izvoda (Arsenović i ostali, 1998) proširio je *Denžu* (Gordon, 1994) i svoj proces integracije nazvao totalizacijom. Na potpuno različit način *Peron* definiše još jedan integral, koji je ekvivalentan *Denžuovom* integralu i koji integrali neograničene izvode koji nisu *Lebeg* integrabilni (Gordon, 1994).

Sa druge strane, prvi generalizovani *Rimanov* integral u $\mathbb{R}^1$, definisan preko *Rimanovih* suma i sa izvesnom modifikacijom podela intervala, bio je *Henstok-Kurcvajlov* integral, što je napomenuto i u predgovoru disertacije. Ovaj integral, ekvivalentan *Denžuovom* i *Peronovom* integralu (Gordon, 1994), rešava problem formulisanja fundamentalne teoreme integralnog računa, kadgod prvi izvod postoji. Preciznije, za klasu kontinualnih funkcija diferencijabilnih svuda, osim na najviše prebrojivom skupu tačaka kompaktnog intervala realne prave (videti *Teoremu 9.6* u Gordon, 1994). *Mekšejnov* integral (Schwabik i Kurzweil, 2004), ekvivalentan *Lebegovom* integralu, drugi je generalizovani *Rimanov* integral. Uz to, pitanje pronalaženja minimalnog integrativnog procesa, koji bi vodio ka *Rimanovom* tipu integrala, opštijem od *Lebegovog* integrala, rešeno je takozvanim C-integralom (Bongiorno, 2000).

Za razliku od jednodimenzionalnog slučaja, *Henstok-Kurcvajlov* integral u $\mathbb{R}^n$ ne integrali sve izvode (Pfeffer, 1987). Dodatnim uslovom, koji se odnosio na klasu dozvoljenih podela kompaktnog n-dimenzionalnog intervala, *Mauhin* je uspešno prevazišao i ovaj problem. Ovo je prirodno vodilo ka još jednom tipu *Rimanovog* integrala, pod nazivom integral regularnih particija (rp). Koristeći se ovim generalizovanim *Rimanovim* integralom, *Mekdonald* je uspeo da prevaziđe nekonzistentnosti u *Hestenesovom* dokazu fundamentalne teoreme integralnog računa (Macdonald, 2002). Naime, *Hestenes* je dao briljantno kratak i intuitivan dokaz, koji nažalost nije bio i matematički rigorozan (Hestenes, 1968). U stvari, *Hestenes* je svoj dokaz bazirao na integralnoj definiciji izvoda i standardnoj definiciji *Rimanovog* integrala, što je rezultiralo aproksimacijom izvoda interval funkcijom, ali bez prethodno uvedenog uslova koji bi to eventualno mogao opravdati. Integralnu definiciju izvoda koristio je i *Mekdonald*, ali ne i onu koja se, u jednodimenzionalnom slučaju, a za razliku od *Hestenesa,* svodi na takozvani simetrični izvod (aritmetičku sredinu levog i desnog izvoda). Time je očigledno klasa funkcija za koju važi fundamentalna teorema integralnog računa sužena. Shodno tome, u onome što sledi, daće se rigorozan dokaz *Stoksove* teoreme za širu klasu kovektorskih polja i to u duhu *Hestenesovog* dopadljivog dokaza.

Jasno, *Hilbertov* tro-dimenzionalni real$i$realni vektorski prostor $\mathcal{H}$ biće osnova svake dalje analize. Drugim rečima, mnogi topološki pojmovi, kao i pojmovi diferencijalne geometrije, naročito diferencijalne geometrije tro-dimenzionalnih realnih vektorskih prostora, biće osnova na kojoj će se zasnovati teorija iz koje će se dobiti novi integralni procesi. Uz to, nezaobilazna osnova ove teorije biće prirodno i *Košijev* račun ostataka, odnosno teorija analitičkih funkcija kompleksne promenljive.

Pojam mnogostrukosti je fundamentalni pojam diferencijalne geometrije i jednostavno rečeno diferencijabilna mnogostrukost je topološki prostor, koji lokalno izgleda kao *Euklidov* prostor, na kome je moguće zasnovati diferencijalni i integralni račun. Shodno tome, u onom što sledi, analiziraće se uglavnom vektorske diferencijabilne mnogostrukosti (mnogostrukosti) $\mathcal{M}$, u *Hilbertovom* tro-dimenzionalnom real*i*realnom vektorskom prostoru $\mathcal{H}$, sa pozitivno definitnom metrikom. Tačke mnogostrukosti, kao nulto-dimenzionalne mnogostrukosti u $\mathcal{H}$, su determinisane vektorima $\mathfrak{r}$. Kriva je jedno-dimenzionalna, dok je površ dvo-dimenzionalna mnogostrukost. Konačno, bilo koja tro-dimenzionalna oblast u $\mathcal{H}$, ograničena nekom površi, je tro-dimenzionalna mnogostrukost. Granica $\partial\mathcal{M}$ od M-dimenzionalne mnogostrukosti $\mathcal{M}$ je $(M-1)$-dimenzionalna mnogostrukost. Stoga, granica tro-dimenzionalne oblasti je površ, granica površi kriva, dok su dve krajnje tačke krive granica krive. Jasno, mnogostrukost koja je kompaktna i čija granica je prazan skup je zatvorena mnogostrukost. Shodno tome, granica mnogostrukosti je uvek zatvorena mnogostrukost ($\partial\partial\mathcal{M} = 0$).

Funkcije $\mathfrak{r} \mapsto \mathbf{F}$ i $\mathfrak{r} \mapsto f$, definisane u svakoj tački $\mathfrak{r}$ mnogostrukosti $\mathcal{M}$, su vektorsko i skalarno polje u $\mathcal{M}$, respektivno. Shodno tome, kriva $\mathcal{L} = \{\mathfrak{r} \mid \mathfrak{r}(s)\}$ je skup tačaka u $\mathcal{H}$ parametrizovanih kontinualnom vektorskom funkcijom $\mathfrak{r}(s)$, definisanom na segmentu $[s_1, s_2]$ skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$. Parametar s je koordinata krive $\mathcal{L}$. Ako se krajnje tačke $\mathfrak{r}_P = \mathfrak{r}(s_1)$ i $\mathfrak{r}_Q = \mathfrak{r}(s_2)$ krive $\mathcal{L}$ poklapaju, kriva $\mathcal{L}$ je zatvorena kriva. Uz to, glatka kriva je neprekidno diferencijabilna kriva u $\mathcal{H}$. Kontura je deo po deo glatka kriva u $\mathcal{H}$. Kontinualno vektorsko polje

$$\boldsymbol{\tau}(\mathfrak{r}) = \frac{d\mathfrak{r}}{ds} \tag{2.1}$$

je vektorska funkcija jediničnog vektora tangente u tački $\mathfrak{r}$ mnogostrukosti $\mathcal{L}$.

Jasno, jedno-dimenzionalni vektorski prostor $\mathcal{T}_{\mathfrak{r}}(\mathcal{L})$, čiji elementi su skalarni umnošci jediničnog vektora tangente $\boldsymbol{\tau}(\mathfrak{r})$, je tangentni vektorski prostor u tački $\mathfrak{r}$ krive $\mathcal{L}$.

Površ $\mathcal{P} = \{\mathfrak{r} \mid \mathfrak{r}(u, v)\}$ je skup tačaka u $\mathcal{H}$ parametrizovanih kontinualnom vektorskom funkcijom $\mathfrak{r}(u, v)$, dve skalarne promenljive u i v, koje su koordinate površi. Glatka površ je neprekidno diferencijabilna površ u $\mathcal{H}$. Konturna površ je deo po deo glatka površ u $\mathcal{H}$. Vektorski prostor $\mathcal{T}_{\mathfrak{r}}(\mathcal{P})$, čiji elementi zadovoljavaju uslov

$$\left(\frac{\partial\mathfrak{r}}{\partial u} \wedge \frac{\partial\mathfrak{r}}{\partial v}\right) \cdot \boldsymbol{\tau}(\mathfrak{r}) = 0, \tag{2.2}$$

je tangentni vektorski prostor u tački $\mathfrak{r}$ površi $\mathcal{P}$. Ukoliko vektorsko polje $\boldsymbol{\tau}(\mathfrak{r})$ zadovoljava prethodno navedeni uslov u svim tačkama $\mathfrak{r}$ površi $\mathcal{P}$, tada je ono tangentno vektorsko polje površi $\mathcal{P}$. Jedno-dimenzionalni vektorski prostor $\mathcal{N}_{\mathfrak{r}}(\mathcal{P})$, čiji elementi su skalarni umnošci jediničnog vektora

$$\mathfrak{y}(\mathfrak{r}) = \frac{1}{\left|\frac{\partial\mathfrak{r}}{\partial u} \wedge \frac{\partial\mathfrak{r}}{\partial v}\right|}\left(\frac{\partial\mathfrak{r}}{\partial u} \wedge \frac{\partial\mathfrak{r}}{\partial v}\right), \tag{2.3}$$

je normalni vektorski prostor u tački $\mathfrak{r}$ površi $\mathcal{P}$. Smer vektora $\mathfrak{y}(\mathfrak{r})$ determiniše orjentaciju površi $\mathcal{P}$, kao što smer jediničnog vektora tangente $\boldsymbol{\tau}(\mathfrak{r})$ krive $\mathcal{L}$ determiniše orjentaciju krive $\mathcal{L}$.

Ako je $\mathbf{n}(\mathfrak{r})$ normalno vektorsko polje granice $\partial\mathcal{M}$ mnogostrukosti $\mathcal{M}$, čija orjentacija se po konvenciji usvaja tako da je usmereno od unutrašnjosti mnogostrukosti $\mathcal{M}$ i $\mathbf{I}_{\mathcal{M}}$ kovektor orjentacije mnogostrukosti $\mathcal{M}$, tada je, po konvenciji, kovektor $\mathbf{I}_{\partial\mathcal{M}}$ orjentacije granice $\partial\mathcal{M}$ mnogostrukosti $\mathcal{M}$ determinisan uslovom

$$\mathbf{I}_{\mathcal{M}}(\mathfrak{r}) = \mathbf{I}_{\partial\mathcal{M}}(\mathfrak{r})\,\mathbf{n}(\mathfrak{r}). \tag{2.4}$$

Neka je e, kao geometrijski proizvod sistema baznih vektora $\{\mathfrak{e}_j\}$, kovektor orjentacije $\mathbf{I}_{\mathcal{G}}$ tro-dimenzionlne mnogostrukosti $\mathcal{G}$ u $\mathcal{H}$, forme kvadra, koju ograničava površ $\mathcal{S}$, čije strane su paralelne koordinantnim ravnima:

$$\mathbf{I}_{\mathcal{G}} = \mathfrak{e}_1\mathfrak{e}_2\mathfrak{e}_3 = e = i^2. \tag{2.5}$$

Tada, primera radi, kovektor orjentacije $\mathbf{I}_{\mathcal{P}}$ donje osnove kvadra, paralelne real$i$realnoj ravni $\boldsymbol{\varrho} \to (x, y)$, po prethodno navedenoj konvenciji, zadovoljava uslov

$$i^2 = -\mathbf{I}_{\mathcal{P}}(\mathfrak{r})\ \mathfrak{n}, \tag{2.6}$$

odnosno $\mathbf{I}_{\mathcal{P}} = -\mathfrak{n}$. Ako je kovektor orjentacije $\mathbf{I}_{\mathcal{M}}$ mnogostrukosti $\mathcal{M}$ konstanta, kao što je u ovom slučaju, mnogostrukost $\mathcal{M}$ je ravna mnogostrukost.

Kako je za krivu $\mathcal{L}$ kovektor orjentacije $\mathbf{I}_{\mathcal{L}}(\mathfrak{r}) = \boldsymbol{\tau}(\mathfrak{r})$, kovektor orjentacije $\mathbf{I}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{r})$ krajnjih tačaka $\mathfrak{r}_2$ i $\mathfrak{r}_1$ krive, koje su granica $\partial\mathcal{L}$ krive $\mathcal{L}$, je

$$\mathbf{I}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{r}_2) = 1 = -\mathbf{I}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{r}_1). \tag{2.7}$$

Ako se glatka i ograničena kriva $\mathcal{L}$, kao jedno-dimenzionalna mnogostrukost u $\mathcal{H}$, podeli u prvom koraku na κ_1 elementarnih lukova $\mathcal{L}_{\lambda_1}$ $(\lambda_1 = 1, 2, ..., \kappa_1 \geq 2)$, tako da $\cup_{\lambda_1=1}^{\kappa_1}\mathcal{L}_{\lambda_1} = \mathcal{L}$ (skupovi $\widetilde{\mathcal{L}}_{\lambda_1} = int.\mathcal{L}_{\lambda_1}$ su disjunktni skupovi), svaki elementarni luk $\mathcal{L}_{\lambda_1}$, u narednom koraku, deli se na nove elementarne lukove $\mathcal{L}_{\lambda_1,\lambda_2}$ $(\lambda_2 = 1, 2, ..., \kappa_2 \geq 2)$. Shodno tome, beskonačni proces podela $D_n\mathcal{L}$[1] krive $\mathcal{L}$ je beskonačni niz skupova uređenih parova $(\mathcal{L}_{\lambda_1,...,\lambda_n}, \mathfrak{r}_{\lambda_1,...,\lambda_n})$, formiranih na svakom ($n$-tom) nivou podele krive $\mathcal{L}$, tako da za svaki rubni elementarni luk $\mathfrak{r}_{\lambda_1,...,\lambda_n} \in \mathcal{L}_{\lambda_1,...,\lambda_n} \cap \partial\mathcal{L} \cup \widetilde{\mathcal{L}}_{\lambda_1,...,\lambda_n}$ i $\mathfrak{r}_{\lambda_1,...,\lambda_n} \in \widetilde{\mathcal{L}}_{\lambda_1,...,\lambda_n}$ za sve ostale elementarne lukove. Ako su vektori $\sum_j \mathfrak{e}_j \triangle_{\lambda_1,...,\lambda_n}\mathrm{x}^j = \triangle_{\lambda_1,...,\lambda_n}\mathfrak{r}$ vektorske mere elementarnih lukova $\mathcal{L}_{\lambda_1,...,\lambda_n}$, vektori $\mathfrak{d}\mathrm{x} = \lim\limits_{n\to+\infty} \triangle_{\lambda_1,...,\lambda_n}\mathfrak{r}$ su vektorski infinitezimalni linijski elementi krive $\mathcal{L}$, takvi da

$$\mathfrak{d}\mathrm{x} = \boldsymbol{\tau}(\mathfrak{r})\, ds = d\mathfrak{r} = \sum_j\sum_k \partial_j\mathfrak{r}\delta_k^j d\mathrm{x}^k = \sum_j\sum_k \mathfrak{e}_j\delta_k^j d\mathrm{x}^k = \sum_j \mathfrak{d}_j\mathrm{x}^j, \tag{2.8}$$

gde $\mathfrak{r} = \sum_j \mathrm{x}^j\mathfrak{e}_j$ i $\mathfrak{d}_j = \sum_k \mathfrak{e}_k\delta_j^k d = \mathfrak{e}_j d$.

Jasno, budući da

$$\bar{\mathfrak{d}}_j\mathfrak{r} = \bar{\mathfrak{e}}_j d\mathfrak{r} = \sum_k \bar{\mathfrak{e}}_j\mathfrak{e}_k d\mathrm{x}^k = \sum_k \mathrm{E}_{\bar{j}k} d\mathrm{x}^k = \sum_k \delta_{\bar{j}k} d\mathrm{x}^k + \sum_k\sum_l e_{jkl}\, d\mathrm{x}^k\mathfrak{e}^l, \tag{2.9}$$

diferencijalna forma

$$(ds)^2 = d\bar{\mathfrak{r}}d\mathfrak{r} = \sum_j \bar{\mathfrak{d}}_j\mathfrak{r}d\mathrm{x}^j = \sum_j\sum_k \bar{\mathfrak{d}}_j\mathrm{x}^j\mathfrak{d}_k\mathrm{x}^k = \sum_j\sum_k \mathrm{E}_{\bar{j}k} d\mathrm{x}^j d\mathrm{x}^k \tag{2.10}$$

je diferencijalna metrička forma tro-dimenzionalnog real$i$realnog vektorskog prostora $\mathcal{H}$.

[1] Ako u nekom beskonačnom procesu podela $D_n\mathcal{M}$, mnogostrukosti $\mathcal{M}$, a za svako $\varepsilon > 0$ i beskonačni niz konačnih skupova uređenih parova $\{\mathcal{M}_{\lambda_1,...,\lambda_n},\ \mathfrak{r}_{\lambda_1,...,\lambda_n}\}_{\lambda_1=1...\lambda_n=1}^{\kappa_1...\kappa_n}$, takvih da je za svako n $(n \in \aleph)$: $\cup_{\lambda_1=1...\lambda_n=1}^{\kappa_1...\kappa_n}\mathcal{M}_{\lambda_1,...,\lambda_n} = \mathcal{M}$ i $\{\mathfrak{r}_{\lambda_1,...,\lambda_n}\}_{\lambda_1=1...\lambda_n=1}^{\kappa_1...\kappa_n} \subset \{\mathfrak{r}_{\lambda_1,...,\lambda_{n+1}}\}_{\lambda_1=1...\lambda_{n+1}=1}^{\kappa_1...\kappa_{n+1}}$, postoji n_ε, takvo da je $|1 - \mu_{\max}(\mathcal{M}_{\lambda_1,...,\lambda_n})/\mu_{\min}(\mathcal{M}_{\lambda_1,...,\lambda_n})| < \varepsilon$ (μ: $\mathcal{M}_{\lambda_1,...,\lambda_n} \mapsto R_{\ 0+}$ je skalarna funkcija *Lebegove* mere elementarnih mnogostrukosti $\mathcal{M}_{\lambda_1,...,\lambda_n}$), za sve nivoe podele $n \geq n_\varepsilon$, kao i sve elementarne mnogostrukosti $\mathcal{M}_{\lambda_1,...,\lambda_n}$, podela $D_n\mathcal{M} = \{\mathcal{M}_{\lambda_1,...,\lambda_n},\ \mathfrak{r}_{\lambda_1,...,\lambda_n} \mid \lambda_q = 1, 2, ..., \kappa_q \geq 2\ (q = 1, 2, ..., n)\}(n \in \aleph)$ je apsolutna podela mnogostrukosti $\mathcal{M}$.

Po analogiji i svaka konturna površ $\mathcal{P}$, kao dvo-dimenzionalna mnogostrukost u $\mathcal{H}$, koju ograničava zatvorena konturna kriva $\mathcal{L}$, može se podeliti na κ_1 elementarnih konturnih površi $\mathcal{P}_{\lambda_1}$ $(\lambda_1 = 1, 2, ..., \kappa_1 \geq 2)$, ograničenih elementarnim konturama $\mathcal{L}_{\lambda_1}$, u prvom koraku. Svaka elementarna konturna površ $\mathcal{P}_{\lambda_1}$, u narednom koraku, deli se na nove elementarne konturne površi $\mathcal{P}_{\lambda_1,\lambda_2}$ $(\lambda_2 = 1, 2, ..., \kappa_2 \geq 2)$. Ako su vektori $\sum_j \sum_k \bar{\mathfrak{e}}_j \mathfrak{e}_k \triangle_{\lambda_1,...,\lambda_n} \sigma^{jk}$ vektorske mere površina elementarnih konturnih površi $\mathcal{P}_{\lambda_1,...,\lambda_n}$, vektori $\mathfrak{d}\sigma = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum_j \sum_k \bar{\mathfrak{e}}_j \mathfrak{e}_k \triangle_{\lambda_1,...,\lambda_n} \sigma^{jk}$ su vektorski infinitezimalni površinski elementi konturne površi $\mathcal{P}$, takvi da

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{d}\sigma = \mathfrak{n}(\mathfrak{r})\, d\sigma = & \sum_j \bar{\mathfrak{e}}_j \mathfrak{d}\sigma^j = \sum_j \sum_k \bar{\mathfrak{e}}_j \mathfrak{d}_k \sigma^{jk} = \sum_j \sum_k \bar{\mathfrak{e}}_j \mathfrak{e}_k d\sigma^{jk} = \\
= & \sum_j \sum_k \mathrm{E}_{\bar{j}k} d\sigma^{jk} = \sum_j \sum_k \sum_l \sum_m \mathrm{E}_{\bar{j}k} \delta^{jk}_{lm} d\mathrm{x}^l d\mathrm{x}^m,
\end{aligned} \tag{2.11}
$$

gde simbol δ^{jk}_{lm} je mešoviti sistem, takav da $\delta^{jk}_{lm} = 0$, za svako $j \neq l$ ili $k \neq m$, kao i za svako $j = l \geq k = m$, odnosno $\delta^{jk}_{lm} = (-1)^{j-1}$, za svako $j = l < k = m$. Jasno,

$$
\mathfrak{d}\sigma^j = \sum_k \mathfrak{d}_k \sigma^{jk} = \sum_k \mathfrak{e}_k d\sigma^{jk} = \sum_k \sum_l \sum_m \mathfrak{e}_k \delta^{jk}_{lm} d\mathrm{x}^l d\mathrm{x}^m.
$$

Ako se i proizvoljna oblast $\mathcal{G}$, kao tro-dimenzionalna mnogostrukost u $\mathcal{H}$, koju ograničava zatvorena konturna površ $\mathcal{P}$, podeli, naravno u prvom koraku, na κ_1 elementarnih oblasti $\mathcal{G}_{\lambda_1}$ $(\lambda_1 = 1, 2, ..., \kappa_1 \geq 2)$, ograničenih elementarnim konturnim površima $\mathcal{P}_{\lambda_1}$, sve se elementarne oblasti $\mathcal{G}_{\lambda_1}$, u narednom koraku, dele na nove elementarne oblasti $\mathcal{G}_{\lambda_1,\lambda_2}$ $(\lambda_2 = 1, 2, ..., \kappa_2 \geq 2)$. Ako su $\triangle_{\lambda_1,...,\lambda_n}\omega$ mere zapremina elementarnih oblasti $\mathcal{G}_{\lambda_1,...,\lambda_n}$, tada $d\omega = \lim\limits_{n\to+\infty} \triangle_{\lambda_1,...,\lambda_n}\omega$ su infinitezimalni zapreminski elementi oblasti $\mathcal{G}$, takvi da

$$
i^2 d\omega = \mathfrak{d}\sigma \cdot \mathfrak{d}\mathrm{x} = \sum_j \bar{\mathfrak{e}}_j \mathfrak{d}\sigma^j \cdot \mathfrak{d}\mathrm{x} = \sum_j \sum_k \sum_l \mathrm{E}_{\bar{j}k} \cdot \mathfrak{e}_l d\sigma^{jk} d\mathrm{x}^l = \sum_j \sum_k \sum_l e_{jkl} d\omega^{jkl}, \tag{2.12}
$$

gde $d\omega^{jkl} = d\sigma^{jk} d\mathrm{x}^l = \sum_m \sum_n \sum_h \delta^{jkl}_{mnh} d\mathrm{x}^m d\mathrm{x}^n d\mathrm{x}^h$ i $\delta^{jkl}_{mnh} = \delta^{jk}_{mn} \mathfrak{e}^l \cdot \mathfrak{e}_h = \delta^{jk}_{mn} \delta^l_h$.

Ako se uvede kovektor orjentisane mere $\mathfrak{d}^M \mathbf{x}$ M-dimenzionalne mnogostrukosti $\mathcal{M}$ u $\mathcal{H}$: $\mathfrak{d}^M \mathbf{x} = \mathbf{I}_{\mathcal{M}}(\mathfrak{r})\, d^M \mathbf{x}$, tada za jedno-dimenzionalnu mnogostrukost $\mathcal{L}$

$$
\mathfrak{d}^1 \mathrm{x} = \mathfrak{d}\mathrm{x} = \boldsymbol{\tau}(\mathfrak{r})\, ds = \boldsymbol{\tau}(\mathfrak{r})\, d^1 \mathrm{x} = \sum_j \sum_k \mathfrak{e}_k \delta^k_j d\mathrm{x}^j = \sum_k \mathfrak{e}_k d\mathrm{x}^k, \tag{2.13}
$$

za dvo-dimenzionalnu mnogostrukost $\mathcal{P}$

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{d}^2 \mathrm{x} = \mathfrak{d}\sigma = \mathfrak{n}(\mathfrak{r})\, d\sigma = \mathfrak{n}(\mathfrak{r})\, d^2 \mathrm{x} = & \sum_j \sum_k \sum_l \sum_m \mathrm{E}_{\bar{j}k} \delta^{jk}_{lm} d\mathrm{x}^l d\mathrm{x}^m = \\
= & \sum_j \sum_k \sum_l \sum_m \delta^{jk}_{lm} \bar{\mathfrak{d}}_j \mathrm{x}^l \mathfrak{d}_k \mathrm{x}^m = \sum_j \sum_k \mathrm{E}_{\bar{j}k} d\sigma^{jk}
\end{aligned} \tag{2.14}
$$

i za tro-dimenzionalnu mnogostrukost $\mathcal{G}$

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{d}^3 \mathrm{x} = \mathfrak{d}^2 \mathrm{x} \cdot \mathfrak{d}\mathrm{x} = i^2 d\omega = i^2 d^3 \mathrm{x} = & \sum_j \sum_k \sum_l \sum_m \sum_n \sum_h (\mathrm{E}_{\bar{j}k} \cdot \mathfrak{e}_l) \delta^{jkl}_{mnh} d\mathrm{x}^m d\mathrm{x}^n d\mathrm{x}^h = \\
= & \sum_j \sum_k \sum_l \sum_m \sum_n \sum_h e_{jkl} \delta^{jkl}_{mnh} d\mathrm{x}^m d\mathrm{x}^n d\mathrm{x}^h = \sum_j \sum_k \sum_l e_{jkl} d\omega^{jkl}.
\end{aligned} \tag{2.15}
$$

2.1 Prostorni (integralni) izvod kovektorskog polja

Podsetimo se da je svako polje, koje je definisano nad nekom kolekcijom intervala u $\mathbb{R}^1$, interval polje. Shodno tome je i svako polje, definisano nad nekom kolekcijom elementarnih mnogostrukosti u $\mathcal{H}$, elementarno polje.

Ako su $\mathfrak{r} \mapsto f(\mathfrak{r})$ i $\mathfrak{r} \mapsto \mathbf{F}(\mathfrak{r})$ skalarno i vektorsko polje u $\mathcal{H}$, respektivno, polje $\mathfrak{r} \mapsto \mathrm{Q}(\mathfrak{r})$:

$$\mathrm{Q}(\mathfrak{r}) = f(\mathfrak{r}) + \mathbf{F}(\mathfrak{r}), \tag{2.16}$$

je kovektorsko polje u $\mathcal{H}$.

Definicija 1 *Neka je $\mathcal{M}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n} \mapsto \mathfrak{i}(\mathcal{M}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n})$ elementarno kovektorsko polje u $\mathcal{H}$. Tada, $\mathfrak{i}$ konvergira ka $\mathfrak{I}$ u tački $\mathfrak{r}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n} \in \cup_{n=1}^{+\infty}\{\mathfrak{r}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}\}_{\lambda_1=1\ldots\lambda_n=1}^{\kappa_1\ldots\kappa_n}$:*

$$\lim_{n\to+\infty} \mathfrak{i}(\mathcal{M}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}) = \mathfrak{I},$$

ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $n_\varepsilon \in \aleph$ takvo da

$$|\mathfrak{i}(\mathcal{M}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}) - \mathfrak{I}| < \varepsilon,$$

kadgod je $(\mathcal{M}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}, \mathfrak{r}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}) \in D_n\mathcal{M}$ i $n \geq n_\varepsilon$.

Ako u svakoj tački $\mathfrak{r}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n} \in \cup_{n=1}^{+\infty}\{\mathfrak{r}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}\}_{\lambda_1=1\ldots\lambda_n=1}^{\kappa_1\ldots\kappa_n}$, za svaku apsolutnu podelu $D_n\mathcal{M}$, elementarno kovektorsko polje $\mathfrak{i}$ konvergira, tada $\mathfrak{i}$ je konvergentno elementarno kovektorsko polje po mnogostrukosti $\mathcal{M}$.

Elementarno kovektorsko polje $\mathfrak{i}$ konvergira, tačka po tačka, ka kovektorskom polju $\mathfrak{I}(\mathfrak{r})$, po mnogostrukosti $\mathcal{M}$, ako $\mathfrak{i}$ konvergira ka $\mathfrak{I}(\mathfrak{r})$ u svakoj tački mnogostrukosti $\mathcal{M}$.▼

Definicija 2 *Neka je $\mathcal{M}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n} \mapsto q(\mathcal{M}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n})$ konvergentno elementarno kovektorsko polje u $\mathcal{H}$, koje konvergira tačka po tačka ka kovektorskom polju $Q(\mathfrak{r})$, po mnogostrukosti $\mathcal{M}$:*

$$\lim_{n\to+\infty} q(\mathcal{M}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}) = Q.$$

Za linearno kovektorsko polje $\Omega(\mathfrak{d}^M\mathrm{x}) = \mathfrak{d}^M\mathrm{x}\, Q(\mathfrak{r})$, kome konvergira, tačka po tačka, po $\mathcal{M}$, elementarno kovektorsko polje $\boldsymbol{I}_{\mathcal{M}}\langle\triangle^M\mathrm{x},\ q\rangle$, gde $\boldsymbol{I}_{\mathcal{M}}(\mathfrak{r}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n})\triangle^M_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}\mathrm{x}$ su kovektorske mere elementarnih mnogostrukosti $\mathcal{M}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}$, kaže se da je diferencijalna forma stepena M, ili samo M-forma, kovektorskog polja $Q(\mathfrak{r})$.▼

Granična vrednost parcijalnih suma, formiranih na n-tom nivou apsolutne podele $D_n\mathcal{M}$ mnogostrukosti $\mathcal{M}$ (osobina kompaktnosti mnogostrukosti $\mathcal{M}$ se ovde i nadalje u disertaciji podrazumeva), sa granicom $\partial\mathcal{M}$ ($\widetilde{\mathcal{M}} = int.\mathcal{M}$):

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{\lambda_1=1\ldots\lambda_n=1}^{\kappa_1\ldots\kappa_n} \mathbf{I}_{\mathcal{M}}(\mathfrak{r}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n})\langle\triangle^M\mathrm{x}, \mathrm{q}\rangle(\mathcal{M}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}) = \sum_{\mathfrak{r}\in\mathcal{M}} \mathfrak{d}^M\mathrm{x}\,\mathrm{Q}(\mathfrak{r}) = \sum_{\mathfrak{r}\in\mathcal{M}} \Omega\left(\mathfrak{d}^M\mathrm{x}\right),$$

je apsolutna integralna suma kovektorskog polja $\mathrm{Q}(\mathfrak{r})$ po mnogostrukosti $\mathcal{M}$. Ako je, uz sve to, kovektorsko polje $\mathrm{Q}(\mathfrak{r})$ i *Riman* integrabilno na mnogostrukosti $\mathcal{M}$, tada postoji konačna i jedinstvena granična vrednost

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{\lambda_1=1\ldots\lambda_n=1}^{\kappa_1\ldots\kappa_n} \mathbf{I}_{\mathcal{M}}(\mathfrak{r}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n})\triangle^M_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}\mathrm{x}\,\mathrm{Q}(\mathfrak{r}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}) = \int_{\mathcal{M}} \mathfrak{d}^M\mathrm{x}\,\mathrm{Q}(\mathfrak{r}) = \int_{\mathcal{M}} \Omega\left(\mathfrak{d}^M\mathrm{x}\right).$$

Definicija 3 *Neka je za M-dimenzionalnu orjentisanu mnogostrukost $\mathcal{M}$, koja ima granicu $\partial\mathcal{M}$, M-forma $\Omega(\boldsymbol{d}^M\mathrm{x})$ kovektorskog polja $\mathfrak{r} \mapsto Q(\mathfrak{r})$ definisana na mnogostrukosti $\mathcal{M}$ svuda, osim na skupu tačaka $\mathcal{J}_\Omega \in \mathcal{M}$ i neka je $\mathcal{M}_{\lambda_1,\dots,\lambda_n} \mapsto p\ (\mathcal{M}_{\lambda_1,\dots,\lambda_n})$ proizvoljno elementarno kovektorsko polje, koje konvergira, tačka po tačka, ka kovektorskom polju $\mathfrak{r} \mapsto P(\mathfrak{r})$, po $\mathcal{M}$ svuda, osim na skupu tačaka $\mathcal{J}_P \in \mathcal{M}$. Ako postoji konačna i jedinstvena granična vrednost, koja je nezavisna od izbora podele $D_n\mathcal{M}$,*

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{\lambda_1=1\dots\lambda_n=1}^{\kappa_1\dots\kappa_n} \boldsymbol{I}_{\mathcal{M}}(\mathfrak{r}_{\lambda_1,\dots,\lambda_n})\langle\langle \triangle^M \mathrm{x}, q\rangle, p\rangle(\mathcal{M}_{\lambda_1,\dots,\lambda_n}) =$$

$$= \sum_{\mathfrak{r}\in\mathcal{M}} \langle\langle \boldsymbol{d}^M\mathrm{x}, Q\rangle, P\rangle\,(\mathfrak{r}) = \sum_{\mathfrak{r}\in\mathcal{M}} \Omega(\boldsymbol{d}^M\mathrm{x})P(\mathfrak{r})\,, \tag{2.17}$$

kovektorsko polje $\mathfrak{r} \mapsto P(\mathfrak{r})$ je apsolutno (totalno) integrabilno uz diferencijalnu formu $\Omega(\boldsymbol{d}^M\mathrm{x})$ po $\mathcal{M}$.▼

Definicija 4 *Diferencijalna M-forma $\boldsymbol{d}^M\mathrm{x}Q\,(\mathfrak{r})$ je polje rezidualnih vrednosti kovektorskog polja $\mathfrak{r} \mapsto Q(\mathfrak{r})$.*▼

Neka je $\mathbf{d}^M\mathrm{x}\mathrm{I}(\mathfrak{r})$ diferencijalna forma kovektorskog polja $\mathrm{I}(\mathfrak{r})$ u $\mathcal{H}$, kome konvergira tačka po tačka, po mnogostrukosti $\mathcal{M}$, elementarno kovektorsko polje $\mathcal{M}_{\lambda_1,\dots,\lambda_n} \mapsto \mathrm{i}\ (\mathcal{M}_{\lambda_1,\dots,\lambda_n})$:

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{I}_{\mathcal{M}}(\mathfrak{r}_{\lambda_1,\dots,\lambda_n})\langle\triangle^M\mathrm{x}, \mathrm{i}\rangle(\mathcal{M}_{\lambda_1,\dots,\lambda_n}) = \mathbf{d}^M\mathrm{x}\mathrm{I},$$

takvo da je

$$\mathbf{I}_{\mathcal{M}}(\mathfrak{r}_{\lambda_1,\dots,\lambda_n})\langle\triangle^M\mathrm{x}, \mathrm{i}\rangle(\mathcal{M}_{\lambda_1,\dots,\lambda_n}) = \sum_{\mathfrak{r}\in\,\partial\mathcal{M}_{\lambda_1,\dots,\lambda_n}} \mathbf{d}^{M-1}\mathrm{x}\,\mathrm{Q}\,(\mathfrak{r})\,,$$

gde $\mathfrak{r} \mapsto \mathrm{Q}(\mathfrak{r})$ je kovektorsko polje, za koje su definisane apsolutne (totalne) integralne sume $\sum_{\mathfrak{r}\in\,\partial\mathcal{M}_{\lambda_1,\dots,\lambda_n}} \mathbf{d}^{M-1}\mathrm{x}\,\mathrm{Q}\,(\mathfrak{r})$, kadgod je $\mathcal{M}_{\lambda_1,\dots,\lambda_n} \in D_n\mathcal{M}$ i $D_n\mathcal{M}$ bilo koja apsolutna podela mnogostrukosti $\mathcal{M}$.

Definicija 5 *Ako za sve apsolutne podele M-dimenzionalne orjentisane mnogostrukosti $\mathcal{M}$, sa granicom $\partial\mathcal{M}$, takve da je $(\mathcal{M}_{\lambda_1,\dots,\lambda_n}, \widehat{\mathfrak{r}}) \in D_n\mathcal{M}$, postoji konačna i jedinstvena granična vrednost elementarnog kovektorskog polja $\boldsymbol{I}_{\mathcal{M}}i$ u tački $\widehat{\mathfrak{r}}$*

$$\boldsymbol{I}_{\mathcal{M}}(\widehat{\mathfrak{r}})I(\widehat{\mathfrak{r}}) = \frac{\boldsymbol{d}^M}{d^M\mathrm{x}}Q(\mathfrak{r})\,|_{\mathfrak{r}=\widehat{\mathfrak{r}}} = \lim_{\mathcal{M}\to\widehat{\mathfrak{r}}} \frac{1}{\mu\,(\mathcal{M})} \sum_{\mathfrak{r}\in\,\partial\mathcal{M}} \boldsymbol{d}^{M-1}\mathrm{x}\,Q\,(\mathfrak{r}) =$$

$$= \boldsymbol{I}_{\mathcal{M}}(\widehat{\mathfrak{r}}) \lim_{n\to+\infty} i(\mathcal{M}_{\lambda_1,\dots,\lambda_n}) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\triangle^M_{\lambda_1,\dots,\lambda_n}\mathrm{x}} \sum_{\mathfrak{r}\in\,\partial\mathcal{M}_{\lambda_1,\dots,\lambda_n}} \boldsymbol{d}^{M-1}\mathrm{x}\,Q\,(\mathfrak{r})\,, \tag{2.18}$$

gde $\mu\,(\mathcal{M}) = \sum_{\mathfrak{r}\in\mathcal{M}} d^M\mathrm{x}$ je mera mnogostrukosti $\mathcal{M}$, kovektorsko polje $Q(\mathfrak{r})$ je prostorno (integralno) diferencijabilno u tački $\widehat{\mathfrak{r}}$ mnogostrukosti $\mathcal{M}$.▼

Na osnovu *Definicija 3* i *5* može se konstatovati da apsolutna (totalna) integralna suma $\sum_{\mathfrak{r}\in\mathcal{M}} \mathbf{d}^M\mathrm{Q}(\mathfrak{r})\mathrm{P}(\mathfrak{r})$, kadgod ona postoji, generalizuje pojam *Riman-Stiltjes*-ovog integrala, a da kovektorsko polje $\mathbf{I}_{\mathcal{M}}\,(\mathfrak{r})\mathrm{I}(\mathfrak{r})$, kome konvergira, tačka po tačka, elementarno kovektorsko polje $\mathbf{I}_{\mathcal{M}}\mathrm{i}$, u smislu *Definicije 1*, je polje prostornog (integralnog) izvoda kovektorskog polja

$\mathrm{Q}(\mathfrak{r})$. Kako konvergencija elementarnog kovektorskog polja $\mathbf{I}_{\mathcal{M}}\mathfrak{i}$ ne zavisi od izbora forme mnogostrukosti $\mathcal{M}$, već samo od njene dimenzionalnosti, može se na mesto mnogostrukosti $\mathcal{M}$ uzeti bilo koja okolina $\mathcal{O}$ tačke $\widehat{\mathfrak{r}}$, koja je odgovarajuće dimenzionalnosti. Shodno tome, ako se za okolinu $\mathcal{O}$ tačke $\widehat{\mathfrak{r}}$ izabere paralelepiped $\wp$, parametrizovan koordinatama x^j, tada granicu paralelepipeda čine šest pravougaonika $\mathcal{S}^j_\pm$, centriranih u tačkama $\widehat{\mathfrak{r}}^j_\pm$, sa konstantnim kovektorima orjentacije $\mathbf{I}_{\mathcal{S}^j}$, takvim da $i^2 = \mathbf{I}_{\mathcal{S}^j}\overline{\mathfrak{e}}^j$ $(j = 1, 2, 3)$. U ovom naglašenom slučaju, pod izvesnim okolnostima,

$$\mathfrak{I}(\widehat{\mathfrak{r}}) = i^2 \lim_{\wp\to\widehat{\mathfrak{r}}} \frac{1}{w} \sum_{\mathfrak{r}\in\partial\wp} \mathfrak{d}^2\mathrm{x}\mathrm{Q}(\mathfrak{r}) = \lim_{\wp\to\widehat{\mathfrak{r}}} \frac{1}{w} \sum_j [\sum_{\mathfrak{r}\in\widetilde{\mathcal{S}}^j_+} \mathfrak{e}^j d^2\mathrm{x}\mathrm{Q}(\mathfrak{r}) - \sum_{\mathfrak{r}\in\widetilde{\mathcal{S}}^j_-} \mathfrak{e}^j d^2\mathrm{x}\mathrm{Q}(\mathfrak{r})] =$$

$$= \sum_j \lim_{\triangle\mathrm{x}^j\to 0^+} \frac{\mathfrak{e}^j}{\triangle\mathrm{x}^j}[\mathrm{Q}(\widehat{\mathfrak{r}}^j_+) - \mathrm{Q}(\widehat{\mathfrak{r}}^j_-)] = \sum_j \mathfrak{e}^j\partial_j\mathrm{Q}(\mathfrak{r})\,|_{\mathfrak{r}=\widehat{\mathfrak{r}}} = \frac{\mathfrak{d}^3}{d^3\mathrm{x}}\mathrm{Q}(\mathfrak{r})\,|_{\mathfrak{r}=\widehat{\mathfrak{r}}}\,, \tag{2.19}$$

gde

$$\partial_j = \frac{d}{d\mathrm{x}^j} \ \text{i}\ \frac{\mathfrak{d}^3}{d^3\mathrm{x}} = \sum_j \frac{\mathfrak{d}^j}{d\mathrm{x}^j} = \sum_j \mathfrak{e}^j\partial_j. \tag{2.20}$$

Za jedno-dimenzionalnu mnogostrukost $\mathcal{L}$ u $\mathcal{H}$, okolina $\mathcal{O}$ tačke $\widehat{\mathfrak{r}}$ je lučni deo krive $\mathcal{L}$, sa graničnim tačkama $\widehat{\mathfrak{r}}_\pm$. Kovektor orjentacije $\mathbf{I}_{\mathcal{L}}(\widehat{\mathfrak{r}})$ krive $\mathcal{L}$ je jedinični vektor tangente $\boldsymbol{\tau}(\widehat{\mathfrak{r}})$. Kako su kovektori orjentacije $\mathbf{I}_{\mathcal{A}}(\widehat{\mathfrak{r}}_\pm)$ graničnih tačaka: ±1, na osnovu definicione jednakosti (2.18), sledi da

$$\boldsymbol{\tau}(\widehat{\mathfrak{r}})\,\mathfrak{I}(\widehat{\mathfrak{r}}) = \lim_{\mathcal{L}\to\widehat{\mathfrak{r}}} \frac{1}{\lambda} \sum_{\mathfrak{r}\in\widehat{\mathfrak{r}}_\pm} \mathfrak{d}^0\mathrm{x}\mathrm{Q}(\mathfrak{r}) = \lim_{\triangle^1\mathrm{x}\to 0^+} \frac{1}{\triangle^1\mathrm{x}} \sum_{\mathfrak{r}\in\widehat{\mathfrak{r}}_\pm} \mathfrak{d}^0\mathrm{x}\mathrm{Q}(\mathfrak{r}) =$$

$$= \lim_{\triangle^1\mathrm{x}\to 0^+} \frac{\mathrm{Q}(\widehat{\mathfrak{r}}_+) - \mathrm{Q}(\widehat{\mathfrak{r}}_-)}{\triangle^1\mathrm{x}} = \frac{\mathfrak{d}^1}{d^1\mathrm{x}}\mathrm{Q}(\mathfrak{r})\,|_{\mathfrak{r}=\widehat{\mathfrak{r}}} = \frac{d}{ds}\mathrm{Q}(\mathfrak{r})\,|_{\mathfrak{r}=\widehat{\mathfrak{r}}}\,, \tag{2.21}$$

Konačno, u slučaju dvo-dimenzionalne mnogostrukosti $\mathcal{P}$ u $\mathcal{H}$, za okolinu $\mathcal{O}$ tačke $\widehat{\mathfrak{r}}$ može se uzeti projekcija Π dela površi $\mathcal{P}$, u čijem središtu je tačka $\widehat{\mathfrak{r}}$, ograničen lučnim delovima $\mathcal{C}^\pm_u$ i $\mathcal{C}^\pm_v$ krivolinijskih koordinantnih krivih $\mathcal{C}_u$ i $\mathcal{C}_v$, determinisanih sistemom baznih vektora $\partial_u\mathfrak{r}(u,v)$ i $\partial_v\mathfrak{r}(u,v)$, na tangentnu ravan $\mathcal{T}_{\mathfrak{r}}(\mathcal{P})$ površi $\mathcal{P}$ u tački $\widehat{\mathfrak{r}}$. Shodno tome, budući da je kovektor $\mathbf{I}_{\mathcal{P}}(\widehat{\mathfrak{r}})$ orjentacije površi $\mathcal{P}$ jedinični vektor normale $\mathfrak{y}(\widehat{\mathfrak{r}})$ površi $\mathcal{P}$ u tački $\widehat{\mathfrak{r}}$, sledi da

$$\mathfrak{y}(\widehat{\mathfrak{r}})\,\mathfrak{I}(\widehat{\mathfrak{r}}) = \lim_{\Pi\to\widehat{\mathfrak{r}}} \frac{1}{\pi} \sum_{\mathfrak{r}\in\partial\Pi} \mathfrak{d}^1\mathrm{x}\mathrm{Q}(\mathfrak{r}) = \lim_{\triangle^1\mathrm{u}\to 0^+} \frac{\widehat{\mathfrak{e}}_2}{\triangle^1\mathrm{u}}[\mathrm{Q}(\widehat{\mathfrak{r}}_{u+}) - \mathrm{Q}(\widehat{\mathfrak{r}}_{u-})] -$$

$$- \lim_{\triangle^1\mathrm{v}\to 0^+} \frac{\widehat{\mathfrak{e}}_1}{\triangle^1\mathrm{v}}[\mathrm{Q}(\widehat{\mathfrak{r}}_{v+}) - \mathrm{Q}(\widehat{\mathfrak{r}}_{v-})] = \widehat{\mathfrak{e}}_2(\widehat{\mathfrak{r}})\,\partial_1\mathrm{Q}(\widehat{\mathfrak{r}}) - \widehat{\mathfrak{e}}_1(\widehat{\mathfrak{r}})\,\partial_2\mathrm{Q}(\widehat{\mathfrak{r}}) = \frac{\mathfrak{d}^2}{d^2\mathrm{x}}\mathrm{Q}(\mathfrak{r})\,|_{\mathfrak{r}=\widehat{\mathfrak{r}}}\,, \tag{2.22}$$

gde $\widehat{\mathfrak{e}}_1 = \partial_1\mathfrak{r}(u,v) = \partial_u\mathfrak{r}(u,v)$ i $\widehat{\mathfrak{e}}_2 = \partial_2\mathfrak{r}(u,v) = \partial_v\mathfrak{r}(u,v)$.

Jasno, na osnovu rezultata (2.21) i (2.22):

$$\frac{\mathfrak{d}^1}{d^1\mathrm{x}} = \frac{d}{ds} = \boldsymbol{\tau}(\mathfrak{r}) \cdot \frac{\mathfrak{d}^3}{d^3\mathrm{x}} = \boldsymbol{\tau}(\mathfrak{r}) \cdot \sum_j \mathfrak{e}^j\partial_j \ \text{i}$$

$$\frac{\mathfrak{d}^2}{d^2\mathrm{x}} = \overline{\mathfrak{y}}(\mathfrak{r}) \wedge \frac{\mathfrak{d}^3}{d^3\mathrm{x}} = \overline{\mathfrak{y}}(\mathfrak{r}) \wedge \sum_j \mathfrak{e}^j\partial_j. \tag{2.23}$$

Komentar 1 *Ako je na izvesnom skupu tačaka* $\{\widehat{\boldsymbol{\varUpsilon}}\} \subset \cup_{n=1}^{+\infty}\{\boldsymbol{\varUpsilon}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}\}_{\lambda_1=1\ldots\lambda_n=1}^{\kappa_1\ldots\kappa_n}$ *ograničeno kovektorsko polje* $P(\boldsymbol{\varUpsilon})$*, ali i lineana diferencijalna forma* $\Omega(\boldsymbol{d}^M\mathrm{x})$*, koja nije infinitezimalna na tom skupu tačaka, a skup tačaka* $\{\widehat{\boldsymbol{\varUpsilon}}\}$ *je Lebegove mere nula (Kantorovič i Akilov, 1984), ili još preciznije najviše prebrojiv i uz to konačan skup tačaka, u tom slučaju, kao i u slučaju kada je na skupu tačaka* $\{\widehat{\boldsymbol{\varUpsilon}}\}$*, takvih da pripadaju uniji skupova tačaka:* $\cup_{n=1}^{+\infty}\{\boldsymbol{\varUpsilon}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}\}_{\lambda_1=1\ldots\lambda_n=1}^{\kappa_1\ldots\kappa_n}$*, takođe Lebegove mere nula, odnosno prebrojivom, preciznije konačnom skupu tačaka, linearna diferencijalna forma* $\Omega(\boldsymbol{d}^M\mathrm{x})$ *infinitezimalna i* $|P(\widehat{\boldsymbol{\varUpsilon}})| = +\infty$*, apsolutna integralna suma*

$$\sum_{\boldsymbol{\varUpsilon}\in\mathcal{M}} \boldsymbol{d}^M\mathrm{x}\,Q(\boldsymbol{\varUpsilon})P(\boldsymbol{\varUpsilon}) = \sum_{\boldsymbol{\varUpsilon}\in\mathcal{M}} \Omega(\boldsymbol{d}^M\mathrm{x})P(\boldsymbol{\varUpsilon})\,,$$

kadgod ona postoji, deli se na dve apsolutne integralne sume:

$$\sum_{\boldsymbol{\varUpsilon}\in\mathcal{M}-\{\widehat{\boldsymbol{\varUpsilon}}\}} \boldsymbol{d}^M\mathrm{x}\,Q(\boldsymbol{\varUpsilon})P(\boldsymbol{\varUpsilon}) + \sum_{\boldsymbol{\varUpsilon}\in\{\widehat{\boldsymbol{\varUpsilon}}\}} \boldsymbol{d}^M\mathrm{x}\,Q(\boldsymbol{\varUpsilon})P(\boldsymbol{\varUpsilon}) = \sum_{\boldsymbol{\varUpsilon}\in\mathcal{M}-\{\widehat{\boldsymbol{\varUpsilon}}\}} \Omega(\boldsymbol{d}^M\mathrm{x})P(\boldsymbol{\varUpsilon}) + \sum_{\boldsymbol{\varUpsilon}\in\{\widehat{\boldsymbol{\varUpsilon}}\}} \Omega(\boldsymbol{d}^M\mathrm{x})P(\boldsymbol{\varUpsilon})\,,$$

od kojih je druga na skupu tačaka $\{\widehat{\boldsymbol{\varUpsilon}}\}$ *Lebegove mere nula. Ako je* $P(\boldsymbol{\varUpsilon}) \equiv 1$ *u* $\mathcal{H}$ *i kovektorsko polje* $Q(\boldsymbol{\varUpsilon})$ *ograničeno i merljivo, na merljivom skupu tačaka* $\mathcal{M}-\{\widehat{\boldsymbol{\varUpsilon}}\}$*, to na osnovu Lebegove teoreme o dominantnoj konvergenciji sledi da* $\sum_{\boldsymbol{\varUpsilon}\in\mathcal{M}-\{\widehat{\boldsymbol{\varUpsilon}}\}}\Omega(\boldsymbol{d}^M\mathrm{x}) = \int_{\mathcal{M}}\Omega(\boldsymbol{d}^M\mathrm{x})$*, gde je na desnoj strani Lebegov integral linearne diferencijalne forme* $\Omega(\boldsymbol{d}^M\mathrm{x})$*. Jasno, iz ovoga sledi da pojam apsolutne, odnosno totalne integrabilnosti, je opštiji od pojma Lebegove integrabilnosti, iz razloga što je Lebegov integral, po mnogostrukosti* $\mathcal{M}$*, invarijantan u odnosu na restrikcije mnogostrukosti* $\mathcal{M}$ *na mnogostrukosti* $\mathcal{M}-\{\widehat{\boldsymbol{\varUpsilon}}\}$*, gde* $\{\widehat{\boldsymbol{\varUpsilon}}\}$ *je skup tačaka Lebegove mere nula. Stoga, Lebegov integral nije primenljiv i u slučaju kada je neophodno integraliti kovektorska polja* $Q(\boldsymbol{\varUpsilon})$ *po mnogostrukostima, unutar kojih postoji najviše prebrojiv skup tačaka, u kojima rezidualne vrednosti tog kovektorskog polja mogu biti konačne i različite od nule.*

Primer za to je Hevisajdova funkcija $x \mapsto \varkappa_c(x)$*:*

$$\begin{array}{l} \varkappa_c(x) = c,\ \text{ako je } x > 0 \\ \varkappa_c(x) = 0,\ \text{ako je } x \leq 0 \end{array},$$

gde $c \in \Re_+$*, koja je skoro svuda*[2] *diferencijabilna na segmentu* $[a,b] \in \Re$*, takvom da* $0 \in (a,b)$*. Sa druge strane, na osnovu defenicije Dirakove funkcije* $x \mapsto \delta_c(x)$*, kao granične vrednosti funkcionalnog niza*

$$\tilde{\delta}_{cn}(x) = \frac{n}{2}[\varkappa_c(x+\frac{1}{n}) - \varkappa_c(x-\frac{1}{n})],$$

gde $n \in \aleph$*, koji konvergira, tačka po tačka, ka Dirakovoj funkciji* $\delta_c(x)$*, kada* $n \to +\infty$*, u smislu konvergentnosti monotonih nizova u* $\bar{\Re}$*:*

$$\lim_{n\to+\infty}\tilde{\delta}_{cn}(x) = \lim_{n\to+\infty}\{\frac{n}{2}[\varkappa_c(x+\frac{1}{n}) - \varkappa_c(x-\frac{1}{n})]\} = \delta_c(x)\,,$$

sledi da Dirakova funkcija $x \mapsto \delta_c(x)$ *je funkcija prostornog (integralnog) izvoda Hevisajdove funkcije* $x \mapsto \varkappa_c(x)$*. Kako je, sa jedne strane, Dirakova funkcija Lebeg integrabilna na skupu tačaka* $[a,b]-\{0\}$*, a skup tačaka* $\{0\}$ *Lebegove mere nula, sledi da je Dirakova funkcija Lebeg integrabilna na segmentu* $[a,b]$ *i*

$$\int\limits_{[a,b]-\{0\}} \delta_c(x)\,d\mu = \int\limits_{[a,b]} \delta_c(x)\,d\mu = 0 < \int_a^b d\varkappa_c(x) = \varkappa_c(b) - \varkappa_c(a) = c,$$

[2] Kaže se za funkciju da poseduje neko svojstvo skoro svuda, ako ona to svojstvo poseduje svuda osim na skupu tačaka *Lebegove* mere nula.

što se i moglo očekivati, budući da Hevisajdova funkcija $\varkappa_c$ *je funkcija ograničene varijacije, koja nije uz to i apsolutno neprekidna funkcija, na segmentu* $[a,b]$. *Sa druge strane, za svaku podelu* $D_n\,[a,b]$ *segmenta* $[a,b]$, *nizovi parcijalnih suma* $\sum_{\lambda_1=1\ldots\lambda_n=1}^{\kappa_1\ldots\kappa_n}\langle\Delta_c,\triangle\rangle\,(x_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n})$ *interval funkcije, koja konvergira, tačka po tačka, u smislu Definicije 1, na skupu tačaka* $[a,b]-\{0\}$, *ka diferencijalnoj formi* $d\varkappa_c(x)$, *gde* $\Delta_c\,(x_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n})=[\varkappa_c(\partial_\dashv x_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n})-\varkappa_c(\partial_\vdash x_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n})]/\triangle_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}x$, *konvergiraju:*

$$\sum_{x\in\,(a,\,b)}\delta_c\,(x)\,dx=\lim_{n\to+\infty}\sum_{\lambda_1=1\ldots\lambda_n=1}^{\kappa_1\ldots\kappa_n}\langle\Delta_c,\triangle\rangle\,(x_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n})=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\sum_{\lambda_1=1\ldots\lambda_n=1}^{\kappa_1\ldots\kappa_n}[\varkappa_c(\partial_\dashv x_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n})-\varkappa_c(\partial_\vdash x_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n})]=\varkappa_c(b)-\varkappa_c(a)=c=\int_a^b d\varkappa_c(x).$$

Dakle, apsolutnu (totalnu) integralnu sumu $\sum_{x\in\,[a,\,b]}\delta_c\,(x)\,dx$, *na segmentu* $[a,b]$, *moguće je podeliti na dve apsolutne (totalne) integralne sume:*

$$\sum_{x\in\,[a,\,b]}\delta_c\,(x)\,dx=\sum_{x\in\,[a,\,b]-\{0\}}\delta_c\,(x)\,dx+\sum_{x\in\{0\}}\delta_c\,(x)\,dx,$$

od kojih je prva apsolutna (totalna) integralna suma jednaka Lebegovom integralu Dirakove funkcije na segmentu $[a,b]$, *a druga rezidualnoj vrednosti Dirakove funkcije, koja je funkcije prostornog (integralnog) izvoda Hevisajdove funkcije, u tački prekida.*

Indikativan je i primer funkcije $f\,(x)=-1/x$, *definisane nulte vrednosti u nultoj tački. Funkcija* $x\mapsto 1/x^2$, *kao funkcija prostornog (integralnog) izvoda funkcije* $f\,(x)$, *na segmentu* $[a,b]$ *iz prethodnog primera, nije definisana na skupu tačaka* $\{0\}$. *Za svaku podelu segmenta* $[a,b]$ *postoji konačna, ali i jedinstvena, granična vrednost* $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{\lambda_1=1\ldots\lambda_n=1}^{\kappa_1\ldots\kappa_n}\langle\Phi,\triangle\rangle\,(x_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n})$. *Funkcija* Φ, *takva da* $\Phi\,(x_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n})=[(f\,(\partial_\vdash x_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n})-f\,(\partial_\dashv x_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}))]/\triangle_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}x$, *je interval funkcija, koja konvergira, tačka po tačka, u smislu Definicije 1, na skupu tačaka* $[a,b]-\{0\}$, *ka funkciji* $1/x^2$. *Shodno tome*

$$\sum_{x\in\,[a,\,b]}\left(1/x^2\right)dx=\lim_{n\to+\infty}\sum_{\lambda_1=1\ldots\lambda_n=1}^{\kappa_1\ldots\kappa_n}\langle\Phi,\triangle\rangle\,(x_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n})=$$

$$=-\lim_{n\to+\infty}\sum_{\lambda_1=1\ldots\lambda_n=1}^{\kappa_1\ldots\kappa_n}(1/\partial_\vdash x_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}-1/\partial_\dashv x_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n})=\frac{b-a}{ab}=-\int_a^b df\,(x)\,.$$

Dakle, u slučaju da, na proizvoljnom skupu tačaka Λ, *Lebegove mere nula, nije definisano kovektorsko polje, koje je kovektorsko polje prostornog izvoda nekog kovektorskog polja i taj skup je skup izolovanih tačaka mnogostrukosti* $\mathcal{M}$, *konforno bi bilo formirati sumu rezidualnih vrednosti kovektorskih polja na mnogostrukosti* $\mathcal{M}$, *kao sumu graničnih vrednosti dva niza parcijalnih suma, odnosno kao sumu apsolutnih integralnih suma na skupovima tačaka* $\mathcal{M}-\Lambda$ *i* Λ, *kadgod one postoje, ili samo kao graničnu vrednost jednog niza parcijalnih suma.*

Shodno tome, jedna potpuno nova generalizacija pojma Rimanove integrabilnosti, tačnije glavne vrednosti nesvojstvenog Rimanovog integrala, na pojam totalne vrednosti nesvojstvenog Rimanovog integrala, u smislu apsolutne, odnosno totalne integrabilnosti, daje osnov za dalju generalizaciju rezultata fundamentalnih integralnih teorema, kao što je, na primer, Stoksova teorema, tako da se generalizacijom te teoreme dolazi do teoreme čiji rezultat generalizuje i rezultate fundamentalnih teorema Košijevog računa ostataka. Konkretnije o svemu tome u onom što sledi.▼

2.2 Prostorni ostatak (rezidijum) kovektorskog polja

Na osnovu definicije prostornog (integralnog) izvoda kovektorskog polja može se izvesti zaključak da u zavisnosti od konvergentnosti ili divergentnosti definicionog izraza

$$\lim_{\mathcal{M}\to\hat{\mathfrak{r}}} \frac{1}{\mu\left(\mathcal{M}\right)} \sum_{\mathfrak{r}\in\,\partial\mathcal{M}} \mathfrak{d}^{M-1}\mathrm{x}\mathrm{Q}\left(\mathfrak{r}\right) \tag{2.24}$$

zavisi da li je to kovektorsko polje $\mathrm{Q}(\mathfrak{r})$ prostorno (integralno) diferencijabilno ili ne, odnosno da li je kovektorsko polje prostornog (integralnog) izvoda kovektorskog polja $\mathrm{Q}(\mathfrak{r})$ definisano ili ne u pojedinim tačkama proizvoljne M-dimenzionalne mnogostrukosti $\mathcal{M}$.

Definicija 6 *Bilo koja M-dimenzionalna mnogostrukost $\mathcal{M}$ u $\mathcal{H}$, u kojoj je kovektorsko polje $Q(\mathfrak{r})$ prostorno diferencijabilno, je regularna oblast kovektorskog polja $Q(\mathfrak{r})$.*▼

Definicija 7 *Bilo koja M-dimenzionalna mnogostrukost $\mathcal{M}$ u $\mathcal{H}$, u kojoj je kovektorsko polje $Q(\mathfrak{r})$ prostorno diferencijabilno skoro svuda, je singularna oblast kovektorskog polja $Q(\mathfrak{r})$.*▼

Definicija 8 *Tačka $\mathcal{A}$, singularne oblasti $\mathcal{M}$ kovektorskog polja $Q(\mathfrak{r})$, u kojoj je definisano kovektorsko polje prostornog izvoda kovektorskog polja $Q(\mathfrak{r})$, je regularna tačka kovektorskog polja $Q(\mathfrak{r})$.*▼

Definicija 9 *Tačka $\mathcal{A}$, singularne oblasti $\mathcal{M}$ kovektorskog polja $Q(\mathfrak{r})$, u kojoj nije definisano kovektorsko polje prostornog izvoda kovektorskog polja $Q(\mathfrak{r})$, je singularna tačka kovektorskog polja $Q(\mathfrak{r})$.*▼

Definicija 10 *Ako je kovektorsko polje prostornog izvoda kovektorskog polja $Q(\mathfrak{r})$ ograničeno u okolini singularne tačke $\mathcal{A}$, singularna tačka $\mathcal{A}$ je prividno-singularna tačka kovektorskog polja $Q(\mathfrak{r})$.*▼

Definicija 11 *Ako je kovektorsko polje prostornog izvoda kovektorskog polja $Q(\mathfrak{r})$ ograničeno u singularnoj oblasti, singularna oblast je prividno-singularna oblast kovektorskog polja $Q(\mathfrak{r})$.*▼

Definicija 12 *Rezidualna vrednost kovektorskog polja, koje je kovektorsko polje prostornog izvoda kovektorskog polja $Q(\mathfrak{r})$, u tački $\mathcal{A}$, je prostorni ostatak (rezidijum) kovektorskog polja $Q(\mathfrak{r})$ u tački $\mathcal{A}$.*▼

Definicija 13 *Suma prostornih ostataka (rezidijuma) kovektorskog polja $Q(\mathfrak{r})$, u proširenom (dovršenom) tro-dimenzionalnom realirealnom vektorskom prostoru $\overline{\mathcal{H}}$, jednaka je nuli.*▼

Kako je na svakom nivou jedne ravnomerne podele M-dimenzionalne mnogostrukosti $\mathcal{M}$, koja ima granicu $\partial\mathcal{M}$,

$$\mathbf{I}_{\mathcal{M}}(\mathfrak{r}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n})\langle\triangle^{M}\mathbf{x},\mathfrak{i}\rangle(\mathcal{M}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}) = \sum_{\mathfrak{r}\in\,\partial\mathcal{M}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}} \mathfrak{d}^{M-1}\mathrm{x}\,\mathrm{Q}\left(\mathfrak{r}\right), \tag{2.25}$$

sledi da ako elementarno kovektorsko polje $\mathbf{I}_{\mathcal{M}}\langle\triangle^{M}\mathbf{x},\mathfrak{i}\rangle$ jedinstveno konvergira za sve podele $D_n\mathcal{M}$ mnogostrukosti $\mathcal{M}$ i za svako $\mathfrak{r}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n} \in \cup_{n=1}^{+\infty}\{\mathfrak{r}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}\}_{\lambda_1=1\ldots\lambda_n=1}^{\kappa_1\ldots\kappa_n}$, odnosno za svako $\mathfrak{r}\in\mathcal{M}$, tada

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{\mathfrak{r}\in\,\partial\mathcal{M}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}} \mathfrak{d}^{M-1}\mathrm{x}\,\mathrm{Q}\left(\mathfrak{r}\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbf{I}_{\mathcal{M}}(\mathfrak{r}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n})\langle\triangle^{M}\mathbf{x},\mathfrak{i}\rangle(\mathcal{M}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}) = \mathfrak{d}^{M}\mathbf{x}\,\mathfrak{I}. \tag{2.26}$$

Za kovektorsko polje kaže se da je Riman integrabilno sa merom μ, po M-dimenzionalnoj mnogostrukosti $\mathcal{M}$, ako i samo ako za konačno, po volji malo, $\varepsilon > 0$, postoje $\delta_\varepsilon > 0$ i merljivi skup tačaka $\{\mathcal{A}_i\}$, takav da je $\mu(\{\mathcal{A}_i\}) < \delta_\varepsilon$, a kovektorsko polje je Riman integrabilno po $\mathcal{M} - \cup_{\{\mathcal{A}_i\}} int.\mathcal{E}(\mathcal{A}_i, \varepsilon)$, gde $\mathcal{E}(\mathcal{A}_i, \varepsilon)$ je ε-okolina tačke $\mathcal{A}_i$, odnosno M-dimenzionalna sferna oblast (centrirana u tački $\mathcal{A}_i$ i radijusa ε), koja ima granicu $\partial\mathcal{E}$. Ako je uz to i $\{\mathcal{A}_i\}$ neprazan skup, Lebegove mere nula, kovektorsko polje je Riman integrabilno skoro svuda po $\mathcal{M}$.

Pretpostavimo da je skup singularnih tačaka singularne oblasti $\mathcal{M}$ (sa oznakom $vs\mathcal{M}$) u $\mathcal{H}$, kovektorskog polja $\mathfrak{r} \mapsto \mathrm{Q}(\mathfrak{r})$, najviše prebrojiv (ili konačan ili beskonačan ali prebrojiv) skup, a da je kovektorsko polje $\mathbf{I}_{\mathcal{M}}(\mathfrak{r})\mathrm{I}(\mathfrak{r})$, prostornog (integralnog) izvoda kovektorskog polja $\mathrm{Q}(\mathfrak{r})$, *Riman* integrabilno skoro svuda po singularnoj oblasti $\mathcal{M}$ ($vp\mathcal{M} = \mathcal{M} - vs\mathcal{M}$ je skup regularnih tačaka singularne oblasti $\mathcal{M}$). Tada, postoji po volji mala, izolovana u odnosu na druge, ε-okolina $\mathcal{E}$ svake singularne tačke $\mathcal{A}$, takva da u toj okolini, osim te singularne tačke, nema drugih singularnih tačaka kovektorskog polja $\mathrm{Q}(\mathfrak{r})$. U tom naglašenom slučaju, moguće je diferencijalnu formu (2.26), odnosno polje rezidualnih vrednosti kovektorskog polja, koje je kovektorsko polje prostornog (integralnog) izvoda kovektorskog polja $\mathrm{Q}(\mathfrak{r})$, definisati kao graničnu integralnu vrednost

$$\mathbf{d}^M \mathrm{x}\mathrm{I} = \mathrm{d}^M \Omega\left(\mathbf{d}^{M-1}\mathrm{x}\right) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \oint_{\partial\mathcal{E}} \Omega\left(\mathbf{d}^{M-1}\mathrm{x}\right). \tag{2.27}$$

Ako je tačka $\mathcal{A}$ regularna tačka kovektorskog polja $\mathrm{Q}(\mathfrak{r})$, na osnovu definicije prostornog (integralnog) izvoda kovektorskog polja $\mathrm{Q}(\mathfrak{r})$ sledi da je diferencijalna forma $\mathrm{d}^M\Omega\left(\mathbf{d}^{M-1}\mathrm{x}\right)$, u regularnoj tački $\mathcal{A}$, nulte vrednosti, budući da tada i samo tada definicioni izraz za prostorni ostatak (rezidijum) kovektorskog polja $\mathrm{Q}(\mathfrak{r})$ konvergira, odnosno svodi se na neodređeni izraz 0∞, koji u svakom konkretanom slučaju ima i konkretnu konačnu vrednost. U singularnoj tački $\mathcal{A}$ definicioni izraz za prostorni (integralni) izvod kovektorskog polja $\mathfrak{r} \mapsto \mathrm{Q}(\mathfrak{r})$ određeno divergira, pa shodno tome diferencijalna forma $\mathrm{d}^M\Omega\left(\mathbf{d}^{M-1}\mathrm{x}\right)$, u singularnoj tački $\mathcal{A}$, može imati konačnu vrednost.

Definicija 14 *Prostorni (ili integralni) ostatak (rezidijum), sa oznakom $\mathrm{R}^M es$, kovektorskog polja $\mathfrak{r} \mapsto Q(\mathfrak{r})$, u izolovanoj singularnoj tački $\mathcal{A}$, singularne oblasti $vs\mathcal{M}$ tog kovektorskog polja $Q(\mathfrak{r})$ u $\mathcal{H}$, je po definiciji*

$$\underset{\mathcal{A}}{\mathrm{R}^M es}\ Q = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \oint_{\partial\mathcal{E}} \mathbf{d}^{M-1}\mathrm{x}\, Q(\mathfrak{r})\,.\blacktriangledown \tag{2.28}$$

U daljem tekstu ovoga poglavlja disertacije, ako se drugačije ne naglasi, važiće sledeća pretpostavka.

Pretpostavka 1 *Skup singularnih tačaka singularne oblasti kovektorskog polja $\mathfrak{r} \mapsto Q(\mathfrak{r})$, po kojoj je kovektorsko polje $\mathfrak{r} \mapsto \boldsymbol{I}_{\mathcal{M}}(\mathfrak{r})I(\mathfrak{r})$, prostornog (integralnog) izvoda tog kovektorskog polja, Riman integrabilno skoro svuda, je najviše prebrojiv skup.*$\blacktriangledown$

Shodno svemu ovome, može se reći da su stvoreni svi uslovi za izvođenje fundamentalne integralne relacije kovektorskih polja, koja generalizuje fundamentalne integralne relacije iz *Rimanovog* integralnog računa.

2.3 Fundamentalna integralna relacija kovektorskih polja

Neka se konturna M-dimenzionalna mnogostrukost $\mathcal{M}$, koja ima granicu $\partial\mathcal{M}$ i koja je u nekoj od singularnih oblasti kovektorskog polja $\mathfrak{r} \mapsto \mathrm{Q}(\mathfrak{r})$ u $\mathcal{H}$, podeli na skup regularnih $vp\,\mathcal{M}$ i skup singularnih $vs\,\mathcal{M}$ tačaka i uz to se svaka singularna tačka $\mathcal{A}$ dodatno izoluje po volji konačno malom, izolovanom u odnosu na druge, ε-okolinom $\mathcal{E}_{\mathcal{A}}$, takvom da u toj okolini, osim singularne tačke $\mathcal{A}$, nema drugih singularnih tačaka kovektorskog polja $\mathrm{Q}(\mathfrak{r})$. U tom slučaju može se formirati apsolutna integralna suma rezidualnih vrednosti kovektorskog polja $\mathbf{I}_{\mathcal{M}}\,(\mathfrak{r})\mathrm{I}(\mathfrak{r})$, kao prostornog (integralnog) izvoda kovektorskog polja $\mathrm{Q}(\mathfrak{r})$, na skupu regularnih tačaka $\mathcal{M} - \bigcup_{\mathcal{A}\in\, vs\,\mathcal{M}} \mathcal{E}_{\mathcal{A}}$ kovektorskog polja $\mathrm{Q}(\mathfrak{r})$:

$$\sum_{\mathfrak{r}\in\,\mathcal{M}-\bigcup_{\mathcal{A}\in\, vs\,\mathcal{M}}\mathcal{E}_{\mathcal{A}}} \mathrm{d}^M\mathrm{x}\mathrm{I}\,(\mathfrak{r})\,, \tag{2.29}$$

kao i suma rezidualnih vrednosti kovektorskog polja $\mathbf{I}_{\mathcal{M}}\,(\mathfrak{r})\mathrm{I}(\mathfrak{r})$ u svim singularnim tačkama kovektorskog polja $\mathrm{Q}(\mathfrak{r})$:

$$\sum_{\mathfrak{r}\in\, vs\,\mathcal{M}} \mathrm{d}^M\mathrm{x}\mathrm{I}\,(\mathfrak{r}) = \sum_{\mathcal{A}\in\, vs\,\mathcal{M}} \underset{\mathcal{A}}{\mathrm{R}^M es}\;\mathrm{Q}\,(\mathfrak{r}) = \sum_{\mathcal{A}\in\, vs\,\mathcal{M}} \lim_{\varepsilon\to 0^+} \oint_{\partial\mathcal{E}_{\mathcal{A}}} \mathrm{d}^{M-1}\mathrm{x}\mathrm{Q}\,(\mathfrak{r})\,. \tag{2.30}$$

Teorema 1 *Neka su za kovektorsko polje $\mathfrak{r} \mapsto Q(\mathfrak{r})$ i M-dimenzionalnu mnogostrukost $\mathcal{M}$, sa granicom $\partial\mathcal{M}$, definisane apsolutne (totalne) integralne sume $\sum_{\mathfrak{r}\in\,\partial\mathcal{M}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}} \mathrm{d}^{M-1}\mathrm{x}\,Q\,(\mathfrak{r})$, kadgod $\mathcal{M}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}$ je elementarna mnogostrukost iz familije apsolutnih podela mnogostrukosti $\mathcal{M}$ u $\mathcal{H}$. Tada, ako elementarno kovektorsko polje $\boldsymbol{I}_{\mathcal{M}}\langle\triangle^M\mathrm{x}, \mathrm{i}\rangle$, takvo da*

$$\boldsymbol{I}_{\mathcal{M}}(\mathfrak{r}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n})\langle\triangle^M\mathrm{x}, \mathrm{i}\rangle(\mathcal{M}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}) = \sum_{\mathfrak{r}\in\,\partial\mathcal{M}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}} \mathrm{d}^{M-1}\mathrm{x}\;Q\,(\mathfrak{r})\,, \tag{2.31}$$

konvergira, svuda osim na skupu tačaka $\mathcal{J}_{\mathrm{i}} \in \mathcal{M}$, ka kovektorskom polju $\mathrm{d}^M\mathrm{x}I(\mathfrak{r})$, tada je

$$\sum_{\mathfrak{r}\in\,\partial\mathcal{M}} \mathrm{d}^{M-1}\mathrm{x}Q\,(\mathfrak{r}) = \sum_{\mathfrak{r}\in\mathcal{M}} \mathrm{d}^M\mathrm{x}I\,(\mathfrak{r})\,.\blacktriangledown \tag{2.32}$$

Dokaz. Iz uslova teoreme sledi da je za svaku apsolutnu podelu $D_n\mathcal{M}$, M-dimenzionalne mnogostrukosti $\mathcal{M}$, kao i bilo koji nivo podele

$$\sum_{\lambda_1=1\ldots\,\lambda_n=1}^{\kappa_1\ldots\,\kappa_n} \sum_{\mathfrak{r}\in\,\partial\mathcal{M}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}} \mathrm{d}^{M-1}\mathrm{x}\mathrm{Q}\,(\mathfrak{r}) = \sum_{\lambda_1=1\ldots\,\lambda_n=1}^{\kappa_1\ldots\,\kappa_n} \mathbf{I}_{\mathcal{M}}(\mathfrak{r}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n})\langle\triangle^M\mathrm{x}, \mathrm{i}\rangle(\mathcal{M}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}).$$

Na osnovu *Definicija 1* i *5* suma

$$\sum_{\lambda_1=1\ldots\,\lambda_n=1}^{\kappa_1\ldots\,\kappa_n} \mathbf{I}_{\mathcal{M}}(\mathfrak{r}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n})\langle\triangle^M\mathrm{x}, \mathrm{i}\rangle(\mathcal{M}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}),$$

u graničnom slučaju, kada broj podela n teži beskonačnosti ($n \to +\infty$), svodi se na apsolutnu integralnu sumu rezidualnih vrednosti kovektorskog polja $\mathrm{I}(\mathfrak{r})$, kao prostornog (integralnog) izvoda kovektorskog polja $\mathrm{Q}(\mathfrak{r})$:

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{\lambda_1=1\ldots\,\lambda_n=1}^{\kappa_1\ldots\,\kappa_n} \mathbf{I}_{\mathcal{M}}(\mathfrak{r}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n})\langle\triangle^M\mathrm{x}, \mathrm{i}\rangle(\mathcal{M}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}) = \sum_{\mathfrak{r}\in\widetilde{\mathcal{M}}} \mathrm{d}^M\mathrm{x}\mathrm{I}\,(\mathfrak{r})\,.$$

Sa druge strane, nezavisno od izbora podele $D_n\mathcal{M}$, mnogostrukosti $\mathcal{M}$, postoji konačna i jedinstvena granična vrednost

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{\lambda_1=1\ldots\lambda_n=1}^{\kappa_1\ldots\kappa_n}\sum_{\mathfrak{r}\in\partial\mathcal{M}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}}\mathfrak{d}^{M-1}\mathrm{x}\mathrm{Q}(\mathfrak{r})=\sum_{\mathfrak{r}\in\partial\mathcal{M}}\mathfrak{d}^{M-1}\mathrm{x}\mathrm{Q}(\mathfrak{r}),$$

budući da se rezidualne vrednosti $\mathfrak{d}^{M-1}\mathrm{x}\mathrm{Q}(\mathfrak{r})$, na granicama elementarnih mnogostrukosti, koje razdvajaju dve elementarne mnogostrukosti, anuliraju pri sumiranju, jer su to suprotno orjentisane rezidualne vrednosti istog kovektorskog polja. Konačno, na osnovu *Definicije 3*, sledi da $\sum_{\mathfrak{r}\in\partial\mathcal{M}}\mathfrak{d}^{M-1}\mathrm{x}\mathrm{Q}(\mathfrak{r})=\sum_{\mathfrak{r}\in\mathcal{M}}\mathfrak{d}^{M}\mathrm{x}\mathrm{I}(\mathfrak{r})$, što je i trebalo dokazati u teoremi. ∎

Ako na granici $\partial\mathcal{M}$ konturne mnogostrukosti $\mathcal{M}$ nema singularnih tačaka kovektorskog polja $\mathrm{Q}(\mathfrak{r})$, na osnovu rezultata prethodne teoreme sledi da

$$\sum_{\mathfrak{r}\in\partial\mathcal{M}}\mathfrak{d}^{M-1}\mathrm{x}\mathrm{Q}(\mathfrak{r})-\sum_{\mathcal{A}\in\, vs\,\mathcal{M}}\oint_{\partial\mathcal{E}_{\mathcal{A}}}\mathfrak{d}^{M-1}\mathrm{x}\mathrm{Q}(\mathfrak{r})=\sum_{\mathfrak{r}\in\mathcal{M}-\bigcup_{\mathcal{A}\in\, vs\,\mathcal{M}}\mathcal{E}_{\mathcal{A}}}\mathfrak{d}^{M}\mathrm{x}\mathrm{I}(\mathfrak{r}). \tag{2.33}$$

Definicija 15 *Košijeva glavna vrednost nesvojstvenog integrala kovektorskog polja* $\mathfrak{r}\mapsto \mathrm{I}(\mathfrak{r})$ *po konturnoj mnogostrukosti* $\mathcal{M}$ *u* $\mathcal{H}$*, je po definiciji*

$$vp\int_{\mathcal{M}}\mathfrak{d}^{M}\mathrm{x}\mathrm{I}(\mathfrak{r})=\sum_{\mathfrak{r}\in\, vp\mathcal{M}}\mathfrak{d}^{M}\mathrm{x}\mathrm{I}(\mathfrak{r}).\blacktriangledown \tag{2.34}$$

Definicija 16 *Žordanova singularna vrednost nesvojstvenog integrala kovektorskog polja* $\mathrm{I}(\mathfrak{r})$ *po konturnoj mnogostrukosti* $\mathcal{M}$ *u* $\mathcal{H}$*, je po definiciji*

$$vs\int_{\mathcal{M}}\mathfrak{d}^{M}\mathrm{x}\mathrm{I}(\mathfrak{r})=\sum_{\mathfrak{r}\in\, vs\mathcal{M}}\mathfrak{d}^{M}\mathrm{x}\mathrm{I}(\mathfrak{r})=\sum_{\mathcal{A}\in\, vs\,\mathcal{M}}\lim_{\varepsilon\to0^+}\oint_{\partial\mathcal{E}_{\mathcal{A}}}\mathfrak{d}^{M-1}\mathrm{x}Q(\mathfrak{r}).\blacktriangledown \tag{2.35}$$

Definicija 17 *Totalna vrednost nesvojstvenog integrala kovektorskog polja* $\mathrm{I}(\mathfrak{r})$ *po konturnoj mnogostrukosti* $\mathcal{M}$ *u* $\mathcal{H}$*, je po definiciji*

$$vt\int_{\mathcal{M}}\mathfrak{d}^{M}\mathrm{x}\mathrm{I}(\mathfrak{r})=\sum_{\mathfrak{r}\in\mathcal{M}}\mathfrak{d}^{M}\mathrm{x}\mathrm{I}(\mathfrak{r}), \tag{2.36}$$

odnosno

$$vt\int_{\mathcal{M}}\mathfrak{d}^{M}\mathrm{x}\mathrm{I}(\mathfrak{r})=vp\int_{\mathcal{M}}\mathfrak{d}^{M}\mathrm{x}\mathrm{I}(\mathfrak{r})+vs\int_{\mathcal{M}}\mathfrak{d}^{M}\mathrm{x}\mathrm{I}(\mathfrak{r}).\blacktriangledown \tag{2.37}$$

Jasno, definisana totalna vrednost (vt) nesvojstvenog integrala kovektorskog polja je po definiciji suma graničnih integralnih vrednosti. U slučaju da su to beskonačne veličine istoga reda, drugim rečima u slučaju kada se definisana totalna vrednost nesvojstvenog integrala kovektorskog polja svede na neodređeni izraz razlike beskonačnosti: $\infty-\infty$, na mesto sume graničnih integralnih vrednosti trebalo bi uzeti graničnu vrednost sume integralnih vrednosti, koja u svakom konkretnom slučaju može imati i konkretnu konačnu vrednost.

Shodno svemu tome, relacija apsolutnih integralnih suma (2.33) svodi se, u graničnom slučaju kada $\varepsilon\to0^+$, na integralnu relaciju

$$\oint_{\partial\mathcal{M}}\mathfrak{d}^{M-1}\mathrm{x}\mathrm{Q}(\mathfrak{r})-vp\int_{\mathcal{M}}\mathfrak{d}^{M}\mathrm{x}\mathrm{I}(\mathfrak{r})=\sum_{\mathcal{A}\in\, vs\,\mathcal{M}}\underset{\mathcal{A}}{\mathrm{R}}^{M}es\,\mathrm{Q}(\mathfrak{r}), \tag{2.38}$$

odnosno, budući da je

$$vs \int\limits_{\mathcal{M}} \mathfrak{d}^M \mathrm{x}\mathfrak{I}\,(\mathfrak{r}) = \sum_{\mathcal{A}\in\, vs\,\mathcal{M}} \lim_{\varepsilon\to 0^+} \oint\limits_{\partial\mathcal{E}_{\mathcal{A}}} \mathfrak{d}^{M-1}\mathrm{x}\mathfrak{Q}\,(\mathfrak{r}) = \sum_{\mathcal{A}\in\, vs\,\mathcal{M}} \mathfrak{R}^M_{\mathcal{A}} es\; \mathfrak{Q}\,(\mathfrak{r})\,, \tag{2.39}$$

na integralnu relaciju

$$\oint\limits_{\partial\mathcal{M}} \mathfrak{d}^{M-1}\mathrm{x}\mathfrak{Q}\,(\mathfrak{r}) = vt \int\limits_{\mathcal{M}} \mathfrak{d}^M \mathrm{x}\mathfrak{I}\,(\mathfrak{r})\,. \tag{2.40}$$

U slučaju da na granici $\partial\mathcal{M}$ mnogostrukosti $\mathcal{M}$ ima singularnih tačaka $\mathcal{A}$ kovektorskog polja $\mathfrak{r}\mapsto\mathfrak{Q}(\mathfrak{r})$, svaka od tih tačaka se izoluje po volji malom, izolovanom u odnosu na druge, ε-okolinom $\mathcal{E}_{\mathcal{A}}$, takvom da u toj okolini, osim singularne tačke $\mathcal{A}$, nema drugih singularnih tačaka kovektorskog polja $\mathfrak{Q}(\mathfrak{r})$. Shodno tome

$$\begin{aligned}\sum_{\mathfrak{r}\in\,\partial\mathcal{M}-\underset{\mathcal{A}\in\, vs\,\partial\mathcal{M}}{\cup}\mathcal{E}_{\mathcal{A}}} \mathfrak{d}^{M-1}\mathrm{x}\mathfrak{Q}\,(\mathfrak{r}) - \sum_{\mathcal{A}\in\, vs\,\partial\mathcal{M}} \int\limits_{\partial\mathcal{E}_{\mathcal{A}}\cap\mathcal{M}} \mathfrak{d}^{M-1}\mathrm{x}\mathfrak{Q}\,(\mathfrak{r}) -\\ - \sum_{\mathcal{A}\in\, vs\,\widetilde{\mathcal{M}}} \oint\limits_{\partial\mathcal{E}_{\mathcal{A}}} \mathfrak{d}^{M-1}\mathrm{x}\mathfrak{Q}\,(\mathfrak{r}) = \sum_{\mathfrak{r}\in\mathcal{M}-\underset{\mathcal{A}\in\, vs\,\widetilde{\mathcal{M}}}{\cup}\mathcal{E}_{\mathcal{A}}} \mathfrak{d}^M \mathrm{x}\mathfrak{I}\,(\mathfrak{r})\,,\end{aligned} \tag{2.41}$$

odnosno, ako se levoj strani od znaka jednakosti doda i oduzme $\sum\limits_{\mathcal{A}\in\,\partial\mathcal{M}} \int\limits_{\partial\mathcal{E}_{\mathcal{A}}-\widetilde{\mathcal{M}}} \mathfrak{d}^{M-1}\mathrm{x}\mathfrak{Q}(\mathfrak{r})$

$$\begin{aligned}\sum_{\mathfrak{r}\in\,\partial\mathcal{M}-\underset{\mathcal{A}\in\, vs\,\partial\mathcal{M}}{\cup}\mathcal{E}_{\mathcal{A}}} \mathfrak{d}^{M-1}\mathrm{x}\mathfrak{Q}\,(\mathfrak{r}) + \sum_{\mathcal{A}\in\,\partial\mathcal{M}} \int\limits_{\partial\mathcal{E}_{\mathcal{A}}-\widetilde{\mathcal{M}}} \mathfrak{d}^{M-1}\mathrm{x}\mathfrak{Q}\,(\mathfrak{r}) -\\ - \sum_{\mathcal{A}\in\, vs\,\widetilde{\mathcal{M}}} \oint\limits_{\partial\mathcal{E}_{\mathcal{A}}} \mathfrak{d}^{M-1}\mathrm{x}\mathfrak{Q}\,(\mathfrak{r}) = \sum_{\mathfrak{r}\in\mathcal{M}-\underset{\mathcal{A}\in\, vs\,\widetilde{\mathcal{M}}}{\cup}\mathcal{E}_{\mathcal{A}}} \mathfrak{d}^M \mathrm{x}\mathfrak{I}\,(\mathfrak{r})\,.\end{aligned} \tag{2.42}$$

Ako je prostorni ostatak (rezidijum) $\mathfrak{R}^M_{\mathcal{A}} es\mathfrak{Q}(\mathfrak{r})$ kovektorskog polja $\mathfrak{Q}(\mathfrak{r})$, u singularnoj tački $\mathcal{A}\in vs\,\partial\mathcal{M}$, različit od nule, tada u graničnom slučaju

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int\limits_{\partial\mathcal{E}_{\mathcal{A}}\cap\mathrm{M}} \mathfrak{d}^{M-1}\mathrm{x}\mathfrak{Q}\,(\mathfrak{r}) \neq -\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int\limits_{\partial\mathcal{E}_{\mathcal{A}}-\mathcal{M}} \mathfrak{d}^{M-1}\mathrm{x}\mathfrak{Q}\,(\mathfrak{r})\,, \tag{2.43}$$

budući da je $\mathfrak{R}^M_{\mathcal{A}} es\mathfrak{Q}(\mathfrak{r}) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\,[\int_{\partial\mathcal{E}_{\mathcal{A}}\cap\mathcal{M}} \mathfrak{d}^{M-1}\mathrm{x}\mathfrak{Q}\,(\mathfrak{r}) + \int_{\partial\mathcal{E}_{\mathcal{A}}-\mathcal{M}} \mathfrak{d}^{M-1}\mathrm{x}\mathfrak{Q}\,(\mathfrak{r})]$. Drugim rečima, integralna vrednost kovektorskog polja $\mathfrak{Q}(\mathfrak{r})$, duž oba dela granice $\partial\mathcal{E}_{\mathcal{A}}$, okoline singularne tačke $\mathcal{A}\in\partial\mathcal{M}$, koji su unutar i izvan mnogostrukosti $\mathcal{M}$, respektivno, zavisi eksplicitno od puta integracije.

Sa druge strane, ako su integralne vrednosti kovektorskog polja $\mathfrak{Q}(\mathfrak{r})$, na oba dela granice $\partial\mathcal{E}_{\mathcal{A}}$ okoline $\mathcal{E}_{\mathcal{A}}$ singularne tačke $\mathcal{A}\in\partial\mathcal{M}$, jednakih vrednosti, tada je i prostorni ostatak (rezidijum) $\mathfrak{R}^M_{\mathcal{A}} es\mathfrak{Q}(\mathfrak{r})$ kovektorskog polja $\mathfrak{Q}(\mathfrak{r})$, u svakoj od singularnih tačaka $\mathcal{A}\in\partial\mathcal{M}$, jednak nuli, što znači da su rezidualne vrednosti $\mathfrak{d}^{M-1}\mathrm{x}\mathfrak{Q}(\mathfrak{r})$ kovektorskog polja $\mathfrak{r}\mapsto\mathfrak{Q}(\mathfrak{r})$, u singularnim tačkama $\mathcal{A}\in\partial\mathcal{M}$, jedinstveno definisane vrednosti, odnosno

$$-\sum_{\mathcal{A}\in\, vs\,\partial\mathcal{M}} \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int\limits_{\partial\mathcal{E}_{\mathcal{A}}\cap\mathcal{M}} \mathfrak{d}^{M-1}\mathrm{x}\mathfrak{Q}\,(\mathfrak{r}) = \sum_{\mathcal{A}\in\, vs\,\partial\mathcal{M}} \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int\limits_{\partial\mathcal{E}_{\mathcal{A}}-\mathcal{M}} \mathfrak{d}^{M-1}\mathrm{x}\mathfrak{Q}\,(\mathfrak{r})] =$$

$$= \sum_{\mathcal{A}\in\, vs\,\partial\mathcal{M}} \lim_{\varepsilon\to 0^+} \oint\limits_{\partial\mathcal{E}_{\mathcal{A}}} \mathbf{d}^{M-2}\mathtt{x}\mathrm{W}(\mathfrak{r}) = \sum_{\mathcal{A}\in\, vs\,\partial\mathcal{M}} \underset{\mathcal{A}}{\mathrm{R}^{M}} es\ \mathrm{W}(\mathfrak{r}) = \sum_{\mathcal{A}\in\, vs\,\partial\mathcal{M}} \mathbf{d}^{M-1}\mathtt{x}\mathrm{Q}(\mathfrak{r}), \tag{2.44}$$

gde $\mathfrak{r} \mapsto \mathrm{W}(\mathfrak{r})$ je kovektorsko polje, takvo da je $\mathrm{Q}(\mathfrak{r})$ kovektorsko polje njegovog prostornog (integralnog) izvoda (sve ovo važi samo ako je $M \geq 2$).

Dakle, na osnovu prethodne analize moguće je, dve ekvivalentne relacije (2.41) i (2.42), u graničnom slučaju kada $\varepsilon \to 0^+$, sažeti u jednu relaciju

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \sum_{\mathfrak{r}\in\partial\mathcal{M}-\bigcup\limits_{\mathcal{A}\in\, vs\,\partial\mathcal{M}}\mathcal{E}_{\mathcal{A}}} \mathbf{d}^{M-1}\mathtt{x}\mathrm{Q}(\mathfrak{r}) + \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left\{ \begin{array}{l} -\sum\limits_{\mathcal{A}\in\, vs\,\partial\mathcal{M}} \int\limits_{\partial\mathcal{E}_{\mathcal{A}}\cap\mathcal{M}} \mathbf{d}^{M-1}\mathtt{x}\mathrm{Q}(\mathfrak{r}) \\ \sum\limits_{\mathcal{A}\in\partial\mathcal{M}} \int\limits_{\partial\mathcal{E}_{\mathcal{A}}-\mathcal{M}} \mathbf{d}^{M-1}\mathtt{x}\mathrm{Q}(\mathfrak{r}) \end{array} \right. =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \sum_{\mathfrak{r}\in\mathcal{M}-\bigcup\limits_{\mathcal{A}\in\, vs\,\widetilde{\mathcal{M}}}\mathcal{E}_{\mathcal{A}}} \mathbf{d}^{M}\mathtt{x}\mathrm{I}(\mathfrak{r}) + \left\{ \begin{array}{l} \sum\limits_{\mathcal{A}\in\, vs\,\widetilde{\mathcal{M}}} \underset{\mathcal{A}}{\mathrm{R}^{M}} es\ \mathrm{Q}(\mathfrak{r}) \\ \sum\limits_{\mathcal{A}\in\, vs\,\mathcal{M}} \underset{\mathcal{A}}{\mathrm{R}^{M}} es\ \mathrm{Q}(\mathfrak{r}) \end{array} \right. , \tag{2.45}$$

odnosno

$$vt \oint\limits_{\partial\mathcal{M}} \mathbf{d}^{M-1}\mathtt{x}\mathrm{Q}(\mathfrak{r}) - vp \int\limits_{\mathcal{M}} \mathbf{d}^{M}\mathtt{x}\mathrm{I}(\mathfrak{r}) = \left\{ \begin{array}{l} \sum\limits_{\mathcal{A}\in\, vs\,\widetilde{\mathcal{M}}} \underset{\mathcal{A}}{\mathrm{R}^{M}} es\ \mathrm{Q}(\mathfrak{r}) \\ \sum\limits_{\mathcal{A}\in\, vs\,\mathcal{M}} \underset{\mathcal{A}}{\mathrm{R}^{M}} es\ \mathrm{Q}(\mathfrak{r}) \end{array} \right. . \tag{2.46}$$

Budući da je

$$vt \int\limits_{\mathcal{M}} \mathbf{d}^{M}\mathtt{x}\mathrm{I}(\mathfrak{r}) = vp \int\limits_{\mathcal{M}} \mathbf{d}^{M}\mathtt{x}\mathrm{I}(\mathfrak{r}) + \left\{ \begin{array}{l} \sum\limits_{\mathcal{A}\in\, vs\,\widetilde{\mathcal{M}}} \underset{\mathcal{A}}{\mathrm{R}^{M}} es\ \mathrm{Q}(\mathfrak{r}) \\ \sum\limits_{\mathcal{A}\in\, vs\,\mathcal{M}} \underset{\mathcal{A}}{\mathrm{R}^{M}} es\ \mathrm{Q}(\mathfrak{r}) \end{array} \right. , \tag{2.47}$$

gde $vs \int_{\mathcal{M}} \mathbf{d}^{M}\mathtt{x}\mathrm{I}(\mathfrak{r}) = \left\{ \begin{array}{l} \sum_{\mathcal{A}\in\, vs\,\widetilde{\mathcal{M}}} \underset{\mathcal{A}}{\mathrm{R}^{M}} es\ \mathrm{Q}(\mathfrak{r}) \\ \sum_{\mathcal{A}\in\, vs\,\mathcal{M}} \underset{\mathcal{A}}{\mathrm{R}^{M}} es\ \mathrm{Q}(\mathfrak{r}) \end{array} \right.$, konačno sledi da

$$vt \oint\limits_{\partial\mathcal{M}} \mathbf{d}^{M-1}\mathtt{x}\mathrm{Q}(\mathfrak{r}) = vt \int\limits_{\mathcal{M}} \mathbf{d}^{M}\mathtt{x}\mathrm{I}(\mathfrak{r}). \tag{2.48}$$

Prethodno izvedeni rezultat, kao posledica rezultata (2.32) *Teoreme 1*, analogan rezultatu

$$vt \oint\limits_{\partial\mathcal{M}} \Omega\left(\mathbf{d}^{M-1}\mathtt{x}\right) = vt \int\limits_{\mathcal{M}} \mathfrak{d}^{M}\Omega\left(\mathbf{d}^{M-1}\mathtt{x}\right), \tag{2.49}$$

je fundamentalna integralna relacija kovektorskih polja (diferencijalnih formi), odnosno dalja generalizacija rezultata *Stoksove* teoreme. Zbog važnosti, ovaj rezultat, u sledećem poglavlju disertacije, bići izveden tradicionalanim putem i to aparaturom klasične teorije polja.

Glava 3

O diferencijabilnosti i integrabilnosti funkcija kompleksne promenljive

3.1 Apsolutne integralne sume funkcija kompleksne promenljive

Ako je vektor $\vec{\varrho}_A$ vektor položaja proizvoljne tačke A real*i*realnog vektorskog prostora $\vec{\varrho}$, tada skup tačaka $\vec{\varrho}_\gamma$: $\vec{\varrho}_\gamma = \{\vec{\varrho}_A \mid A \in \Gamma\}$, dobijen neprekidnim i obostrano-jednoznačnim preslikavanjem γ kompaktnog intervala (a,b) $(a<b)$ skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$ u $\vec{\varrho}$, definiše *Žordanovu* krivu Γ u dvo-dimenzionalnom real*i*realnom vektorskom prostoru $\vec{\varrho}$. Jasno, glatka *Žordanova* kriva je neprekidno diferencijabilna *Žordanova* kriva u $\vec{\varrho}$. Kontura je deo po deo glatka *Žordanova* kriva u $\vec{\varrho}$. Skup tačaka $\vec{\varrho}_\Omega$: $\vec{\varrho}_\Omega = \{\vec{\varrho}_A \mid A \in \mathcal{D}\}$, real*i*realnog vektorskog prostora $\vec{\varrho}$, naziva se oblašću ako za bilo koje dve različite tačke $\vec{\varrho}_A$ i $\vec{\varrho}_B$ toga skupa postoji luk $\vec{\varrho}_{\overset{\frown}{AB}}$ *Žordanove* krive $\vec{\varrho}_\gamma$, dobijen neprekidnim obostrano-jednoznačnim preslikavanjem γ segmenta $[\alpha,\beta]$ $(\alpha<\beta)$ kompaktnog intervala (a,b) u $\vec{\varrho}$, na taj način da $\alpha \mapsto \vec{\varrho}_A$ i $\beta \mapsto \vec{\varrho}_B$, koji je sadržan u $\vec{\varrho}_\Omega$. Skup tačaka $\vec{r}_p$: $\vec{r}_p = \{\vec{r}_A \mid A \in \mathcal{P}\}$, real*i*realnog vektorskog prostora $\vec{r}$, dobijen neprekidnim i obostrano-jednoznačnim preslikavanjem p oblasti $\vec{\varrho}_\Omega$ real*i*realnog vektorskog prostora $\vec{\varrho}$ u $\vec{r}$, definiše *Žordanovu* površ $\mathcal{P}$ u tro-dimenzionalnom real*i*realnom vektorskom prostoru $\vec{r}$. Glatka *Žordanova* površ je neprekidno diferencijabilna *Žordanova* površ u $\vec{r}$. Konturna površ je deo po deo glatka *Žordanova* površ u $\vec{r}$.

Ako se, u prvom koraku, luk $\vec{\varrho}_{\overset{\frown}{PQ}}$ glatke *Žordanove* krive $\vec{\varrho}_\gamma$ podeli na k_1 elementarnih lukova $\triangle_{j_1}\ \vec{\varrho}_{\overset{\frown}{PQ}}$ $(j_1 = 1,2,...,k_1 \geq 2)$, svaki elementarni luk se dalje, u narednom koraku, deli na nove elementarne lukove $\triangle_{j_1,j_2}\ \vec{\varrho}_{\overset{\frown}{PQ}}$ $(j_2 = 1,2,...,k_2 \geq 2)$[1]. Neka su $\triangle_{j_1,...,j_n}\ \varrho$ merni brojevi dužina elementarnih lukova $\triangle_{j_1,...,j_n}\ \vec{\varrho}_{\overset{\frown}{PQ}}$ i $\triangle_{j_1,...,j_n}\ \vec{\varrho}$ vektori konačnog priraštaja vektora položaja duž elementarnih lukova $\triangle_{j_1,...,j_n}\ \vec{\varrho}_{\overset{\frown}{PQ}}$. Vektori $d_{\vec{\varrho}_A}\vec{\varrho} = \lim\limits_{n\to+\infty} \triangle_{j_1,...,j_n}\ \vec{\varrho}$ su vektori infinitezimalnog priraštaja vektora položaja duž luka $\vec{\varrho}_{\overset{\frown}{PQ}}$ krive $\vec{\varrho}_\gamma$, odnosno vektorski infinitezimalni linijski elementi u tačkama $\vec{\varrho}_A$ luka $\vec{\varrho}_{\overset{\frown}{PQ}}$ krive $\vec{\varrho}_\gamma$ (slika 3.1).

Shodno tome, za svaku ravnomernu podelu

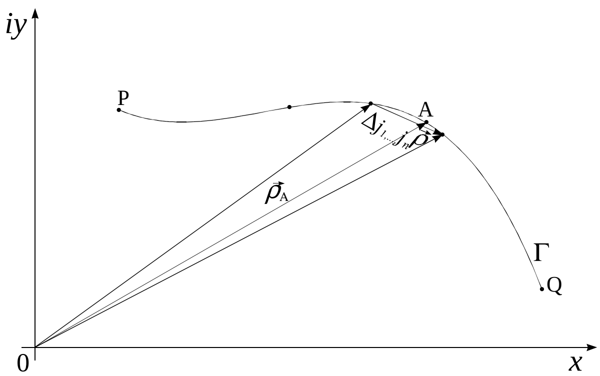
$$D_n\vec{\varrho}_{\overset{\frown}{PQ}} = \{\triangle_{j_1,...,j_n}\ \vec{\varrho}_{\overset{\frown}{PQ}} \mid j_l = 1,...,k_l \geq 2\ (l = 1,2,...,n)\}, \tag{3.1}$$

luka $\vec{\varrho}_{\overset{\frown}{PQ}}$ glatke *Žordanove* krive $\vec{\varrho}_\gamma$ u real*i*realnom vektorskom prostoru $\vec{\varrho}$

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{j_1=1...\,j_n=1}^{k_1...\,k_n} \triangle_{j_1,...,j_n}\ \vec{\varrho} = \sum_{\vec{\varrho}_A \in \vec{\varrho}_{\overset{\frown}{PQ}}} d_{\vec{\varrho}_A}\vec{\varrho}. \tag{3.2}$$

Beskonačna suma nultih vektora $\sum\limits_{\vec{\varrho}_A \in \vec{\varrho}_{\overset{\frown}{PQ}}} d_{\vec{\varrho}_A}\vec{\varrho}$, kao neodređeni izraz $\infty\vec{0}$, u ovom slučaju svodi se na vektor $\vec{\varrho}_P - \vec{\varrho}_Q$: $\sum\limits_{\vec{\varrho}_A \in \vec{\varrho}_{\overset{\frown}{PQ}}} d_{\vec{\varrho}_A}\vec{\varrho} = \int\limits_{\vec{\varrho}_{\overset{\frown}{PQ}}} d\vec{\varrho} = \vec{\varrho}_P - \vec{\varrho}_Q$.

[1] Ako se beskonačnim procesom podela $D_n\vec{\varrho}_{\overset{\frown}{PQ}}$ luka $\vec{\varrho}_{\overset{\frown}{PQ}}$, glatke *Žordanove* krive $\vec{\varrho}_\gamma$, svaki elementarni luk $\triangle_{j_1,...,j_n}\ \vec{\varrho}_{\overset{\frown}{PQ}}$ svodi na tačku $\vec{\varrho}_A$: $\lim\limits_{n\to+\infty} \triangle_{j_1,...,j_n}\ \vec{\varrho}_{\overset{\frown}{PQ}} = \vec{\varrho}_A$, podela $D_n\vec{\varrho}_{\overset{\frown}{PQ}}$ je ravnomerna podela luka $\vec{\varrho}_{\overset{\frown}{PQ}}$ glatke *Žordanove* krive $\vec{\varrho}_\gamma$.



Slika 3.1: Luk $\overset{\frown}{PQ}$ glatke *Žordanove* krive Γ u real$i$realnoj ravni $\vec{\varrho}$

Za proizvoljnu skalarnu funkciju $\vec{\varrho} \to f(\vec{\varrho})$, vektorske kompleksne promenljive $\vec{\varrho}$, koja je definisana i ograničena funkcija duž luka $\vec{\varrho}_{\overset{\frown}{PQ}}$ glatke *Žordanove* krive $\vec{\varrho}_\gamma$ dvo-dimenzionalnog real$i$realnog vektorskog prostora $\vec{\varrho}$

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{j_1=1\ldots j_n=1}^{k_1\ldots k_n} f(\triangle^{\star}_{j_1,\ldots,j_n}\ \vec{\varrho}_{\overset{\frown}{PQ}})\ \triangle_{j_1,\ldots,j_n}\ \vec{\varrho} = \sum_{\vec{\varrho}_A\in\vec{\varrho}_{\overset{\frown}{PQ}}} f(\vec{\varrho}_A)\, d_{\vec{\varrho}_A}\vec{\varrho}, \tag{3.3}$$

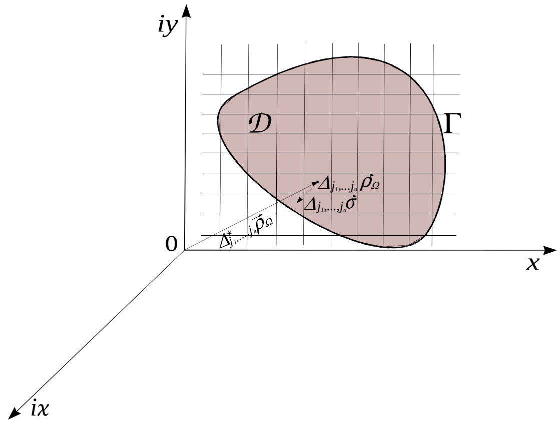
gde $f(\triangle^{\star}_{j_1,\ldots,j_n}\ \vec{\varrho}_{\overset{\frown}{PQ}})$ su vrednosti funkcije $f(\vec{\varrho})$ u proizvoljnim tačkama unutar elementarnih lukova $\triangle_{j_1,\ldots,j_n}\ \vec{\varrho}_{\overset{\frown}{PQ}}$. Ako je funkcija $\vec{\varrho} \mapsto f(\vec{\varrho})$ i integrabilna duž krive $\vec{\varrho}_\gamma$, tada za svaku ravnomernu podelu $D_n\vec{\varrho}_{\overset{\frown}{PQ}}$ luka $\vec{\varrho}_{\overset{\frown}{PQ}}$ krive $\vec{\varrho}_\gamma$ i svaki izbor tačaka $\triangle^{\star}_{j_1,\ldots,j_n}\ \vec{\varrho}_{\overset{\frown}{PQ}}$ postoji konačna i jedinstvena granična vrednost integralne sume

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{j_1=1\ldots j_n=1}^{k_1\ldots k_n} f(\triangle^{\star}_{j_1,\ldots,j_n}\ \vec{\varrho}_{\overset{\frown}{PQ}})\ \triangle_{j_1,\ldots,j_n}\ \vec{\varrho} = \int\limits_{\vec{\varrho}_{\overset{\frown}{PQ}}} f(\vec{\varrho})\, d\vec{\varrho}. \tag{3.4}$$

Dakle, za funkciju $\vec{\varrho} \mapsto f(\vec{\varrho})$, integrabilnu duž krive $\vec{\varrho}_\gamma$, beskonačna suma nultih vektora $\sum\limits_{\vec{\varrho}_A\in\vec{\varrho}_{\overset{\frown}{PQ}}} f(\vec{\varrho}_A)\, d_{\vec{\varrho}_A}\vec{\varrho}$, kao neodređeni izraz $\infty\vec{0}$, jednaka je upravo integralu funkcije $f(\vec{\varrho})$:

$$\sum_{\vec{\varrho}_A\in\vec{\varrho}_{\overset{\frown}{PQ}}} f(\vec{\varrho}_A)\, d_{\vec{\varrho}_A}\vec{\varrho} = \int\limits_{\vec{\varrho}_{\overset{\frown}{PQ}}} f(\vec{\varrho})\, d\vec{\varrho}. \tag{3.5}$$

Ako se po analogiji proizvoljna oblast $\vec{\varrho}_\Omega = \{\vec{\varrho}_A \mid A \in \mathcal{D}\}$ real$i$realne ravni $\vec{\varrho}$, ograničena zatvorenom konturnom krivom $\vec{\varrho}_\gamma$, podeli linijama, koje su paralelne ko-ordinantnim osama, na k_1 elementarnih oblasti $\triangle_{j_1}\ \vec{\varrho}_\Omega$ $(j_1 = 1, 2, \ldots, k_1 \geq 2)$, ograničenih elementarnim konturama $\triangle_{j_1}\ \vec{\varrho}_\gamma$, u prvom koraku, svaku elementarnu oblast $\triangle_{j_1}\ \vec{\varrho}_\Omega$, u narednom koraku, moguće je podeliti na nove elementarne oblasti $\triangle_{j_1,j_2}\ \vec{\varrho}_\Omega$ $(j_2 = 1, 2, \ldots, k_2 \geq 2)$. Uz sve to se i tačke, u kojima linije podele oblasti $\vec{\varrho}_\Omega$ presecaju zatvorenu konturnu krivu $\vec{\varrho}_\gamma$, spajaju poligonalnom linijom i na taj način se zatvorena konturna kriva $\vec{\varrho}_\gamma$ aproksimira zatvorenom poligonalnom linijom. Ako $\triangle_{j_1,\ldots,j_n}\ \sigma$ su merni brojevi površina elementarnih oblasti $\triangle_{j_1,\ldots,j_n}\ \vec{\varrho}_\Omega$, unutar zatvorene poligonalne linije, kojom se aproksimira zatvorena konturna kriva $\vec{\varrho}_\gamma$ na svakom



Slika 3.2: Oblast $\mathcal{D}$ u real$\imath$realnoj ravni $\vec{\varrho}$

nivou podele oblasti $\vec{\varrho}_\Omega$, to vektori $d_{\vec{\varrho}_A}\vec{\sigma} = \lim\limits_{n\to+\infty} \triangle_{j_1,\ldots,j_n}\,\vec{\sigma} = \lim\limits_{n\to+\infty} \vec{n}\,\triangle_{j_1,\ldots,j_n}\,\sigma$ su vektorski infinitezimalni površinski elementi u tačkama $\vec{\varrho}_A$ oblasti $\vec{\varrho}_\Omega$ (slika 3.2).

Za svaku ravnomernu podelu

$$D_n\vec{\varrho}_\Omega = \{\triangle_{j_1,\ldots,j_n}\,\vec{\varrho}_\Omega \mid j_l = 1,\ldots,k_l \geq 2\ (l = 1,2,\ldots,n)\}, \tag{3.6}$$

oblasti $\vec{\varrho}_\Omega$ u real$\imath$realnom vektorskom prostoru $\vec{\varrho}$

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{j_1=1\ldots\, j_n=1}^{k_1\ldots\, k_n} \triangle_{j_1,\ldots,j_n}\,\vec{\sigma} = \sum_{\vec{\varrho}_A\in\vec{\varrho}_\Omega} d_{\vec{\varrho}_A}\vec{\sigma}. \tag{3.7}$$

Beskonačna suma nultih vektora $\sum\limits_{\vec{\varrho}_A\in\vec{\varrho}_\Omega} d_{\vec{\varrho}_A}\vec{\sigma}$, kao neodređeni izraz $\infty\vec{0}$, u ovom slučaju svodi se na vektor $\vec{S}$, čiji je intenzitet jednak površini oblasti $\mathcal{D}$: $\sum\limits_{\vec{\varrho}_A\in\vec{\varrho}_\Omega} d_{\vec{\varrho}_A}\vec{\sigma} = \iint\limits_{\vec{\varrho}_\Omega} d\vec{\sigma} = \vec{S}$.

Budući da su vektori konačnog priraštaja vektora položaja $\triangle_{j_1,\ldots,j_n}\,\vec{\varrho}$, na onim delovima elementarnih kontura, koji razdvajaju dve elementarne oblasti, suprotno orjentisani, to za svaku ravnomernu podelu $D_n\vec{\varrho}_\Omega$ oblasti $\vec{\varrho}_\Omega$, koja je ograničena zatvorenom konturnom krivom $\vec{\varrho}_\gamma$,

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{j_1=1\ldots\, j_n=1}^{k_1\ldots\, k_n} \triangle_{j_1,\ldots,j_n}\,\vec{\varrho} = \sum_{\vec{\varrho}_A\in\vec{\varrho}_\gamma} d_{\vec{\varrho}_A}\vec{\varrho} = \vec{0}. \tag{3.8}$$

Beskonačna suma nultih vektora $\sum\limits_{\vec{\varrho}_A\in\vec{\varrho}_\gamma} d_{\vec{\varrho}_A}\vec{\varrho}$, kao neodređeni izraz $\infty\vec{0}$, u ovom slučaju svodi se na nula vektor $\vec{0}$, imajući u vidu činjenicu da je suma priraštaja vektora položaja $\triangle_{j_1,\ldots,j_n}\,\vec{\varrho}$ na zatvorenoj poligonalnoj liniji jednaka nula vektoru.

Za proizvoljnu skalarnu funkciju $\vec{\varrho} \mapsto f(\vec{\varrho})$, vektorske kompleksne promenljive $\vec{\varrho}$, koja je definisana i ograničena funkcija u oblasti $\vec{\varrho}_\Omega$ real$\imath$realne ravni $\vec{\varrho}$

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{j_1=1\ldots\, j_n=1}^{k_1\ldots\, k_n} f(\triangle^\star_{j_1,\ldots,j_n}\,\vec{\varrho}_\gamma)\,\triangle_{j_1,\ldots,j_n}\,\vec{\varrho} = \sum_{\vec{\varrho}_A\in\vec{\varrho}_\gamma} f(\vec{\varrho}_A)\,d_{\vec{\varrho}_A}\vec{\varrho} \text{ i}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{j_1=1\ldots\, j_n=1}^{k_1\ldots\, k_n} f(\triangle^\star_{j_1,\ldots,j_n}\,\vec{\varrho}_\Omega)\,\triangle_{j_1,\ldots,j_n}\,\vec{\sigma} = \sum_{\vec{\varrho}_A\in\vec{\varrho}_\Omega} f(\vec{\varrho}_A)\,d_{\vec{\varrho}_A}\vec{\sigma}, \tag{3.9}$$

gde $f(\triangle^{\star}_{j_1,\dots,j_n}\ \vec{\varrho}_{\gamma})$ i $f(\triangle^{\star}_{j_1,\dots,j_n}\ \vec{\varrho}_{\Omega})$ su vrednosti funkcije u proizvoljnim tačkama onih delova elementarnih kontura $\triangle_{j_1,\dots,j_n}\ \vec{\varrho}_{\gamma}$ koji razdvajaju dve elementarne oblasti ili su na konturnoj krivoj $\vec{\varrho}_{\gamma}$, kao i u proizvoljnim tačkama unutar elementarnih oblasti $\triangle_{j_1,\dots,j_n}\ \vec{\varrho}_{\Omega}$, respektivno. Ako je funkcija $f(\vec{\varrho})$ i integrabilna u oblasti $\vec{\varrho}_{\Omega}$, tada za svaku ravnomernu podelu $D_n\vec{\varrho}_{\Omega}$ oblasti $\vec{\varrho}_{\Omega}$ i svaki izbor tačaka $\triangle^{\star}_{j_1,\dots,j_n}\ \vec{\varrho}_{\gamma}$ i $\triangle^{\star}_{j_1,\dots,j_n}\ \vec{\varrho}_{\Omega}$ postoje konačne i jedinstvene granične vrednosti integralnih suma

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{j_1=1,\dots,j_n=1}^{k_1,\dots,k_n} f(\triangle^{\star}_{j_1,\dots,j_n}\ \vec{\varrho}_{\gamma})\ \triangle_{j_1,\dots,j_n}\ \vec{\varrho} = \overset{\circlearrowleft}{\int\limits_{\vec{\varrho}_{\gamma}}} f(\vec{\varrho})\, d\vec{\varrho}\ \text{i}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{j_1=1\dots j_n=1}^{k_1\dots k_n} f(\triangle^{\star}_{j_1,\dots,j_n}\ \vec{\varrho}_{\Omega})\ \triangle_{j_1,\dots,j_n}\ \vec{\sigma} = \iint\limits_{\vec{\varrho}_{\Omega}} f(\vec{\varrho})\, d\vec{\sigma}. \tag{3.10}$$

Simbolom $\overset{\circlearrowleft}{\int\limits_{\vec{\varrho}_{\gamma}}}$ je označena integracija po zatvorenoj konturnoj krivoj $\vec{\varrho}_{\gamma}$, u ovom slučaju u pozitivnom matematičkom smeru.

Dakle, za funkciju $\vec{\varrho}\mapsto f(\vec{\varrho})$, integrabilnu u oblasti $\vec{\varrho}_{\Omega}$, beskonačne sume nultih vektora $\sum\limits_{\vec{\varrho}_A\in\vec{\varrho}_{\gamma}} f(\vec{\varrho}_A)\, d_{\vec{\varrho}_A}\vec{\varrho}$ i $\sum\limits_{\vec{\varrho}_A\in\vec{\varrho}_{\Omega}} f(\vec{\varrho}_A)\, d_{\vec{\varrho}_A}\vec{\sigma}$, kao neodređeni izrazi $\infty\vec{0}$, jednake su upravo integralima funkcije $f(\vec{\varrho})$:

$$\sum_{\vec{\varrho}_A\in\vec{\varrho}_{\gamma}} f(\vec{\varrho}_A)\, d_{\vec{\varrho}_A}\vec{\varrho} = \overset{\circlearrowleft}{\int\limits_{\vec{\varrho}_{\gamma}}} f(\vec{\varrho})\, d\vec{\varrho}\ \text{i}\ \sum_{\vec{\varrho}_A\in\vec{\varrho}_{\Omega}} f(\vec{\varrho}_A)\, d_{\vec{\varrho}_A}\vec{\sigma} = \iint\limits_{\vec{\varrho}_{\Omega}} f(\vec{\varrho})\, d\vec{\sigma}. \tag{3.11}$$

Definicija 18 *Rezidualne vrednosti funkcije $f(\vec{\varrho})$ u tački $\vec{\varrho}_A$ Hilbertovog dvo-dimenzionalnog realirealnog vektorskog prostora $\vec{\varrho}$ su po definiciji*

$$f(\vec{\varrho}_A)\, d_{\vec{\varrho}_A}\vec{\varrho}\ \ i\ \ f(\vec{\varrho}_A)\, d_{\vec{\varrho}_A}\vec{\sigma}.\blacktriangledown \tag{3.12}$$

Definicija 19 *Rezidualne vrednosti funkcije $\vec{F}(\vec{\varrho})$ u tački $\vec{\varrho}_A$ Hilbertovog dvo-dimenzionalnog realirealnog vektorskog prostora $\vec{\varrho}$ su po definiciji*

$$\vec{F}(\vec{\varrho}_A)\cdot d_{\vec{\varrho}_A}\vec{\varrho},\ d_{\vec{\varrho}_A}\vec{\varrho}\times\vec{F}(\vec{\varrho}_A),\ \vec{F}(\vec{\varrho}_A)\cdot d_{\vec{\varrho}_A}\vec{\sigma}\ \ i\ \ d_{\vec{\varrho}_A}\vec{\sigma}\times\vec{F}(\vec{\varrho}_A).\blacktriangledown \tag{3.13}$$

Slično, kao u slučaju luka $\vec{\varrho}_{\overset{\frown}{PQ}}$ glatke *Žordanove* krive $\vec{\varrho}_{\gamma}$, za svaku ravnomernu podelu

$$D_n\vec{r}_{\overset{\frown}{PQ}} = \{\triangle_{j_1,\dots,j_n}\ \vec{r}_{\overset{\frown}{PQ}} \mid j_l = 1,\dots,k_l \geq 2\ (l=1,2,\dots,n)\}, \tag{3.14}$$

luka $\vec{r}_{\overset{\frown}{PQ}}$ glatke *Žordanove* krive $\vec{r}_{\gamma}$ tro-dimenzionalnog real*i*realnog vektorskog prostora $\vec{r}$ i proizvoljnu skalarnu funkciju $\vec{r}\mapsto f(\vec{r})$, definisanu i ograničenu duž luka $\vec{r}_{\overset{\frown}{PQ}}$ krive $\vec{r}_{\gamma}$,

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{j_1=1\dots j_n=1}^{k_1\dots k_n}\triangle_{j_1,\dots,j_n}\ \vec{r} = \sum_{\vec{r}_A\in\vec{r}_{\overset{\frown}{PQ}}} d_{\vec{r}_A}\vec{r}, \tag{3.15}$$

odnosno

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{j_1=1\dots j_n=1}^{k_1\dots k_n} f(\triangle^{\star}_{j_1,\dots,j_n}\ \vec{r}_{\overset{\frown}{PQ}})\ \triangle_{j_1,\dots,j_n}\ \vec{r}=\sum_{\vec{r}_A\in\vec{r}_{\overset{\frown}{PQ}}} f\left(\vec{r}_A\right)d_{\vec{r}_A}\vec{r}, \tag{3.16}$$

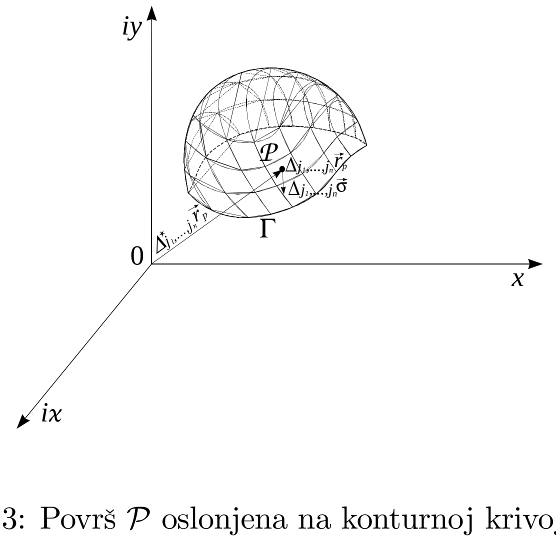
gde $f(\triangle^{\star}_{j_1,\dots,j_n}\ \vec{r}_{\overset{\frown}{PQ}})$ su vrednosti funkcije $f\left(\vec{r}\right)$ u proizvoljnim tačkama unutar elementarnih lukova $\triangle_{j_1,\dots,j_n}\ \vec{r}_{\overset{\frown}{PQ}}$. Ako je funkcija $f\left(\vec{r}\right)$ integrabilna duž krive $\vec{r}_\gamma$, tada za svaku ravnomernu podelu $D_n\vec{r}_{\overset{\frown}{PQ}}$ luka $\vec{r}_{\overset{\frown}{PQ}}$ krive $\vec{r}_\gamma$ i svaki izbor tačaka $\triangle^{\star}_{j_1,\dots,j_n}\ \vec{r}_{\overset{\frown}{PQ}}$ postoji konačna i jedinstvena granična vrednost integralne sume

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{j_1=1\dots j_n=1}^{k_1\dots k_n} f(\triangle^{\star}_{j_1,\dots,j_n}\ \vec{r}_{\overset{\frown}{PQ}})\ \triangle_{j_1,\dots,j_n}\ \vec{r}=\int\limits_{\vec{r}_{\overset{\frown}{PQ}}} f\left(\vec{r}\right)d\vec{r}. \tag{3.17}$$

Dakle, za funkciju $\vec{r}\mapsto f\left(\vec{r}\right)$, integrabilnu duž krive $\vec{r}_\gamma$, beskonačna suma nultih vektora $\sum\limits_{\vec{r}_A\in\vec{r}_{\overset{\frown}{PQ}}} f\left(\vec{r}_A\right)d_{\vec{r}_A}\vec{r}$, kao neodređeni izraz $\infty\vec{0}$, jednaka je upravo integralu funkcije $f\left(\vec{r}\right)$:

$$\sum_{\vec{r}_A\in\vec{r}_{\overset{\frown}{PQ}}} f\left(\vec{r}_A\right)d_{\vec{r}_A}\vec{r}=\int\limits_{\vec{r}_{\overset{\frown}{PQ}}} f\left(\vec{r}\right)d\vec{r}. \tag{3.18}$$

Ako se konturna površ $\vec{r}_p=\{\vec{r}_A\mid A\in\mathcal{P}\}$, tro-dimenzionalnog real$i$realnog vektorskog prostora $\vec{r}$, koja se oslanja na zatvorenu konturnu krivu $\vec{r}_\gamma$, podeli u prvom koraku na k_1 elementarnih konturnih površi $\triangle_{j_1}\ \vec{r}_p$ $(j_1=1,2,\dots,k_1\geq 2)$, koje su ograničene elementarnim konturama $\triangle_{j_1}\ \vec{r}_\gamma$, svaku elementarnu konturnu površ $\triangle_{j_1}\ \vec{r}_p$, u narednom koraku, moguće je podeliti na nove elementarne konturne površi $\triangle_{j_1,j_2}\ \vec{r}_p$ $(j_2=1,2,\dots,k_2\geq 2)$. Uz to, površ $\vec{r}_p$ aproksimira se poligonalnom površi koja se oslanja na zatvorenu poligonalnu liniju kojom se aproksimira zatvorena konturna kriva $\vec{r}_\gamma$. U tom slučaju, ako su $\triangle_{j_1,\dots,j_n}\ \sigma$ merni brojevi površina elementarnih konturnih površi na poligonalnoj površi i $\vec{\eta}_{\triangle_{j_1,\dots,j_n}\vec{r}_p}$ jedinični vektor normale u proizvoljnoj tački $\triangle^{\star}_{j_1,\dots,j_n}\ \vec{r}_p$ unutar elementarnih konturnih površi $\triangle_{j_1,\dots,j_n}\ \vec{r}_p$ na poligonalnoj površi, vektori $d_{\vec{r}_A}\vec{\sigma}=\lim\limits_{n\to+\infty}\triangle_{j_1,\dots,j_n}\ \vec{\sigma}=\lim\limits_{n\to+\infty}\vec{\eta}_{\triangle_{j_1,\dots,j_n}\vec{r}_p}\ \triangle_{j_1,\dots,j_n}\ \sigma$ su vektorski infinitezimalni površinski elementi u tačkama $\vec{r}_A$ konturne površi $\vec{r}_p$ (slika 3.3).



Slika 3.3: Površ $\mathcal{P}$ oslonjena na konturnoj krivoj Γ

Za svaku ravnomernu podelu

$$D_n\vec{r}_p = \{\triangle_{j_1,...,j_n}\ \vec{r}_p \mid j_l = 1, ..., k_l \geq 2\ (l = 1, 2, ..., n)\}, \tag{3.19}$$

konturne površi $\vec{r}_p$ u real$\imath$realnom vektorskom prostoru $\vec{r}$

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{j_1=1\dots j_n=1}^{k_1\dots k_n} \triangle_{\vec{r}_{\triangle_{j_1,...,j_n}\vec{r}_p}}\ \vec{\sigma} = \sum_{\vec{r}_A\in\vec{r}_p} d_{\vec{r}_A}\vec{\sigma}. \tag{3.20}$$

Beskonačna suma nultih vektora $\sum\limits_{\vec{r}_A\in\vec{r}_p} d_{\vec{r}_A}\vec{\sigma}$, kao neodređeni izraz $\infty\vec{0}$, u ovom slučaju svodi se na površinski integral po konturnoj površi $\mathcal{P}$: $\sum\limits_{\vec{r}_A\in\vec{r}_p} d_{\vec{r}_A}\vec{\sigma} = \iint\limits_{\vec{r}_p} d\vec{\sigma}$.

Budući da su vektori konačnog priraštaja vektora položaja $\triangle_{j_1,...,j_n}\ \vec{r}$, na onim delovima elementarnih kontura, koji razdvajaju dve elementarne konturne površi na poligonalnoj površi, suprotno orjentisani, to za svaku ravnomernu podelu $D_n\vec{r}_p$ konturne površi $\vec{r}_p$, koja se oslanja na zatvorenu konturnu krivu $\vec{r}_\gamma$, vektorskog prostora $\vec{r}$

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{j_1=1\dots j_n=1}^{k_1\dots k_n} \triangle_{j_1,...,j_n}\ \vec{r} = \sum_{\vec{r}_A\in\vec{r}_\gamma} d_{\vec{r}_A}\vec{r} = \vec{0}. \tag{3.21}$$

Beskonačna suma nultih vektora $\sum\limits_{\vec{r}_A\in\vec{r}_\gamma} d_{\vec{r}_A}\vec{r}$, kao neodređeni izraz $\infty\vec{0}$ i u ovom slučaju svodi se na nula vektor $\vec{0}$.

Za proizvoljnu skalarnu funkciju $\vec{r} \mapsto f(\vec{r})$, vektorske kompleksne promenljive $\vec{r}$, koja je definisana i ograničena funkcija na konturnoj površi $\vec{r}_p$ tro-dimenzionalnog real$\imath$realnog vektorskog prostora $\vec{r}$

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{j_1=1\dots j_n=1}^{k_1\dots k_n} f(\triangle^\star_{j_1,...,j_n}\ \vec{r}_\gamma)\ \triangle_{j_1,...,j_n}\ \vec{r} = \sum_{\vec{r}_A\in\vec{r}_\gamma} f(\vec{r}_A)\, d_{\vec{r}_A}\vec{r} \text{ i}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{j_1=1\dots j_n=1}^{k_1\dots k_n} f(\triangle^\star_{j_1,...,j_n}\ \vec{r}_p)\ \triangle_{j_1,...,j_n}\ \vec{\sigma} = \sum_{\vec{r}_A\in\vec{r}_p} f(\vec{r}_A)\, d_{\vec{r}_A}\vec{\sigma}, \tag{3.22}$$

gde $f(\triangle^\star_{j_1,...,j_n}\ \vec{r}_\gamma)$ i $f(\triangle^\star_{j_1,...,j_n}\ \vec{r}_p)$ su vrednosti funkcije u proizvoljnim tačkama onih delova elementarnih kontura $\triangle_{j_1,...,j_n}\ \vec{r}_\gamma$ koji razdvajaju dve elementarne konturne površi ili su na zatvorenoj konturnoj krivoj $\vec{r}_\gamma$, kao i u proizvoljnim tačkama unutar elementarnih konturnih površi $\triangle_{j_1,...,j_n}\ \vec{r}_p$, respektivno. Ako je funkcija $f(\vec{r})$ i integrabilna na konturnoj površi $\vec{r}_p$, tada za svaku ravnomernu podelu $D_n\vec{r}_p$ konturne površi $\vec{r}_p$ i svaki izbor tačaka $\triangle^\star_{j_1,...,j_n}\ \vec{r}_\gamma$ i $\triangle^\star_{j_1,...,j_n}\ \vec{r}_p$ postoje konačne i jedinstvene granične vrednosti integralnih suma

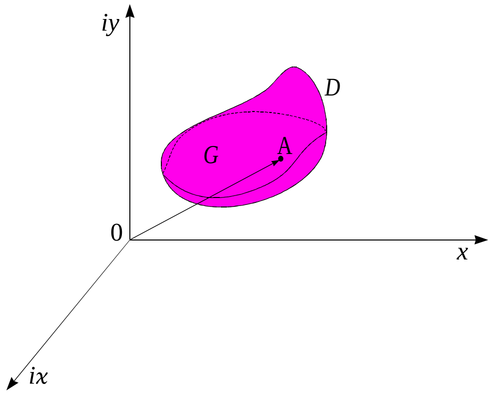
$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{j_1=1\dots j_n=1}^{k_1\dots k_n} f(\triangle^\star_{j_1,...,j_n}\ \vec{r}_\gamma)\ \triangle_{j_1,...,j_n}\ \vec{r} = \oint\limits_{\vec{r}_\gamma} f(\vec{r})\, d\vec{r} \text{ i}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{j_1=1\dots j_n=1}^{k_1\dots k_n} f(\triangle^\star_{j_1,...,j_n}\ \vec{r}_p)\ \triangle_{j_1,...,j_n}\ \vec{\sigma} = \iint\limits_{\vec{r}_p} f(\vec{r})\, d\vec{\sigma}. \tag{3.23}$$

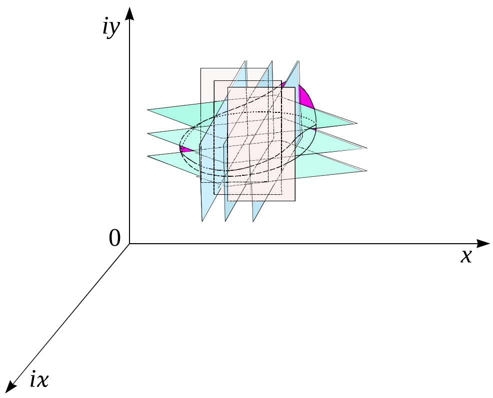
Dakle, za funkciju $\vec{r} \mapsto f(\vec{r})$, integrabilnu na konturnoj površi $\vec{r}_p$, beskonačne sume nultih vektora $\sum\limits_{\vec{r}_A \in \vec{r}_\gamma} f(\vec{r}_A)\, d_{\vec{r}_A}\vec{r}$ i $\sum\limits_{\vec{r}_A \in \vec{r}_p} f(\vec{r}_A)\, d_{\vec{r}_A}\vec{\sigma}$, kao neodređeni izrazi $\infty\vec{0}$, jednake su upravo integralima funkcije $f(\vec{r})$:

$$\sum_{\vec{r}_A \in \vec{r}_\gamma} f(\vec{r}_A)\, d_{\vec{r}_A}\vec{r} = \overset{\circlearrowleft}{\int\limits_{\vec{r}_\gamma}} f(\vec{r})\, d\vec{r} \text{ i } \sum_{\vec{r}_A \in \vec{r}_p} f(\vec{r}_A)\, d_{\vec{r}_A}\vec{\sigma} = \iint\limits_{\vec{r}_p} f(\vec{r})\, d\vec{\sigma}. \tag{3.24}$$

Konačno, ako se proizvoljna oblast $\vec{r}_g = \{\vec{r}_A \mid A \in G\}$ tro-dimenzionalnog real$i$realnog vektorskog prostora $\vec{r}$, ograničena zatvorenom konturnom površi $\vec{r}_\delta = \{\vec{r}_A \mid A \in D\}$ (slika 3.4), podeli ravnima, koje su paralelne ko-ordinantnim ravnima, na k_1 elementarnih oblasti $\triangle_{j_1} \vec{r}_g$ $(j_1 = 1, 2, ..., k_1 \geq 2)$, ograničenih elementarnim konturnim površima $\triangle_{j_1} \vec{r}_\delta$, u prvom koraku (slika 3.5), svaku elementarnu oblast $\triangle_{j_1} \vec{r}_g$, u narednom koraku, moguće je podeliti na nove elementarne oblasti $\triangle_{j_1, j_2} \vec{r}_g$ $(j_2 = 1, 2, ..., k_2 \geq 2)$. Uz to, zatvorena konturna površ $\vec{r}_\delta$ aproksimira se zatvorenom poligonalnom površi. Neka su $\triangle_{j_1,...,j_n} v$ merni brojevi zapremina elementarnih oblasti $\triangle_{j_1,...,j_n} \vec{r}_g$ unutar zatvorene poligonalne površi. U tom slučaju $d_{\vec{r}_A} v = \lim\limits_{n \to +\infty} \triangle_{j_1,...,j_n} v$ su infinitezimalni zapreminski elementi u tačkama $\vec{r}_A$ oblasti $\vec{r}_g$.



Slika 3.4: Oblast G u tro-dimenzionalnom real$i$realnom vektorskom prostoru $\vec{r}$



Slika 3.5: Podela oblast G na elementarne oblasti

Za svaku ravnomernu podelu

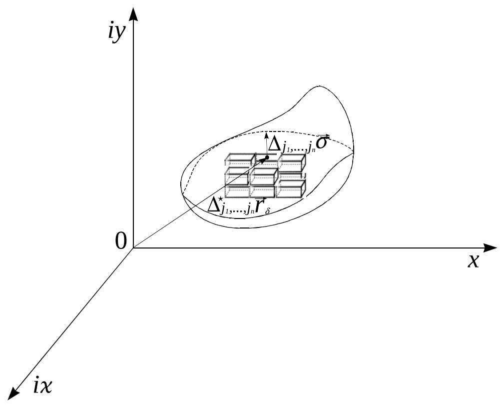
$$D_n\vec{r}_g = \{\triangle_{j_1,...,j_n} \vec{r}_g \mid j_l = 2, ..., k_l \ (l = 1, 2, ..., n)\},$$

oblasti $\vec{r}_g$ u real$i$realnom vektorskom prostoru $\vec{r}$

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{j_1=1\ldots j_n=1}^{k_1\ldots k_n}\triangle_{j_1,\ldots,j_n}\,v=\sum_{\vec{r}_A\in\vec{r}_g}d_{\vec{\varrho}_A}v. \tag{3.25}$$

Beskonačna suma nultih vektora $\sum\limits_{\vec{r}_A\in\vec{r}_g}d_{\vec{\varrho}_A}v$, kao neodređeni izraz $\infty\vec{0}$, u ovom slučaju svodi se na merni broj zapremine oblasti G: $\sum\limits_{\vec{r}_A\in\vec{r}_g}d_{\vec{\varrho}_A}v=\iiint\limits_{\vec{r}_g}dv=V$.

Budući da su vektori $\triangle_{j_1,\ldots,j_n}\,\vec{\sigma}$, na onim delovima elementarnih konturnih površi, koji razdvajaju dve elementarne oblasti unutar zatvorene poligonalne površi, suprotno orjentisani (slika 3.6), za svaku ravnomernu podelu $D_n\vec{r}_g$ oblasti $\vec{r}_g$, ograničenu zatvorenom konturnom površi $\vec{r}_\delta$ tro-dimenzionalnog real$i$realnog vektorskog prostora $\vec{r}$



Slika 3.6: Elementarne oblasti izdiferencirane oblasti G

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{j_1=1\ldots j_n=1}^{k_1\ldots k_n}\triangle_{j_1,\ldots,j_n}\,\vec{\sigma}=\sum_{\vec{r}_A\in\vec{r}_\delta}d_{\vec{r}_A}\vec{\sigma}. \tag{3.26}$$

Beskonačna suma nultih vektora $\sum\limits_{\vec{r}_A\in\vec{r}_\delta}d_{\vec{r}_A}\vec{\sigma}$, kao neodređeni izraz $\infty\vec{0}$ i u ovom slučaju svodi se na površinski integral po zatvorenoj konturnoj površi D: $\sum\limits_{\vec{r}_A\in\vec{r}_\delta}d_{\vec{r}_A}\vec{\sigma}=\overset{\circlearrowleft}{\iint\limits_{\vec{r}_\delta}}d\vec{\sigma}$.

Simbolom $\overset{\circlearrowleft}{\iint\limits_{\vec{r}_\delta}}$ je označena integracija po zatvorenoj konturnoj površi $\vec{r}_\delta$ i u ovom slučaju u pozitivnom matematičkom smeru.

Za proizvoljnu skalarnu funkciju $\vec{r}\mapsto f(\vec{r})$, vektorske kompleksne promenljive $\vec{r}$, koja je definisana i ograničena funkcija u analiziranoj oblasti $\vec{r}_g$ tro-dimenzionalnog real$i$realnog vektorskog prostora $\vec{r}$

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{j_1=1\ldots j_n=1}^{k_1\ldots k_n}f(\triangle^\star_{j_1,\ldots,j_n}\,\vec{r}_\delta)\,\triangle_{j_1,\ldots,j_n}\,\vec{\sigma}=\sum_{\vec{r}_A\in\vec{r}_\delta}f(\vec{r}_A)\,d_{\vec{r}_A}\vec{\sigma}\ \text{ i}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{j_1=1\ldots j_n=1}^{k_1\ldots k_n}f(\triangle^\star_{j_1,\ldots,j_n}\,\vec{r}_g)\,\triangle_{j_1,\ldots,j_n}\,v=\sum_{\vec{r}_A\in\vec{r}_g}f(\vec{r}_A)\,d_{\vec{r}_A}v, \tag{3.27}$$

gde $f(\triangle^{\star}_{j_1,\ldots,j_n}\ \vec{r}_\delta)$ i $f(\triangle^{\star}_{j_1,\ldots,j_n}\ \vec{r}_g)$ su vrednosti funkcije $\vec{r} \mapsto f(\vec{r})$ u proizvoljnim tačkama onih delova elementarnih konturnih površi $\triangle_{j_1,\ldots,j_n}\ \vec{r}_\delta$ koji razdvajaju dve elementarne oblasti ili su na zatvorenoj konturnoj površ $\vec{r}_\delta$, kao i u proizvoljnim tačkama unutar elementarnih oblasti $\triangle_{j_1,\ldots,j_n}\ \vec{r}_g$, respektivno. Ako je funkcija $\vec{r} \mapsto f(\vec{r})$ i integrabilna u oblasti $\vec{r}_g$, tada za svaku ravnomernu podelu $D_n\vec{r}_g$ oblasti $\vec{r}_g$ i svaki izbor tačaka $\triangle^{\star}_{j_1,\ldots,j_n}\ \vec{r}_\delta$ i $\triangle^{\star}_{j_1,\ldots,j_n}\ \vec{r}_g$ postoje konačne i jedinstvene granične vrednosti integralnih suma

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{j_1=1\ldots j_n=1}^{k_1\ldots k_n} f(\triangle^{\star}_{j_1,\ldots,j_n}\ \vec{r}_\delta)\ \triangle_{j_1,\ldots,j_n}\ \vec{\sigma} = \overset{\circlearrowleft}{\iint\limits_{\vec{r}_\delta}} f(\vec{r})\, d\vec{\sigma} \text{ i}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{j_1=1\ldots j_n=1}^{k_1\ldots k_n} f(\triangle^{\star}_{j_1,\ldots,j_n}\ \vec{r}_g)\ \triangle_{j_1,\ldots,j_n}\ v = \iiint\limits_{\vec{r}_g} f(\vec{r})\, dv. \tag{3.28}$$

Dakle, za funkciju $\vec{r} \mapsto f(\vec{r})$ integrabilnu u oblasti $\vec{r}_g$, beskonačne sume nultih vektora $\sum\limits_{\vec{r}_A\in\vec{r}_\delta} f(\vec{r}_A)\, d_{\vec{r}_A}\vec{\sigma}$ i $\sum\limits_{\vec{r}_A\in\vec{r}_g} f(\vec{r}_A)\, d_{\vec{r}_A}v$, kao neodređeni izrazi $\infty\vec{0}$ i $\infty 0$, respektivno, jednake su upravo integralima funkcije $f(\vec{r})$:

$$\sum_{\vec{r}_A\in\vec{r}_\delta} f(\vec{r}_A)\, d_{\vec{r}_A}\vec{\sigma} = \overset{\circlearrowleft}{\iint\limits_{\vec{r}_\delta}} f(\vec{r})\, d\vec{\sigma} \text{ i } \sum_{\vec{r}_A\in\vec{r}_g} f(\vec{r}_A)\, d_{\vec{r}_A}v = \iiint\limits_{\vec{r}_g} f(\vec{r})\, dv. \tag{3.29}$$

Definicija 20 *Rezidualne vrednosti funkcije $f(\vec{r})$ u tački $\vec{r}_A$ Hilbertovog tro-dimenzionalnog realirealnog vektorskog prostora $\vec{r}$ su po definiciji*

$$f(\vec{r}_A)\, d_{\vec{r}_A}\vec{r},\ f(\vec{r}_A)\, d_{\vec{r}_A}\vec{\sigma} \ \text{ i } f(\vec{r}_A)\, d_{\vec{r}_A}v.\blacktriangledown \tag{3.30}$$

Definicija 21 *Rezidualne vrednosti funkcije $\vec{F}(\vec{r})$ u tački $\vec{r}_A$ Hilbertovog tro-dimenzionalnog realirealnog vektorskog prostora $\vec{r}$ su po definiciji*

$$\vec{F}(\vec{r}_A)\cdot d_{\vec{r}_A}\vec{r},\ d_{\vec{r}_A}\vec{r}\times\vec{F}(\vec{r}_A),$$

$$\vec{F}(\vec{r}_A)\cdot d_{\vec{r}_A}\vec{\sigma},\ d_{\vec{r}_A}\vec{\sigma}\times\vec{F}(\vec{r}_A) \ \text{ i } \vec{F}(\vec{r}_A)\cdot d_{\vec{r}_A}v.\blacktriangledown \tag{3.31}$$

Definicija 22 *Sume*

$$\sum_{\vec{\varrho}_A\in\vec{\varrho}_\gamma} f(\vec{\varrho}_A)\, d_{\vec{\varrho}_A}\vec{\varrho},\ \sum_{\vec{\varrho}_A\in\vec{\varrho}_\Omega} f(\vec{\varrho}_A)\, d_{\vec{\varrho}_A}\vec{\sigma},$$

$$\sum_{\vec{r}_A\in\vec{r}_\gamma} f(\vec{r}_A)\, d_{\vec{r}_A}\vec{r},\ \sum_{\vec{r}_A\in\vec{r}_\delta} f(\vec{r}_A)\, d_{\vec{r}_A}\vec{\sigma} \ \text{ i } \sum_{\vec{r}_A\in\vec{r}_g} f(\vec{r}_A)\, d_{\vec{r}_A}v \tag{3.32}$$

su apsolutne integralne sume skalarne funkcije vektorske kompleksne promenljive.▼

Definicija 23 *Sume*

$$\sum_{\vec{\varrho}_A\in\vec{\varrho}_\gamma} \vec{F}(\vec{\varrho}_A)\cdot d_{\vec{\varrho}_A}\vec{\varrho},\ \sum_{\vec{\varrho}_A\in\vec{\varrho}_\gamma} d_{\vec{\varrho}_A}\vec{\varrho}\times\vec{F}(\vec{\varrho}_A),\ \sum_{\vec{\varrho}_A\in\vec{\varrho}_\Omega} \vec{F}(\vec{\varrho}_A)\cdot d_{\vec{\varrho}_A}\vec{\sigma},\ \sum_{\vec{\varrho}_A\in\vec{\varrho}_\Omega} d_{\vec{\varrho}_A}\vec{\sigma}\times\vec{F}(\vec{\varrho}_A),$$

$$\sum_{\vec{r}_A\in\vec{r}_\gamma} \vec{F}(\vec{r}_A)\cdot d_{\vec{r}_A}\vec{r},\ \sum_{\vec{r}_A\in\vec{r}_\gamma} d_{\vec{r}_A}\vec{r}\times\vec{F}(\vec{r}_A),\ \sum_{\vec{r}_A\in\vec{r}_\delta} \vec{F}(\vec{r}_A)\cdot d_{\vec{r}_A}\vec{\sigma},$$

$$\sum_{\vec{r}_A\in\vec{r}_\delta} d_{\vec{r}_A}\vec{\sigma}\times\vec{F}(\vec{r}_A) \ \text{ i } \sum_{\vec{r}_A\in\vec{r}_g} \vec{F}(\vec{r}_A)\cdot d_{\vec{r}_A}v \tag{3.33}$$

su apsolutne integralne sume vektorske funkcije vektorske kompleksne promenljive.▼

3.2 Prostorni (integralni) izvod funkcija kompleksne promenljive

Neka je proizvoljna skalarna funkcija $f(\vec{r})$ definisana i ograničena funkcija duž proizvoljne prostorne konturne krive $\vec{r}_\gamma$ tro-dimenzionalnog *Hilbertovog* real*i*realnog vektorskog prostora $\vec{r} = \vec{\varrho} + z\vec{n}$ $(z = i\varkappa)$, kao obvojnog prostora dvo-dimenzionalnog *Hilbertovog* real*i*realnog vektorskog prostora $\vec{\varrho}$.

Definicija 24 *Skalarna funkcija $\vec{r} \mapsto f(\vec{r})$ je prostorno diferencijabilna u tački $\vec{r}_A$ luka $\vec{r}_{\widehat{PQ}}$, dužine L, prostorne konturne krive $\vec{r}_\gamma$, ako i samo ako, za svaku ravnomernu podelu $D_n\vec{r}_{\widehat{PQ}}$ luka $\vec{r}_{\widehat{PQ}}$, nizovi svedenih priraštaja vrednosti funkcije duž elementarnih lukova $\triangle_{j_1,\ldots,j_n} \vec{r}_{\widehat{PQ}}$, takvih da $\vec{r}_A \in int.\ \triangle_{j_1,\ldots,j_n} \vec{r}_{\widehat{PQ}}$:*

$$\frac{1}{\triangle_{j_1,\ldots,j_n} r}[f(\triangle^{\dashv}_{j_1,\ldots,j_n} \vec{r}_{\widehat{PQ}} + \triangle_{j_1,\ldots,j_n} \vec{r}) - f(\triangle^{\dashv}_{j_1,\ldots,j_n} \vec{r}_{\widehat{PQ}})] =$$

$$= \vec{\varphi}_n(\vec{r}_A) \cdot \vec{\tau}_{\triangle_{j_1,\ldots,j_n}\vec{r}_{\widehat{PQ}}}, \tag{3.34}$$

gde $\triangle^{\dashv}_{j_1,\ldots,j_n} \vec{r}_{\widehat{PQ}}$ je rubna tačka elementarnih lukova $\triangle_{j_1,\ldots,j_n} \vec{r}_{\widehat{PQ}}$, a $\vec{\tau}_{\triangle_{j_1,\ldots,j_n}\vec{r}_{\widehat{PQ}}}$ je jedinični vektor u pravcu konačnog priraštaja vektora položaja duž elementarnih lukova $\triangle_{j_1,\ldots,j_n} \vec{r}_{\widehat{PQ}}$, konvergiraju

$$\lim_{\{\vec{r}_P,\vec{r}_Q\}\to\vec{r}_A} \frac{1}{L}\left[f(\vec{r}_P) - f(\vec{r}_Q)\right] = \lim_{n\to+\infty}\left[\vec{\varphi}_n(\vec{r}_A) \cdot \vec{\tau}_{\triangle_{j_1,\ldots,j_n}\vec{r}_{\widehat{PQ}}}\right] = \vec{\varphi}(\vec{r}_A) \cdot \vec{\tau}_{\vec{r}_A}.\blacktriangledown$$

Definicija 25 *Funkcija $\vec{r} \mapsto \vec{\varphi}(\vec{r})$ je funkcija prostornog izvoda funkcije $f(\vec{r})$ u Hilbertovom tro-dimenzionalnom real*i*realnom vektorskom prostoru $\vec{r}$.*$\blacktriangledown$

Ako je prostorna kriva $\vec{r}_\gamma$ ko-ordinantna osa *Hilbertovog* tro-dimenzionalnog real*i*realnog vektorskog prostora $\vec{r}$, parcijalni prostorni izvodi skalarne funkcije $f(\vec{r})$ duž ko-ordinantnih osa: $s^*\vec{e}_1^{\star}$, $s\vec{e}_2^{\star}$ i $z\vec{n}$, sa oznakama: $\sqrt{2}\frac{\partial}{\partial s^*}f(\vec{r})$, $\sqrt{2}\frac{\partial}{\partial s}f(\vec{r})$ i $\frac{\partial}{\partial z}f(\vec{r})$, respektivno, a na osnovu *Definicije 22*, su projekcije funkcije prostornog izvoda skalarne funkcije $f(\vec{r})$ na odgovarajuću ko-ordinantnu osu:

$$\sqrt{2}\frac{\partial}{\partial s^*}f(\vec{r}) = \vec{\varphi}(\vec{r}) \cdot \vec{e}_1^{\star},\ \sqrt{2}\frac{\partial}{\partial s}f(\vec{r}) = \vec{\varphi}(\vec{r}) \cdot \vec{e}_2^{\star} \text{ i } \frac{\partial}{\partial z}f(\vec{r}) = \vec{\varphi}(\vec{r}) \cdot \vec{n}, \tag{3.35}$$

odnosno vektorska funkcija $\vec{r} \mapsto \vec{\varphi}(\vec{r})$, kao funkcija prostornog izvoda funkcije $\vec{r} \mapsto f(\vec{r})$, je funkcija gradijenta skalarne funkcije $f(\vec{r})$:

$$\vec{\varphi}(\vec{r}) = grad\, f(\vec{r}) = \sqrt{2}\{[\frac{\partial}{\partial s^*}f(\vec{r})]\vec{e}_1^{\star} + [\frac{\partial}{\partial s}f(\vec{r})]\vec{e}_2^{\star}\} + [\frac{\partial}{\partial z}f(\vec{r})]\vec{n}. \tag{3.36}$$

Neka je proizvoljna skalarna funkcija $f(\vec{r})$ definisana i ograničena funkcija u proizvoljnoj oblasti $\vec{r}_g$, koju ograničava zatvorena konturna površ $\vec{r}_\delta$ u tro-dimenzionalnom real*i*realnom vektorskom prostoru $\vec{r}$ i uz to vektorski infinitezimalni površinski elemenat $d\vec{\sigma}$ razložen na dve komponente, od kojih je jedna $d\vec{\varrho} \times dz\vec{n}$ ($d\vec{\varrho}$ je vektorski infinitezimalni linijski elemenat krive $\vec{\varrho}_\gamma$, dobijene projekcijom površi $\vec{r}_\delta$ na real*i*realnu ravan $\vec{\varrho}$) u real*i*realnoj ravni $\vec{\varrho}$, dok je druga $\frac{1}{2}ds^*ds\,\vec{n}$ u pravcu jediničnog vektora $\vec{n}$ glavne normale real*i*realne ravni $\vec{\varrho}$, tako da je $d\vec{\sigma} = d\vec{\varrho} \times dz\vec{n} + \frac{1}{2}ds^*ds\,\vec{n}$ i $dv = d\vec{\sigma} \cdot d\vec{r} = d\vec{\sigma} \cdot (d\vec{\varrho} + dz\vec{n})$, odnosno (Sarić, 2003)

$$d\vec{\sigma} = \frac{\sqrt{2}}{2}(ds\,dz\vec{e}_1^{\star} - ds^*dz\vec{e}_2^{\star}) + \frac{1}{2}ds^*ds\,\vec{n} \text{ i } dv = \frac{1}{2}ds^*ds\,dz. \tag{3.37}$$

U tom slučaju, komponente svedenih suma svih rezidualnih vrednosti $f(\vec{r}_A)\, d_{\vec{r}_A}\vec{\sigma}$ funkcije $f(\vec{r})$, u tačkama $\vec{r}_A$ elementarnih konturnih površi $\triangle_{j_1,\ldots,j_n}\ \vec{r}_\delta$, koje ograničavaju elementarne oblasti $\triangle_{j_1,\ldots,j_n}\ \vec{r}_g$, na dovoljno velikim nivoima ravnomerne podele $D_n\vec{r}_g$ oblasti $\vec{r}_g$:

$$\frac{1}{\triangle_{j_1,\ldots,j_n}\ v}\sum_{\vec{r}_A\in\triangle_{j_1,\ldots,j_n}\vec{r}_\delta} f(\vec{r}_A)\, d_{\vec{r}_A}\vec{\sigma}, \tag{3.38}$$

koje su u ravni, koja je paralelna real$i$realnoj ravni $\vec{\varrho}$:

$$\frac{1}{\triangle_{j_1,\ldots,j_n}\ v}\sum_{\vec{r}_A\in\triangle_{j_1,\ldots,j_n}\vec{r}_\delta} f(\vec{r}_A)\,[\vec{n}\times(d_{\vec{r}_A}\vec{\varrho}\times d_{\vec{r}_A}z\vec{n})], \tag{3.39}$$

moguće je, u narednom koraku, projektovati na jednu od ko-ordinantnih osa u real$i$realnoj ravni $\vec{\varrho}$, primera radi na ko-ordinantnu osu $s^*\vec{e}_1^{\star}$:

$$\frac{1}{\triangle_{j_1,\ldots,j_n}\ v}\sum_{\vec{r}_A\in\triangle_{j_1,\ldots,j_n}\vec{r}_p} f(\vec{r}_A)\,[\vec{n}\times(d_{\vec{r}_A}\vec{\varrho}\times d_{\vec{r}_A}z\vec{n})]\cdot\vec{e}_1^{\star}, \tag{3.40}$$

gde $\triangle_{j_1,\ldots,j_n}\ \vec{r}_p$ su poligonalne površi na koje se svode zatvorene elementarne konturne površi $\triangle_{j_1,\ldots,j_n}\ \vec{r}_\delta$ kada se izuzmu delovi paralelni real$i$realnoj ravni $\vec{\varrho}$. Svedene apsolutne integralne sume (3.40) ekvivalentne su svedenim apsolutnim integralnim sumama

$$\frac{1}{2\ \triangle_{j_1,\ldots,j_n}\ l\ \triangle_{j_1,\ldots,j_n}\ p}\sum_{\vec{r}_A\in\triangle_{j_1,\ldots,j_n}\vec{r}_{\perp\vec{e}_2^{\star}}} [f(\vec{r}_A+\triangle_{\|s\vec{e}_2^{\star}}\ \vec{r}_A)-f(\vec{r}_A)](-\sqrt{2}d_{\vec{r}_A}s^*d_{\vec{r}_A}z), \tag{3.41}$$

gde $\triangle_{j_1,\ldots,j_n}\ l$ i $\triangle_{j_1,\ldots,j_n}\ p$ su dužine stranica $\triangle_{j_1,\ldots,j_n}\ \vec{\varrho}_{\|s\vec{e}_2^{\star}}$, koje su paralelne ko-ordinantnoj osi $s\vec{e}_2^{\star}$, poligonalnih konturnih krivih $\triangle_{j_1,\ldots,j_n}\ \vec{\varrho}_\gamma$, dobijenih projekcijom poligonalnih površi $\triangle_{j_1,\ldots,j_n}\ \vec{r}_p$ na real$i$realnu ravan $\vec{\varrho}$, kao i površine onih oblasti $\triangle_{j_1,\ldots,j_n}\ \vec{r}_{\perp\vec{e}_2^{\star}}$, koje su dobijene projekcijom poligonalnih površi $\triangle_{j_1,\ldots,j_n}\ \vec{r}_p$ na ko-ordinantnu ravan za koju je ko-ordinantni vektor $\vec{e}_2^{\star}$ jedinični vektor normale, respektivno. Ako u graničnom slučaju, kada broj podela teži beskonačnosti, niz svedenih apsolutnih integralnih suma (3.38) konvergira, konvergira i niz svedenih apsolutnih integralnih suma (3.41)

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2\ \triangle_{j_1,\ldots,j_n}\ l\ \triangle_{j_1,\ldots,j_n}\ p}\sum_{\vec{r}_A\in\triangle_{j_1,\ldots,j_n}\vec{r}_{\perp\vec{e}_2^{\star}}} [f(\vec{r}_A+\triangle_{\|s\vec{e}_2^{\star}}\ \vec{r}_A)-f(\vec{r}_A)](-\sqrt{2}d_{\vec{r}_A}s^*d_{\vec{r}_A}z)=$$

$$=\{-\sqrt{2}\frac{\partial}{\partial s}f(\vec{r})\}_{\vec{r}_A}=[\vec{n}\times\vec{\varphi}(\vec{r}_A)]\cdot\vec{e}_1^{\star}=[\vec{n}\times grad_{\vec{r}_A}f(\vec{r})]\cdot\vec{e}_1^{\star}. \tag{3.42}$$

Definicija 26 *Skalarna funkcija $\vec{r}\mapsto f(\vec{r})$ je prostorno diferencijabilna u tački $\vec{r}_{\tilde{A}}$ konturne površi $\vec{r}_p$, koja se oslanja na zatvorenu konturnu krivu $\vec{r}_\gamma$, u proizvoljnoj oblasti $\vec{r}_g$ Hilbertovog tro-dimenzionalnog real$i$realnog vektorskog prostora $\vec{r}$, ako i samo ako, za svaku ravnomernu podelu $D_n\vec{r}_p$ površi $\vec{r}_p$, nizovi svedenih apsolutnih integralnih suma*

$$\frac{1}{\triangle_{j_1,\ldots,j_n}\ \sigma}\sum_{\vec{r}_A\in\triangle_{j_1,\ldots,j_n}\vec{r}_\gamma} f(\vec{r}_A)\, d_{\vec{r}_A}\vec{r}=\vec{\eta}_{\triangle_{j_1,\ldots,j_n}\vec{r}_p}\times\vec{\varphi}_n(\vec{r}_{\tilde{A}}), \tag{3.43}$$

takvih da $\vec{r}_{\tilde{A}}\in int.\ \triangle_{j_1,\ldots,j_n}\ \vec{r}_\gamma$, konvergiraju

$$\lim_{\vec{r}_\gamma\to\vec{r}_{\tilde{A}}}\frac{1}{P}\sum_{\vec{r}_A\in\vec{r}_\gamma} f(\vec{r}_A)\, d_{\vec{r}_A}\vec{r}=\lim_{n\to+\infty}[\vec{\eta}_{\triangle_{j_1,\ldots,j_n}\vec{r}_p}\times\vec{\varphi}_n(\vec{r}_{\tilde{A}})]=\vec{\eta}_{\vec{r}_{\tilde{A}}}\times\vec{\varphi}(\vec{r}_{\tilde{A}}), \tag{3.44}$$

gde P je površina površi $\vec{r}_p$.▼

Definicija 27 *Skalarna funkcija $\vec{r} \mapsto f(\vec{r})$ je prostorno diferencijabilna u tački $\vec{r}_{\tilde{A}}$ oblasti $\vec{r}_g$, koju ograničava zatvorena konturna površ $\vec{r}_\delta$, u Hilbertovom tro-dimenzionalnom realirealnom vektorskom prostoru $\vec{r}$, ako i samo ako, za svaku ravnomernu podelu $D_n\vec{r}_g$ oblasti $\vec{r}_g$, nizovi svedenih apsolutnih integralnih suma*

$$\frac{1}{\triangle_{j_1,\ldots,j_n}\, v} \sum_{\vec{r}_A \in \triangle_{j_1,\ldots,j_n}\vec{r}_\delta} f(\vec{r}_A)\, d_{\vec{r}_A}\vec{\sigma} = \vec{\varphi}_n(\vec{r}_{\tilde{A}}), \tag{3.45}$$

takvih da $\vec{r}_{\tilde{A}} \in int.\ \triangle_{j_1,\ldots,j_n}\ \vec{r}_\delta$, konvergiraju

$$\lim_{\vec{r}_\delta \to \vec{r}_{\tilde{A}}} \frac{1}{V} \sum_{\vec{r}_A \in \vec{r}_\delta} f(\vec{r}_A)\, d_{\vec{r}_A}\vec{\sigma} = \lim_{n \to +\infty} \vec{\varphi}_n(\vec{r}_{\tilde{A}}) = \vec{\varphi}(\vec{r}_{\tilde{A}}), \tag{3.46}$$

gde V je zapremina oblasti $\vec{r}_g$.▼

Definicijama 24 i *25* generalizuje se rezultat (3.42), odnosno *Definicijom 25* definisana je vektorska funkcija $\vec{r} \mapsto \vec{\varphi}(\vec{r})$ prostornog izvoda skalarne funkcije $\vec{r} \mapsto f(\vec{r})$ u tački $\vec{r}_A$ oblasti $\vec{r}_g$ *Hilbertovog* tro-dimenzionalnog real*i*realnog vektorskog prostora $\vec{r}$, *Definicijom 22* projekcija vektorske funkcije $\vec{\varphi}(\vec{r})$ prostornog izvoda skalarne funkcije $f(\vec{r})$ na pravac tangente u tački $\vec{r}_A$ prostorne krive $\vec{r}_\gamma$, a *Definicijom 24* komponenta vektorske funkcije $\vec{\varphi}(\vec{r})$ prostornog izvoda skalarne funkcije $f(\vec{r})$, koja je u ravni normalnoj na jedinični vektor glavne normale u tački $\vec{r}_A$ konturne površi $\vec{r}_p$, odnosno u tengentnoj ravni konturne površi $\vec{r}_p$.

Neka je proizvoljna vektorska funkcija $\vec{F}(\vec{r})$ definisana i ograničena funkcija u proizvoljnoj oblasti $\vec{r}_g$, koju ograničava zatvorena konturna površ $\vec{r}_\delta$ u tro-dimenzionalnom real*i*realnom vektorskom prostoru $\vec{r}$.

Definicija 28 *Vektorska funkcija $\vec{r} \mapsto \vec{F}(\vec{r})$ je prostorno diferencijabilna u tački $\vec{r}_{\tilde{A}}$ oblasti $\vec{r}_g$, koju ograničava zatvorena konturna površ $\vec{r}_\delta$, Hilbertovog tro-dimenzionalnog realirealnog vektorskog prostora $\vec{r}$, ako i samo ako, za svaku ravnomernu podelu $D_n\vec{r}_g$ oblasti $\vec{r}_g$, nizovi svedenih apsolutnih integralnih suma*

$$\frac{1}{\triangle_{j_1,\ldots,j_n}\, v} \sum_{\vec{r}_A \in \triangle_{j_1,\ldots,j_n}\vec{r}_\delta} \vec{F}(\vec{r}_A) \cdot d_{\vec{r}_A}\vec{\sigma} = \Phi_n(\vec{r}_{\tilde{A}}) \ \ i$$

$$\frac{1}{\triangle_{j_1,\ldots,j_n}\, v} \sum_{\vec{r}_A \in \triangle_{j_1,\ldots,j_n}\vec{r}_\delta} d_{\vec{r}_A}\vec{\sigma} \times \vec{F}(\vec{r}_A) = \vec{\Phi}_n(\vec{r}_{\tilde{A}}), \tag{3.47}$$

takvih da $\vec{r}_{\tilde{A}} \in int.\ \triangle_{j_1,\ldots,j_n}\ \vec{r}_\delta$, konvergiraju

$$\lim_{\vec{r}_\delta \to \vec{r}_{\tilde{A}}} \frac{1}{V} \sum_{\vec{r}_A \in \vec{r}_\delta} \vec{F}(\vec{r}_A) \cdot d_{\vec{r}_A}\vec{\sigma} = \lim_{n \to +\infty} \Phi_n(\vec{r}_{\tilde{A}}) = \Phi(\vec{r}_{\tilde{A}}) \ \ i$$

$$\lim_{\vec{r}_\delta \to \vec{r}_{\tilde{A}}} \frac{1}{V} \sum_{\vec{r}_A \in \vec{r}_\delta} d_{\vec{r}_A}\vec{\sigma} \times \vec{F}(\vec{r}_A) = \lim_{n \to +\infty} \vec{\Phi}_n(\vec{r}_{\tilde{A}}) = \vec{\Phi}(\vec{r}_{\tilde{A}}) . \blacktriangledown \tag{3.48}$$

Definicija 29 *Funkcije $\vec{r} \mapsto \Phi(\vec{r})$ i $\vec{r} \mapsto \vec{\Phi}(\vec{r})$ su funkcije prostornog izvoda funkcije $\vec{F}(\vec{r})$ u tro-dimenzionalnom Hilbertovom realirealnom vektorskom prostoru $\vec{r}$.*▼

3.3 Definicija ostatka (rezidijuma) funkcije

Neka su $\vec{r} \mapsto f(\vec{r})$ i $\vec{r} \mapsto \vec{F}(\vec{r})$ definisane i ograničene funkcije u proizvoljnoj oblasti $\vec{r}_g$ tro-dimenzionalnog *Hilbertovog* real*i*realnog vektorskog prostora $\vec{r} = \vec{\varrho} + z\vec{n}$.

Definicija 30 *Oblast $\vec{r}_g$ tro-dimenzionalnog Hilbertovog realirealnog vektorskog prostora $\vec{r}$, u kojoj je proizvoljna skalarna funkcija $f(\vec{r})$, odnosno vektorska funkcija $\vec{F}(\vec{r})$, prostorno diferencijabilna, je regularna oblast funkcije $f(\vec{r})$, odnosno funkcije $\vec{F}(\vec{r})$.*▼

Neka su $\vec{r} \mapsto f(\vec{r})$ i $\vec{r} \mapsto \vec{F}(\vec{r})$ definisane i ograničene funkcije skoro svuda[2] u proizvoljnoj oblasti $\vec{r}_g$ tro-dimenzionalnog *Hilbertovog* real*i*realnog vektorskog prostora $\vec{r} = \vec{\varrho} + z\vec{n}$.

Definicija 31 *Oblast $\vec{r}_g$ tro-dimenzionalnog Hilbertovog realirealnog vektorskog prostora $\vec{r}$, u kojoj je proizvoljna skalarna funkcija $f(\vec{r})$, odnosno vektorska funkcija $\vec{F}(\vec{r})$, prostorno diferencijabilna skoro svuda, je singularna oblast funkcije $f(\vec{r})$, odnosno funkcije $\vec{F}(\vec{r})$.*▼

Definicija 32 *Tačka $\vec{r}_A$ singularne oblasti $\vec{r}_g$ tro-dimenzionalnog Hilbertovog realirealnog vektorskog prostora $\vec{r}$, u kojoj je definisana funkcija prostornog izvoda proizvoljne skalarne funkcije $f(\vec{r})$, odnosno vektorske funkcije $\vec{F}(\vec{r})$, je regularna tačka funkcije $f(\vec{r})$, odnosno funkcije $\vec{F}(\vec{r})$.*▼

Definicija 33 *Tačka $\vec{r}_A$ singularne oblasti $\vec{r}_g$ tro-dimenzionalnog Hilbertovog realirealnog vektorskog prostora $\vec{r}$, u kojoj nije definisana funkcija prostornog izvoda proizvoljne skalarne funkcije $f(\vec{r})$, odnosno vektorske funkcije $\vec{F}(\vec{r})$, je singularna tačka funkcije $f(\vec{r})$, odnosno funkcije $\vec{F}(\vec{r})$.*▼

Definicija 34 *Ako je funkcija prostornog izvoda proizvoljne skalarne funkcije $f(\vec{r})$, odnosno vektorske funkcije $\vec{F}(\vec{r})$, ograničena funkcija u okolini singularne tačke $\vec{r}_A$, singularna tačka $\vec{r}_A$ je prividno-singularna tačka funkcije $f(\vec{r})$, odnosno funkcije $\vec{F}(\vec{r})$.*▼

Definicija 35 *Ako je funkcija prostornog izvoda proizvoljne skalarne funkcije $f(\vec{r})$, odnosno vektorske funkcije $\vec{F}(\vec{r})$, ograničena funkcija u singularnoj oblasti $\vec{r}_g$, singularna oblast $\vec{r}_g$ je prividno-singularna oblast funkcije $f(\vec{r})$, odnosno funkcije $\vec{F}(\vec{r})$.*▼

Definicija 36 *Rezidualna vrednost, u tački $\vec{r}_A$ tro-dimenzionalnog Hilbertovog realirealnog vektorskog prostora $\vec{r}$, funkcije prostornog izvoda proizvoljne skalarne funkcije $f(\vec{r})$, odnosno vektorske funkcije $\vec{F}(\vec{r})$, je prostorni ostatak (rezidijum) funkcije $f(\vec{r})$, odnosno funkcije $\vec{F}(\vec{r})$, u tački $\vec{r}_A$.*▼

Definicija 37 *Suma svih prostornih ostataka (rezidijuma) proizvoljne skalarne funkcije $f(\vec{r})$, odnosno vektorske funkcije $\vec{F}(\vec{r})$, u proširenom, odnosno u dovršenom, tro-dimenzionalnom Hilbertovom realirealnom vektorskom prostoru $\vec{r}$; odnosno suma rezidualnih vrednosti funkcije prostornog izvoda funkcije $f(\vec{r})$, odnosno funkcije $\vec{F}(\vec{r})$, u proširenom, odnosno u dovršenom, tro-dimenzionalnom Hilbertovom realirealnom vektorskom prostoru $\vec{r}$, jednaka je nuli.*▼

[2] Za funkciju f kaže se da poseduje neko svojstvo skoro svuda, ako ona to svojstvo poseduje svuda osim na skupu tačaka *Lebegove* mere nula.

Pretpostavimo da je skup singularnih tačaka singularne oblasti $\vec{r}_g$ u tro-dimenzionalnom *Hilbertovom* real*i*realnom vektorskom prostoru $\vec{r}$, u oznaci $vs\,\vec{r}_g$, proizvoljne skalarne funkcije $\vec{r} \to f(\vec{r})$, odnosno proizvoljne vektorske funkcije $\vec{r} \to \vec{F}(\vec{r})$, najviše prebrojiv (ili konačan ili beskonačan ali prebrojiv) skup, a za funkcije njihovog prostornog (integralnog) izvoda da su *Riman* integrabilne skoro svuda po singularnoj oblasti $\vec{r}_g$ ($vp\,\vec{r}_g$ je skup regularnih tačaka). Tada, postoji po volji mala, izolovana u odnosu na druge, ε-okolina svake singularne tačke (sferna oblast $\vec{r}_s(\vec{r}_A, \varepsilon)$, koju ograničava sferna površ $\vec{r}_\sigma(\vec{r}_A, \varepsilon)$, sa centrom u singularnoj tački $\vec{r}_A$ i radijusom ε), takva da u toj okolini, osim te singularne tačke, nema drugih singularnih tačaka skalarne funkcije $f(\vec{r})$, odnosno vektorske funkcije $\vec{F}(\vec{r})$.

Ako se uzme u obzir da su vrednosti prostornog izvoda funkcije, u proizvoljnoj tački $\vec{r}_A$ tro-dimenzionalnog vektorskog prostora $\vec{r}$, nezavisne u odnosu na geometrijsku formu površi kojom je ograničena oblast unutar koje se nalazi tačka $\vec{r}_A$, što je dobro poznata činjenica iz teorije polja, na osnovu definisanih vrednosti prostornog izvoda proizvoljne skalarne funkcije $f(\vec{r})$, odnosno vektorske funkcije $\vec{F}(\vec{r})$, *Definicija 25* i *26*, moguće je rezidualne vrednosti $\vec{\varphi}(\vec{r}_A)\,dv$, odnosno $\Phi(\vec{r}_A)\,dv$ i $\vec{\Phi}(\vec{r}_A)\,dv$, funkcija prostornog izvoda funkcije $f(\vec{r})$, odnosno funkcije $\vec{F}(\vec{r})$, u regularnoj tački $\vec{r}_A$ regularne oblasti $\vec{r}_g$ tro-dimenzionalnog real*i*realnog vektorskog prostora $\vec{r}$, svesti na granične nulte vrednosti sledećih površinskih integrala:

$$\vec{\varphi}(\vec{r}_A)\,dv = \lim_{\varepsilon\to0^+} \overset{\circlearrowleft}{\iint\limits_{\vec{r}_\sigma(\vec{r}_A,\varepsilon)}} f(\vec{r})\,d\vec{\sigma},\ \Phi(\vec{r}_A)\,dv = \lim_{\varepsilon\to0^+} \overset{\circlearrowleft}{\iint\limits_{\vec{r}_\sigma(\vec{r}_A,\varepsilon)}} \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{\sigma}\ \text{i}$$

$$\vec{\Phi}(\vec{r}_A)\,dv = \lim_{\varepsilon\to0^+} \overset{\circlearrowleft}{\iint\limits_{\vec{r}_\sigma(\vec{r}_A,\varepsilon)}} d\vec{\sigma}\times\vec{F}(\vec{r})\,. \tag{3.49}$$

Sa druge strane, budući da se i rezidualne vrednosti funkcija prostornog izvoda proizvoljne skalarne funkcije $f(\vec{r})$, odnosno vektorske funkcije $\vec{F}(\vec{r})$, u izolovanoj singularnoj tački $\vec{r}_A$ singularne oblasti $\vec{r}_g$ tro-dimenzionalnog *Hilbertovog* real*i*realnog vektorskog prostora $\vec{r}$, definišu graničnim integralnim vrednostima (3.49) i samim tim su funkcionalno određene konvergentnošću ili divergentnošću tih integralnih vrednosti, te vrednosti mogu uzeti bilo koju vrednost (skalarnu ili vektorsku) iz skupa tačaka proširenog tro-dimenzionalnog *Hilbertovog* real*i*realnog vektorskog prostora, drugim rečima mogu imati konačnu ili beskonačnu vrednost.

Definicija 38 *Prostorni ostatak (rezidijum) skalarne funkcije $f(\vec{r})$ i vektorske funkcije $\vec{F}(\vec{r})$, u oznaci $R^3esf(\vec{r})$ i $R^3es\vec{F}(\vec{r})$, u izolovanoj singularnoj tački $\vec{r}_A$ singularne oblasti $\vec{r}_g$ tro-dimenzionalnog Hilbertovog realirealnog vektorskog prostora $\vec{r}$, je po definiciji*

$$\underset{\vec{r}=\vec{r}_A}{\overrightarrow{R^3es}}\, f(\vec{r}) = \lim_{\varepsilon\to0^+} \overset{\circlearrowleft}{\iint\limits_{\vec{r}_\sigma(\vec{r}_A,\varepsilon)}} f(\vec{r})\,d\vec{\sigma},$$

$$\underset{\vec{r}=\vec{r}_A}{R^3es}\, \vec{F}(\vec{r}) = \lim_{\varepsilon\to0^+} \overset{\circlearrowleft}{\iint\limits_{\vec{r}_\sigma(\vec{r}_A,\varepsilon)}} \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{\sigma}\ \ i\ \ \underset{\vec{r}=\vec{r}_A}{\overrightarrow{R^3es}}\, \vec{F}(\vec{r}) = \lim_{\varepsilon\to0^+} \overset{\circlearrowleft}{\iint\limits_{\vec{r}_\sigma(\vec{r}_A,\varepsilon)}} d\vec{\sigma}\times\vec{F}(\vec{r})\,.\blacktriangledown \tag{3.50}$$

Oblast $\vec{r}_g / \bigcup\limits_{\vec{r}_A\in vs\,\vec{r}_g} int.\,\vec{r}_s(\vec{r}_A, \varepsilon)$, gde $int.\,\vec{r}_s(\vec{r}_A, \varepsilon)$ je deo sferne oblasti $\vec{r}_s(\vec{r}_A, \varepsilon)$ unutar sferne površi $\vec{r}_\sigma(\vec{r}_A, \varepsilon)$ koja je ograničava, je višestruko povezana regularna oblast skalarne funkcije $f(\vec{r})$, odnosno vektorske funkcije $\vec{F}(\vec{r})$.

Definicija 39 *Prostorni ostatak (rezidijum) skalarne funkcije* $f(\vec{r})$ *i vektorske funkcije* $\vec{F}(\vec{r})$ *u izolovanoj singularnoj tački* $\vec{r}_A$ *prostorne singularne krive* $\vec{r}_\gamma$ *u tro-dimenzionalnom Hilbertovom realirealnom vektorskom prostoru* $\vec{r}$*, je po definiciji*

$$\underset{\vec{r}=\vec{r}_A}{R^1 es}\, f(\vec{r}) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[f(\vec{r}_{A+\varepsilon}) - f(\vec{r}_{A-\varepsilon})\right] \ i \ \underset{\vec{r}=\vec{r}_A}{\overrightarrow{R^1 es}}\, \vec{F}(\vec{r}) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} [\vec{F}(\vec{r}_{A+\varepsilon}) - \vec{F}(\vec{r}_{A-\varepsilon})], \tag{3.51}$$

gde $\{\vec{r}_{A+\varepsilon}, \vec{r}_{A-\varepsilon}\} = \vec{r}_\gamma \cap \vec{r}_\sigma(\vec{r}_A, \varepsilon)$.▼

Definicija 40 *Prostorni ostatak (rezidijum) skalarne funkcije* $f(\vec{r})$ *i vektorske funkcije* $\vec{F}(\vec{r})$ *u izolovanoj singularnoj tački* $\vec{r}_A$ *singularne površi* $\vec{r}_p$ *u tro-dimenzionalnom Hilbertovom realirealnom vektorskom prostoru* $\vec{r}$*, je po definiciji*

$$\underset{\vec{r}=\vec{r}_A}{R^2 es}\, f(\vec{r}) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \overset{\circlearrowleft}{\int\limits_{\vec{r}_\pi(\vec{r}_A,\varepsilon)}} f(\vec{r})\, d\vec{r},$$

$$\underset{\vec{r}=\vec{r}_A}{R^2 es}\, \vec{F}(\vec{r}) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \overset{\circlearrowleft}{\int\limits_{\vec{r}_\pi(\vec{r}_A,\varepsilon)}} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \ i \ \underset{\vec{r}=\vec{r}_A}{\overrightarrow{R^2 es}}\, \vec{F}(\vec{r}) = -\lim_{\varepsilon\to 0^+} \overset{\circlearrowleft}{\int\limits_{\vec{r}_\pi(\vec{r}_A,\varepsilon)}} d\vec{r} \times \vec{F}(\vec{r}), \tag{3.52}$$

gde $\vec{r}_\pi(\vec{r}_A, \varepsilon) = \vec{r}_p \cap \vec{r}_\sigma(\vec{r}_A, \varepsilon)$.▼

Ako je skup singularnih tačaka, singularne oblasti $\vec{\varrho}_g$, u realirealnoj ravni $\vec{\varrho}$, proizvoljne skalarne funkcije $f(\vec{\varrho})$, odnosno vektorske funkcije $\vec{F}(\vec{\varrho})$, najviše prebrojiv skup, postoji po volji mala, izolovana u odnosu na druge, ε-okolina svake singularne tačke (kružna oblast $\vec{\varrho}_\varkappa(\vec{\varrho}_A, \varepsilon)$, koju ograničava kružnica $\vec{\varrho}_\kappa(\vec{\varrho}_A, \varepsilon)$, sa centrom u singularnoj tački $\vec{\varrho}_A$ i radijusa ε), takva da u toj okolini, osim te singularne tačke, nema drugih singularnih tačaka.

Definicija 41 *Prostorni ostatak (rezidijum) skalarne funkcije* $f(\vec{\varrho})$ *i vektorske funkcije* $\vec{F}(\vec{\varrho})$ *u izolovanoj singularnoj tački* $\vec{\varrho}_A$ *singularne krive* $\vec{\varrho}_\gamma$ *u realirealnoj ravni* $\vec{\varrho}$*, je po definiciji*

$$\begin{aligned} &\underset{\vec{\varrho}=\vec{\varrho}_A}{R^1 es}\, f(\vec{\varrho}) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[f\left(\vec{\varrho}_{A+\varepsilon}\right) - f\left(\vec{\varrho}_{A-\varepsilon}\right)\right] \ i \\ &\underset{\vec{\varrho}=\vec{\varrho}_A}{\overrightarrow{R^1 es}}\, \vec{F}(\vec{\varrho}) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} [\vec{F}\left(\vec{\varrho}_{A+\varepsilon}\right) - \vec{F}\left(\vec{\varrho}_{A-\varepsilon}\right)], \end{aligned} \tag{3.53}$$

gde $\left\{\vec{\varrho}_{A+\varepsilon}, \vec{\varrho}_{A-\varepsilon}\right\} = \vec{\varrho}_\gamma \cap \vec{\varrho}_\kappa(\vec{\varrho}_A, \varepsilon)$.▼

Definicija 42 *Prostorni ostatak (rezidijum) skalarne funkcije* $f(\vec{\varrho})$ *i vektorske funkcije* $\vec{F}(\vec{\varrho})$ *u izolovanoj singularnoj tački* $\vec{\varrho}_A$ *singularne oblasti* $\vec{\varrho}_\Omega$ *u dvo-dimenzionalnom Hilbertovom realirealnom vektorskom prostoru* $\vec{\varrho}$*, je po definiciji*

$$\underset{\vec{\varrho}=\vec{\varrho}_A}{R^2 es}\, f(\vec{\varrho}) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \overset{\circlearrowleft}{\int\limits_{\vec{\varrho}_\kappa(\vec{\varrho}_A,\varepsilon)}} f(\vec{\varrho})\, d\vec{\varrho},$$

$$\underset{\vec{\varrho}=\vec{\varrho}_A}{R^2 es}\, \vec{F}(\vec{\varrho}) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \overset{\circlearrowleft}{\int\limits_{\vec{\varrho}_\kappa(\vec{\varrho}_A,\varepsilon)}} \vec{F}(\vec{\varrho}) \cdot d\vec{\varrho} \ i \ \underset{\vec{\varrho}=\vec{\varrho}_A}{\overrightarrow{R^2 es}}\, \vec{F}(\vec{\varrho}) = -\lim_{\varepsilon\to 0^+} \overset{\circlearrowleft}{\int\limits_{\vec{\varrho}_\kappa(\vec{\varrho}_A,\varepsilon)}} d\vec{\varrho} \times \vec{F}(\vec{\varrho}).▼ \tag{3.54}$$

U daljem tekstu disertacije, ako se drugačije ne naglasi, važiće sledeća pretpostavka.

Pretpostavka 2 *Skup singularnih tačaka, singularne oblasti, proizvoljne skalarne funkcije* $f(\vec{\varrho})$*, odnosno vektorske funkcije* $\vec{F}(\vec{\varrho})$*, po kojoj su funkcije njihovog prostornog (integralnog) izvoda Riman integrabilne skoro svuda, je najviše prebrojiv skup.*▼

3.4 Fundamentalne integralne relacije funkcija kompleksne promenljive

Neka se luk $\vec{r}_{\widehat{PQ}}$ proizvoljne prostorne konturne krive $\vec{r}_\gamma$, koji je u singularnoj oblasti $\vec{r}_g$ proizvoljne skalarne funkcije $f(\vec{r})$, tro-dimenzionalnog real*i*realnog vektorskog prostora $\vec{r}$, podeli na skup regularnih $vp\,\vec{r}_{\widehat{PQ}}$ i skup singularnih $vs\,\vec{r}_{\widehat{PQ}}$ tačaka i svaka singularna tačka dodatno izoluje po volji malom, izolovanom u odnosu na druge, ε-okolinom (sfernom oblašću $\vec{r}_s(\vec{r}_A, \varepsilon)$), takvom da u toj okolini, osim te singularne tačke, nema drugih singularnih tačaka skalarne funkcije $f(\vec{r})$. U tom naglašenom slučaju može se formirati apsolutna integralna suma funkcije $\vec{\varphi}(\vec{r})$, kao funkcije prostornog izvoda funkcije $f(\vec{r})$ duž onih delova luka $\vec{r}_{\widehat{PQ}}$ konturne krive $\vec{r}_\gamma$ koji pripadaju skupu regularnih tačka $\vec{r}_{\widehat{PQ}} / \bigcup_{\vec{r}_A \in vs\,\vec{r}_{\widehat{PQ}}} int.\,\vec{r}_s(\vec{r}_A, \varepsilon)$:

$$\sum_{\vec{r}_A \in \vec{r}_{\widehat{PQ}} / \bigcup_{\vec{r}_A \in vs\,\vec{r}_{\widehat{PQ}}} int.\,\vec{r}_s(\vec{r}_A, \varepsilon)} \vec{\varphi}(\vec{r}_A) \cdot d_{\vec{r}_A}\vec{r}, \tag{3.55}$$

kao i suma rezidualnih vrednosti funkcije $\vec{\varphi}(\vec{r})$ u singularnim tačkama luka $\vec{r}_{\widehat{PQ}}$ konturne krive $\vec{r}_\gamma$:

$$\sum_{\vec{r}_A \in vs\,\vec{r}_{\widehat{PQ}}} \vec{\varphi}(\vec{r}_A) \cdot d_{\vec{r}_A}\vec{r} = \sum_{\vec{r}_A \in vs\,\vec{r}_{\widehat{PQ}}} \underset{\vec{r}=\vec{r}_A}{R^1 es}\, f(\vec{r}) = \sum_{\vec{r}_A \in vs\,\vec{r}_{\widehat{PQ}}} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[f(\vec{r}_{A+\varepsilon}) - f(\vec{r}_{A-\varepsilon})\right]. \tag{3.56}$$

Teorema 2 *Ako za svaku ravnomernu podelu $D_n\vec{r}_{\widehat{PQ}}$ proizvoljnog luka $\vec{r}_{\widehat{PQ}}$ konturne krive $\vec{r}_\gamma$ tro-dimenzionalnog real*i*realnog vektorskog prostora $\vec{r}$ i sve elementarne lukove $\triangle_{j_1,\ldots,j_n}\,\vec{r}_{\widehat{PQ}}$, postoje ograničeni nizovi priraštaja vrednosti skalarne funkcije $\vec{r} \mapsto f(\vec{r})$:*

$$f(\overset{\dashv}{\triangle}_{j_1,\ldots,j_n}\,\vec{r}_{\widehat{PQ}} + \triangle_{j_1,\ldots,j_n}\,\vec{r}) - f(\overset{\dashv}{\triangle}_{j_1,\ldots,j_n}\,\vec{r}_{\widehat{PQ}}) = \vec{\varphi}_n(\vec{r}_{\tilde{A}}) \cdot \triangle_{j_1,\ldots,j_n}\,\vec{r}, \tag{3.57}$$

takvih da $\lim\limits_{n \to +\infty} \vec{\varphi}_n(\vec{r}_{\tilde{A}}) = \vec{\varphi}(\vec{r}_{\tilde{A}})$, za svako $\vec{r}_{\tilde{A}} \in \cup_{j_1=1\ldots j_n=1}^{k_1\ldots k_n} int.\,\triangle_{j_1,\ldots,j_n}\,\vec{r}$, tada je

$$f(\vec{r}_P) - f(\vec{r}_Q) = \sum_{\vec{r}_A \in \vec{r}_{\widehat{PQ}}} \vec{\varphi}(\vec{r}_A) \cdot d_{\vec{r}_A}\vec{r}, \tag{3.58}$$

gde $\vec{\varphi}(\vec{r})$ je funkcija prostornog izvoda funkcije $f(\vec{r})$.▼

Dokaz. Iz uslova (3.57) teoreme sledi da je za bilo koju ravnomernu podelu $D_n\vec{r}_{\widehat{PQ}}$ luka $\vec{r}_{\widehat{PQ}}$ konturne krive $\vec{r}_\gamma$ i bilo koji nivo podele

$$\sum_{j_1=1\ldots j_n=1}^{k_1\ldots k_n} [f(\overset{\dashv}{\triangle}_{j_1,\ldots,j_n}\,\vec{r}_{\widehat{PQ}} + \triangle_{j_1,\ldots,j_n}\,\vec{r}) - f(\overset{\dashv}{\triangle}_{j_1,\ldots,j_n}\,\vec{r}_{\widehat{PQ}})] =$$

$$= \sum_{j_1=1\ldots j_n=1}^{k_1\ldots k_n} \vec{\varphi}_n(\triangle^{\star}_{j_1\ldots j_n}\,\vec{r}_{\widehat{PQ}}) \cdot \triangle_{j_1,\ldots,j_n}\,\vec{r},$$

odnosno

$$f(\vec{r}_P) - f(\vec{r}_Q) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{j_1=1\ldots j_n=1}^{k_1\ldots k_n} \vec{\varphi}_n(\vec{r}_{\tilde{A}}) \cdot \triangle_{j_1,\ldots,j_n}\,\vec{r},$$

budući da se razlike vrednosti funkcije $f(\vec{r})$, u tačkama koje dele dva susedna elementarna luka, anuliraju pri sumiranju, jer su to razlike identički jednakih vrednosti. Kako se granična vrednost sume na desnoj strani znaka jednakosti prethodno dobijene funkcionalne relacije, kada broj podela n, luka $\vec{r}_{\overset{\frown}{PQ}}$ konturne krive $\vec{r}_\gamma$, teži beskonačnosti, shodno *Definiciji 22*, svodi na apsolutnu integralnu sumu funkcije $\vec{\varphi}(\vec{r})$, kao funkcije prostornog izvoda skalarne funkcije $f(\vec{r})$:

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{j_1=1\ldots j_n=1}^{k_1\ldots k_n} \vec{\varphi}_n(\vec{r}_{\tilde{A}})\cdot \triangle_{j_1,\ldots,j_n} \vec{r} = \sum_{\vec{r}_A\in\vec{r}_{\overset{\frown}{PQ}}} \vec{\varphi}(\vec{r}_A)\cdot d_{\vec{r}_A}\vec{r},$$

to konačno sledi da

$$f(\vec{r}_P) - f(\vec{r}_Q) = \sum_{\vec{r}_A\in\vec{r}_{\overset{\frown}{PQ}}} \vec{\varphi}(\vec{r}_A)\cdot d_{\vec{r}_A}\vec{r},$$

što je i trebalo dokazati. ■

Ako obe rubne tačke $\{\vec{r}_Q, \vec{r}_P\}$ luka $\vec{r}_{\overset{\frown}{PQ}}$ konturne krive $\vec{r}_\gamma$ nisu singularne tačke funkcije $f(\vec{r})$, tada na osnovu rezultata prethodne teoreme sledi da

$$f(\vec{r}_P) - f(\vec{r}_Q) - \sum_{\vec{r}_A\in vs\,\vec{r}_{\overset{\frown}{PQ}}} \left[f(\vec{r}_{A+\varepsilon}) - f(\vec{r}_{A-\varepsilon})\right] =$$

$$= \sum_{\vec{r}_A\in\vec{r}_{\overset{\frown}{PQ}} / \bigcup\limits_{\vec{r}_A\in vs\,\vec{r}_{\overset{\frown}{PQ}}} int.\,\vec{r}_s(\vec{r}_A,\varepsilon)} \vec{\varphi}(\vec{r}_A)\cdot d_{\vec{r}_A}\vec{r}. \tag{3.59}$$

Granična vrednost apsolutne integralne sume $\sum\limits_{\vec{r}_A\in\vec{r}_{\overset{\frown}{PQ}} / \bigcup\limits_{\vec{r}_A\in vs\,\vec{r}_{\overset{\frown}{PQ}}} int.\,\vec{r}_s(\vec{r}_A,\varepsilon)} \vec{\varphi}(\vec{r}_A)\cdot d_{\vec{r}_A}\vec{r}$, kada $\varepsilon\to 0^+$, svodi se na apsolutnu integralnu sumu funkcije $\vec{\varphi}(\vec{r})$ na skupu $vp\,\vec{r}_{\overset{\frown}{PQ}}$:

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \sum_{\vec{r}_A\in\vec{r}_{\overset{\frown}{PQ}} / \bigcup\limits_{\vec{r}_A\in vs\,\vec{r}_{\overset{\frown}{PQ}}} int.\,\vec{r}_s(\vec{r}_A,\varepsilon)} \vec{\varphi}(\vec{r}_A)\cdot d_{\vec{r}_A}\vec{r} = \sum_{\vec{r}_A\in vp\,\vec{r}_{\overset{\frown}{PQ}}} \vec{\varphi}(\vec{r}_A)\cdot d_{\vec{r}_A}\vec{r}. \tag{3.60}$$

Definicija 43 *Košijeva glavna vrednost nesvojstvenog integrala vektorske funkcije $\vec{\varphi}(\vec{r})$, duž luka $\vec{r}_{\overset{\frown}{PQ}}$ konturne krive $\vec{r}_\gamma$ tro-dimenzionalnog realirealnog vektorskog prostora $\vec{r}$, je po definiciji*

$$vp\int\limits_{\vec{r}_{\overset{\frown}{PQ}}} \vec{\varphi}(\vec{r})\cdot d\vec{r} = \sum_{\vec{r}_A\in vp\,\vec{r}_{\overset{\frown}{PQ}}} \vec{\varphi}(\vec{r}_A)\cdot d_{\vec{r}_A}\vec{r}.\blacktriangledown \tag{3.61}$$

Definicija 44 *Žordanova singularna vrednost nesvojstvenog integrala vektorske funkcije $\vec{\varphi}(\vec{r})$, duž luka $\vec{r}_{\overset{\frown}{PQ}}$ konturne krive $\vec{r}_\gamma$ tro-dimenzionalnog realirealnog vektorskog prostora $\vec{r}$, je po definiciji*

$$vs\int\limits_{\vec{r}_{\overset{\frown}{PQ}}} \vec{\varphi}(\vec{r})\cdot d\vec{r} = \sum_{\vec{r}_A\in vs\,\vec{r}_{\overset{\frown}{PQ}}} \vec{\varphi}(\vec{r}_A)\cdot d_{\vec{r}_A}\vec{r}.\blacktriangledown \tag{3.62}$$

Definicija 45 *Totalna vrednost nesvojstvenog integrala vektorske funkcije $\vec{\varphi}(\vec{r})$, duž luka $\vec{r}_{\widehat{PQ}}$ konturne krive $\vec{r}_\gamma$ tro-dimenzionalnog realirealnog vektorskog prostora $\vec{r}$, je po definiciji*

$$vt \int\limits_{\vec{r}_{\widehat{PQ}}} \vec{\varphi}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \sum_{\vec{r}_A \in \vec{r}_{\widehat{PQ}}} \vec{\varphi}(\vec{r}_A) \cdot d_{\vec{r}_A}\vec{r}, \tag{3.63}$$

odnosno

$$vt \int\limits_{\vec{r}_{\widehat{PQ}}} \vec{\varphi}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \sum_{\vec{r}_A \in vp\, \vec{r}_{\widehat{PQ}}} \vec{\varphi}(\vec{r}_A) \cdot d_{\vec{r}_A}\vec{r} + \sum_{\vec{r}_A \in vs\, \vec{r}_{\widehat{PQ}}} \vec{\varphi}(\vec{r}_A) \cdot d_{\vec{r}_A}\vec{r} =$$

$$= vp \int\limits_{\vec{r}_{\widehat{PQ}}} \vec{\varphi}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} + vs \int\limits_{\vec{r}_{\widehat{PQ}}} \vec{\varphi}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}. \blacktriangledown \tag{3.64}$$

U graničnom slučaju, kada $\varepsilon \to 0^+$, funkcionalna relacija (3.59), shodno *Definicijama 40, 41* i *42* i funkcionalnim relacijama (3.56) i (3.60), svodi se na sledeću funkcionalnu relaciju:

$$f(\vec{r}_P) - f(\vec{r}_Q) - vp \int\limits_{\vec{r}_{\widehat{PQ}}} \vec{\varphi}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \sum_{\vec{r}_A \in vs\, \vec{r}_{\widehat{PQ}}} \underset{\vec{r}=\vec{r}_A}{R^1es}\, f(\vec{r}), \tag{3.65}$$

odnosno, budući da je $vs \int\limits_{\vec{r}_{\widehat{PQ}}} \vec{\varphi}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \sum\limits_{\vec{r}_A \in vs\, \vec{r}_{\widehat{PQ}}} \underset{\vec{r}=\vec{r}_A}{R^1es}\, f(\vec{r})$, na funkcionalnu relaciju:

$$f(\vec{r}_P) - f(\vec{r}_Q) = vt \int\limits_{\vec{r}_{\widehat{PQ}}} \vec{\varphi}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}. \tag{3.66}$$

Ako je jedna od rubnih tačaka $\{\vec{r}_Q, \vec{r}_P\}$ luka $\vec{r}_{\widehat{PQ}}$ konturne krive $\vec{r}_\gamma$, primera radi tačka $\vec{r}_Q$, singularna tačka skalarne funkcije $f(\vec{r})$, tada se i ona izoluje po volji malom, izolovanom u odnosu na druge, ε-okolinom (sfernom oblašću $\vec{r}_s(\vec{r}_Q, \varepsilon)$), takvom da u toj okolini, osim te singularne tačke, nema drugih singularnih tačaka funkcije $f(\vec{r})$. U tom naglašenom slučaju

$$f(\vec{r}_P) - f(\vec{r}_{Q+\varepsilon}) - \sum_{\vec{r}_A \in vs\,(\vec{r}_{\widehat{PQ}}/\vec{r}_Q)} \left[f(\vec{r}_{A+\varepsilon}) - f(\vec{r}_{A-\varepsilon})\right] =$$

$$= \sum_{\vec{r}_A \in \vec{r}_{\widehat{PQ}} / \bigcup\limits_{\vec{r}_A \in vs\, \vec{r}_{\widehat{PQ}}} int.\, \vec{r}_s(\vec{r}_A, \varepsilon)} \vec{\varphi}(\vec{r}_A) \cdot d_{\vec{r}_A}\vec{r}, \tag{3.67}$$

odnosno, ako se izrazu na levoj strani znaka jednakosti doda i oduzme $f(\vec{r}_{Q-\varepsilon})$

$$f(\vec{r}_P) - f(\vec{r}_{Q-\varepsilon}) - \sum_{\vec{r}_A \in vs\, \vec{r}_{\widehat{PQ}}} \left[f(\vec{r}_{A+\varepsilon}) - f(\vec{r}_{A-\varepsilon})\right] =$$

$$= \sum_{\vec{r}_A \in \vec{r}_{\widehat{PQ}} / \bigcup\limits_{\vec{r}_A \in vs\, \vec{r}_{\widehat{PQ}}} int.\, \vec{r}_s(\vec{r}_A, \varepsilon)} \vec{\varphi}(\vec{r}_A) \cdot d_{\vec{r}_A}\vec{r}, \tag{3.68}$$

što se može napisati i u sažetoj formi

$$f\left(\vec{r}_P\right)-f\left(\vec{r}_{Q+\varepsilon}\right)+\left\{\begin{array}{c}0\\ f\left(\vec{r}_{Q+\varepsilon}\right)-f\left(\vec{r}_{Q-\varepsilon}\right)\end{array}\right.=\sum_{\vec{r}_A\in\vec{r}_{\overset{\frown}{PQ}}/\bigcup\limits_{\vec{r}_A\in vs\,\vec{r}_{\overset{\frown}{PQ}}}int.\,\vec{r}_s(\vec{r}_A,\varepsilon)}\vec{\varphi}\left(\vec{r}_A\right)\cdot d_{\vec{r}_A}\vec{r}+$$

$$+\left\{\begin{array}{l}\sum\limits_{\vec{r}_A\in vs\,(\vec{r}_{\overset{\frown}{PQ}}/\vec{r}_Q)}\left[f\left(\vec{r}_{A+\varepsilon}\right)-f\left(\vec{r}_{A-\varepsilon}\right)\right]\\ \sum\limits_{\vec{r}_A\in vs\,\vec{r}_{\overset{\frown}{PQ}}}\left[f\left(\vec{r}_{A+\varepsilon}\right)-f\left(\vec{r}_{A-\varepsilon}\right)\right]\end{array}\right.. \tag{3.69}$$

U graničnom slučaju, kada $\varepsilon\to0^+$

$$vt\,\left[f\left(\vec{r}_P\right)-f\left(\vec{r}_Q\right)\right]-vp\int\limits_{\vec{r}_{\overset{\frown}{PQ}}}\vec{\varphi}\left(\vec{r}\right)\cdot d\vec{r}=\left\{\begin{array}{c}\sum\limits_{\vec{r}_A\in vs\,(\vec{r}_{\overset{\frown}{PQ}}/\vec{r}_Q)}\underset{\vec{r}=\vec{r}_A}{R^1es}\,f\left(\vec{r}\right)\\ \sum\limits_{\vec{r}_A\in vs\,\vec{r}_{\overset{\frown}{PQ}}}\underset{\vec{r}=\vec{r}_A}{R^1es}\,f\left(\vec{r}\right)\end{array}\right., \tag{3.70}$$

odnosno

$$vt\,\left[f\left(\vec{r}_P\right)-f\left(\vec{r}_Q\right)\right]=vt\int\limits_{\vec{r}_{\overset{\frown}{PQ}}}\vec{\varphi}\left(\vec{r}\right)\cdot d\vec{r}, \tag{3.71}$$

gde

$$vt\,\left[f\left(\vec{r}_P\right)-f\left(\vec{r}_Q\right)\right]=f\left(\vec{r}_P\right)-\lim_{\varepsilon\to0^+}f\left(\vec{r}_{Q+\varepsilon}\right)+\left\{\begin{array}{c}0\\ \lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\left[f\left(\vec{r}_{Q+\varepsilon}\right)-f\left(\vec{r}_{Q-\varepsilon}\right)\right]\end{array}\right.\quad\text{i}$$

$$vt\int\limits_{\vec{r}_{\overset{\frown}{PQ}}}\vec{\varphi}\left(\vec{r}\right)\cdot d\vec{r}=vp\int\limits_{\vec{r}_{\overset{\frown}{PQ}}}\vec{\varphi}\left(\vec{r}\right)\cdot d\vec{r}+vs\int\limits_{\vec{r}_{\overset{\frown}{PQ}}}\vec{\varphi}\left(\vec{r}\right)\cdot d\vec{r}=$$

$$=vp\int\limits_{\vec{r}_{\overset{\frown}{PQ}}}\vec{\varphi}\left(\vec{r}\right)\cdot d\vec{r}+\left\{\begin{array}{c}\sum\limits_{\vec{r}_A\in vs\,(\vec{r}_{\overset{\frown}{PQ}}/\vec{r}_Q)}\underset{\vec{r}=\vec{r}_A}{R^1es}\,f\left(\vec{r}\right)\\ \sum\limits_{\vec{r}_A\in vs\,\vec{r}_{\overset{\frown}{PQ}}}\underset{\vec{r}=\vec{r}_A}{R^1es}\,f\left(\vec{r}\right)\end{array}\right.. \tag{3.72}$$

Ako se proizvoljna konturna površ $\vec{r}_p$, koja se oslanja na proizvoljnu konturnu krivu $\vec{r}_\gamma$ i koja je u singularnoj oblasti $\vec{r}_g$ proizvoljne skalarne funkcije $\vec{r}\mapsto f\left(\vec{r}\right)$, tro-dimenzionalnog real*i*realnog vektorskog prostora $\vec{r}$, podeli na skup regularnih $vp\,\vec{r}_p$ i skup singularnih $vs\,\vec{r}_p$ tačaka i uz to se svaka singularna tačka dodatno izoluje po volji malom, izolovanom u odnosu na druge, ε-okolinom (sfernom oblašću $\vec{r}_s\left(\vec{r}_A,\varepsilon\right)$), takvom da u toj okolini, osim te singularne tačke, nema drugih singularnih tačaka funkcije $f\left(\vec{r}\right)$, može se formirati apsolutna integralna suma funkcije $\vec{\varphi}\left(\vec{r}\right)$, kao funkcije prostornog izvoda funkcije $f\left(\vec{r}\right)$ na skupu regularnih tačaka $\vec{r}_p/\bigcup\limits_{\vec{r}_A\in vs\,\vec{r}_p}int.\,\vec{r}_s\left(\vec{r}_A,\varepsilon\right)$ konturne površi $\vec{r}_p$:

$$\sum_{\vec{r}_A\in\vec{r}_p/\bigcup\limits_{\vec{r}_A\in vs\,\vec{r}_p}int.\,\vec{r}_s(\vec{r}_A,\varepsilon)}d_{\vec{r}_A}\vec{\sigma}\times\vec{\varphi}\left(\vec{r}_A\right), \tag{3.73}$$

kao i suma rezidualnih vrednosti funkcije $\vec{\varphi}\left(\vec{r}\right)$ u singularnim tačkama konturne površi $\vec{r}_p$:

$$\sum_{\vec{r}_A\in vs\,\vec{r}_p}d_{\vec{r}_A}\vec{\sigma}\times\vec{\varphi}\left(\vec{r}_A\right)=\sum_{\vec{r}_A\in vs\,\vec{r}_p}\underset{\vec{r}=\vec{r}_A}{\overrightarrow{R^2es}}\,f\left(\vec{r}\right)=\sum_{\vec{r}_A\in vs\,\vec{r}_p}\lim_{\varepsilon\to0^+}\oint\limits_{\vec{r}_\pi(\vec{r}_A,\varepsilon)}f\left(\vec{r}\right)d\vec{r}. \tag{3.74}$$

Teorema 3 *Ako za svaku ravnomernu podelu $D_n\vec{r}_p$ konturne površi $\vec{r}_p$, koja je oslanjena na konturnoj krivoj $\vec{r}_\gamma$ u tro-dimenzionalnom realirealnom vektorskom prostoru $\vec{r}$, kao i sve elementarne površi $\triangle_{j_1,\dots,j_n}\vec{r}_p$, postoje ograničeni nizovi apsolutnih integralnih suma skalarne funkcije $\vec{r}\mapsto f(\vec{r})$:*

$$\sum_{\vec{r}_A\in\triangle_{j_1,\dots,j_n}\vec{r}_\gamma} f(\vec{r}_A)\,d_{\vec{r}_A}\vec{r} = \triangle_{j_1,\dots,j_n}\vec{\sigma}\times\vec{\varphi}_n(\vec{r}_{\tilde{A}}), \tag{3.75}$$

takvi da $\lim\limits_{n\to+\infty}\vec{\varphi}_n(\vec{r}_{\tilde{A}})=\vec{\varphi}(\vec{r}_{\tilde{A}})$, za svako $\vec{r}_{\tilde{A}}\in\cup_{j_1=1\dots j_n=1}^{k_1\dots k_n}$ int. $\triangle_{j_1,\dots,j_n}\vec{\sigma}$, a uz to je i funkcija $\vec{\varphi}(\vec{r})$ prostornog izvoda funkcije $f(\vec{r})$ apsolutno (totalno) integrabilna, u smislu Definicije 1, tada je

$$\sum_{\vec{r}_A\in\vec{r}_\gamma} f(\vec{r}_A)\,d_{\vec{r}_A}\vec{r} = \sum_{\vec{r}_A\in\vec{r}_p} d_{\vec{r}_A}\vec{\sigma}\times\vec{\varphi}(\vec{r}_A)\,.\blacktriangledown \tag{3.76}$$

Dokaz. Iz uslova (3.75) teoreme sledi da je za svaku ravnomernu podelu $D_n\vec{r}_p$ konturne površi $\vec{r}_p$ i bilo koji nivo podele

$$\sum_{j_1=1\dots j_n=1}^{k_1\dots k_n}\ \sum_{\vec{r}_A\in\triangle_{j_1,\dots,j_n}\vec{r}_\gamma} f(\vec{r}_A)\,d_{\vec{r}_A}\vec{r} = \sum_{j_1=1\dots j_n=1}^{k_1\dots k_n}\triangle_{j_1,\dots,j_n}\vec{\sigma}\times\vec{\varphi}_n(\vec{r}_{\tilde{A}}).$$

Prema uslovima teoreme granična vrednost sume $\sum_{j_1=1\dots j_n=1}^{k_1\dots k_n}\triangle_{j_1,\dots,j_n}\vec{\sigma}\times\vec{\varphi}_n(\triangle^\star_{j_1,\dots,j_n}\vec{r}_p)$, kada broj podela n, konturne površi $\vec{r}_p$, teži beskonačnosti, svodi se na apsolutnu integralnu sumu funkcije $\vec{\varphi}(\vec{r})$, kao funkcije prostornog izvoda skalarne funkcije $f(\vec{r})$:

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{j_1=1\dots j_n=1}^{k_1\dots k_n}\triangle_{j_1,\dots,j_n}\vec{\sigma}\times\vec{\varphi}_n(\triangle^\star_{j_1,\dots,j_n}\vec{r}_p) = \sum_{\vec{r}_A\in\vec{r}_p} d_{\vec{r}_A}\vec{\sigma}\times\vec{\varphi}(\vec{r}_A)\,.$$

Sa druge strane

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{j_1=1\dots j_n=1}^{k_1\dots k_n}\ \sum_{\vec{r}_A\in\triangle_{j_1,\dots,j_n}\vec{r}_\gamma} f(\vec{r}_A)\,d_{\vec{r}_A}\vec{r} = \sum_{\vec{r}_A\in\vec{r}_\gamma} f(\vec{r}_A)\,d_{\vec{r}_A}\vec{r},$$

budući da se rezidualne vrednosti $f(\vec{r}_A)\,d_{\vec{r}_A}\vec{r}$, na onim delovima elementarnih kontura, koji razdvajaju dve elementarne površi, anuliraju pri sumiranju, jer su to suprotno orjentisane vektorske veličine identički jednakih intenziteta.

Konačno, na osnovu svih prethodno dobijenih funkcionalnih relacija, sledi da

$$\sum_{\vec{r}_A\in\vec{r}_\gamma} f(\vec{r}_A)\,d_{\vec{r}_A}\vec{r} = \sum_{\vec{r}_A\in\vec{r}_p} d_{\vec{r}_A}\vec{\sigma}\times\vec{\varphi}(\vec{r}_A)\,,$$

što je i trebalo dokazati. ■

Ako na zatvorenoj konturnoj krivoj $\vec{r}_\gamma$ nema singularnih tačaka funkcije $f(\vec{r})$, na osnovu rezultata prethodne teoreme sledi da

$$\sum_{\vec{r}_A\in\vec{r}_\gamma} f(\vec{r}_A)\,d_{\vec{r}_A}\vec{r} - \sum_{\vec{r}_A\in vs\,\vec{r}_p}\ \overset{\circlearrowleft}{\int\limits_{\vec{r}_\pi(\vec{r}_A,\varepsilon)}} f(\vec{r})\,d\vec{r} = \sum_{\vec{r}_A\in\vec{r}_p/\bigcup\limits_{\vec{r}_A\in vs\,\vec{r}_p} int.\,\vec{r}_s(\vec{r}_A,\varepsilon)} d_{\vec{r}_A}\vec{\sigma}\times\vec{\varphi}(\vec{r}_A)\,. \tag{3.77}$$

Definicija 46 *Košijeva glavna vrednost nesvojstvenog integrala vektorske funkcije $\vec{\varphi}(\vec{r})$ na konturnoj površi $\vec{r}_p$ tro-dimenzionalnog realirealnog vektorskog prostora $\vec{r}$ je po definiciji*

$$vp \iint\limits_{\vec{r}_p} d\vec{\sigma} \times \vec{\varphi}(\vec{r}) = \sum_{\vec{r}_A \in vp\, \vec{r}_p} d_{\vec{r}_A}\vec{\sigma} \times \vec{\varphi}(\vec{r}_A) . \blacktriangledown$$

Definicija 47 *Žordanova singularna vrednost nesvojstvenog integrala vektorske funkcije $\vec{\varphi}(\vec{r})$ na konturnoj površi $\vec{r}_p$ tro-dimenzionalnog realirealnog vektorskog prostora $\vec{r}$ je po definiciji*

$$vs \iint\limits_{\vec{r}_p} d\vec{\sigma} \times \vec{\varphi}(\vec{r}) = \sum_{\vec{r}_A \in vs\, \vec{r}_p} d_{\vec{r}_A}\vec{\sigma} \times \vec{\varphi}(\vec{r}_A) . \blacktriangledown$$

Definicija 48 *Totalna vrednost nesvojstvenog integrala vektorske funkcije $\vec{\varphi}(\vec{r})$ na konturnoj površi $\vec{r}_p$ tro-dimenzionalnog realirealnog vektorskog prostora $\vec{r}$ je po definiciji*

$$vt \iint\limits_{\vec{r}_p} d\vec{\sigma} \times \vec{\varphi}(\vec{r}) = \sum_{\vec{r}_A \in \vec{r}_p} d_{\vec{r}_A}\vec{\sigma} \times \vec{\varphi}(\vec{r}_A) ,$$

odnosno

$$vt \iint\limits_{\vec{r}_p} d\vec{\sigma} \times \vec{\varphi}(\vec{r}) = vp \iint\limits_{\vec{r}_p} d\vec{\sigma} \times \vec{\varphi}(\vec{r}) + vs \iint\limits_{\vec{r}_p} d\vec{\sigma} \times \vec{\varphi}(\vec{r}) . \blacktriangledown$$

Funkcionalna relacija (3.77) svodi se, u graničnom slučaju kada $\varepsilon \to 0^+$, na sledeću funkcionalnu relaciju:

$$\overset{\circlearrowleft}{\int\limits_{\vec{r}_\gamma}} f(\vec{r})\, d\vec{r} - vp \iint\limits_{\vec{r}_p} d\vec{\sigma} \times \vec{\varphi}(\vec{r}) = \sum_{\vec{r}_A \in vs\, \vec{r}_p} \overrightarrow{\underset{\vec{r}=\vec{r}_A}{R^2 es}} f(\vec{r}) , \tag{3.78}$$

odnosno, budući da je $vs \iint\limits_{\vec{r}_p} d\vec{\sigma} \times \vec{\varphi}(\vec{r}) = \sum\limits_{\vec{r}_A \in vs\, \vec{r}_p} \overrightarrow{\underset{\vec{r}=\vec{r}_A}{R^2 es}} f(\vec{r})$, na funkcionalnu relaciju:

$$\overset{\circlearrowleft}{\int\limits_{\vec{r}_\gamma}} f(\vec{r})\, d\vec{r} = vt \iint\limits_{\vec{r}_p} d\vec{\sigma} \times \vec{\varphi}(\vec{r}) . \tag{3.79}$$

U slučaju da na zatvorenoj konturnoj krivoj $\vec{r}_\gamma$, na koju se oslanja konturna površ $\vec{r}_p$, ima singularnih tačaka skalarne funkcije $f(\vec{r})$, svaka od njih se izoluje po volji malom, izolovanom u odnosu na druge, ε-okolinom (sfernom oblašću $\vec{r}_s(\vec{r}_A, \varepsilon)$), takvom da u toj okolini, osim te singularne tačke, nema drugih singularnih tačaka funkcije $f(\vec{r})$. Shodno tome

$$\sum_{\vec{r}_A \in \vec{r}_\gamma / \bigcup\limits_{\vec{r}_A \in vs\, \vec{r}_\gamma} int.\, \vec{r}_s(\vec{r}_A, \varepsilon)} f(\vec{r}_A)\, d_{\vec{r}_A}\vec{r} + \sum_{\vec{r}_A \in vs\, \vec{r}_\gamma} \int\limits_{\vec{r}_\pi(\vec{r}_A, \varepsilon)}^{\widehat{PQ}} f(\vec{r})\, d\vec{r} -$$

$$- \sum_{\vec{r}_A \in vs\, (\vec{r}_p / \vec{r}_\gamma)} \overset{\circlearrowleft}{\int\limits_{\vec{r}_\pi(\vec{r}_A, \varepsilon)}} f(\vec{r})\, d\vec{r} = \sum_{\vec{r}_A \in \vec{r}_p / \bigcup\limits_{\vec{r}_A \in vs\, \vec{r}_p} int.\, \vec{r}_s(\vec{r}_A, \varepsilon)} d_{\vec{r}_A}\vec{\sigma} \times \vec{\varphi}(\vec{r}_A) , \tag{3.80}$$

gde $\{\vec{r}_P,\vec{r}_Q\} = \vec{r}_\gamma \cap \vec{r}_\pi(\vec{r}_A,\varepsilon)$ i $\vec{r}_\pi(\vec{r}_A,\varepsilon) = \vec{r}_p \cap \vec{r}_s(\vec{r}_A,\varepsilon)$, odnosno

$$\sum_{\vec{r}_A\in\vec{r}_\gamma / \bigcup_{\vec{r}_A\in vs\,\vec{r}_\gamma} int.\,\vec{r}_s(\vec{r}_A,\varepsilon)} f(\vec{r}_A)\, d_{\vec{r}_A}\vec{r} + \sum_{\vec{r}_A\in vs\,\vec{r}_\gamma} \int_{\vec{r}_\pi(\vec{r}_A,\varepsilon)}^{\overset{\frown}{PQ}} f(\vec{r})\, d\vec{r} -$$

$$- \sum_{\vec{r}_A\in vs\,\vec{r}_\gamma} \int_{\vec{r}_\zeta(\vec{r}_A,\varepsilon)}^{\overset{\frown}{QP}} f(\vec{r})\, d\vec{r} + \sum_{\vec{r}_A\in vs\,\vec{r}_\gamma} \int_{\vec{r}_\zeta(\vec{r}_A,\varepsilon)}^{\overset{\frown}{QP}} f(\vec{r})\, d\vec{r} -$$

$$- \sum_{\vec{r}_A\in vs\,(\vec{r}_p/\vec{r}_\gamma)} \int_{\vec{r}_\pi(\vec{r}_A,\varepsilon)}^{\circlearrowleft} f(\vec{r})\, d\vec{r} = \sum_{\vec{r}_A\in\vec{r}_p / \bigcup_{\vec{r}_A\in vs\,\vec{r}_p} int.\,\vec{r}_s(\vec{r}_A,\varepsilon)} d_{\vec{r}_A}\vec{\sigma}\times\vec{\varphi}(\vec{r}_A)\,, \qquad (3.81)$$

gde $\vec{r}_\zeta(\vec{r}_A,\varepsilon) \in \vec{r}_\sigma(\vec{r}_A,\varepsilon)/\vec{r}_p$ je prostorna kriva, koja spaja tačke $\vec{r}_P$ i $\vec{r}_Q$ i na delu je sferne površi $\vec{r}_\sigma(\vec{r}_A,\varepsilon)$, sa centrom u singularnoj tački $\vec{r}_A \in \vec{r}_\gamma$, koji je van konturne površi $\vec{r}_p$. Ako je ostatak $\underset{\vec{r}=\vec{r}_A}{\overrightarrow{R^2es}}\, f(\vec{r})$ funkcije $f(\vec{r})$, u nekoj od singularnih tačaka $\vec{r}_A \in \vec{r}_\gamma$, različit od nule, to znači da je u graničnom slučaju, kada $\varepsilon \to 0^+$: $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\vec{r}_\pi(\vec{r}_A,\varepsilon)}^{\overset{\frown}{PQ}} f(\vec{r})\, d\vec{r} \neq \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\vec{r}_\zeta(\vec{r}_A,\varepsilon)}^{\overset{\frown}{QP}} f(\vec{r})\, d\vec{r}$, budući da je $\underset{\vec{r}=\vec{r}_A\in\vec{r}_\gamma}{\overrightarrow{R^2es}}\, f(\vec{r}) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} [\int_{\vec{r}_\pi(\vec{r}_A,\varepsilon)}^{\overset{\frown}{PQ}} f(\vec{r})\, d\vec{r} + \int_{\vec{r}_\zeta(\vec{r}_A,\varepsilon)}^{\overset{\frown}{QP}} f(\vec{r})\, d\vec{r}]$, drugim rečima vrednost integrala funkcije $f(\vec{r})$, duž lučnih delova $\vec{r}_{\overset{\frown}{PQ}}$ i $\vec{r}_{\overset{\frown}{QP}}$ prostornih krivih $\vec{r}_\pi(\vec{r}_A,\varepsilon)$ i $\vec{r}_\zeta(\vec{r}_A,\varepsilon)$, respektivno, koji povezuju tačke $\vec{r}_P$ i $\vec{r}_Q$, zavisi eksplicitno od puta integracije.

Sa druge strane, ako su integrali funkcije $f(\vec{r})$, duž oba luka $\vec{r}_{\overset{\frown}{PQ}}$ i $\vec{r}_{\overset{\frown}{QP}}$ prostornih krivih $\vec{r}_\pi(\vec{r}_A,\varepsilon)$ i $\vec{r}_\zeta(\vec{r}_A,\varepsilon)$, respektivno, za svaku singularnu tačku $\vec{r}_A \in \vec{r}_\gamma$, jednakih vrednosti, ostatak $\underset{\vec{r}=\vec{r}_A}{\overrightarrow{R^2es}}\, f(\vec{r})$ funkcije $f(\vec{r})$, u svakoj od singularnih tačaka $\vec{r}_A \in \vec{r}_\gamma$, jednak je nuli, što znači da su rezidualne vrednosti $f(\vec{r}_{\vec{r}_A})d_{\vec{r}_A}\vec{r}$ funkcije $f(\vec{r})$, u singularnim tačkama $\vec{r}_A \in \vec{r}_\gamma$, shodno funkcionalnoj relaciji (3.56), jedinstveno definisane vrednosti

$$f(\vec{r}_{\vec{r}_A})d_{\vec{r}_A}\vec{r} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\vec{r}_\pi(\vec{r}_A,\varepsilon)}^{\overset{\frown}{PQ}} f(\vec{r})\, d\vec{r} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\vec{r}_\zeta(\vec{r}_A,\varepsilon)}^{\overset{\frown}{QP}} f(\vec{r})\, d\vec{r} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} [\vec{\psi}(\vec{r}_{A+\varepsilon}) - \vec{\psi}(\vec{r}_{A-\varepsilon})] = \underset{\vec{r}=\vec{r}_A}{\overrightarrow{R^1es}}\, \vec{\psi}(\vec{r})\,, \qquad (3.82)$$

gde vektorska funkcija $\vec{\psi}(\vec{r}) = \left|\vec{\psi}(\vec{r})\right| \vec{\tau}_\gamma$ ($\vec{\tau}_\gamma$ je jedinični vektor tangente konturne krive $\vec{r}_\gamma$) je takva funkcija da je vektorska funkcija $\vec{r} \mapsto f(\vec{r})\,\vec{\tau}_\gamma$ funkcija njenog prostornog izvoda duž konturne krive $\vec{r}_\gamma$:

$$f(\vec{r})\,\vec{\tau}_\gamma = (grad\left|\vec{\psi}(\vec{r})\right| \cdot \vec{\tau}_\gamma)\vec{\tau}_\gamma = (\vec{\tau}_\gamma \cdot grad\,)\,\vec{\psi}(\vec{r})\,.$$

Dakle, na osnovu prethodne analize moguće je, ekvivalentne funkcionalne relacije (3.80) i (3.81), u graničnom slučaju kada $\varepsilon \to 0^+$, sažeti u jednu funkcionalnu relaciju

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \sum_{\vec{r}_A \in \vec{r}_\gamma / \bigcup\limits_{\vec{r}_A \in vs\,\vec{r}_\gamma} int.\,\vec{r}_s(\vec{r}_A,\varepsilon)} f(\vec{r}_A)\, d_{\vec{r}_A}\vec{r} + \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left\{ \begin{array}{l} \sum\limits_{\vec{r}_A \in vs\,\vec{r}_\gamma} \int\limits_{\vec{r}_\pi(\vec{r}_A,\varepsilon)}^{\widehat{PQ}} f(\vec{r})\, d\vec{r} \\ \sum\limits_{\vec{r}_A \in vs\,\vec{r}_\gamma} \int\limits_{\vec{r}_\zeta(\vec{r}_A,\varepsilon)}^{\widehat{QP}} f(\vec{r})\, d\vec{r} \end{array} \right. =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \sum_{\vec{r}_A \in \vec{r}_p / \bigcup\limits_{\vec{r}_A \in vs\,\vec{r}_p} int.\,\vec{r}_s(\vec{r}_A,\varepsilon)} d_{\vec{r}_A}\sigma \times \vec{\varphi}(\vec{r}_A) + \left\{ \begin{array}{l} \sum\limits_{\vec{r}_A \in vs\,(\vec{r}_p/\vec{r}_\gamma)} \overrightarrow{\underset{\vec{r}=\vec{r}_A}{R^2 es}} f(\vec{r}) \\ \sum\limits_{\vec{r}_A \in vs\,\vec{r}_p} \overrightarrow{\underset{\vec{r}=\vec{r}_A}{R^2 es}} f(\vec{r}) \end{array} \right. , \tag{3.83}$$

odnosno

$$vt \oint\limits_{\vec{r}_\gamma} f(\vec{r})\, d\vec{r} - vp \iint\limits_{\vec{r}_p} d\vec{\sigma} \times \vec{\varphi}(\vec{r}) = \left\{ \begin{array}{l} \sum\limits_{\vec{r}_A \in vs\,(\vec{r}_p/\vec{r}_\gamma)} \overrightarrow{\underset{\vec{r}=\vec{r}_A}{R^2 es}} f(\vec{r}) \\ \sum\limits_{\vec{r}_A \in vs\,\vec{r}_p} \overrightarrow{\underset{\vec{r}=\vec{r}_A}{R^2 es}} f(\vec{r}) \end{array} \right. . \tag{3.84}$$

Budući da je

$$vt \iint\limits_{\vec{r}_p} \vec{\varphi}(\vec{r})\, d\sigma = vp \iint\limits_{\vec{r}_p} d\vec{\sigma} \times \vec{\varphi}(\vec{r}) + \left\{ \begin{array}{l} \sum\limits_{\vec{r}_A \in vs\,(\vec{r}_p/\vec{r}_\gamma)} \overrightarrow{\underset{\vec{r}=\vec{r}_A}{R^2 es}} f(\vec{r}) \\ \sum\limits_{\vec{r}_A \in vs\,\vec{r}_p} \overrightarrow{\underset{\vec{r}=\vec{r}_A}{R^2 es}} f(\vec{r}) \end{array} \right. , \tag{3.85}$$

gde $vs \iint\limits_{\vec{r}_p} d\vec{\sigma} \times \vec{\varphi}(\vec{r}) = \left\{ \begin{array}{l} \sum\limits_{\vec{r}_A \in vs\,(\vec{r}_p/\vec{r}_\gamma)} \overrightarrow{\underset{\vec{r}=\vec{r}_A}{R^2 es}} f(\vec{r}) \\ \sum\limits_{\vec{r}_A \in vs\,\vec{r}_p} \overrightarrow{\underset{\vec{r}=\vec{r}_A}{R^2 es}} f(\vec{r}) \end{array} \right.$, to konačno sledi da

$$vt \oint\limits_{\vec{r}_\gamma} f(\vec{r})\, d\vec{r} = vt \iint\limits_{\vec{r}_p} d\vec{\sigma} \times \vec{\varphi}(\vec{r}) . \tag{3.86}$$

Ako se i proizvoljna oblast $\vec{r}_g$ tro-dimenzionalnog real*i*realnog vektorskog prostora $\vec{r}$, ograničena zatvorenom konturnom površi $\vec{r}_\delta$, koja je u singularnoj oblasti proizvoljne skalarne funkcije $f(\vec{r})$, podeli na skup regularnih $vp\,\vec{r}_g$ i skup singularnih $vs\,\vec{r}_g$ tačaka i uz to se svaka singularna tačka dodatno izoluje po volji malom, izolovanom u odnosu na druge, ε-okolinom (sfernom oblašću $\vec{r}_s(\vec{r}_A,\varepsilon)$), takvom da u toj okolini, osim te singularne tačke, nema drugih singularnih tačaka funkcije $f(\vec{r})$, onda se i u tom slučaju može formirati apsolutna integralna suma funkcije $\vec{\varphi}(\vec{r})$, kao funkcije prostornog izvoda funkcije $f(\vec{r})$ na skupu regularnih tačaka $\vec{r}_g / \bigcup\limits_{\vec{r}_A \in vs\,\vec{r}_g} int.\,\vec{r}_s(\vec{r}_A,\varepsilon)$ singularne oblasti $\vec{r}_g$:

$$\sum_{\vec{r}_A \in \vec{r}_g / \bigcup\limits_{\vec{r}_A \in vs\,\vec{r}_g} int.\,\vec{r}_s(\vec{r}_A,\varepsilon)} \vec{\varphi}(\vec{r}_A)\, d_{\vec{r}_A} v, \tag{3.87}$$

kao i suma rezidualnih vrednosti funkcije $\vec{\varphi}(\vec{r})$ u singularnim tačkama singularne oblasti $\vec{r}_g$:

$$\sum_{\vec{r}_A \in vs\,\vec{r}_g} \vec{\varphi}(\vec{r}_A)\, d_{\vec{r}_A} v = \sum_{\vec{r}_A \in vs\,\vec{r}_g} \overrightarrow{\underset{\vec{r}=\vec{r}_A}{R^3 es}} f(\vec{r}) = \sum_{\vec{r}_A \in vs\,\vec{r}_g} \lim_{\varepsilon\to 0^+} \oiint\limits_{\vec{r}_\sigma(\vec{r}_A,\varepsilon)} f(\vec{r})\, d\vec{\sigma}. \tag{3.88}$$

Teorema 4 *Ako za svaku ravnomernu podelu $D_n\vec{r}_g$ oblasti $\vec{r}_g$, koja je ograničena zatvorenom konturnom površi $\vec{r}_\delta$ u tro-dimenzionalnom realirealnom vektorskom prostoru $\vec{r}$, kao i sve elementarne oblasti $\triangle_{j_1,\ldots,j_n}\vec{r}_g$, postoje ograničeni nizovi apsolutnih integralnih suma skalarne funkcije $\vec{r}\mapsto f(\vec{r})$:*

$$\sum_{\vec{r}_A\in\triangle_{j_1,\ldots,j_n}\vec{r}_\delta} f(\vec{r}_A)\,d_{\vec{r}_A}\vec{\sigma} = \vec{\varphi}_n(\triangle^\star_{j_1,\ldots,j_n}\vec{r}_g)\,\triangle_{j_1,\ldots,j_n}v, \tag{3.89}$$

takvi da $\lim\limits_{n\to+\infty}\vec{\varphi}_n(\vec{r}_{\tilde{A}}) = \vec{\varphi}(\vec{r}_{\tilde{A}})$, za svako $\vec{r}_{\tilde{A}}\in\cup_{j_1=1\ldots j_n=1}^{k_1\ldots k_n}$ int. $\triangle_{j_1,\ldots,j_n}v$, a uz to je i funkcija $\vec{\varphi}(\vec{r})$ prostornog izvoda funkcije $f(\vec{r})$ apsolutno (totalno) integrabilna, u smislu Definicije 1, tada je

$$\sum_{\vec{r}_A\in\vec{r}_\delta} f(\vec{r}_A)\,d_{\vec{r}_A}\vec{\sigma} = \sum_{\vec{r}_A\in\vec{r}_g}\vec{\varphi}(\vec{r}_A)\,d_{\vec{r}_A}v.\blacktriangledown \tag{3.90}$$

Dokaz. Iz uslova (3.89) teoreme sledi da je za bilo koju ravnomernu podelu $D_n\vec{r}_g$ oblasti $\vec{r}_g$ i bilo koji nivo podele

$$\sum_{j_1=1\ldots j_n=1}^{k_1\ldots k_n}\sum_{\vec{r}_A\in\triangle_{j_1,\ldots,j_n}\vec{r}_\delta} f(\vec{r}_A)\,d_{\vec{r}_A}\vec{\sigma} = \sum_{j_1=1\ldots j_n=1}^{k_1\ldots k_n}\vec{\varphi}_n(\triangle^\star_{j_1,\ldots,j_n}\vec{r}_g)\,\triangle_{j_1,\ldots,j_n}v.$$

Na osnovu uslova teoreme granična vrednost sume $\sum_{j_1=1\ldots j_n=1}^{k_1\ldots k_n}\vec{\varphi}_n(\triangle^\star_{j_1,\ldots,j_n}\vec{r}_g)\,\triangle_{j_1,\ldots,j_n}v$, kada broj podela n, oblasti $\vec{r}_g$, teži beskonačnosti, svodi se na apsolutnu integralnu sumu funkcije $\vec{\varphi}(\vec{r})$, kao funkcije prostornog izvoda skalarne funkcije $f(\vec{r})$:

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{j_1=1\ldots j_n=1}^{k_1\ldots k_n}\vec{\varphi}_n(\triangle^\star_{j_1,\ldots,j_n}\vec{r}_g)\,\triangle_{j_1,\ldots,j_n}v = \sum_{\vec{r}_A\in\vec{r}_g}\vec{\varphi}(\vec{r}_A)\,d_{\vec{r}_A}v.$$

Sa druge strane

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{j_1=1\ldots j_n=1}^{k_1\ldots k_n}\sum_{\vec{r}_A\in\triangle_{j_1,\ldots,j_n}\vec{r}_\delta} f(\vec{r}_A)\,d_{\vec{r}_A}\vec{\sigma} = \sum_{\vec{r}_A\in\vec{r}_\delta} f(\vec{r}_A)\,d_{\vec{r}_A}\vec{\sigma},$$

budući da se rezidualne vrednosti $f(\vec{r}_A)\,d_{\vec{r}_A}\vec{\sigma}$, na onim delovima elementarnih površi, koji razdvajaju dve elementarne oblasti, anuliraju pri sumiranju, jer su to suprotno orjentisane vektorske veličine identički jednakih intenziteta.

Konačno, na osnovu svih prethodno dobijenih funkcionalnih relacija, sledi da

$$\sum_{\vec{r}_A\in\vec{r}_\delta} f(\vec{r}_A)\,d_{\vec{r}_A}\vec{\sigma} = \sum_{\vec{r}_A\in\vec{r}_g}\vec{\varphi}(\vec{r}_A)\,d_{\vec{r}_A}v,$$

što je i trebalo dokazati. ∎

Ako na zatvorenoj konturnoj površi $\vec{r}_\delta$ nema singularnih tačaka funkcije $f(\vec{r})$, na osnovu rezultata prethodne teoreme sledi da

$$\sum_{\vec{r}_A\in\vec{r}_\delta} f(\vec{r}_A)\,d_{\vec{r}_A}\vec{\sigma} - \sum_{\vec{r}_A\in vs\,\vec{r}_g}\ \overset{\circlearrowleft}{\iint\limits_{\vec{r}_\sigma(\vec{r}_A,\varepsilon)}} f(\vec{r})\,d\vec{\sigma} = \sum_{\vec{r}_A\in\vec{r}_g/\bigcup\limits_{\vec{r}_A\in vs\,\vec{r}_g} int.\,\vec{r}_s(\vec{r}_A,\varepsilon)}\vec{\varphi}(\vec{r}_A)\,d_{\vec{r}_A}v. \tag{3.91}$$

Definicija 49 *Košijeva glavna vrednost nesvojstvenog integrala vektorske funkcije $\vec{\varphi}(\vec{r})$ u oblasti $\vec{r}_g$ tro-dimenzionalnog realirealnog vektorskog prostora $\vec{r}$ je po definiciji*

$$vp \iiint\limits_{\vec{r}_g} \vec{\varphi}(\vec{r})\, dv = \sum_{\vec{r}_A \in vp\, \vec{r}_g} \vec{\varphi}(\vec{r}_A)\, d_{\vec{r}_A} v. \blacktriangledown$$

Definicija 50 *Žordanova singularna vrednost nesvojstvenog integrala vektorske funkcije $\vec{\varphi}(\vec{r})$ u oblasti $\vec{r}_g$ tro-dimenzionalnog realirealnog vektorskog prostora $\vec{r}$ je po definiciji*

$$vs \iiint\limits_{\vec{r}_g} \vec{\varphi}(\vec{r})\, dv = \sum_{\vec{r}_A \in vs\, \vec{r}_g} \vec{\varphi}(\vec{r}_A)\, d_{\vec{r}_A} v. \blacktriangledown$$

Definicija 51 *Totalna vrednost nesvojstvenog integrala vektorske funkcije $\vec{\varphi}(\vec{r})$ u oblasti $\vec{r}_g$ tro-dimenzionalnog realirealnog vektorskog prostora $\vec{r}$ je po definiciji*

$$vt \iiint\limits_{\vec{r}_g} \vec{\varphi}(\vec{r})\, dv = \sum_{\vec{r}_A \in \vec{r}_g} \vec{\varphi}(\vec{r}_A)\, d_{\vec{r}_A} v,$$

odnosno

$$vt \iiint\limits_{\vec{r}_g} \vec{\varphi}(\vec{r})\, dv = vp \iiint\limits_{\vec{r}_g} \vec{\varphi}(\vec{r})\, dv + vs \iiint\limits_{\vec{r}_g} \vec{\varphi}(\vec{r})\, dv. \blacktriangledown$$

Funkcionalna relacija (3.91) svodi se, u graničnom slučaju kada $\varepsilon \to 0^+$, na sledeću funkcionalnu relaciju

$$\overset{\circlearrowleft}{\iint\limits_{\vec{r}_\delta}} f(\vec{r})\, d\vec{\sigma} - vp \iiint\limits_{\vec{r}_g} \vec{\varphi}(\vec{r})\, dv = \sum_{\vec{r}_A \in vs\, \vec{r}_g} \overrightarrow{\underset{\vec{r}=\vec{r}_A}{R^3 es}}\, f(\vec{r}), \tag{3.92}$$

odnosno, budući da je $vs \iiint\limits_{\vec{r}_g} \vec{\varphi}(\vec{r})\, dv = \sum\limits_{\vec{r}_A \in vs\, \vec{r}_g} \overrightarrow{\underset{\vec{r}=\vec{r}_A}{R^3 es}}\, f(\vec{r})$, na funkcionalnu relaciju:

$$\overset{\circlearrowleft}{\iint\limits_{\vec{r}_\delta}} f(\vec{r})\, d\vec{\sigma} = vt \iiint\limits_{\vec{r}_g} \vec{\varphi}(\vec{r})\, dv. \tag{3.93}$$

U slučaju da na zatvorenoj konturnoj površi $\vec{r}_\delta$, koja ograničava singularnu oblast $\vec{r}_g$, ima singularnih tačaka skalarne funkcije $f(\vec{r})$, svaka od njih se izoluje po volji malom, izolovanom u odnosu na druge, ε-okolinom (sfernom oblašću $\vec{r}_s(\vec{r}_A, \varepsilon)$), takvom da u toj okolini, osim te singularne tačke, nema drugih singularnih tačaka funkcije $f(\vec{r})$. Shodno tome

$$\sum_{\vec{r}_A \in \vec{r}_\delta / \bigcup\limits_{\vec{r}_A \in vs\, \vec{r}_\delta} int.\, \vec{r}_s(\vec{r}_A, \varepsilon)} f(\vec{r}_A)\, d_{\vec{r}_A} \vec{\sigma} + \sum_{\vec{r}_A \in vs\, \vec{r}_\delta} \overset{\frown}{\iint\limits_{\vec{r}_\sigma(\vec{r}_A,\varepsilon) \cap \vec{r}_g}} f(\vec{r})\, d\vec{\sigma} -$$

$$- \sum_{\vec{r}_A \in vs\, (\vec{r}_g / \vec{r}_\delta)} \overset{\circlearrowleft}{\iint\limits_{\vec{r}_\sigma(\vec{r}_A,\varepsilon)}} f(\vec{r})\, d\vec{\sigma} = \sum_{\vec{r}_A \in \vec{r}_g / \bigcup\limits_{\vec{r}_A \in vs\, \vec{r}_g} int.\, \vec{r}_s(\vec{r}_A, \varepsilon)} \vec{\varphi}(\vec{r}_A)\, d_{\vec{r}_A} v, \tag{3.94}$$

odnosno, ako se levoj strani od znaka jednakosti doda i oduzme $\sum\limits_{\vec{r}_A\in vs\,\vec{r}_\delta} \iint\limits_{\vec{r}_\sigma(\vec{r}_A,\varepsilon)/int.\,\vec{r}_g} f(\vec{r})\,d\vec{\sigma}$

$$\sum_{\vec{r}_A\in\vec{r}_\delta/\bigcup\limits_{\vec{r}_A\in vs\,\vec{r}_\delta} int.\,\vec{r}_s(\vec{r}_A,\varepsilon)} f(\vec{r}_A)\,d_{\vec{r}_A}\vec{\sigma} + \sum_{\vec{r}_A\in vs\,\vec{r}_\delta} \iint\limits_{\vec{r}_\sigma(\vec{r}_A,\varepsilon)/int.\,\vec{r}_g} f(\vec{r})\,d\vec{\sigma} -$$

$$-\sum_{\vec{r}_A\in vs\,\vec{r}_g} \oiint\limits_{\vec{r}_\sigma(\vec{r}_A,\varepsilon)} f(\vec{r})\,d\vec{\sigma} = \sum_{\vec{r}_A\in\vec{r}_g/\bigcup\limits_{\vec{r}_A\in vs\,\vec{r}_g} int.\,\vec{r}_s(\vec{r}_A,\varepsilon)} \vec{\varphi}(\vec{r}_A)\,d_{\vec{r}_A}v. \tag{3.95}$$

Ako je ostatak $\overrightarrow{\underset{\vec{r}=\vec{r}_A}{R^3 es}} f(\vec{r})$ funkcije $f(\vec{r})$, u nekoj od singularnih tačaka $\vec{r}_A \in \vec{r}_\delta$, različit od nule, tada u graničnom slučaju: $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \iint\limits_{\vec{r}_\sigma(\vec{r}_A,\varepsilon)\cap\vec{r}_g} f(\vec{r})\,d\vec{\sigma} \neq \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \iint\limits_{\vec{r}_\sigma(\vec{r}_A,\varepsilon)/int.\,\vec{r}_g} f(\vec{r})\,d\vec{\sigma}$, budući da je $\overrightarrow{\underset{\vec{r}=\vec{r}_A\in\vec{r}_\delta}{R^3 es}} f(\vec{r}) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} [\iint\limits_{\vec{r}_\sigma(\vec{r}_A,\varepsilon)\cap\vec{r}_g} f(\vec{r})\,d\vec{\sigma} + \iint\limits_{\vec{r}_\sigma(\vec{r}_A,\varepsilon)/int.\,\vec{r}_g} f(\vec{r})\,d\vec{\sigma}]$, drugim rečima vrednost integrala funkcije $f(\vec{r})$, na onim delovima $\vec{r}_\sigma(\vec{r}_A,\varepsilon)\cap\vec{r}_g$ i $\vec{r}_\sigma(\vec{r}_A,\varepsilon)/int.\,\vec{r}_g$ površi $\vec{r}_\sigma(\vec{r}_A,\varepsilon)$, koji su unutar i izvan singularne oblasti $\vec{r}_g$, respektivno, zavisi eksplicitno od puta integracije.

Sa druge strane, ako su integrali funkcije $f(\vec{r})$, na oba dela $\vec{r}_\sigma(\vec{r}_A,\varepsilon)\cap\vec{r}_g$ i $\vec{r}_\sigma(\vec{r}_A,\varepsilon)/int.\,\vec{r}_g$ sferne površi $\vec{r}_\sigma(\vec{r}_A,\varepsilon)$, za svaku singularnu tačku $\vec{r}_A\in\vec{r}_\delta$, jednakih vrednosti, tada je ostatak $\overrightarrow{\underset{\vec{r}=\vec{r}_A}{R^3 es}} f(\vec{r})$ funkcije $f(\vec{r})$, u svakoj od singularnih tačaka $\vec{r}_A\in\vec{r}_\delta$, jednak nuli, što znači da su rezidualne vrednosti $f(\vec{r}_{\vec{r}_A})\,d_{\vec{r}_A}\vec{\sigma}$ funkcije $f(\vec{r})$, u singularnim tačkama $\vec{r}_A\in\vec{r}_\delta$, jedinstveno definisane vrednosti:

$$f(\vec{r}_{\vec{r}_A})\,d_{\vec{r}_A}\vec{\sigma} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \iint\limits_{\vec{r}_\sigma(\vec{r}_A,\varepsilon)\cap\vec{r}_g} f(\vec{r})\,d\vec{\sigma} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \iint\limits_{\vec{r}_\sigma(\vec{r}_A,\varepsilon)/int.\,\vec{r}_g} f(\vec{r})\,d\vec{\sigma} =$$

$$= -\lim_{\varepsilon\to 0^+} \oint\limits_{\vec{r}_\sigma(\vec{r}_A,\varepsilon)\cap\vec{r}_\delta} d\vec{r}\times\vec{\psi}(\vec{r}) = \overrightarrow{\underset{\vec{r}=\vec{r}_A}{R^2 es}}\,\vec{\psi}(\vec{r}), \tag{3.96}$$

gde vektorska funkcija $\vec{\psi}(\vec{r})$, koja je u tangentnoj ravni sferne površi $\vec{r}_\sigma(\vec{r}_A,\varepsilon)$: $\vec{\psi}(\vec{r})\cdot\vec{\eta}_\sigma = 0$ ($\vec{\eta}_\sigma$ je jedinični vektor glavne normale sferne površi $\vec{r}_\sigma(\vec{r}_A,\varepsilon)$), je takva funkcija da je skalarna funkcija $f(\vec{r})$ funkcija njenog prostornog izvoda, budući da je u opštem slučaju

$$vt\oint\limits_{\vec{r}_\gamma} d\vec{r}\times\vec{\psi}(\vec{r}) = -vt\iint\limits_{\vec{r}_p} \{grad[\vec{\psi}(\vec{r})\cdot\vec{e}_1^{\star}]\cdot\vec{e}_1^{\star} + grad[\vec{\psi}(\vec{r})\cdot\vec{e}_2^{\star}]\cdot\vec{e}_2^{\star} +$$

$$+grad[\vec{\psi}(\vec{r})\cdot\vec{n}]\cdot\vec{n}\}d\vec{\sigma} + vt\iint\limits_{\vec{r}_p} d\vec{\sigma}\times\{grad[\vec{\psi}(\vec{r})\cdot\vec{e}_1^{\star}]\times\vec{e}_1^{\star} +$$

$$+grad[\vec{\psi}(\vec{r})\cdot\vec{e}_2^{\star}]\times\vec{e}_2^{\star} + grad[\vec{\psi}(\vec{r})\cdot\vec{n}]\times\vec{n}\} + vt\iint\limits_{\vec{r}_p}(\,d\vec{\sigma}\cdot grad)\vec{\psi}(\vec{r}). \tag{3.97}$$

Dakle, na osnovu prethodne analize moguće je, ekvivalentne funkcionalne relacije (3.94) i (3.95), u graničnom slučaju kada $\varepsilon \to 0^+$, sažeti u jednu funkcionalnu relaciju

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \sum_{\vec{r}_A \in \vec{r}_\delta / \underset{\vec{r}_A \in vs\,\vec{r}_\delta}{\cup} int.\,\vec{r}_s(\vec{r}_A,\varepsilon)} f(\vec{r}_A)\, d_{\vec{r}_A}\vec{\sigma} + \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left\{ \begin{array}{l} \sum\limits_{\vec{r}_A \in vs\vec{r}_\delta \vec{r}_\sigma(\vec{r}_A,\varepsilon)\cap\vec{r}_g} \overset{\curvearrowright}{\iint} f(\vec{r})\, d\vec{\sigma} \\ \sum\limits_{\vec{r}_A \in v\,\vec{r}_\delta \vec{r}_\sigma(\vec{r}_A,\varepsilon)/int.\,\vec{r}_g} \overset{\curvearrowleft}{\iint} f(\vec{r})\, d\vec{\sigma} \end{array} \right. =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \sum_{\vec{r}_A \in \vec{r}_g / \underset{\vec{r}_A \in vs\,\vec{r}_g}{\cup} int.\,\vec{r}_s(\vec{r}_A,\varepsilon)} \vec{\varphi}(\vec{r}_A)\, d_{\vec{r}_A} v + \left\{ \begin{array}{l} \sum\limits_{\vec{r}_A \in vs\,(\vec{r}_g/\vec{r}_\delta)} \overrightarrow{R^3 es}_{\vec{r}=\vec{r}_A} f(\vec{r}) \\ \sum\limits_{\vec{r}_A \in vs\,\vec{r}_g} \overrightarrow{R^3 es}_{\vec{r}=\vec{r}_A} f(\vec{r}) \end{array} \right. , \tag{3.98}$$

odnosno

$$vt \overset{\circlearrowleft}{\iint_{\vec{r}_\delta}} f(\vec{r})\, d\vec{\sigma} - vp \iiint_{\vec{r}_g} \vec{\varphi}(\vec{r})\, dv = \left\{ \begin{array}{l} \sum\limits_{\vec{r}_A \in vs\,(\vec{r}_g/\vec{r}_\delta)} \overrightarrow{R^3 es}_{\vec{r}=\vec{r}_A} f(\vec{r}) \\ \sum\limits_{\vec{r}_A \in vs\,\vec{r}_g} \overrightarrow{R^3 es}_{\vec{r}=\vec{r}_A} f(\vec{r}) \end{array} \right. . \tag{3.99}$$

Budući da je

$$vt \iiint_{\vec{r}_g} \vec{\varphi}(\vec{r})\, dv = vp \iiint_{\vec{r}_g} \vec{\varphi}(\vec{r})\, dv + \left\{ \begin{array}{l} \sum\limits_{\vec{r}_A \in vs\,(\vec{r}_g/\vec{r}_\delta)} \overrightarrow{R^3 es}_{\vec{r}=\vec{r}_A} f(\vec{r}) \\ \sum\limits_{\vec{r}_A \in vs\,\vec{r}_g} \overrightarrow{R^3 es}_{\vec{r}=\vec{r}_A} f(\vec{r}) \end{array} \right. , \tag{3.100}$$

gde $vs \iiint\limits_{\vec{r}_g} \vec{\varphi}(\vec{r})\, dv = \left\{ \begin{array}{l} \sum\limits_{\vec{r}_A \in vs\,(\vec{r}_g/\vec{r}_\delta)} \overrightarrow{R^3 es}_{\vec{r}=\vec{r}_A} f(\vec{r}) \\ \sum\limits_{\vec{r}_A \in vs\,\vec{r}_g} \overrightarrow{R^3 es}_{\vec{r}=\vec{r}_A} f(\vec{r}) \end{array} \right.$, to konačno sledi da

$$vt \overset{\circlearrowleft}{\iint_{\vec{r}_\delta}} f(\vec{r})\, d\vec{\sigma} = vt \iiint_{\vec{r}_g} \vec{\varphi}(\vec{r})\, dv. \tag{3.101}$$

Kako su fundamentalne integralne relacije (3.71), (3.86) i (3.101), za proizvoljnu skalarnu funkciju $f(\vec{r})$, izvedene postupno i na istovetan način, to se može konstatovati da je njihov postupak izvođenja algoritamske forme, drugim rečima da se istovetan postupak izvođenja može primeniti i za dobijanje fundamentalnih integralnih relacija za proizvoljnu vektorsku funkcije $\vec{F}(\vec{r})$ tro-dimenzionalnog real$\imath$realnog vektorskog prostora $\vec{r}$. Sa druge strane, ako se po analogiji sa teorijom polja tro-dimenzionalnog realnog vektorskog prostora $\vec{r}$, uvede u analizu i vektorski operator prostornog diferenciranja $\vec{\nabla}$ u tro-dimenzionalnom real$\imath$realnom vektorskom prostoru $\vec{r}$ (Mihailović i Tošić, 1983; Stipanić i Trifunović, 1988):

$$\vec{\nabla} = \sqrt{2}\left(\frac{\partial}{\partial s^*}\vec{e}_1^{\,\star} + \frac{\partial}{\partial s}\vec{e}_2^{\,\star}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\vec{n}, \tag{3.102}$$

tada se funkcije prostornog izvoda: $\vec{\varphi}(\vec{r})$, $\Phi(\vec{r})$ i $\vec{\Phi}(\vec{r})$, proizvoljne skalarne funkcije $f(\vec{r})$, odnosno vektorske funkcije $\vec{F}(\vec{r})$, respektivno, mogu analitički predstaviti i preko operatora prostornog diferenciranja $\vec{\nabla}$: $\vec{\nabla} f(\vec{r})$, $\vec{\nabla}\cdot\vec{F}(\vec{r})$ i $\vec{\nabla}\times\vec{F}(\vec{r})$, respektivno. Shodno tome, imajući u vidu činjenicu da je $d\vec{\sigma} = d\vec{\varrho}\times dz\vec{n} + \frac{1}{2}ds^* ds\vec{n}$ i uz to $dv = d\vec{\sigma}\cdot d\vec{r} = d\vec{\sigma}\cdot(d\vec{\varrho} + dz\vec{n})$, moguće je fundamentalnu integralnu relaciju (3.101), koja je očigledno vektorska integralna relacija, u prvom koraku razložiti na dve vektorske integralne relacije:

$$vt \oint_{\vec{\varrho}_\gamma} d\vec{\varrho} \times [vt \int_{i\varkappa_1(\vec{\varrho})}^{i\varkappa_2(\vec{\varrho})} f(\vec{r})\, dz]\, \vec{n} = \frac{\sqrt{2}}{2} vt \iiint_{\vec{r}_g} [\frac{\partial}{\partial s^*} f(\vec{r})\, \vec{e}_1^{\,\star} + \frac{\partial}{\partial s} f(\vec{r})\, \vec{e}_2^{\,\star}] ds^* ds\, dz \text{ i}$$

$$vt \oint\!\!\oint_{\vec{r}_\delta} f(\vec{r})\, ds^* ds\, \vec{n} = vt \iiint_{\vec{r}_g} [\frac{\partial}{\partial z} f(\vec{r})] ds^* ds\, dz\, \vec{n}, \tag{3.103}$$

gde $\varkappa_1(\vec{\varrho})$ i $\varkappa_2(\vec{\varrho})$ su skalarne funkcije dve površi, na koje je podeljena zatvorena konturna površ $\vec{r}_\delta$, tako da je projekcija ovih površi na real$\imath$realnu ravan $\vec{\varrho}$ oblast $\vec{\varrho}_\Omega$, koju ograničava zatvorena konturna kriva $\vec{\varrho}_\gamma$, a potom i na tri skalarne integralne relacije:

$$vt \oint_{\vec{\varrho}_\gamma} [vt \int_{i\varkappa_1(\vec{\varrho})}^{i\varkappa_2(\vec{\varrho})} f(\vec{r})\, dz] ds = vt \iiint_{\vec{r}_g} [\frac{\partial}{\partial s^*} f(\vec{r})] ds^* ds\, dz,$$

$$vt \oint_{\vec{\varrho}_\gamma} [vt \int_{i\varkappa_1(\vec{\varrho})}^{i\varkappa_2(\vec{\varrho})} f(\vec{r})\, dz] ds^* = vt \iiint_{\vec{r}_g} [-\frac{\partial}{\partial s} f(\vec{r})] ds^* ds\, dz \text{ i}$$

$$vt \oint\!\!\oint_{\vec{r}_\delta} f(\vec{r})\, ds^* ds = vt \iiint_{\vec{r}_g} [\frac{\partial}{\partial (i\varkappa)} f(\vec{r})] ds^* ds\, dz, \tag{3.104}$$

odnosno

$$vt \oint\!\!\oint_{\vec{r}_\delta} f(\vec{r})\, ds\, dz = vt \iiint_{\vec{r}_g} [\frac{\partial}{\partial s^*} f(\vec{r})] ds^* ds\, dz,$$

$$vt \oint\!\!\oint_{\vec{r}_\delta} f(\vec{r})\, ds^* dz = vt \iiint_{\vec{r}_g} [-\frac{\partial}{\partial s} f(\vec{r})] ds^* ds\, dz \text{ i}$$

$$vt \oint\!\!\oint_{\vec{r}_\delta} f(\vec{r})\, ds^* ds = vt \iiint_{\vec{r}_g} [\frac{\partial}{\partial z} f(\vec{r})] ds^* ds\, dz. \tag{3.105}$$

Jasno, ostatak (rezidijum) $\overrightarrow{\underset{\vec{r}=\vec{r}_A}{R^3 es}}\, f(\vec{r})$ funkcije $f(\vec{r})$, u singularnoj tački $\vec{r}_A$ singularne oblasti $\vec{r}_g$, takođe se razlaže na skalarne komponente

$$\overrightarrow{\underset{\vec{r}=\vec{r}_A}{R^3 es}}\, f(\vec{r}) = \underset{\vec{r}=\vec{r}_A}{R^3 es}\, f(\vec{r})\, \vec{e}_1^{\,\star} + \underset{\vec{r}=\vec{r}_A}{R^3 es^\star}\, f(\vec{r})\, \vec{e}_2^{\,\star} + \underset{\vec{r}=\vec{r}_A}{R^3 es^\uparrow}\, f(\vec{r})\, \vec{n}, \tag{3.106}$$

pri čemu je

$$\underset{\vec{r}=\vec{r}_A}{R^3 es}\, f(\vec{r}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \oint\!\!\oint_{\vec{r}_\sigma(\vec{r}_A, \varepsilon)} f(\vec{r})\, ds\, dz,$$

$$\underset{\vec{r}=\vec{r}_A}{R^3 es^\star} f(\vec{r}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \overset{\circlearrowleft}{\iint\limits_{\vec{r}_\sigma(\vec{r}_A,\varepsilon)}} f(\vec{r})\, ds^* dz \text{ i}$$

$$\underset{\vec{r}=\vec{r}_A}{R^3 es^\uparrow} f(\vec{r}) = \frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \overset{\circlearrowleft}{\iint\limits_{\vec{r}_\sigma(\vec{r}_A,\varepsilon)}} f(\vec{r})\, ds^* ds, \tag{3.107}$$

tako da je

$$vs \iiint\limits_{\vec{r}_g} [\vec{\nabla} f(\vec{r})] dv = \begin{cases} \sum\limits_{\vec{r}_A \in vs\,(\vec{r}_g/\vec{r}_\delta)} [\underset{\vec{r}=\vec{r}_A}{R^3 es} f(\vec{r})\, \vec{e}_1^{\,\star} + \underset{\vec{r}=\vec{r}_A}{R^3 es^\star} f(\vec{r})\, \vec{e}_2^{\,\star} + \underset{\vec{r}=\vec{r}_A}{R^3 es^\uparrow} f(\vec{r})\, \vec{n}] \\ \sum\limits_{\vec{r}_A \in vs\,\vec{r}_g} [\underset{\vec{r}=\vec{r}_A}{R^3 es} f(\vec{r})\, \vec{e}_1^{\,\star} + \underset{\vec{r}=\vec{r}_A}{R^3 es^\star} f(\vec{r})\, \vec{e}_2^{\,\star} + \underset{\vec{r}=\vec{r}_A}{R^3 es^\uparrow} f(\vec{r})\, \vec{n}] \end{cases}.$$

Za proizvoljnu vektorsku kompleksnu funkciju $\vec{F}(\vec{r}) = P(\vec{r})\, \vec{e}_1^{\,\star} + Q(\vec{r})\, \vec{e}_2^{\,\star} + R(\vec{r})\, \vec{n}$ i njenu singularnu oblast $\vec{r}_g$, ograničenu zatvorenom konturnom površi $\vec{r}_\delta$ u tro-dimenzionalnom real$\imath$realnom vektorskom prostoru $\vec{r}$, fundamentalne integralne relacije se dobijaju tako što se prethodno dobijeni rezultati (3.86) i (3.105) primene na svaku skalarnu komponentu $P(\vec{r})$, $Q(\vec{r})$ i $R(\vec{r})$ funkcije $\vec{F}(\vec{r})$:

$$vt \overset{\circlearrowleft}{\int\limits_{\vec{r}_\gamma}} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = vt \overset{\circlearrowleft}{\int\limits_{\vec{r}_\gamma}} [P(\vec{r})\, \vec{e}_1^{\,\star} + Q(\vec{r})\, \vec{e}_2^{\,\star} + R(\vec{r})\, \vec{n}] \cdot d\vec{r} =$$

$$= vt \iint\limits_{\vec{r}_p} [d\vec{\sigma} \times \vec{\nabla} P(\vec{r})] \cdot \vec{e}_1^{\,\star} + [d\vec{\sigma} \times \vec{\nabla} Q(\vec{r})] \cdot \vec{e}_2^{\,\star} + [d\vec{\sigma} \times \vec{\nabla} R(\vec{r})] \cdot \vec{n} =$$

$$= vt \iint\limits_{\vec{r}_p} [\vec{\nabla} \times P(\vec{r})\, \vec{e}_1^{\,\star} + \vec{\nabla} \times Q(\vec{r})\, \vec{e}_2^{\,\star} + \vec{\nabla} \times R(\vec{r})\, \vec{n}] \cdot d\vec{\sigma},$$

$$vt \overset{\circlearrowleft}{\iint\limits_{\vec{r}_\delta}} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{\sigma} = vt \overset{\circlearrowleft}{\iint\limits_{\vec{r}_\delta}} \{\frac{\sqrt{2}}{2}[P(\vec{r})\, ds\, dz - Q(\vec{r})\, ds^* dz] + \frac{1}{2} R(\vec{r})\, ds^* ds\} =$$

$$= vt \iiint\limits_{\vec{r}_g} \{\frac{\sqrt{2}}{2}[\frac{\partial}{\partial s^*} P(\vec{r}) + \frac{\partial}{\partial s} Q(\vec{r})] + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z} R(\vec{r})\} ds^* ds\, dz \text{ i}$$

$$vt \overset{\circlearrowleft}{\iint\limits_{\vec{r}_\delta}} d\vec{\sigma} \times \vec{F}(\vec{r}) = vt \overset{\circlearrowleft}{\iint\limits_{\vec{r}_\delta}} \{-[\frac{\sqrt{2}}{2} R(\vec{r})\, ds^* dz + \frac{1}{2} Q(\vec{r})\, ds^* ds] \vec{e}_1^{\,\star} -$$

$$-[\frac{\sqrt{2}}{2} R(\vec{r})\, ds\, dz - \frac{1}{2} P(\vec{r})\, ds^* ds] \vec{e}_2^{\,\star} + \frac{\sqrt{2}}{2}[Q(\vec{r})\, ds\, dz + P(\vec{r})\, ds^* dz] \vec{n}\} =$$

$$= vt \iiint\limits_{\vec{r}_g} \{[\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\partial}{\partial s} R(\vec{r}) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z} Q(\vec{r})] \vec{e}_1^{\,\star} - [\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\partial}{\partial s^*} R(\vec{r}) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z} P(\vec{r})] \vec{e}_2^{\,\star} +$$

$$+ \frac{\sqrt{2}}{2}[\frac{\partial}{\partial s^*} Q(\vec{r}) - \frac{\partial}{\partial s} P(\vec{r})] \vec{n}\} ds^* ds\, dz, \tag{3.108}$$

odnosno

$$vt\oint_{\vec{r}_\gamma}\vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r}=vt\iint_{\vec{r}_p}[\vec{\nabla}\times\vec{F}(\vec{r})]\cdot d\vec{\sigma},$$

$$vt\oint\!\!\!\int_{\vec{r}_\delta}\vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{\sigma}=vt\iiint_{\vec{r}_g}[\vec{\nabla}\cdot\vec{F}(\vec{r})]dv \text{ i}$$

$$vt\oint\!\!\!\int_{\vec{r}_\delta}d\vec{\sigma}\times\vec{F}(\vec{r})=vt\iiint_{\vec{r}_g}[\vec{\nabla}\times\vec{F}(\vec{r})]dv. \tag{3.109}$$

Prve dve integralne relacije su generalizacija dobro poznatih rezultata *Stoksove* teoreme i teoreme *Gaus-Ostrogradskog*, odnosno fundamentalnih integralnih relacija vektorske analize u tro-dimenzionalnom realnom vektorskom prostoru (Mihailović i Tošić, 1983).

Ako je cilindrična oblast $\vec{r}_\Sigma$, ograničena konturnom površi $\vec{r}_\Xi$ sa osnovama dobijenim paralelnim pomeranjem proizvoljne oblasti $\vec{\varrho}_\Omega$, koja je ograničena zatvorenom konturom $\vec{\varrho}_\gamma$ u real*i*realnoj ravni $\vec{\varrho}$, u pravcu jediničnog vektora normale $\vec{n}$ za konstantne vrednosti: $-h$ i h $(\varkappa_1(\vec{\varrho})=-h$ i $\varkappa_2(\vec{\varrho})=h)$, singularna oblast funkcije $\vec{r}\to f(s^*,s)$, takva da na konturnoj površi $\vec{r}_\Xi$ nema singulariteta funkcije $f(s,s^*)$, na osnovu rezultata (3.93) i (3.104) sledi da

$$\oint_{\vec{\varrho}_\gamma}[\int_{-ih}^{ih}f(s^*,s)\,dz]ds=vt\iint_{\vec{\varrho}_\Omega}[\int_{-ih}^{ih}\frac{\partial}{\partial s^*}f(s^*,s)\,dz]ds^*ds,$$

$$\oint_{\vec{\varrho}_\gamma}[\int_{-ih}^{ih}f(s^*,s)\,dz]ds^*=vt\iint_{\vec{\varrho}_\Omega}[\int_{-ih}^{ih}-\frac{\partial}{\partial s}f(s^*,s)\,dz]ds^*ds \text{ i}$$

$$\oint\!\!\!\int_{\vec{r}_\Xi}f(s^*,s)\,ds^*ds=vt\iiint_{\vec{r}_\Sigma}[\frac{\partial}{\partial z}f(s^*,s)]ds^*ds\,dz, \tag{3.110}$$

odnosno

$$\oint_{\vec{\varrho}_\gamma}f(s^*,s)\,ds=vt\iint_{\vec{\varrho}_\Omega}[\frac{\partial}{\partial s^*}f(s^*,s)]ds^*ds \text{ i}$$

$$\oint_{\vec{\varrho}_\gamma}f(s^*,s)\,ds^*=vt\iint_{\vec{\varrho}_\Omega}[-\frac{\partial}{\partial s}f(s^*,s)]ds^*ds. \tag{3.111}$$

Budući da su parcijalni ostaci (rezidijumi) funkcije $\vec{\varrho}\to f(s^*,s)$ po definiciji

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\lim_{\varepsilon\to0^+}\oint_{\vec{\varrho}_\kappa(\vec{\varrho}_A,\varepsilon)}f(s^*,s)\,ds=\underset{\vec{\varrho}=\vec{\varrho}_A}{R^2es}\,f(s^*,s) \text{ i}$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}\lim_{\varepsilon\to0^+}\oint_{\vec{\varrho}_\kappa(\vec{\varrho}_A,\varepsilon)}f(s^*,s)\,ds^*=\underset{\vec{\varrho}=\vec{\varrho}_A}{R^2es^\star}\,f(s^*,s), \tag{3.112}$$

iz fundamentalne integralne relacije (3.111), shodno integralnoj relaciji (3.92), konačno se dobija da

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\{\oint_{\vec{\varrho}_\gamma} f(s^*,s)\,ds - vp\iint_{\vec{\varrho}_\Omega}[\frac{\partial}{\partial s^*}f(s^*,s)]ds^*ds\} = \sum_{\vec{\varrho}_A\in vs\,\vec{\varrho}_\Omega} \underset{\vec{\varrho}=\vec{\varrho}_A}{R^2es}\, f(s^*,s) \ \text{ i}$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}\{\oint_{\vec{\varrho}_\gamma} f(s^*,s)\,ds^* - vp\iint_{\vec{\varrho}_\Omega}[\frac{\partial}{\partial s}f(s^*,s)]ds^*ds\} = \sum_{\vec{\varrho}_A\in vs\,\vec{\varrho}_\Omega} \underset{\vec{\varrho}=\vec{\varrho}_A}{R^2es^\star}\, f(s^*,s)\ . \tag{3.113}$$

Definicija 52 *Ako i samo ako je u regularnoj oblasti $\vec{\varrho}_\Omega$ funkcije $f(s^*,s)$ zadovoljen jedan od uslova: $\frac{\partial}{\partial s^*}f(s^*,s)\equiv 0$ ili $\frac{\partial}{\partial s}f(s^*,s)\equiv 0$, funkcija $f(s^*,s)$ je regularno-analitička funkcija u oblasti $\vec{\varrho}_\Omega$.*▼

Definicija 53 *Ako i samo ako je u regularnoj podoblasti vp $\vec{\varrho}_\Omega$ singularne oblasti $\vec{\varrho}_\Omega$ funkcije $f(s^*,s)$ zadovoljen jedan od uslova: $\frac{\partial}{\partial s^*}f(s^*,s)\equiv 0$ ili $\frac{\partial}{\partial s}f(s^*,s)\equiv 0$, funkcija $f(s^*,s)$ je singularno-analitička funkcija u oblasti $\vec{\varrho}_\Omega$.*▼

Za proizvoljnu vektorsku kompleksnu funkciju $\vec{\varrho}\to\vec{F}(\vec{\varrho}) = P(\vec{\varrho})\,\vec{e}_1^{\,\star} + Q(\vec{\varrho})\,\vec{e}_2^{\,\star}$ i njenu singularnu oblast $\vec{\varrho}_\Omega$, ograničenu zatvorenom konturnom površi $\vec{\varrho}_\gamma$ u real*i*realnoj ravni $\vec{\varrho}$, primenom prethodno dobijenog rezultata (3.113), na svaku skalarnu komponentu $P(\vec{\varrho})$ i $Q(\vec{\varrho})$ funkcije $\vec{F}(\vec{\varrho})$, dobija se da

$$-\oint_{\vec{\varrho}_\gamma}[d\vec{\varrho}\times\vec{F}(\vec{\varrho})]\cdot\vec{n} - vp\iint_{\vec{\varrho}_\Omega}[\vec{\nabla}\cdot\vec{F}(\vec{\varrho})]\,(d\vec{\sigma}\cdot\vec{n}) = \sum_{\vec{\varrho}_A\in vs\,\vec{\varrho}_\Omega}\underset{\vec{\varrho}=\vec{\varrho}_A}{R^2es}\,\vec{F}(\vec{\varrho}) \ \text{ i}$$

$$\oint_{\vec{\varrho}_\gamma}\vec{F}(\vec{\varrho})\cdot d\vec{\varrho} - vp\iint_{\vec{\varrho}_\Omega}[\vec{\nabla}\times\vec{F}(\vec{\varrho})]\cdot d\vec{\sigma} = \sum_{\vec{\varrho}_A\in vs\,\vec{\varrho}_\Omega}\underset{\vec{\varrho}=\vec{\varrho}_A}{R^2es^\star}\,\vec{F}(\vec{\varrho})\,. \tag{3.114}$$

U ovom slučaju

$$\underset{\vec{\varrho}=\vec{\varrho}_A}{R^2es}\,\vec{F}(\vec{\varrho}) = \underset{\vec{\varrho}=\vec{\varrho}_A}{R^2es}\,P(\vec{\varrho}) + \underset{\vec{\varrho}=\vec{\varrho}_A}{R^2es^\star}\,Q(\vec{\varrho}) \ \text{ i}$$

$$\underset{\vec{\varrho}=\vec{\varrho}_A}{R^2es^\star}\,\vec{F}(\vec{\varrho}) = \underset{\vec{\varrho}=\vec{\varrho}_A}{R^2es}\,Q(\vec{\varrho}) - \underset{\vec{\varrho}=\vec{\varrho}_A}{R^2es^\star}\,P(\vec{\varrho})\,. \tag{3.115}$$

Definicija 54 *Ako i samo ako je u regularnoj oblasti $\vec{\varrho}_\Omega$ funkcije $\vec{F}(\vec{\varrho})$ zadovoljen jedan od sledeća dva uslova: $\vec{\nabla}\times\vec{F}(\vec{\varrho})\equiv 0$ ili $\vec{\nabla}\cdot\vec{F}(\vec{\varrho})\equiv 0$, funkcija $\vec{F}(\vec{\varrho})$ je regularno-analitička funkcija u oblasti $\vec{\varrho}_\Omega$, koja je regularno-potencijalna ili regularno-solenoidna oblast funkcije $\vec{F}(\vec{\varrho})$, respektivno.*▼

Definicija 55 *Ako i samo ako su u regularnoj oblasti $\vec{\varrho}_\Omega$ funkcije $\vec{F}(\vec{\varrho})$ zadovoljeni uslovi: $\vec{\nabla}\times\vec{F}(\vec{\varrho})\equiv 0$ i $\vec{\nabla}\cdot\vec{F}(\vec{\varrho})\equiv 0$, funkcija $\vec{F}(\vec{\varrho})$ je regularno-analitička funkcija u oblasti $\vec{\varrho}_\Omega$, koja je regularno-harmonijska oblast funkcije $\vec{F}(\vec{\varrho})$.*▼

Definicija 56 *Ako i samo ako je u regularnoj podoblasti vp $\vec{\varrho}_\Omega$ singularne oblasti $\vec{\varrho}_\Omega$ funkcije $\vec{F}(\vec{\varrho})$ zadovoljen jedan od sledeća dva uslova: $\vec{\nabla}\times\vec{F}(\vec{\varrho})\equiv 0$ ili $\vec{\nabla}\cdot\vec{F}(\vec{\varrho})\equiv 0$, funkcija $\vec{F}(\vec{\varrho})$ je singularno-analitička funkcija u oblasti $\vec{\varrho}_\Omega$, koja je singularno-potencijalna ili singularno-solenoidna oblast funkcije $\vec{F}(\vec{\varrho})$, respektivno.*▼

Definicija 57 *Ako i samo ako su u regularnoj podoblasti vp $\vec{\varrho}_\Omega$ singularne oblasti $\vec{\varrho}_\Omega$ funkcije $\vec{F}(\vec{\varrho})$ zadovoljeni uslovi: $\vec{\nabla}\times\vec{F}(\vec{\varrho})\equiv 0$ i $\vec{\nabla}\cdot\vec{F}(\vec{\varrho})\equiv 0$, funkcija $\vec{F}(\vec{\varrho})$ je singularno-analitička funkcija u oblasti $\vec{\varrho}_\Omega$, koja je singularno-harmonijska oblast funkcije $\vec{F}(\vec{\varrho})$.*▼

3.5 Fundamentalne leme u real$\imath$realnoj ravni

Neka je real$\imath$realna ravan $\vec{\varrho}$ podeljena sa konačno mnogo pravaca $\vec{\varrho}_k$:

$$\vec{\varrho}_k = \{\vec{\varrho}_A \mid \vec{\varrho}_A - \vec{\varrho}_N = |\vec{\varrho}_A - \vec{\varrho}_N|\, \vec{\varrho}_{0k}^{\,\vec{\varrho}_N},\, \varphi = \varphi_k\}, \tag{3.116}$$

gde $\vec{\varrho}_{0k}^{\,\vec{\varrho}_N}$ je jedinični vektor $\vec{\varrho}_{0k} = (\sqrt{2}/2)(e^{-i\varphi_k}\vec{e}_1^{\,\star} + e^{i\varphi_k}\vec{e}_2^{\,\star})$, translatorno premešten u tačku $\vec{\varrho}_N$, na K $(k = 1, 2, ..., K)$ različitih oblasti konvergencije $\vec{\varrho}_{\vee_k}$:

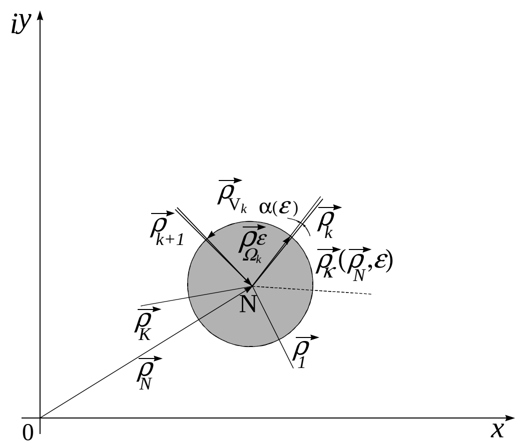
$$\vec{\varrho}_{\vee_k} = \{\vec{\varrho}_A \mid \vec{\varrho}_A - \vec{\varrho}_N = |\vec{\varrho}_A - \vec{\varrho}_N|\, \vec{\varrho}_0^{\,\vec{\varrho}_N},\, \varphi_{k+1} > \varphi > \varphi_k\, (\varphi_{K+1} = 2\pi + \varphi_1)\}, \tag{3.117}$$

funkcije $\vec{\varrho} \mapsto (\vec{\varrho} - \sqrt{2}s^*\vec{e}_1^{\,\star}) f\,(\vec{\varrho} + \vec{\varrho}_N)$:

$$\lim_{|\vec{\varrho}| \to 0^+} [(\vec{\varrho} - \sqrt{2}s^*\vec{e}_1^{\,\star}) f\,(\vec{\varrho} + \vec{\varrho}_N)] = \vec{A}_{0k},\ \vec{\varrho} \in \vec{\varrho}_{\vee_k}. \tag{3.118}$$

Shodno tome, ε-okolina tačke $\vec{\varrho}_N$, ograničena kružnom putanjom integracije $\vec{\varrho}_\kappa\,(\vec{\varrho}_N, \varepsilon)$ (sa centrom u tački $\vec{\varrho}_N$ i sa proizvoljno malim dijametrom ε), na kojoj je funkcija $\vec{\varrho} \mapsto f\,(\vec{\varrho})$ po pretpostavci integrabilna, odnosno kružna oblast $\vec{\varrho}_\Omega^{\,\varepsilon}$, podeljena je pravcima konvergencije na podoblasti $\vec{\varrho}_{\Omega_k}^{\,\varepsilon}$ (slika 3.7):

$$\vec{\varrho}_{\Omega_k}^{\,\varepsilon} = \{\vec{\varrho}_A \mid \vec{\varrho}_A - \vec{\varrho}_N \le \varepsilon\vec{\varrho}_0^{\,\vec{\varrho}_N},\, \varphi_{k+1} > \varphi > \varphi_k\}. \tag{3.119}$$



Slika 3.7: Oblasti konvergencije funkcije $(\vec{\varrho} - \sqrt{2}s^*\vec{e}_1^{\,\star}) f\,(\vec{\varrho} + \vec{\varrho}_N)$ u real$\imath$realnoj ravni $\vec{\varrho}$

U tom slučaju, pravci konvergencije $\vec{\varrho}_k$ su singularne oblasti integralne funkcije

$$\varphi^\star \mapsto i \lim_{|\vec{\varrho}| \to 0^+} \int_0^{\varphi^\star} (\vec{\varrho} - \sqrt{2}s^*\vec{e}_1^{\,\star}) f\,(\vec{\varrho} + \vec{\varrho}_N)\, d\varphi, \tag{3.120}$$

odnosno integralne funkcije $\varphi^\star \mapsto \lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} \int\limits_{\vec{\varrho}_\kappa(\vec{\varrho}_N, \varepsilon)_0^{\varphi^\star}}^{\frown} f\,(\vec{\varrho})\, d\vec{\varrho}$, gde $\vec{\varrho}_\kappa\,(\vec{\varrho}_N,\, \varepsilon)_0^{\varphi^\star}$ je lučni deo kružne putanje integracije $\vec{\varrho}_\kappa\,(\vec{\varrho}_N, \varepsilon)$, od tačke $\varphi = 0$ do tačke $\varphi = \varphi^\star$.

Sa druge strane, elementi skupa tačaka, u kojima lučni deo $\vec{\varrho}_\kappa\,(\vec{\varrho}_N,\,\varepsilon)_0^{\varphi^\star}$, kružne putanje integracije $\vec{\varrho}_\kappa\,(\vec{\varrho}_N,\varepsilon)$, preseca pojedine pravce konvergencije $\vec{\varrho}_k$, su izolovane singularne tačke integralne funkcije $\varphi^\star \mapsto \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \overset{\frown}{\int}\limits_{\vec{\varrho}_\kappa(\vec{\varrho}_N,\varepsilon)_0^{\varphi^\star}} f\,(\vec{\varrho})\,d\vec{\varrho}$, posmatrano iz perspektive kružne putanje integracije $\vec{\varrho}_\kappa\,(\vec{\varrho}_N,\varepsilon)$.

Ako se pretpostavi da je $0 \in (\varphi_K, 2\pi + \varphi_1)$, bez gubljenja opštosti, na osnovu rezultata (3.66), sledi da

$$i \lim_{|\vec{\varrho}|\to 0^+} \int_0^{\varphi^\star} (\vec{\varrho} - \sqrt{2}s^*\vec{e}_1^{\,\star}) f\,(\vec{\varrho} + \vec{\varrho}_N)\,d\varphi = vt \int_0^{\varphi^\star} i \lim_{|\vec{\varrho}|\to 0^+} [(\vec{\varrho} - \sqrt{2}s^*\vec{e}_1^{\,\star}) f\,(\vec{\varrho} + \vec{\varrho}_N)] d\varphi,$$

uzimajući u obzir činjenicu da za svako $\varphi^\star$, takvo da $\varphi^\star < \varphi_1$,

$$i \lim_{|\vec{\varrho}|\to 0^+} \int_0^{\varphi^\star} (\vec{\varrho} - \sqrt{2}s^*\vec{e}_1^{\,\star}) f\,(\vec{\varrho} + \vec{\varrho}_N)\,d\varphi = i\varphi^\star \vec{A}_{0K}, \tag{3.121}$$

odnosno

$$i \lim_{|\vec{\varrho}|\to 0^+} \int_0^{2\pi} (\vec{\varrho} - \sqrt{2}s^*\vec{e}_1^{\,\star}) f\,(\vec{\varrho} + \vec{\varrho}_N)\,d\varphi = \sum_{k=1}^{K} i\theta_k \vec{A}_{0k}, \tag{3.122}$$

gde $\theta_k = \varphi_{k+1} - \varphi_k$, budući da su rezidualne vrednosti funkcije prostornog izvoda integralne funkcije (3.120), duž lučnog dela $\vec{\varrho}_\kappa\,(\vec{\varrho}_N,\,\varepsilon)_0^{\varphi^\star}$ kružne putanje integracije $\vec{\varrho}_\kappa\,(\vec{\varrho}_N,\varepsilon)$, u svim singularim tačkama integralne funkcije (3.120), koje su očigledno prividne singularne tačke, jednake nuli.

Kako je

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \overset{\circlearrowleft}{\int}\limits_{\vec{\varrho}_\kappa(\vec{\varrho}_N,\varepsilon)} f\,(\vec{\varrho})\,d\vec{\varrho} = i \lim_{|\vec{\varrho}|\to 0^+} \int_0^{2\pi} (\vec{\varrho} - \sqrt{2}s^*\vec{e}_1^{\,\star}) f\,(\vec{\varrho} + \vec{\varrho}_N)\,d\varphi, \tag{3.123}$$

na osnovu definicione jednakosti (3.54) *Definicije 40*, konačno se dobija da

$$\underset{\vec{\varrho}=\vec{\varrho}_N}{\overrightarrow{R^2 es}}\, f\,(\vec{\varrho}) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \overset{\circlearrowleft}{\int}\limits_{\vec{\varrho}_\kappa(\vec{\varrho}_N,\varepsilon)} f\,(\vec{\varrho})\,d\vec{\varrho} = \sum_{k=1}^{K} i\theta_k \vec{A}_{0k}, \tag{3.124}$$

gde $\underset{\vec{\varrho}=\vec{\varrho}_N}{\overrightarrow{R^2 es}}\, f\,(\vec{\varrho}) = -\underset{\vec{\varrho}=\vec{\varrho}_N}{R^2 es^\star}\, f\,(\vec{\varrho})\,\vec{e}_1^{\,\star} + \underset{\vec{\varrho}=\vec{\varrho}_N}{R^2 es}\, f\,(\vec{\varrho})\,\vec{e}_2^{\,\star}$.

Sa druge strane, na osnovu integralne jednakosti

$$(\vec{e}_1^{\,\star} + \vec{e}_2^{\,\star}) \cdot \overset{\circlearrowleft}{\int}\limits_{\vec{\varrho}_\kappa(\vec{\varrho}_N,\varepsilon)} f\,(\vec{\varrho})\,d\vec{\varrho} = \overset{\circlearrowleft}{\int}\limits_{\vec{\varrho}_\kappa(\vec{\varrho}_O,1/\varepsilon)} \{(\vec{\varrho})^{-2} f[(\vec{\varrho})^{-1} + \vec{\varrho}_N]\} \cdot d\vec{\varrho}, \tag{3.125}$$

gde

$$(\vec{\varrho})^{-1} = \sqrt{2}[(s^*)^{-1}\,\vec{e}_1^{\,\star} + s^{-1}\vec{e}_2^{\,\star}] \text{ i } (\vec{\varrho})^{-2} = 2[(s^*)^{-2}\,\vec{e}_1^{\,\star} + s^{-2}\vec{e}_2^{\,\star}],$$

tačnije na osnovu integralne jednakosti

$$\int_0^{\varphi^\star} (\vec{\varrho}-\sqrt{2}s^*\vec{e}_1^{\,\star}) f\,(\vec{\varrho}+\vec{\varrho}_N)\,d\varphi = \int_0^{\varphi^\star} [(\vec{\varrho})^{-1}-\frac{2\sqrt{2}}{s^*}\vec{e}_1^{\,\star}] f[(\vec{\varrho})^{-1}+\vec{\varrho}_N] d\varphi \tag{3.126}$$

i rezultata (3.114), sledi da

$$\lim_{\varepsilon\to+\infty} \int\limits_{\vec{\varrho}_\kappa(\vec{\varrho}_N,\varepsilon)_0^{\varphi^\star}}^{\curvearrowleft} f\,(\vec{\varrho})\,d\vec{\varrho} = i \lim_{|\vec{\varrho}|\to 0^+} \int_0^{\varphi^\star} [(\vec{\varrho})^{-1}-\frac{2\sqrt{2}}{s^*}\vec{e}_1^{\,\star}] f[(\vec{\varrho})^{-1}+\vec{\varrho}_N] d\varphi \text{ i}$$

$$(\vec{e}_1^{\,\star}+\vec{e}_2^{\,\star})\cdot i \lim_{|\vec{\varrho}|\to+\infty} \int_0^{2\pi} [(\vec{\varrho})^{-1}-\frac{2\sqrt{2}}{s^*}\vec{e}_1^{\,\star}] f[(\vec{\varrho})^{-1}+\vec{\varrho}_N] d\varphi -$$

$$-vp \iint\limits_{\vec{\varrho}} \{\vec{\nabla}\times(\vec{\varrho})^{-2} f[(\vec{\varrho})^{-1}+\vec{\varrho}_N]\}\cdot d\vec{\sigma} = \sum_{\vec{\varrho}_A\in vs\,\vec{\varrho}} \underset{\vec{\varrho}=\vec{\varrho}_A}{R^2 es^\star} \{(\vec{\varrho})^{-2} f[(\vec{\varrho})^{-1}+\vec{\varrho}_N]\}. \tag{3.127}$$

Ako je real$\imath$realna ravan $\vec{\varrho}$ singularno-potencijalna oblast funkcije $\vec{\varrho}\mapsto(\vec{\varrho})^{-2} f[(\vec{\varrho})^{-1}+\vec{\varrho}_N]$ i ako je zadovoljen uslov (3.118), tačnije njemu ekvivalentan uslov

$$\lim_{|\vec{\varrho}|\to+\infty} \{[(\vec{\varrho})^{-1}-\frac{2\sqrt{2}}{s^*}\vec{e}_1^{\,\star}] f[(\vec{\varrho})^{-1}+\vec{\varrho}_N]\} = \vec{A}_{\infty k},\ \vec{\varrho}\in\vec{\varrho}_{\vee_k}, \tag{3.128}$$

gde $\vec{A}_{\infty k}=\vec{A}_{0k}$, tada

$$\sum_{\vec{\varrho}_A\in vs\,\vec{\varrho}} \underset{\vec{\varrho}=\vec{\varrho}_A}{R^2 es^\star} \{(\vec{\varrho})^{-2} f[(\vec{\varrho})^{-1}+\vec{\varrho}_N]\} = (\vec{e}_1^{\,\star}+\vec{e}_2^{\,\star})\cdot \sum_{k=1}^{K} i\theta_k\vec{A}_{\infty k}, \tag{3.129}$$

odnosno

$$\sum_{\vec{\varrho}_A\in vs\,\vec{\varrho}} \underset{\vec{\varrho}=\vec{\varrho}_A}{R^2 es^\star} \{(\vec{\varrho})^{-2} f[(\vec{\varrho})^{-1}+\vec{\varrho}_N]\} = (\vec{e}_1^{\,\star}+\vec{e}_2^{\,\star})\cdot \underset{\vec{\varrho}=\vec{\varrho}_N}{\overrightarrow{R^2 es}}\ f\,(\vec{\varrho})\,. \tag{3.130}$$

U inverznom slučaju, ako je zadovoljen uslov

$$\lim_{|\vec{\varrho}|\to 0^+} \{[(\vec{\varrho})^{-1}-\frac{2\sqrt{2}}{s^*}\vec{e}_1^{\,\star}] f[(\vec{\varrho})^{-1}+\vec{\varrho}_N]\} = \vec{A}_{0k},\ \vec{\varrho}\in\vec{\varrho}_{\vee_k},$$

odnosno njemu ekvivalentan uslov

$$\lim_{|\vec{\varrho}|\to+\infty} [(\vec{\varrho}-\sqrt{2}s^*\vec{e}_1^{\,\star}) f(\vec{\varrho}+\vec{\varrho}_N)] = \vec{A}_{\infty k},\ \vec{\varrho}\in\vec{\varrho}_{\vee_k}, \tag{3.131}$$

gde $\vec{A}_{\infty k}=\vec{A}_{0k}$, tada

$$\lim_{\varepsilon\to+\infty} \int\limits_{\vec{\varrho}_\kappa(\vec{\varrho}_N,\varepsilon)}^{\curvearrowleft} f\,(\vec{\varrho})\,d\vec{\varrho} = \sum_{k=1}^{K} i\theta_k\vec{A}_{\infty k} \text{ i}$$

$$vp \iint\limits_{\vec{\varrho}} d\vec{\sigma}\times\vec{\nabla} f\,(\vec{\varrho}) = \sum_{k=1}^{K} i\theta_k\vec{A}_{\infty k} - \sum_{\vec{\varrho}_A\in vs\,\vec{\varrho}} \underset{\vec{\varrho}=\vec{\varrho}_A}{\overrightarrow{R^2 es}}\ f\,(\vec{\varrho})\,, \tag{3.132}$$

odnosno

$$(\vec{e}_1^\star + \vec{e}_2^\star) \cdot \sum_{\vec{\varrho}_A \in vs\,\vec{\varrho}} \overrightarrow{\underset{\vec{\varrho}=\vec{\varrho}_A}{R^2es}}\, f(\vec{\varrho}) = \underset{\vec{\varrho}=\vec{\varrho}_O}{R^2es^\star} \{(\vec{\varrho})^{-2} f[(\vec{\varrho})^{-1} + \vec{\varrho}_N]\}, \tag{3.133}$$

pod uslovom da u svakoj tački skupa regularnih tačaka funkcije $f(\vec{\varrho})$ u real*i*realnoj ravni $\vec{\varrho}$ je $\frac{\partial}{\partial s^*} f(\vec{\varrho}) - \frac{\partial}{\partial s} f(\vec{\varrho}) = 0$, odnosno da je real*i*realna ravan $\vec{\varrho}$ singularno-potencijalna oblast funkcije $(\vec{e}_1^\star + \vec{e}_2^\star)\, f(\vec{\varrho})$.

Lema 1 *Neka pravci* $\vec{\varrho}_k = \{\vec{\varrho}_A \mid \vec{\varrho}_A - \vec{\varrho}_N = |\vec{\varrho}_A - \vec{\varrho}_N|\, \vec{\varrho}_{0k}^{\vec{\varrho}_N}\}\ (k = 1, ..., K)$ *dele realirealnu ravan* $\vec{\varrho}$ *na* K $(K = 2)$ *oblasti* $\vec{\varrho}_{\vee_k}$*:*

$$\vec{\varrho}_{\vee_k} = \{\vec{\varrho}_A \mid \vec{\varrho}_A - \vec{\varrho}_N = |\vec{\varrho}_A - \vec{\varrho}_N|\, \vec{\varrho}_0^{\vec{\varrho}_N},\ \varphi_{k+1} > \varphi > \varphi_k\ (\varphi_{K+1} = 2\pi + \varphi_1)\}$$

i neka je realirealna ravan $\vec{\varrho}$ *singularno-potencijalna oblast funkcije* $(\vec{e}_1^\star + \vec{e}_2^\star)\, f(\vec{\varrho})$*. U tom slučaju, ako je zadovoljen uslov*

$$\lim_{|\vec{\varrho}| \to +\infty} [(\vec{\varrho} - \sqrt{2} s^* \vec{e}_1^\star) f(\vec{\varrho} + \vec{\varrho}_N)] = \vec{A}_{\infty 1},\ \vec{\varrho} \in \vec{\varrho}_{\vee_1},$$

tada

$$\lim_{\varepsilon \to +\infty} \overset{\curvearrowleft}{\int\limits_{\vec{\varrho}_\kappa(\vec{\varrho}_N, \varepsilon)_2}} f(\vec{\varrho})\, d\vec{\varrho} = \sum_{\vec{\varrho}_A \in vs\,\vec{\varrho}} \overrightarrow{\underset{\vec{\varrho}=\vec{\varrho}_A}{R^2es}}\, f(\vec{\varrho}) - i\theta_1 \vec{A}_{\infty 1}, \tag{3.134}$$

gde $\vec{\varrho}_\kappa(\vec{\varrho}_N, \varepsilon)_2$ *je lučni deo kružne putanje integracije* $\vec{\varrho}_\kappa(\vec{\varrho}_N, \varepsilon)$ *u oblasti* $\vec{\varrho}_{\vee_2}$ *i* $\theta_1 = \varphi_2 - \varphi_1$.▼

Prethodna lema je eksplicitna posledica rezultata (3.132). Na osnovu rezultata (3.124) može se formulisati lema analogna *Lemi 1*

Lema 2 *Neka pravci* $\vec{\varrho}_k = \{\vec{\varrho}_A \mid \vec{\varrho}_A - \vec{\varrho}_N = |\vec{\varrho}_A - \vec{\varrho}_N|\, \vec{\varrho}_{0k}^{\vec{\varrho}_N}\}\ (k = 1, ..., K)$ *dele realirealnu ravan* $\vec{\varrho}$ *na* K $(K = 2)$ *oblasti* $\vec{\varrho}_{\vee_k}$*:*

$$\vec{\varrho}_{\vee_k} = \{\vec{\varrho}_A \mid \vec{\varrho}_A - \vec{\varrho}_N = |\vec{\varrho}_A - \vec{\varrho}_N|\, \vec{\varrho}_0^{\vec{\varrho}_N},\ \varphi_{(k+1)} > \varphi > \varphi_k\ (\varphi_{K+1} = 2\pi + \varphi_1)\}$$

i neka funkcija $f(\vec{\varrho})$ *zadovoljava uslov*

$$\lim_{|\vec{\varrho}| \to 0^+} [(\vec{\varrho} - \sqrt{2} s^* \vec{e}_1^\star) f(\vec{\varrho} + \vec{\varrho}_N)] = \vec{A}_{01},\ \vec{\varrho} \in \vec{\varrho}_{\vee_1}.$$

U tom slučaju

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \overset{\curvearrowleft}{\int\limits_{\vec{\varrho}_\kappa(\vec{\varrho}_N, \varepsilon)_2}} f(\vec{\varrho})\, d\vec{\varrho} = \overrightarrow{\underset{\vec{\varrho}=\vec{\varrho}_N}{R^2es}}\, f(\vec{\varrho}) - i\theta_1 \vec{A}_{01}, \tag{3.135}$$

gde $\vec{\varrho}_\kappa(\vec{\varrho}_N, \varepsilon)_2$ *je lučni deo kružne putanje integracije* $\vec{\varrho}_\kappa(\vec{\varrho}_N, \varepsilon)$ *u oblasti* $\vec{\varrho}_{\vee_2}$ *i* $\theta_1 = \varphi_2 - \varphi_1$.▼

Komentar 2 *Rezultati prethodnih lema su generalizacija rezultata pojedinih fundamentalnih lema Košijevog računa ostataka, u realirealnoj ravni* $\vec{\varrho}$*, poznatijih pod nazivom Žordanove fundamentalne leme (Mitrinović i Kečkić, 1978; Sarić, 1999). Izvedeni su generalno za slučaj kada se realirealna ravan* $\vec{\varrho}$ *može podeliti pravcima* $\vec{\varrho}_k$ *na više oblasti konvergencije funkcije* $(\vec{\varrho} - \sqrt{2} s^* \vec{e}_1^\star) f(\vec{\varrho} + \vec{\varrho}_N)$ *i ne važe u slučaju kada je jedna od oblasti, na koju je podeljena realirealna ravan* $\vec{\varrho}$ *pravcima* $\vec{\varrho}_k$*, oblast divergencije funkcije* $(\vec{\varrho} - \sqrt{2} s^* \vec{e}_1^\star) f(\vec{\varrho} + \vec{\varrho}_N)$.▼

3.6 Potencijal tačke u real$i$realnom vektorskom prostoru

U realnom dvo-dimenzionalnom vektorskom prostoru intenzitet infinitezimalne promene jediničnog vektora $\vec{\rho}_0$ vektora položaja $\vec{\rho}$ svodi se na infinitezimalnu promenu ugaone polarne ko-ordinate (Sarić, 2003):

$$|d\vec{\rho}_0| = (\vec{\rho}_0 \times d\vec{\rho}_0) \cdot \vec{n} = \frac{(\vec{\rho} \times d\vec{\rho}) \cdot \vec{n}}{|\vec{\rho}|^2} = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = d \arctan \frac{y}{x} = d\varphi.$$

Analogno tome, u dvo-dimenzionalnom real$i$realnom vektorskom prostoru $\vec{\varrho}$

$$(\vec{\varrho}_0 \times d\vec{\varrho}_0) \cdot \vec{n} = \frac{(\vec{\varrho} \times d\vec{\varrho}) \cdot \vec{n}}{|\vec{\varrho}|^2} = id\varphi. \tag{3.136}$$

Definicija 58 *Potencijal* $p_{\vec{\varrho}_A}^{\vec{\varrho}_\gamma}$ *tačke* $\vec{\varrho}_A$ *u odnosu na proizvoljnu zatvorenu konturnu krivu* $\vec{\varrho}_\gamma$ *u real$i$realnoj ravni* $\vec{\varrho}$ *je po definiciji*

$$p_{\vec{\varrho}_A}^{\vec{\varrho}_\gamma} = vt \oint_{\vec{\varrho}_\gamma} \frac{[(\vec{\varrho} - \vec{\varrho}_A) \times d\vec{\varrho}] \cdot \vec{n}}{|(\vec{\varrho} - \vec{\varrho}_A)|^2} . \blacktriangledown \tag{3.137}$$

Imajući u vidu činjenicu da je diferencijal $d\varphi$ totalni diferencijal

$$p_{\vec{\varrho}_A}^{\vec{\varrho}_\gamma} = i\, vt \oint_{\vec{\varrho}_\gamma} d\varphi = \left\{ \begin{array}{l} 2\pi i,\ \vec{\varrho}_A \in int.\, \vec{\varrho}_\Omega \\ 0,\ \vec{\varrho}_A \notin \vec{\varrho}_\Omega \end{array} \right. , \tag{3.138}$$

gde $int.\, \vec{\varrho}_\Omega$ je unutrašnjost oblasti $\vec{\varrho}_\Omega$ koju ograničava zatvorena konturna kriva $\vec{\varrho}_\gamma$.

U slučaju kada tačka $\vec{\varrho}_A$ pripada rubu $\vec{\varrho}_\gamma$ oblasti $\vec{\varrho}_\Omega$, potencijal $p_{\vec{\varrho}_A}^{\vec{\varrho}_\gamma}$ tačke $\vec{\varrho}_A$, u odnosu na zatvorenu konturnu krivu $\vec{\varrho}_\gamma$, po definiciji je suma integralnih vrednosti funkcije $(\vec{\varrho}_0 \times d\vec{\varrho}_0) \cdot \vec{n}$, odnosno funkcije $id\varphi$, na lučnom delu $\vec{\varrho}_{\widehat{PQ}}$ zatvorene konturne krive $\vec{\varrho}_\gamma$, od tačke $\vec{\varrho}_Q$ do tačke $\vec{\varrho}_P$ ($\vec{\varrho}_P$ i $\vec{\varrho}_Q$ su presečne tačke zatvorene konturne krive $\vec{\varrho}_\gamma$ i kružnice $\vec{\varrho}_\kappa(\vec{\varrho}_A, \varepsilon)$ sa centrom u tački $\vec{\varrho}_A$ i radijusa ε) i na lučnim delovima $int.\, \vec{\varrho}_\kappa(\vec{\varrho}_A, \varepsilon)$ i $ext.\, \vec{\varrho}_\kappa(\vec{\varrho}_A, \varepsilon)$ kružnice $\vec{\varrho}_\kappa(\vec{\varrho}_A, \varepsilon)$, koji su unutar i izvan oblasti $\vec{\varrho}_\Omega$, respektivno, od tačke $\vec{\varrho}_P$ do tačke $\vec{\varrho}_Q$, u graničnom slučaju kada ε teži nuli, odnosno kada se rubne tačke $\vec{\varrho}_P$ i $\vec{\varrho}_Q$ lučnog dela $\vec{\varrho}_{\widehat{PQ}}$ zatvorene konturne krive $\vec{\varrho}_\gamma$ svedu, duž konturne krive $\vec{\varrho}_\gamma$, na tačku $\vec{\varrho}_A$:

$$p_{\vec{\varrho}_A}^{\vec{\varrho}_\gamma} = i \lim_{\{\vec{\varrho}_P, \vec{\varrho}_Q\} \to \vec{\varrho}_A} \int_{\vec{\varrho}_\gamma}^{\widehat{PQ}} d\varphi + \left\{ \begin{array}{l} i \lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} \int\limits_{int.\, \vec{\varrho}_\kappa(\vec{\varrho}_A, \varepsilon)}^{\widehat{PQ}} d\varphi \\ i \lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} \int\limits_{ext.\, \vec{\varrho}_\kappa(\vec{\varrho}_A, \varepsilon)}^{\widehat{QP}} d\varphi \end{array} \right. = i\theta + \left\{ \begin{array}{c} -i\theta \\ i(2\pi - \theta) \end{array} \right. , \tag{3.139}$$

gde θ je vrednost ugla, koji čine tangente u tačkama $\vec{\varrho}_P$ i $\vec{\varrho}_Q$ konturne krive $\vec{\varrho}_\gamma$, u graničnom slučaju kada se rubne tačke $\vec{\varrho}_P$ i $\vec{\varrho}_Q$ lučnog dela $\vec{\varrho}_{\widehat{PQ}}$ zatvorene konturne krive $\vec{\varrho}_\gamma$ svedu, duž konturne krive $\vec{\varrho}_\gamma$, na tačku $\vec{\varrho}_A$, odnosno

$$p_{\vec{\varrho}_A}^{\vec{\varrho}_\gamma} = \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 2\pi i \end{array} \right. ,\ \vec{\varrho}_A \in \vec{\varrho}_\gamma. \tag{3.140}$$

Budući da je $\vec{\nabla}\cdot\frac{(\vec{\varrho}-\vec{\varrho}_A)}{|(\vec{\varrho}-\vec{\varrho}_A)|^2}=0$ (za svako $\vec{\varrho}\neq\vec{\varrho}_A$) i $\overset{\circlearrowleft}{\int\limits_{\vec{\varrho}_{\varkappa}(\vec{\varrho}_A,\varepsilon)}}\frac{[(\vec{\varrho}-\vec{\varrho}_A)\times d\vec{\varrho}]\cdot\vec{n}}{|(\vec{\varrho}-\vec{\varrho}_A)|^2}=2\pi i$, gde $\vec{\varrho}_{\varkappa}(\vec{\varrho}_A,\varepsilon)$ je kružnica sa centrom u singularnoj tački $\vec{\varrho}_A$ i radijusa ε, do rezultata (3.138) i (3.140) može se doći i na osnovu rezultata (3.114).

Definicija 59 *Potencijal $p_{\vec{\varrho}_A}^{\vec{\varrho}_P,\vec{\varrho}_Q}$ tačke $\vec{\varrho}_A$, proizvoljne konturne krive $\vec{\varrho}_\gamma$ u realirealnoj ravni $\vec{\varrho}$, u odnosu na rubne tačke proizvoljnog luka $\vec{\varrho}_{\widehat{PQ}}$ krive $\vec{\varrho}_\gamma$ je po definiciji*

$$\lim_{\{\vec{\varrho}_P,\vec{\varrho}_Q\}\to\vec{\varrho}_A}\int\limits_{\vec{\varrho}_{\widehat{PQ}}}\frac{[(\vec{\varrho}-\vec{\varrho}_A)\times d\vec{\varrho}]\cdot\vec{n}}{|(\vec{\varrho}-\vec{\varrho}_A)|^2}.\blacktriangledown \tag{3.141}$$

Na osnovu integralne relacije (3.139), sledi da

$$p_{\vec{\varrho}_A}^{\vec{\varrho}_P,\vec{\varrho}_Q}=\begin{cases} i\theta,\ \vec{\varrho}_A\in int.\,\vec{\varrho}_{\widehat{PQ}} \\ 0,\ \vec{\varrho}_A\notin\vec{\varrho}_{\widehat{PQ}}\end{cases}, \tag{3.142}$$

gde $int.\,\vec{\varrho}_{\widehat{PQ}}$ je unutrašnjost luka $\vec{\varrho}_{\widehat{PQ}}$ konturne krive $\vec{\varrho}_\gamma$ omeđena rubnim tačkama $\vec{\varrho}_P$ i $\vec{\varrho}_Q$, odnosno

$$p_{\vec{\varrho}_A}^{\vec{\varrho}_P,\vec{\varrho}_Q}=\begin{cases} 0 \\ i\theta\end{cases},\ \vec{\varrho}_A\in\{\vec{\varrho}_P,\ \vec{\varrho}_Q\}. \tag{3.143}$$

U slučaju glatke *Žordanove* krive $\vec{\varrho}_\gamma$, ugao tangenti u rubnim tačkama $\vec{\varrho}_P$ i $\vec{\varrho}_Q$ luka $\vec{\varrho}_{\widehat{PQ}}$ krive $\vec{\varrho}_\gamma$, u graničnom slučaju kada se rubne tačke $\vec{\varrho}_P$ i $\vec{\varrho}_Q$ svedu, duž glatke *Žordanove* krive $\vec{\varrho}_\gamma$, na tačku $\vec{\varrho}_A$, je π $(\theta=\pi)$.

Definicija 60 *Potencijal $p_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_\delta}$ tačke $\vec{r}_A$ u odnosu na proizvoljnu zatvorenu konturnu površ $\vec{r}_\delta$ u tro-dimenzionalnom realirealnom vektorskom prostoru $\vec{r}$ je po definiciji*

$$p_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_\delta}=vt\overset{\circlearrowleft}{\iint\limits_{\vec{r}_\delta}}\frac{(\vec{r}-\vec{r}_A)}{|(\vec{r}-\vec{r}_A)|^3}\cdot d\vec{\sigma}.\blacktriangledown \tag{3.144}$$

Budući da je $\vec{\nabla}\cdot\frac{(\vec{r}-\vec{r}_A)}{|(\vec{r}-\vec{r}_A)|^3}=0$ (za svako $\vec{r}\neq\vec{r}_A$) i $\overset{\circlearrowleft}{\iint\limits_{\vec{r}_\sigma(\vec{r}_A,\varepsilon)}}\frac{(\vec{r}-\vec{r}_A)}{|(\vec{r}-\vec{r}_A)|^3}\cdot d\vec{\sigma}=4\pi i$, gde $\vec{r}_\sigma(\vec{r}_A,\varepsilon)$ je sferna površ sa centrom u singularnoj tački $\vec{r}_A$ i radijusa ε, sledi na osnovu rezultata (3.109) da

$$p_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_\delta}=\begin{cases} 4\pi i,\ \vec{r}_A\in int.\,\vec{r}_g \\ 0,\ \vec{r}_A\notin\vec{r}_g\end{cases}\ \text{i}\ p_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_\delta}=\begin{cases} 0 \\ 4\pi i\end{cases},\ \vec{r}_A\in\vec{r}_\delta, \tag{3.145}$$

gde $int.\,\vec{r}_g$ je unutrašnjost oblasti $\vec{r}_g$ koju ograničava zatvorena konturna površ $\vec{r}_\delta$.

Definicija 61 *Potencijal $p_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_\gamma}$ tačke $\vec{r}_A$, proizvoljne konturne površi $\vec{r}_p$ u tro-dimenzionalnom realirealnom vektorskom prostoru $\vec{r}$, u odnosu na proizvoljnu prostornu zatvorenu konturnu krivu $\vec{r}_\gamma$ u površi $\vec{r}_p$, na koju je oslonjena površ $\vec{r}_{\Omega_\gamma}$, koja je deo površi $\vec{r}_p$, je po definiciji*

$$p_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_\gamma}=\lim_{\vec{r}_\gamma\to\vec{r}_A}\iint\limits_{\vec{r}_{\Omega_\gamma}}\frac{(\vec{r}-\vec{r}_A)}{|(\vec{r}-\vec{r}_A)|^3}\cdot d\vec{\sigma}.\blacktriangledown \tag{3.146}$$

U slučaju glatke *Žordanove* površi $\vec{r}_p$ lako se dokazuje, na osnovu rezultata (3.145), da

$$p_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_\gamma} = \begin{cases} 2\pi i, \; \vec{r}_A \in int.\, \vec{r}_{\Omega_\gamma} \\ 0, \; \vec{r}_A \notin \vec{r}_{\Omega_\gamma} \end{cases}, \tag{3.147}$$

gde $int.\, \vec{r}_{\Omega_\gamma}$ je unutrašnjost površi $\vec{r}_{\Omega_\gamma}$, koja se oslanja na konturnu krivu $\vec{r}_\gamma$, odnosno

$$p_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_\gamma} = \begin{cases} 0 \\ 2\pi i \end{cases}, \; \vec{r}_A \in \vec{r}_\gamma. \tag{3.148}$$

Po analogiji je vrednost potencijala $p_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_P, \vec{r}_Q}$ tačke $\vec{r}_A$, proizvoljne prostorne konturne krive $\vec{r}_\gamma$ u tro-dimenzionalnom real*i*realnom vektorskom prostoru $\vec{r}$, u odnosu na rubne tačke proizvoljnog luka $\vec{r}_{\overset{\frown}{PQ}}$ krive $\vec{r}_\gamma$:

$$p_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_P, \vec{r}_Q} = \begin{cases} i\theta, \; \vec{r}_A \in int.\, \vec{r}_{\overset{\frown}{PQ}} \\ 0, \; \vec{r}_A \notin \vec{r}_{\overset{\frown}{PQ}} \end{cases},$$

gde θ je ugao koji čine tangente u rubnim tačkama $\vec{r}_P$ i $\vec{r}_Q$ luka $\vec{r}_{\overset{\frown}{PQ}}$ prostorne konturne krive $\vec{r}_\gamma$, u graničnom slučaju kada se rubne tačke $\vec{r}_P$ i $\vec{r}_Q$ svedu, duž lučnog dela $\vec{r}_{\overset{\frown}{PQ}}$ prostorne konturne krive $\vec{r}_\gamma$, na tačku $\vec{r}_A$, a $int.\, \vec{r}_{\overset{\frown}{PQ}}$ je unutrašnjost luka $\vec{r}_{\overset{\frown}{PQ}}$ prostorne konturne krive $\vec{r}_\gamma$ omeđena rubnim tačkama $\vec{r}_P$ i $\vec{r}_Q$, odnosno

$$p_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_P, \vec{r}_Q} = \begin{cases} 0 \\ i\theta \end{cases}, \vec{r}_A \in \{\vec{r}_P, \, \vec{r}_Q\}.$$

U slučaju glatke prostorne *Žordanove* krive $\vec{r}_\gamma$, ugao koji čine tangente u rubnim tačkama $\vec{r}_P$ i $\vec{r}_Q$ luka $\vec{r}_{\overset{\frown}{PQ}}$ krive $\vec{r}_\gamma$, u graničnom slučaju kada se rubne tačke svedu, duž lučnog dela $\vec{r}_{\overset{\frown}{PQ}}$ glatke prostorne *Žordanove* krive $\vec{r}_\gamma$, na tačku $\vec{r}_A$, je π $(\theta = \pi)$.

Shodno ovako definisanim potencijalima tačke, moguće je neke fundamentalne integralne relacije prikazati u ekvivalentnoj formi koja je jednostavnija. Primera radi, u slučaju luka $\vec{r}_{\overset{\frown}{PQ}}$ glatke *Žordanove* krive $\vec{r}_\gamma$, kao i glatke *Žordanove* površi $\vec{r}_p$, u sigularnoj oblasti $\vec{r}_g$ skalarne funkcije $\vec{r} \mapsto f(\vec{r})$, intgralne relacije (3.70), (3.84) i (3.99) ekvivalentne su sledećim integralnim relacijama

$$vt\,[f(\vec{r}_P) - f(\vec{r}_Q)] - vp \int\limits_{\vec{r}_{\overset{\frown}{PQ}}} \vec{\varphi}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \sum_{\vec{r}_A \in vs\, \vec{r}_{\overset{\frown}{PQ}}} p_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_P, \vec{r}_Q} \underset{\vec{r}=\vec{r}_A}{\Re^1 es} f(\vec{r}),$$

$$vt \oint\limits_{\vec{r}_\gamma} f(\vec{r})\, d\vec{r} - vp \iint\limits_{\vec{r}_p} d\vec{\sigma} \times \vec{\varphi}(\vec{r}) = \sum_{\vec{r}_A \in vs\, \vec{r}_p} p_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_\gamma} \underset{\vec{r}=\vec{r}_A}{\overrightarrow{\Re^2 es}} f(\vec{r}) \text{ i}$$

$$vt \oiint\limits_{\vec{r}_\delta} f(\vec{r})\, d\vec{\sigma} - vp \iiint\limits_{\vec{r}_g} \vec{\varphi}(\vec{r})\, dv = \sum_{\vec{r}_A \in vs\, \vec{r}_g} p_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_\delta} \underset{\vec{r}=\vec{r}_A}{\overrightarrow{\Re^3 es}} f(\vec{r}), \tag{3.149}$$

gde $\pi i \underset{\vec{r}=\vec{r}_A}{\Re^1 es} f(\vec{r}) = \underset{\vec{r}=\vec{r}_A}{R^1 es} f(\vec{r})$, $2\pi i \underset{\vec{r}=\vec{r}_A}{\overrightarrow{\Re^2 es}} f(\vec{r}) = \underset{\vec{r}=\vec{r}_A}{\overrightarrow{R^2 es}} f(\vec{r})$ i $4\pi i \underset{\vec{r}=\vec{r}_A}{\overrightarrow{\Re^3 es}} f(\vec{r}) = \underset{\vec{r}=\vec{r}_A}{\overrightarrow{R^3 es}} f(\vec{r})$.

3.7 Primeri

Primer 1 *Skalarna funkcija* $s \mapsto \log s$, *gde* $\log$ *označava glavnu granu logaritamske funkcije, definisana za* $\arg s \in (-\pi, \pi]$, *prostorno je diferencijabilna u svim tačkama konturnih krivih:*

$$\vec{\varrho}_{\gamma_1} = \{\vec{\varrho}_A \mid |\vec{\varrho}_A| \in [0, a]\,,\ \varphi = (\pi - \theta) \cup |\vec{\varrho}_A| = [0, b]\,,\ \varphi = 0\}\ i$$

$$\vec{\varrho}_{\gamma_2} = \{\vec{\varrho}_A \mid |\vec{\varrho}_A| \in [0, a]\,,\ \varphi = -(\pi - \theta) \cup |\vec{\varrho}_A| = [0, b]\,,\ \varphi = 0\},$$

gde $(a, b \in \Re_+)$, *osim u tački* $\vec{\varrho}_O$.

Budući da je, sa jedne strane, $\log s = \ln|\vec{\varrho}| + i\varphi$ *(Mitrinović i Kečkić, 1981; Sarić, 2003), odnosno*

$$vp \int\limits_{\vec{\varrho}_{\gamma_1}} \frac{ds}{s} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \Big(\int\limits_{\vec{\varrho}_{\gamma_1}}^{ae^{i(\pi-\theta)} \searrow \varepsilon e^{i(\pi-\theta)}} \frac{ds}{s} + \int\limits_{\vec{\varrho}_{\gamma_1}}^{\varepsilon \longrightarrow b} \frac{ds}{s} \Big) = \ln\frac{b}{a}\ i$$

$$vp \int\limits_{\vec{\varrho}_{\gamma_2}} \frac{ds}{s} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \Big(\int\limits_{\vec{\varrho}_{\gamma_2}}^{ae^{-i(\pi-\theta)} \nearrow \varepsilon e^{-i(\pi-\theta)}} \frac{ds}{s} + \int\limits_{\vec{\varrho}_{\gamma_2}}^{\varepsilon \longrightarrow b} \frac{ds}{s} \Big) = \ln\frac{b}{a},$$

a sa druge

$$vs \int\limits_{\vec{\varrho}_{\gamma_1}} \frac{ds}{s} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left\{ \log\varepsilon - \log\left[\varepsilon e^{i(\pi-\theta)}\right] \right\} = -i\,(\pi - \theta)\ i$$

$$vs \int\limits_{\vec{\varrho}_{\gamma_2}} \frac{ds}{s} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left\{ \log\varepsilon - \log\left[\varepsilon e^{-i(\pi-\theta)}\right] \right\} = i\,(\pi - \theta)\,,$$

sledi da

$$vt \int\limits_{\vec{\varrho}_{\gamma_1}} \frac{ds}{s} = \ln\frac{b}{a} - i\,(\pi - \theta)\ \ i\ vt \int\limits_{\vec{\varrho}_{\gamma_2}} \frac{ds}{s} = \ln\frac{b}{a} + i\,(\pi - \theta)\,. \tag{3.150}$$

U graničnom slučaju, kada $\theta \to 0^+$, *predhodne dve integralne relacije svode se na jednu integralnu relaciju*

$$vt \int\limits_{-a}^{b} \frac{ds}{s} = \ln\frac{b}{a} \mp \pi i.\blacktriangledown \tag{3.151}$$

Primer 2 *Oblast* $\vec{\varrho}_\Omega = \{\vec{\varrho}_N \mid a \geq |\vec{\varrho}_N| \geq \varepsilon,\ [\varepsilon, a] \in \Re_+\}$, *u realirealnoj ravni* $\vec{\varrho}$, *ograničena kružnicama* $\vec{\varrho}_\varepsilon(\vec{\varrho}_O, \varepsilon)$ *i* $\vec{\varrho}_a(\vec{\varrho}_O, a)$, *je regularna oblast funkcije* $\frac{1}{2}\log(s^*s) = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2)$, *tako da na osnovu rezultata dobro poznate Grin-Riman-ove teoreme, odnosno rezultata (3.113), sledi da*

$$\overset{\circlearrowleft}{\int\limits_{\vec{\varrho}_a}} \log(s^*s)\,ds - \overset{\circlearrowleft}{\int\limits_{\vec{\varrho}_\varepsilon}} \log(s^*s)\,ds = 2i \iint\limits_{\vec{\varrho}_\Omega} \frac{x + iy}{x^2 + y^2} dxdy\ i$$

$$-\overset{\circlearrowleft}{\int\limits_{\vec{\varrho}_a}} \log(s^*s)\,ds^* + \overset{\circlearrowleft}{\int\limits_{\vec{\varrho}_\varepsilon}} \log(s^*s)\,ds^* = 2i \iint\limits_{\vec{\varrho}_\Omega} \frac{x - iy}{x^2 + y^2} dxdy. \tag{3.152}$$

Slično tome, imajući u vidu činjenicu da je $\frac{1}{2}\log\frac{s}{s^*} = i\arctan\frac{y}{x}$*,*

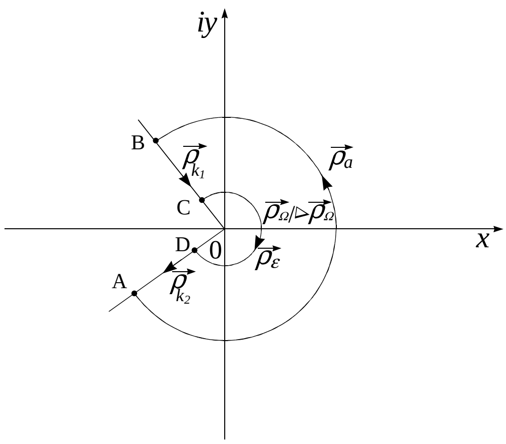
$$\int_{\vec{\varrho}_a}^{\overset{\curvearrowleft}{\vec{\varrho}_B\vec{\varrho}_A}} \log\frac{s}{s^*}ds + \int_{\vec{\varrho}_1}^{\vec{\varrho}_B\searrow\vec{\varrho}_C} \log\frac{s}{s^*}ds + \int_{\vec{\varrho}_\varepsilon}^{\overset{\curvearrowright}{\vec{\varrho}_C\vec{\varrho}_D}} \log\frac{s}{s^*}ds +$$

$$+\int_{\vec{\varrho}_2}^{\vec{\varrho}_A\swarrow\vec{\varrho}_D} \log\frac{s}{s^*}ds = -2i\iint\limits_{\vec{\varrho}_\Omega\setminus\rhd\vec{\varrho}_\Omega} \frac{x+iy}{x^2+y^2}dxdy \ i$$

$$\int_{\vec{\varrho}_a}^{\overset{\curvearrowleft}{\vec{\varrho}_B\vec{\varrho}_A}} \log\frac{s}{s^*}ds^* + \int_{\vec{\varrho}_1}^{\vec{\varrho}_B\searrow\vec{\varrho}_C} \log\frac{s}{s^*}ds^* + \int_{\vec{\varrho}_\varepsilon}^{\overset{\curvearrowright}{\vec{\varrho}_C\vec{\varrho}_D}} \log\frac{s}{s^*}ds^* +$$

$$+\int_{\vec{\varrho}_2}^{\vec{\varrho}_A\swarrow\vec{\varrho}_D} \log\frac{s}{s^*}ds^* = -2i\iint\limits_{\vec{\varrho}_\Omega\setminus\rhd\vec{\varrho}_\Omega} \frac{x-iy}{x^2+y^2}dxdy, \tag{3.153}$$

gde $\vec{\varrho}_\Omega\setminus\rhd\vec{\varrho}_\Omega$ *je deo oblasti* $\vec{\varrho}_\Omega$*, ograničen lučnim delovima kružnih kontura integracije* $\vec{\varrho}_a$ *i* $\vec{\varrho}_\varepsilon$*, kao i segmentima pravih linija* $\vec{\varrho}_k$ *realirealne ravni* $\vec{\varrho}$*:* $\vec{\varrho}_k = \{\vec{\varrho}_N \mid \vec{\varrho}_N = |\vec{\varrho}_N|\,\vec{\varrho}_{0k},\ \varphi = \varphi_k\}$ $(k = 1, 2)$*. Tačke* $\vec{\varrho}_A$*,* $\vec{\varrho}_B$*,* $\vec{\varrho}_C$ *i* $\vec{\varrho}_D$ *su tačke dobijene presekom kružnih kontura integracije* $\vec{\varrho}_a$ *i* $\vec{\varrho}_\varepsilon$ *pravcima* $\vec{\varrho}_k$ *(slika 3.8).*



Slika 3.8: Oblast $\vec{\varrho}_\Omega/\rhd\vec{\varrho}_\Omega$ u realirealnoj ravni $\vec{\varrho}$

Za proizvoljno izabrane uglovne vrednosti φ_k*, a u slučaju kada* $\varphi_1 \to \pi$ *i* $\varphi_2 \to -\pi$

$$\int_{\vec{\varrho}_a}^{\circlearrowleft} \log\frac{s}{s^*}ds - \int_{\vec{\varrho}_\varepsilon}^{\circlearrowleft} \log\frac{s}{s^*}ds + \int_{\vec{\varrho}_k}^{\rightleftharpoons} \log\frac{s}{s^*}ds = -2i\iint\limits_{\vec{\varrho}_\Omega} \frac{x+iy}{x^2+y^2}dxdy \ i$$

$$\int_{\vec{\varrho}_a}^{\circlearrowleft} \log\frac{s}{s^*}ds^* - \int_{\vec{\varrho}_\varepsilon}^{\circlearrowleft} \log\frac{s}{s^*}ds^* + \int_{\vec{\varrho}_k}^{\rightleftharpoons} \log\frac{s}{s^*}ds^* = -2i\iint\limits_{\vec{\varrho}_\Omega} \frac{x-iy}{x^2+y^2}dxdy. \tag{3.154}$$

Drugim rečima, skalarna funkcija $\log s = \frac{1}{2}\left[\log(s^* s) + \log\frac{s}{s^*}\right]$ *je singularno-analitička funkcija u oblasti* $\vec{\varrho}_{\Omega_0} = \{\vec{\varrho}_N \mid |\vec{\varrho}_N| \leq a\}$ *realirealne ravni* $\vec{\varrho}$, *tačnije*

$$\int\limits_{\vec{\varrho}_a}^{\circlearrowleft} (\log s)\, ds + \int\limits_{\vec{\varrho}_k}^{\rightleftharpoons} (\log s)\, ds = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int\limits_{\vec{\varrho}_\varepsilon}^{\circlearrowleft} (\log s)\, ds \ \ i$$

$$-\int\limits_{\vec{\varrho}_a}^{\circlearrowleft} (\log s)\, ds^* - vp \iint\limits_{\vec{\varrho}_{\Omega_0}} (\frac{1}{s}) ds^* ds - \int\limits_{\vec{\varrho}_k}^{\rightleftharpoons} (\log s)\, ds^* = -\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int\limits_{\vec{\varrho}_\varepsilon}^{\circlearrowleft} (\log s)\, ds^* . \blacktriangledown \tag{3.155}$$

Primer 3 *Skalarna funkcija* $s \mapsto s^{-1}$ *prostorno je diferencijabilna u svim tačkama segmenta* $[-a, b]$ *realne prave* $\Re$ $([a,b] \in \Re_+)$, *osim u tački* $\vec{\varrho}_O$. *Kako je sa jedne strane*

$$vp \int\limits_{-a}^{b} \frac{1}{s^2} ds = \lim_{\varepsilon\to 0^+} (\int\limits_{-a}^{-\varepsilon} \frac{1}{s^2} ds + \int\limits_{\varepsilon}^{b} \frac{1}{s^2} ds) = \infty,$$

a sa druge

$$vs \int\limits_{-a}^{b} \frac{1}{s^2} ds = -\lim_{\varepsilon\to 0^+} [\frac{1}{\varepsilon} - \left(-\frac{1}{\varepsilon}\right)] = -\infty,$$

totalna vrednost nesvojstvenog integrala $\int\limits_{-a}^{b} s^{-2} ds$, *koja se u ovom slučaju svodi na neodređeni izraz* $\infty - \infty$, *ima tačno određenu vrednost*

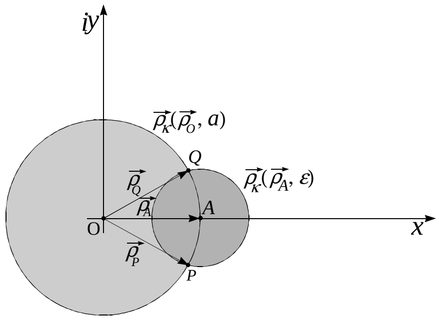
$$vt \int\limits_{-a}^{b} \frac{1}{s^2} ds = -\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = -\frac{b+a}{ab} . \blacktriangledown \tag{3.156}$$

Potvrda prethodnog rezultata sledi na osnovu rezultata sledećeg primera.

Primer 4 *Kružna oblast* $\vec{\varrho}_\varkappa(\vec{\varrho}_O, a)$ *realirealne ravni* $\vec{\varrho}$, *ograničena kružnicom* $\vec{\varrho}_\kappa(\vec{\varrho}_O, a)$, *je singularna oblast singularno-analitičke funkcije* $f(s) = (s-a)^{-k^\star}$, *gde* $k^\star \in \aleph$ *i* $k^\star \geq 2$. *Singularna tačka* $\vec{\varrho}_A$ *funkcije* $f(s)$ *je na rubu oblasti* $\vec{\varrho}_\varkappa(\vec{\varrho}_O, a)$. *U tom slučaju, integral funkcije* $s \mapsto (s-a)^{-k^\star}$, *duž lučnog dela* $\vec{\varrho}_{\overset{\frown}{PQ}}$ *kružne putanje integracije* $\vec{\varrho}_\kappa(\vec{\varrho}_O, a)$, *od tačke* $\vec{\varrho}_Q$ *do tačke* $\vec{\varrho}_P$, *koje su tačke preseka* $\vec{\varrho}_\kappa(\vec{\varrho}_O, a)$ *sa* ε*-okolinom singularne tačke* $\vec{\varrho}_A \notin \vec{\varrho}_{\overset{\frown}{PQ}}$, *slika (3.9), svodi se na integral*

$$\int\limits_{\varphi(\vec{\varrho}_Q)}^{2\pi - \varphi(\vec{\varrho}_Q)} \frac{iae^{i\varphi}}{(ae^{i\varphi} - a)^{k^\star}} d\varphi = \int\limits_{\varphi^\star(\vec{\varrho}_Q)}^{\pi - \varphi^\star(\vec{\varrho}_Q)} \frac{2iae^{2i\varphi^\star}}{(ae^{2i\varphi^\star} - a)^{k+2}} d\varphi^\star =$$

$$= (-\frac{i}{2a})^{k+1} \int\limits_{\varphi^\star(\vec{\varrho}_Q)}^{\pi - \varphi^\star(\vec{\varrho}_Q)} \frac{e^{-ik\varphi^\star}}{(\sin\varphi^\star)^{k+2}} d\varphi^\star, \tag{3.157}$$



Slika 3.9: Singularna oblast funkcije $s \mapsto (s-a)^{-k^\star}$ u real*i*realnoj ravni $\vec{\varrho}$

gde $\varphi\left(\vec{\varrho}_Q\right)$ *je argument tačke* $\vec{\varrho}_Q$, $\varphi = 2\varphi^\star$ *i* $k = k^\star - 2$ $(k \in \aleph_0)$.

Kao rezultat parcijalne integracije dobijaju se sledeće integralne relacije

$$(k+1) \int\limits_{\varphi^\star\left(\vec{\varrho}_Q\right)}^{\pi-\varphi^\star\left(\vec{\varrho}_Q\right)} \frac{2iae^{2i\varphi^\star}}{\left(ae^{2i\varphi^\star}-a\right)^{k+2}} d\varphi^\star = (-\frac{i}{2a})^{k+1}[-\frac{\cos\left(k\varphi^\star\right)}{\left(\sin\varphi^\star\right)^k}\cot\varphi^\star \Bigg|_{\varphi^\star\left(\vec{\varrho}_Q\right)}^{\pi-\varphi^\star\left(\vec{\varrho}_Q\right)} -$$

$$-k \int\limits_{\varphi^\star\left(\vec{\varrho}_Q\right)}^{\pi-\varphi^\star\left(\vec{\varrho}_Q\right)} \frac{\sin\left[(k-1)\,\varphi^\star\right]}{\left(\sin\varphi^\star\right)^{k+1}} d\varphi^\star - i\,(k+1) \int\limits_{\varphi^\star\left(\vec{\varrho}_Q\right)}^{\pi-\varphi^\star\left(\vec{\varrho}_Q\right)} \frac{\sin\left(k\varphi^\star\right)}{\left(\sin\varphi^\star\right)^{k+2}} d\varphi^\star] \ i$$

$$(k+2) \int\limits_{\varphi^\star\left(\vec{\varrho}_Q\right)}^{\pi-\varphi^\star\left(\vec{\varrho}_Q\right)} \frac{\sin\left[(k-1)\,\varphi^\star\right]}{\left(\sin\varphi^\star\right)^{k+3}} d\varphi^\star = -2\frac{\cos\left(k\varphi^\star\right)}{\left(\sin\varphi^\star\right)^k}\cot\varphi^\star \Bigg|_{\varphi^\star\left(\vec{\varrho}_Q\right)}^{\pi-\varphi^\star\left(\vec{\varrho}_Q\right)} -$$

$$-2k \int\limits_{\varphi^\star\left(\vec{\varrho}_Q\right)}^{\pi-\varphi^\star\left(\vec{\varrho}_Q\right)} \frac{\sin\left[(k-1)\,\varphi^\star\right]}{\left(\sin\varphi^\star\right)^{k+1}} d\varphi^\star - \frac{\sin\left(k\varphi^\star\right)}{\left(\sin\varphi^\star\right)^{k+1}}\frac{1}{\sin\varphi^\star} \Bigg|_{\varphi^\star\left(\vec{\varrho}_Q\right)}^{\pi-\varphi^\star\left(\vec{\varrho}_Q\right)} . \tag{3.158}$$

Kako je $\varepsilon = 2a\sin\varphi^\star\left(\vec{\varrho}_Q\right)$, *integral funkcije* $f(s)$, *duž lučnog dela* $\vec{\varrho}_{\overset{\frown}{QP}}$ *kružne putanje integracije* $\vec{\varrho}_\kappa\left(\vec{\varrho}_A, \varepsilon\right)$, *od tačke* $\vec{\varrho}_P$ *do tačke* $\vec{\varrho}_Q$, *ima sledeću vrednost*

$$\varepsilon^{-(k+1)} \int\limits_{-\left[\pi/2+\varphi^\star\left(\vec{\varrho}_Q\right)\right]}^{\pi/2+\varphi^\star\left(\vec{\varrho}_Q\right)} e^{-i(k+1)\varphi^\star} d\varphi^\star = \begin{cases} \frac{(-1)^n}{n}\frac{\sin\left[2n\varphi^\star\left(\vec{\varrho}_Q\right)\right]}{\left[2a\sin\varphi^\star\left(\vec{\varrho}_Q\right)\right]^{2n}}, \ k = 2n-1 \\ \frac{2(-1)^n}{(2n+1)}\frac{\cos\left[(2n+1)\varphi^\star\left(\vec{\varrho}_Q\right)\right]}{\left[2a\sin\varphi^\star\left(\vec{\varrho}_Q\right)\right]^{2n+1}}, \ k = 2n \end{cases} \quad (n \in \aleph), \tag{3.159}$$

odnosno

$$\varepsilon^{-(k+1)} \int\limits_{-\left[\pi/2+\varphi^\star\left(\vec{\varrho}_Q\right)\right]}^{-\left[3\pi/2-\varphi^\star\left(\vec{\varrho}_Q\right)\right]} e^{-i(k+1)\varphi^\star} d\varphi^\star = \begin{cases} \frac{(-1)^n}{n}\frac{\sin\left[2n\varphi^\star\left(\vec{\varrho}_Q\right)\right]}{\left[2a\sin\varphi^\star\left(\vec{\varrho}_Q\right)\right]^{2n}}, \ k = 2n-1 \\ \frac{2(-1)^n}{(2n+1)}\frac{\cos\left[(2n+1)\varphi^\star\left(\vec{\varrho}_Q\right)\right]}{\left[2a\sin\varphi^\star\left(\vec{\varrho}_Q\right)\right]^{2n+1}}, \ k = 2n \end{cases} \quad (n \in \aleph) .$$

Analizom integralnih relacija (3.158) lako se može zaključiti da je za $k = 2n-1$ $(n \in \aleph)$, sa jedne strane

$$\int\limits_{\varphi^\star(\vec{\varrho}_Q)}^{\pi-\varphi^\star(\vec{\varrho}_Q)} \frac{\sin\left[(k-1)\,\varphi^\star\right]}{(\sin\varphi^\star)^{k+1}} d\varphi^\star \equiv 0$$

i sa druge

$$\int\limits_{\varphi^\star(\vec{\varrho}_Q)}^{\pi-\varphi^\star(\vec{\varrho}_Q)} \frac{\sin(k\varphi^\star)}{(\sin\varphi^\star)^{k+2}} d\varphi^\star = \frac{1}{n}\frac{\sin\left[2n\varphi^\star\left(\vec{\varrho}_Q\right)\right]}{\left[\sin\varphi^\star\left(\vec{\varrho}_Q\right)\right]^{2n}}, \tag{3.160}$$

ako se prethodno pretpostavi da je za $k = 2n-1$ $(n \in \aleph)$ suma integralnih vrednosti funkcije $f(s)$ duž lučnih delova $\vec{\varrho}_{\widehat{PQ}}$ kružnih putanja integracije $\vec{\varrho}_\kappa(\vec{\varrho}_O, a)$ i $\vec{\varrho}_\kappa(\vec{\varrho}_A, \varepsilon)$, od tačke $\vec{\varrho}_Q$ do tačke $\vec{\varrho}_P$ i od tačke $\vec{\varrho}_P$ do tačke $\vec{\varrho}_Q$, respektivno, jednaka nuli.

Kako je, u ovom naglašenom slučaju, drugi integral na desnoj strani od znaka jednakosti prve od dve integralne relacije (3.158), identički jednak nuli za $k = 2n$ $(n \in \aleph)$, sledi da za $k = 2n$

$$\int\limits_{\varphi^\star(\vec{\varrho}_Q)}^{\pi-\varphi^\star(\vec{\varrho}_Q)} \frac{2ae^{2i\varphi^\star}}{\left(ae^{2i\varphi^\star}-a\right)^{2(n+1)}} d\varphi^\star = \frac{2(-1)^n}{2n+1}\left\{\frac{-\cos\left[(2n+1)\,\varphi^\star\left(\vec{\varrho}_Q\right)\right]}{\left[2a\sin\varphi^\star\left(\vec{\varrho}_Q\right)\right]^{2n+1}}\right\}(n \in \aleph)\,. \tag{3.161}$$

Konačno, budući da je na osnovu prethodne navedene pretpostavke i integralnih relacija (3.159) i (3.161) suma integralnih vrednosti funkcije $s \mapsto f(s)$, duž lučnih delova $\vec{\varrho}_{\widehat{PQ}}$ kružnih putanja integracije $\vec{\varrho}_\kappa(\vec{\varrho}_O, a)$ i $\vec{\varrho}_\kappa(\vec{\varrho}_A, \varepsilon)$, od tačke $\vec{\varrho}_Q$ do tačke $\vec{\varrho}_P$ i od tačke $\vec{\varrho}_P$ do tačke $\vec{\varrho}_Q$, respektivno, jednaka nuli i za $k = 2n$ $(n \in \aleph)$ i

$$\int\limits_{\varphi^\star(\vec{\varrho}_Q)}^{\pi-\varphi^\star(\vec{\varrho}_Q)} \frac{2ae^{2i\varphi^\star}}{\left(ae^{2i\varphi^\star}-a\right)^{2}} d\varphi^\star = -\frac{\cot\varphi^\star\left(\vec{\varrho}_Q\right)}{a}, \quad \int\limits_{\varphi^\star(\vec{\varrho}_Q)}^{\pi-\varphi^\star(\vec{\varrho}_Q)} \frac{2ae^{2i\varphi^\star}}{\left(ae^{2i\varphi^\star}-a\right)^{3}} d\varphi^\star = \frac{\cot\varphi^\star\left(\vec{\varrho}_Q\right)}{2a^2},$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{-\left[\pi/2+\varphi^\star(\vec{\varrho}_Q)\right]}^{\pi/2+\varphi^\star(\vec{\varrho}_Q)} e^{-i\varphi^\star} d\varphi^\star = \frac{\cot\varphi^\star\left(\vec{\varrho}_Q\right)}{a} \;\; i \;\; \frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_{-\left[\pi/2+\varphi^\star(\vec{\varrho}_Q)\right]}^{\pi/2+\varphi^\star(\vec{\varrho}_Q)} e^{-2i\varphi^\star} d\varphi^\star = -\frac{\cot\varphi^\star\left(\vec{\varrho}_Q\right)}{2a^2},$$

odnosno totalna vrednost nesvojstvenog integrala $\overset{\circlearrowleft}{\int\limits_{\vec{\varrho}_\kappa(\vec{\varrho}_O, a)}} (s-a)^{-k^\star} ds$ jednaka nuli za $k^\star = 2$ $(k = 0)$ i $k^\star = 3$ $(k = 1)$, dokazano je metodom matematičke indukcije da je totalna vrednost (vt) nesvojstvenog integrala funkcije $s \mapsto (s-a)^{-k^\star}$ na kružnoj putanji integracije $\vec{\varrho}_\kappa(\vec{\varrho}_O, a)$ jednaka nuli za svako $k^\star \in \aleph$ i $k^\star \geq 2$.▼

Primer 5 *Realna osa $\Re$ realirealne ravni $\vec{\varrho}$ je singularna oblast singularno-analitičke funkcije $s \mapsto \chi_c(s)$:*

$$\begin{gathered}\chi_c(s) = c, \text{ ako je } y > 0 \\ \chi_c(s) \in [0, c]\,, \text{ ako je } y = 0\;\;, \\ \chi_c(s) = 0, \text{ ako je } y < 0\end{gathered}$$

gde $c \in \Re_+$. Međutim, posmatrano iz perspektive imaginarne ose, odnosno bilo koje prave paralelne imaginarnoj osi, tačka $y = 0$ je izolovani singularitet funkcije $\chi_c(s)$. Shodno tome, ako je singularno-analitička funkcija $\delta_c^0(s)$ funkcija prostornog izvoda funkcije $\chi_c(s)$ duž imaginarne ose realirealne ravni $\vec{\varrho}$, tada za svako $y_0 < 0 < y_1$

$$vp \int_{iy_0}^{iy_1} \delta_c^0(s)\, ds = 0 \ i$$

$$vs \int_{iy_0}^{iy_1} \delta_c^0(s)\, ds = \underset{s=0}{R^1 es}\, \chi(s) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} [\chi(i\varepsilon) - \chi(-i\varepsilon)] = c,$$

odnosno vt $\int_{iy_0}^{iy_1} \delta_c^0(s)\, ds = c$.

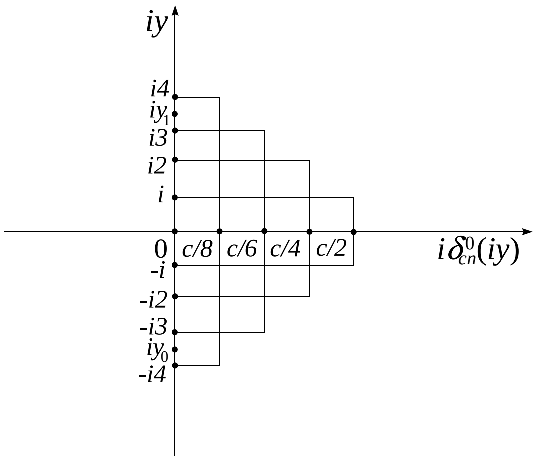
Budući da funkcionalni niz

$$\delta_{cn}^0(s) = -i\frac{n}{2}[\chi_c(s + \frac{i}{n}) - \chi_c(s - \frac{i}{n})],$$

gde $n \in \aleph$, konvergira, tačka po tačka, ka funkciji $s \mapsto \delta_c^0(s)$, kada $n \to +\infty$, slika (3.10):

$$\lim_{n \to +\infty} \delta_{cn}^0(s) = \lim_{n \to +\infty} \{-i\frac{n}{2}[\chi_c(s + \frac{i}{n}) - \chi_c(s - \frac{i}{n})]\} = \delta_c^0(s),$$

prethodno dobijeni rezultat: vt $\int_{iy_0}^{iy_1} \delta_c^0(s)\, ds = c$, *je u saglasnosti sa konstantnom integralnom*



Slika 3.10: Funkcionalni niz $\delta_{cn}^0(s)$ za čisto imaginarne vrednosti funkcionalne promenljive s

vrednošću funkcije $\delta_{cn}^0(s)$ za bilo koju vrednost parametra n: $\int_{iy_0}^{iy_1} \delta_{cn}^0(s)\, ds = c$, *odnosno može se konstatovati da*

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{iy_0}^{iy_1} \delta_{cn}^0(s)\, ds = vt \int_{iy_0}^{iy_1} [\lim_{n \to +\infty} \delta_{cn}^0(s)] ds. \blacktriangledown \tag{3.162}$$

Komentar 3 *Na osnovu rezultata (3.151) i (3.155) iz Primera 1 i 2, može se videti da su rezultati Poglavlja 3.4, kako je to eksplicitno naglašeno Pretpostavkom 2, primenljivi samo u slučajevima kada je skup singularnih tačaka skalarne funkcije, odnosno vektorske funkcije, respektivno, u proizvoljnoj singularnoj oblasti* $\vec{r}_g$ *Hilbertovog tro-dimenzionalnog realirealnog vektorskog prostora* $\vec{r}$*, najviše prebrojiv skup. Naime, funkcija* $\log s$*, iz Primera 1 i 2, ima prekid prve vrste na skupu tačaka* $\{(x, iy) \mid x \leq 0 \ i \ y = 0\}$*, budući da je za svako* s*, takvo da* $|\vec{\varrho}| \neq 0$*,*

$$\log(|\vec{\varrho}|\, e^{i\pi}) = \log\{\lim_{\varepsilon\to 0^+} [|\vec{\varrho}|\, e^{i(\pi-\varepsilon)}]\} \neq \log\{\lim_{\varepsilon\to 0^+} [|\vec{\varrho}|\, e^{-i(\pi-\varepsilon)}]\}.$$

Drugim rečima, negativni deo $\Re_-$ *realne ose realirealne ravni* $\vec{\varrho}$*, je prividno-singularna oblast funkcije* $\log s$*, odnosno beskonačni skup singularnih tačaka funkcije* $\log s$ *je neprebrojiv skup.*

Što se tiče rezultata Primera 5 on se može uopštiti, tako da je u opštem slučaju

$$\sum_{\vec{\varrho}_A \in \vec{\varrho}_{\overset{\frown}{PQ}}} \delta_c^0 \left(\vec{\varrho}_{\vec{\varrho}_A} - \vec{\varrho}^{\star}\right) d_{\vec{\varrho}_A}\vec{\varrho} = vt \int_{\vec{\varrho}_{\overset{\frown}{PQ}}} \delta_c^0 \left(\vec{\varrho} - \vec{\varrho}^{\star}\right) d\vec{\varrho} = c,$$

gde $\delta_c^0 \left(\vec{\varrho} - \vec{\varrho}^{\star}\right)$ *je Dirakovo jezgro, odnosno*

$$\sum_{\vec{\varrho}_A \in \vec{\varrho}_{\overset{\frown}{PQ}}} f\left(\vec{\varrho}_{\vec{\varrho}_A}\right) \delta_c^0 \left(\vec{\varrho}_{\vec{\varrho}_A} - \vec{\varrho}^{\star}\right) d_{\vec{\varrho}_A}\vec{\varrho} = vt \int_{\vec{\varrho}_{\overset{\frown}{PQ}}} f\left(\vec{\varrho}\right) \delta_c^0 \left(\vec{\varrho} - \vec{\varrho}^{\star}\right) d\vec{\varrho} = cf\left(\vec{\varrho}^{\star}\right),$$

za svaku skalarnu funkciju $\vec{\varrho} \mapsto f\left(\vec{\varrho}\right)$*, takvu da u svim tačkama luka* $\vec{\varrho}_{\overset{\frown}{PQ}}$ *proizvoljne krive* $\vec{\varrho}_\gamma$ *realirealne ravni* $\vec{\varrho}$*, koja je u singularnoj oblasti funkcije* $f\left(\vec{\varrho}\right)$*, rezidualne vrednosti funkcije* $f\left(\vec{\varrho}\right)$ *su konačne, a tačka* $\vec{\varrho}^{\star} \in int.\vec{\varrho}_{\overset{\frown}{PQ}}$ *nije singularna tačka funkcije* $f\left(\vec{\varrho}\right)$*.*▼

Glava 4

Furijeov red jedne klase funkcija sa diskontinuitetima

Poznato je, još od pre dva veka, da ako red $a_0/2+\sum_{k=1}^{+\infty}[a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx)]$ konvergira, za $|x|\le\pi$, ka $f(x)$, onda njegovi koeficijenti konvergiraju ka nuli i jedinstveno su određeni funkcijom f, preko poznate *Furijeove* formule: $a_k=(1/\pi)\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(kx)\,dx$ $(k=0,1,...)$ i $b_k=(1/\pi)\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin(kx)\,dx$ $(k=1,2....)$.

Ako je funkcija f *Riman* integrabilna, onda se u *Furijeovoj* formuli koristimo *Rimanovim* integralom, a ako je *Lebeg* integrabilna, onda *Lebegovim.* Drugim rečima, kako su se menjali i razvijali integralni procesi, tako su se smenjivali i integrali u *Furijeovoj* formuli. Taj proces je zaustavljen ograničenim *Denžuovim* integralom. Naime, dat je primer reda, sa sumom f, koja ima kontinualnu ACG primitivnu F, koja je diferencijabilna skoro svuda, odnosno sa sumom integrabilnom u smislu *Hinčinove* modifikacije *Denžuovog* procesa totalizacije i sa koeficijentima koji se nisu mogli dobiti primenom *Furijeove* formule i prethodno pomenutog integralnog procesa. Zatim je pokazano da suma f, svuda konvergentnog trigonometrijskog reda, ne mora da bude i integrabilna u bilo kom smislu, do tada poznatom. Primera radi, svuda konvergentni red $\sum_{n\ge2}(\sin nx/\ln n)$ ima sumu koja nije integrabilna u bilo kom ranije pomenutom smislu. Dve funkcije f_1 i f_2, koje su jednake skoro svuda, imaju iste *Furijeove* redove i obrnuto. A ako dva trigonometrijska reda konvergiraju ka istoj funkciji f, onda su to identični redovi, odnosno redovi sa jednakim koeficijentima.

Sa druge strane, ako *Furijeovi* koeficijenti, funkcije $f(x)$, su $o(1/k)$, onda funkcija $f(x)$ ne može imati proste diskontinuitete. Drugim rečima, ako *Furijeovi* koeficijenti, funkcije $f(x)$ ograničene varijacije, su $o(1/k)$, onda je f kontinualna funkcija. Tvrđenje, $f(x)=o(g(x))$ znači da $f(x)/g(x)\to0$, kada $x\to+\infty$. Međutim, postoji klasa kontinualnih funkcija sa *Furijeovim* redovima koji neodređeno ili određeno divergiraju u nekim tačkama. U ovom i njemu sličnim slučajevima govori se o zbirljivosti *Furijeovih* redova. Prema *Fatovoj* teoremi ako $[f(x+h)-f(x-h)/2h]\to l$, kada $h\to0^+$, gde l može biti i beskonačno, onda izvod *Furijeovog* reda funkcije f je zbirljiv i jednak l, u tački x, u *Abelovom* smislu. *Abelov* metod zbirljivosti primenjuje se na *Furijeove* redove sa koeficijentima koji ne teže 0, kada $k\to+\infty$. Tada bi bilo pogrešno govoriti o identičnosti redova.

Shodno svemu tome, učiniće se napor, u onome što sledi, da se dokaže da su *Furijeovi* redovi, klase totalno (apsolutno) integrabilnih funkcija f u nekoj oblasti real$i$realne ravni $\vec{\varrho}$, zbirljivi. Kako je to klasa funkcija sa diskontinuitetima (konačnim i beskonačnim), jasno je da se govori o zbirljivost u oblastima, u kojima je funkcija f ograničena. Prirodno, na skupu tačaka beskonačnog diskontinuiteta, *Furijeov* red funkcije f određeno divergira. Analogno dovoljnosti uslova dobro poznate *Dirihlejeve* teoreme o razvoju realnih funkcija u *Furijeov* trigonometrijski red, za očekivati je da se dobije samo dovoljan uslov zbirljivosti *Furijeovog* reda ove klase funkcija.

Ako se zna da je dvo-dimenzionalni real$i$realni vektorski prostor $\boldsymbol{\varrho}=(\sqrt{2}/2)\left(\bar{s}\mathbf{e}_1^{\star}+s\mathbf{e}_2^{\star}\right)$ izomorfan sa dvo-dimenzionalnim real$i$realnim vektorskim prostorom $\boldsymbol{\varrho}=\Re(s)\mathbf{e}_1+\Im(s)\mathbf{e}_2$, moguće je na bazi te izomorfnosti formulisati teoremu o razvoju funkcije iz klase kompleksnih funkcija u potencijalni red, koja bi bila direktna posledica *Dirihlejeve*, odnosno *Žordanove* teoreme. Jasno, ta teorema bi bila uopštenje *Loranove* teoreme, kao jedne od fundamentalnih teorema *Košijevog* računa ostataka.

4.1 Uopštenje *Loranove* teoreme

Za funkciju $f(s) = f(x+iy)$ kaže se da je integrabilna, ograničene varijacije i slično, a u odnosu na jednu od realnih promenljivih x ili y, u oblasti $\mathcal{D}$ real*i*realne ravni $\vec{\varrho}$, ako njen i realni i imaginarni deo zasebno zadovoljavaju ove osobine za bilo koju fiksnu vrednost druge promenljive u oblasti $\mathcal{D}$. Shodno tome, neka je funkcija $f(s)$ ograničene varijacije u odnosu na promenljivu y u prozvoljnoj oblasti $\mathcal{D}_\Omega = \{(x, iy) \mid x \in [x_0, x_1],\ y \in [y_0, y_1]\}$ $(0 \in \mathcal{D}_\Omega)$ real*i*realne ravni $\vec{\varrho}$.

Za funkciju $s \mapsto \mathcal{F}(s)$, takvu da za svako $s \in \{x+iy \mid x \in [x_0, x_1],\ y \in (y_0, y_1)\}$

$$\mathcal{F}(s) = \frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[f(s+i\varepsilon) + f(s-i\varepsilon) \right], \tag{4.1}$$

odnosno

$$\mathcal{F}(s) = \frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left\{ f\left[x + i(y_0+\varepsilon)\right] + f\left[x + i(y_1 - \varepsilon)\right] \right\}, \tag{4.2}$$

na segmentima:

$$\{(x, iy) \mid x \in [x_0, x_1], y = y_0\} \text{ i } \{(x, iy) \mid x \in [x_0, x_1], y = y_1\},$$

pravih paralelnih realnoj osi $\Re(s)$ i na rastojanjima y_0 i y_1 od nje, u kojima je funkcija $f(s)$ kontinualna u odnosu na y s' desna i leva, respektivno, kaže se da je normalizovana funkcija ograničene varijacije u odnosu na y u oblasti $\mathcal{D}_\Omega$.

Na osnovu *Žordanove* teoreme[1] (Mitrinović, 1980), *Furijeov* trigonometrijski red funkcije $s \mapsto F(s)$, takve da

$$F(s) = \begin{cases} f(s), \text{ ako je } (x, iy) \in \mathcal{D}_\Omega \\ \quad 0, \text{ svugde drugde} \end{cases}, \tag{4.3}$$

u svakoj tački (x, iy) intervala $\Im_a = \{(x, iy) \mid x = 0,\ y \in (y_0 + a, y_1 - a)\}$, imaginarne ose $\Im$ real*i*realne ravni $\vec{\varrho}$: $(x, iy) \in \Im_a$, gde $a \in \Re_+$ ($\Re_+$ je skup tačaka pozitivnog dela realne ose) i $a \leq y_1 - y_0$, konvergira ka funkciji $\mathcal{F}(s)$ (Mitrinović i Kečkić, 1978):

$$\mathcal{F}(s) = vp \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Phi(k)\, e^{\frac{2k\pi}{a} s}, \tag{4.4}$$

gde vp označava, kao i u integralnom slučaju, *Košijevu* glavnu vrednost:

$$vp \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Phi(k)\, e^{\frac{2k\pi}{a} s} = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=-n}^{n} \Phi(k)\, e^{\frac{2k\pi}{a} s},$$

odnosno sumu beskonačnog reda u *Košijevom* smislu i

$$\Phi(k) = \frac{1}{ai} \int_{iy_0}^{iy_1} f(s)\, e^{-\frac{2k\pi}{a} s} ds. \tag{4.5}$$

1

Teorema 5 *Ako je funkcija $t \mapsto f(t)$ ograničene varijacije u okolini tačke $t = x$, tada njen Furijeov red u tački x konvergira ka vrednosti $\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$.*▼

Ako se pretpostavi, ne gubeći ništa od opštosti, da je $|y_0| = |y_1| = \pi$ i da je funkcija $f(s)$ periodična u odnosu na promenljivu y, sa periodom 2π, parcijalna suma $\mathbf{S}_n(s)$ *Furijeovog* reda (4.4) funkcije $f(s)$:

$$\mathbf{S}_n(s) = \sum_{k=-n}^{n} \Phi(k)\, e^{ks}, \tag{4.6}$$

na intervalu $\Im_{2\pi} = \{(x, iy) \mid x = 0,\ y \in (-\pi, \pi)\}$ imaginarne ose $\Im$ real*i*realne ravni, svodi se na integralnu vrednost (Mitrinović, 1980)

$$\mathbf{S}_n(iy) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\pi}^{i\pi} f(s^\star)\, ds^\star + \frac{1}{\pi i}\sum_{k=1}^{n}\int_{-i\pi}^{i\pi} f(s^\star)\left[\cos(ky)\cos(iks^\star) - \sin(ky)\sin(iks^\star)\right] ds^\star =$$

$$= \frac{1}{\pi i}\int_{-i\pi}^{i\pi} [\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos ik\,(iy - s^\star)] f(s^\star)\, ds^\star = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\pi}^{i\pi} \frac{\sin[i(n+1/2)(iy - s^\star)]}{\sin[(i/2)(iy - s^\star)]} f(s^\star)\, ds^\star =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{0}^{i\pi} \frac{\sin[i(n+1/2)\,s^\star]}{\sin[(i/2)\,s^\star]}\left[f(iy + s^\star) + f(iy - s^\star)\right] ds^\star. \tag{4.7}$$

Ako se za svako $(x, iy) \in \Im_{2\pi}$, funkcija $f(s)$ predstavi u formi sume jedne parne i jedne neparne funkcije:

$$f(s) = f_p(s) + f_n(s),$$

gde

$$f_p(s) = \frac{f(s) + f(-s)}{2} \text{ i } f_n(s) = \frac{f(s) - f(-s)}{2},$$

integralna relacija (4.7), u graničnom slučaju kada $y \to 0^+$, svodi se na integralnu relaciju

$$\mathbf{S}_n(0) = \frac{1}{\pi i}\int_{0}^{i\pi} \frac{\sin[i(n+1/2)\,s^\star]}{\sin[(i/2)\,s^\star]} f_p(s^\star)\, ds^\star =$$

$$= \frac{1}{\pi i}\int_{0}^{i\pi} \frac{\sin[i(n+1/2)\,s^\star]}{\sin[(i/2)\,s^\star]}\{\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[f_p(s^\star + i\varepsilon) + f_p(s^\star - i\varepsilon)\right]\} ds^\star =$$

$$= \frac{1}{\pi i}\int_{0}^{i\pi} \frac{\sin[i(n+1/2)\,s^\star]}{\sin[(i/2)\,s^\star]} \mathcal{F}_p(s^\star)\, ds^\star, \tag{4.8}$$

imajući u vidu da

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\pi}^{i\pi} f(s)\, ds + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\pi i}\int_{-i\pi}^{i\pi} f(s)\cos(iks)\, ds =$$

$$= \frac{1}{\pi i}\int_{0}^{i\pi} \frac{\sin[i(n+1/2)\,s]}{\sin[(i/2)\,s]} f_p(s)\, ds \text{ i}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-i\pi}^{i\pi}\mathcal{F}(s)\,ds+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-i\pi}^{i\pi}\mathcal{F}(s)\cos(iks)\,ds=$$

$$=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{0}^{i\pi}\frac{\sin[i(n+1/2)s]}{\sin[(i/2)s]}\{\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0^+}[f_p(s+i\varepsilon)+f_p(s-i\varepsilon)]\}ds. \tag{4.9}$$

Na osnovu jednakosti (4.8), koja važi za svako $n\in\aleph_0$, gde $\aleph_0$ je skup prirodnih brojeva $\aleph$ proširen nulom, metodom totalne indukcije dokazuje se da za svako $|k|\in\aleph_0$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-i\pi}^{i\pi}f(s)\cos(isk)\,ds=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-i\pi}^{i\pi}\mathcal{F}(s)\cos(isk)\,ds. \tag{4.10}$$

Razvijajući funkcije $s\mapsto f(s+i\pi/2)$ i $s\mapsto f(s+i\pi/4)$ u *Furijeov* trigonometrijski red, na intervalima imaginarne ose $\Im$ real$i$realne ravni $\vec{\varrho}$: $\{(x,iy)\mid x=0,\ y\in(-3\pi/2,\pi/2)\}$ i $\{(x,iy)\mid x=0,\ y\in(-5\pi/4,3\pi/4)\}$, respektivno, dokazuje se na potpuno istovetan način da u graničnom slučaju kada $y\to 0^+$

$$\mathbf{S}_n(0)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-i\pi/2}^{i\pi/2}\frac{\sin[i(n+1/2)s^\star]}{\sin[(i/2)s^\star]}f_p(s^\star+i\pi/2)\,ds^\star=$$

$$=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-i\pi/2}^{i\pi/2}\frac{\sin[i(n+1/2)s^\star]}{\sin[(i/2)s^\star]}\mathcal{F}_p(s^\star+i\pi/2)\,ds^\star \text{ i}$$

$$\mathbf{S}_n(0)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-i\pi/4}^{i3\pi/4}\frac{\sin[i(n+1/2)s^\star]}{\sin[(i/2)s^\star]}f_p(s^\star+i\pi/4)\,ds^\star=$$

$$=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-i\pi/4}^{i3\pi/4}\frac{\sin[i(n+1/2)s^\star]}{\sin[(i/2)s^\star]}\mathcal{F}_p(s^\star+i\pi/4)\,ds^\star, \tag{4.11}$$

odnosno, shodno rezultatu (4.10), da za svako $|k|\in\aleph_0$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-i3\pi/2}^{i\pi/2}f(s+i\pi/2)\cos(isk)\,ds=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-i3\pi/2}^{i\pi/2}\mathcal{F}(s+i\pi/2)\cos(isk)\,ds \text{ i}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-i5\pi/4}^{i3\pi/4}f(s+i\pi/4)\cos(isk)\,ds=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-i5\pi/4}^{i3\pi/4}\mathcal{F}(s+i\pi/4)\cos(isk)\,ds. \tag{4.12}$$

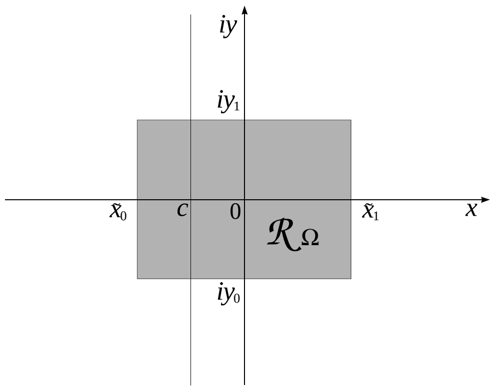
Iz prve integralne jednakosti, smenom $\tilde{s}=s+i\pi/2$, kao i iz druge integralne jednakosti, smenom $\tilde{s}=s+i\pi/4$, dobija se da za svako $|k|\in\aleph$ i za svako $|k^\star|\in\aleph$, takvo da $|k^\star|\neq 2|k|$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-i\pi}^{i\pi}f(s)\sin(isk^\star)\,ds=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-i\pi}^{i\pi}\mathcal{F}(s)\sin(isk^\star)\,ds, \tag{4.13}$$

odnosno da za svako $|k| \in \aleph$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-i\pi}^{i\pi} f(s)\sin(isk)\,ds = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-i\pi}^{i\pi} \mathcal{F}(s)\sin(isk)\,ds, \tag{4.14}$$

ako se zna da je $\sin[is(k^\star+1)] = \sin(isk^\star)\cos(is) + \cos(isk^\star)\sin(is)$.



Slika 4.1: Prava $x = c$ u oblasti konvergencije $\mathcal{R}_\Omega$

Kao posledica *Beselove* nejednakosti, odnosno rezultata *Riman-Lebegove* teoreme, sledi da $\lim\limits_{k\to\pm\infty} \Phi(k) = 0$ (Mitrinović, 1980)[2]. Shodno tome, oba reda u *Furijeovom* razvoju (4.4) funkcije $f(s)$:

$$vp\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\Phi(k)\,e^{\frac{2k\pi}{a}s} = vp[\sum_{k=-\infty}^{-1}\Phi(k)\,e^{\frac{2k\pi}{a}s} + \sum_{k=0}^{+\infty}\Phi(k)\,e^{\frac{2k\pi}{a}s}], \tag{4.15}$$

pod uslovom da su *Furijeovi* koeficijenti eksponencijalnog poretka rasta: $|\Phi(k)| \le Me^{-\frac{2k\pi}{a}\tilde{x}_1}$ za $k \ge N$ i $|\Phi(-k)| \le \hat{M}e^{\frac{2k\pi}{a}\tilde{x}_0}$ za $k \ge \hat{N}$ ($\{N, \hat{N}\} \in \aleph$; $[M, \hat{M}] \in \Re_+$), imaju zajedničku oblast konvergencije $\mathcal{R}_\Omega = \{(x, iy) \mid x \in (\tilde{x}_0, \tilde{x}_1),\ y \in (y_0, y_1)\}$, takvu da $\tilde{x}_0 < 0$ i $\tilde{x}_1 > 0$ (slika 4.1). Jasno, u ovom slučaju, u oblasti konvergencije $\mathcal{R}_\Omega$, beskonačni red $vp\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty}|\Phi(k)|$ konvergira, odnosno *Furijeov* red (4.4) funkcije $f(s)$ apsolutno i uniformno konvergira. Kako je funkcija $s \mapsto \mathcal{F}(s)$, koja je definisana sumom *Firijeovog* reda, regularna funkcija u oblasti konvergencije $\mathcal{R}_\Omega$ reda (Stanković, 1972), oblast konvergencije $\mathcal{R}_\Omega$ *Furijeovog* reda funkcije $s \mapsto f(s)$ je u oblasti u kojoj je funkcija $f(s)$ regularna funkcija. Jasno, uslov regularnosti funkcije $f(s)$ je samo neophodan, ali ne i dovoljan uslov, da bi oblast, u kojoj je funkcija $f(s)$ regularna, bila i oblast konvergencije $\mathcal{R}_\Omega$ *Furijeovog* reda funkcije $f(s)$, što se najbolje može videti iz sledećeg primera.

[2]

Teorema 6 *Ako je $f(t)$ integrabilna funkcija na segmentu $[a, b]$, tada je*

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)\cos(\lambda x)\,dx = \lim_{\lambda\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)\sin(\lambda x)\,dx = 0.\blacktriangledown$$

Primer 6 *Funkcija* $s \mapsto s$ *je regularna u oblasti* $\{(x, iy) \mid x \in (-\infty, +\infty),\ y \in [-\pi, \pi]\}$. *Furijeov red vp* $\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} \Phi(k) e^{ks}$, *gde*

$$\Phi(k) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-i\pi}^{i\pi} s e^{-ks} ds, \tag{4.16}$$

odnosno $\Phi(0) = 0$ *i* $\Phi(k)\big|_{|k| \in \aleph} = \frac{(-1)^{k+1}}{k}$, *uniformno konvergira na intervalu* $\Im_{2\pi}$ *imaginarne ose realirealne ravni ka funkciji* s. *Međutim, oblast konvergencije* $\mathcal{R}_\Omega$ *ovog Furijeovog reda svodi se na imaginarnu osu realirealne ravni, tako da za svako* $(x, iy) \in \Im_{2\pi}$ *i* $c \in (-\infty, +\infty)$

$$vp \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Phi(k) e^{k(c+iy)} \neq c + iy, \tag{4.17}$$

odnosno Furijeovi koeficijenti $\tilde{\Phi}(k)$: $\tilde{\Phi}(0) = c$ *i* $\tilde{\Phi}(k)\Big|_{|k| \in \aleph} = \frac{(-1)^{k+1}}{k} e^{-ck}$, *Furijeovog reda vp* $\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} \tilde{\Phi}(k) e^{ks}$ *funkcije* $s \mapsto s$ *na intervalu* $(-i\pi, i\pi)$ *prave paralelne imaginarnoj osi i na rastojanju* c *od nje, nisu jednaki Furijeovim koeficijentima* $\Phi(k)$.▼

Sa jedne strane, a na osnovu *Žordanove* teoreme, sledi da za svako $c \in [\tilde{x}_0, \tilde{x}_1]$ i za svako $y \in (y_1 - a, y_0 + a)$

$$\mathcal{F}(c + iy) = vp \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Phi_c(k) e^{\frac{2k\pi}{a} iy}, \tag{4.18}$$

gde

$$\Phi_c(k) = \frac{1}{ai} \int\limits_{iy_0}^{iy_1} f(c + s) e^{-\frac{2k\pi}{a} s} ds \text{ i}$$

$$\Phi_c(k) e^{-\frac{2k\pi}{a} c} = \frac{e^{-\frac{2k\pi}{a} c}}{ai} \int\limits_{iy_0}^{iy_1} f(c + s) e^{-\frac{2k\pi}{a} s} ds = \frac{1}{ai} \int\limits_{c+iy_0}^{c+iy_1} f(s) e^{-\frac{2k\pi}{a} s} ds. \tag{4.19}$$

Shodno tome, sa druge strane

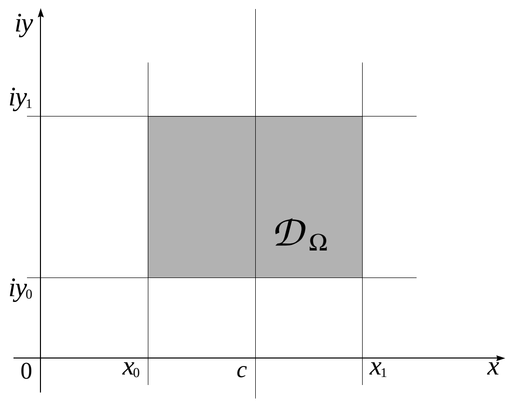
$$\mathcal{F}(c + iy) = vp \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \tilde{\Phi}(k) e^{\frac{2k\pi}{a}(c+iy)}, \tag{4.20}$$

gde $\tilde{\Phi}(k) = \Phi_c(k) e^{-\frac{2k\pi}{a} c}$, odnosno

$$\tilde{\Phi}(k) = \frac{1}{ai} \int\limits_{c+iy_0}^{c+iy_1} f(s) e^{-\frac{2k\pi}{a} s} ds. \tag{4.21}$$

Dakle, u oblasti konvergencije $\mathcal{R}_\Omega$ *Furijeovog* reda (4.4) funkcije $f(s)$, odnosno za svako $c \in (\tilde{x}_0, \tilde{x}_1)$ i $y \in (y_1 - a, y_0 + a)$

$$f(c + iy) = vp \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Phi(k) e^{\frac{2k\pi}{a}(c+iy)}, \tag{4.22}$$



Slika 4.2: Oblast $\mathcal{D}_\Omega$ u real*i*realnoj ravni $\vec{\varrho}$ u opštem slučaju

budući da je *Furijeov* red (4.4) funkcije $f(s)$ jedinstven u oblasti konvergencije $\mathcal{R}_\Omega$, odnosno da postoji samo jedna funkcija *Furijeovih* koeficijenata koja zadovoljava kako relaciju (4.20), tako i relaciju (4.22). Drugim rečima, u oblasti konvergencije $\mathcal{R}_\Omega$, $\tilde{\Phi}(k) = \Phi(k)$.

Shodno prethodnoj analizi, u opštem slučaju ako je funkcija $s \mapsto f(s)$ funkcija ograničene varijacije u odnosu na y u prozvoljnoj oblasti $\mathcal{D}_\Omega$: $\mathcal{D}_\Omega = \{(x, iy) \mid x \in [x_0, x_1],\ y \in [y_0, y_1]\}$, real*i*realne ravni (slika 4.2), tada *Furijeov* trigonometrijski red funkcije

$$F(s) = \begin{cases} f(s), \text{ ako je } (x, iy) \in \mathcal{D}_\Omega \\ 0, \text{ svugde drugde} \end{cases}, \tag{4.23}$$

na intervalu $\Im_a = \{(x, iy) \mid x = c,\ y \in (y_0 + a, y_1 - a)\}$ prave paralelne imaginarnoj osi $\Im$ i na rastojanju c od nje, gde $a \in \Re_+$ i $a \leq |y_1 - y_0|$, konvergira ka funkciji $\mathcal{F}(c + iy)$:

$$\mathcal{F}(c + iy) = vp \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Phi_c(k)\, e^{\frac{2k\pi}{a} iy}, \tag{4.24}$$

gde

$$\Phi_c(k) = \frac{1}{ai} \int_{iy_0}^{iy_1} f(c + s)\, e^{-\frac{2k\pi}{a} s} ds. \tag{4.25}$$

Na osnovu posledice *Beselove* nejednakosti, odnosno rezultata *Riman-Lebegove* teoreme, sledi da i u ovom opštem slučaju $\lim\limits_{k \to \pm\infty} \Phi_c(k) = 0$. Shodno tome, kako je

$$\mathcal{F}(c + iy) = vp \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \tilde{\Phi}(k)\, e^{\frac{2k\pi}{a}(c+iy)}, \tag{4.26}$$

gde

$$\tilde{\Phi}(k) = \frac{1}{ai} \int_{c+iy_0}^{c+iy_1} f(s)\, e^{-\frac{2k\pi}{a} s} ds, \tag{4.27}$$

odnosno $\tilde{\Phi}(k) = \Phi_c(k)\, e^{-\frac{2k\pi}{a} c}$, može se konstatovati da

$$\lim_{k \to \pm\infty} \tilde{\Phi}(k)\, e^{\frac{2k\pi}{a} c} = 0. \tag{4.28}$$

Uz uslov da su *Furijeovi* koeficijenti eksponencijalnog poretka rasta: $\left|\tilde{\Phi}(k)\right| \leq Me^{-\frac{2k\pi}{a}\tilde{x}_1}$ $(\tilde{x}_1 > c)$ za $k \geq N$ i $\left|\tilde{\Phi}(-k)\right| \leq \hat{M}e^{\frac{2k\pi}{a}\tilde{x}_0}$ $(\tilde{x}_0 < c)$ za $k \geq \hat{N}$ $(\{N, \hat{N}\} \in \aleph; [M, \hat{M}] \in \Re_+)$, *Furijeov* red (4.26), funkcije $f(s)$, apsolutno i uniformno konvergira u oblasti konvergencije $\mathcal{R}_\Omega = \{(x, iy) \mid x \in (\tilde{x}_0, \tilde{x}_1),\ y \in (y_0, y_1)\}$ ka funkciji $f(s)$. *Furijeovi* koeficijenti $\tilde{\Phi}(k)$ su jedinstveno definisani u oblasti konvergencije $\mathcal{R}_\Omega$, odnosno integralna relacija (4.27) važi za svako $c \in (\tilde{x}_0, \tilde{x}_1)$.

Na osnovu dobro poznatih osobina konformnog preslikavanja $s^\star - s_N^\star = e^s$ (Grujić, 1980; Mitrinović i Kečkić, 1981), ako je funkcija $f(s)$ perioda 2π u odnosu na y, drugim rečima ako je funkcija $\tilde{f}(s^\star) = f[\mathrm{Log}(s^\star - s_N^\star)]$ univalentna u odnosu na $\arg s^\star$ u real$\imath$realnoj ravni $\vec{\varrho}^\star$, odnosno nije multiformna, integralna relacija (4.5), za $a = 2\pi$ i $-y_0 = y_1 = \pi$, transformiše se u sledeću integralnu relaciju

$$\Phi(k) = \frac{1}{2\pi i} \overset{\circlearrowleft}{\int_G} \frac{\tilde{f}(s^\star)}{(s^\star - s_N^\star)^{k+1}} ds^\star, \tag{4.29}$$

gde simbol $\overset{\circlearrowleft}{\int_G}$ označava integraciju po kružnoj putanji $G = \{\vec{\varrho}_A^\star \mid |\vec{\varrho}_A^\star - \vec{\varrho}_N^\star| = 1\}$ u pozitivnom matematičkom smeru, odnosno u integralnu relaciju

$$\tilde{\Phi}(k) = \frac{1}{2\pi i} \overset{\circlearrowleft}{\int_{G_c}} \frac{\tilde{f}(s^\star)}{(s^\star - s_N^\star)^{k+1}} ds^\star, \tag{4.30}$$

gde $G_c = \{\vec{\varrho}_A^\star \mid |\vec{\varrho}_A^\star - \vec{\varrho}_N^\star| = e^c\}$, ako se uzme u obzir rezultat (4.21).

Shodno tome, kao neposredna posledica prethodno pomenute *Žordanove* teoreme, koja je nešto opštija u odnosu na dobro poznatu *Dirihlejevu* teoremu o razvoju funkcija u *Furijeov* trigonometrijski red (Mitrinović, 1980), može se formulisati sledeća teorema:

Teorema 7 *Ako je kompleksna funkcija $F(s^\star)$ univalentna funkcija ograničene varijacije u odnosu na* $\arg s^\star$ *u oblasti $\mathcal{D}_\Omega^\star = \{\vec{\varrho}_A^\star \mid |\vec{\varrho}_A^\star - \vec{\varrho}_N^\star| \in (A, B)\}$, gde $A \geq 0$ i $B \leq +\infty$, tada u svakoj tački $\vec{\varrho}_A^\star$ kružnice $G_c = \{\vec{\varrho}_A^\star \mid |\vec{\varrho}_A^\star - \vec{\varrho}_N^\star| = C \in (A, B)\}$*

$$\mathcal{F}(s^\star) = vp \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \tilde{\Phi}(k) (s^\star - s_N^\star)^k, \tag{4.31}$$

gde

$$\tilde{\Phi}(k) = \frac{1}{2\pi i} \overset{\circlearrowleft}{\int_{G_c}} \frac{F(s^\star)}{(s^\star - s_N^\star)^{k+1}} ds^\star \ \ i\ \mathcal{F}(s^\star) = \frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[F\left(s^\star e^{i\varepsilon}\right) + F\left(s^\star e^{-i\varepsilon}\right)\right]. \tag{4.32}$$

U slučaju da postoji i oblast konvergencije $\mathcal{R}_\Omega^\star = \{\vec{\varrho}_A^\star \mid |\vec{\varrho}_A^\star - \vec{\varrho}_N^\star| \in (\tilde{A}, \tilde{B})\}$ potencijalnog reda (4.31) funkcije $F(s^\star)$, tada u svakoj tački oblasti $\mathcal{R}_\Omega^\star$

$$vp \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Phi(k) (s^\star - s_N^\star)^k = F(s^\star),$$

$$\Phi(k) = \frac{1}{2\pi i} \overset{\circlearrowleft}{\int_{G_c}} \frac{F(s^\star)}{(s^\star - s_N^\star)^{k+1}} ds^\star \ \ i\ G_c = \{\vec{\varrho}_A^\star \mid |\vec{\varrho}_A^\star - \vec{\varrho}_N^\star| = C \in (\tilde{A}, \tilde{B})\}. \blacktriangledown \tag{4.33}$$

Ako je funkcija $F(s^\star)$ regularna i univalentna u disku $0 < |\vec{\varrho}^\star - \vec{\varrho}_N^\star| < R$ $(1 < R \leq +\infty)$, tada na osnovu dobro poznate *Loranove* teoreme, u odnosu na koju je prethodno formulisana teorema nešto opštija, *Loranov* razvoj $vp \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} \Phi(k)(s^\star - s_N^\star)^k$ regularno-analitičke funkcije $F(s^\star)$, gde $\Phi(k) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{G_c} \frac{F(s^\star)}{(s^\star - s_N^\star)^{k+1}} ds^\star$ i $G_c = \{\vec{\varrho}_A^\star \mid |\vec{\varrho}_A^\star - \vec{\varrho}_N^\star| = C \in (0, R)\}$, je jedinstven i uniformno konvergira ka vrednostima funkciju $F(s^\star)$ u disku $0 < |\vec{\varrho}^\star - \vec{\varrho}_N^\star| < R$.

Na osnovu posledice *Beselove* nejednakosti, odnosno rezultata *Riman-Lebegove* teoreme, sledi da i u ovom slučaju $\lim\limits_{k \to \pm\infty} \Phi(k) = 0$.

Ako uz gornji uslov funkcija $F(s^\star)$ zadovoljava i uslov

$$\lim_{s^\star \to s_N^\star} (s^\star - s_N^\star) F(s^\star) = 0, \tag{4.34}$$

tada iz *Košijevog* računa ostataka sledi da $\Phi(k) = 0$ za svako $k < 0$, dok za $k \geq 0$

$$\Phi(k) = \underset{\vec{\varrho}^\star = \vec{\varrho}_N^\star}{\Re^2 es} \frac{F(s^\star)}{(s^\star - s_N^\star)^{k+1}} = \frac{F^{(k)}(s_N^\star)}{k!}, \tag{4.35}$$

gde simbol ! označava faktorijel $(0! = 1)$, a $\Re^2 es$ ostatak (rezidijum) funkcije u real$i$realnoj ravni i $F^{(k)}(s_N^\star)$ je k-ti izvod funkcije $F(s^\star)$ u tački $\vec{\varrho}_N^\star$, odnosno za svako $k \geq k_\infty$

$$\Phi(k) = -\sum_{\kappa=1}^{n} \underset{\vec{\varrho}^\star = \vec{\varrho}_N^\star}{\Re^2 es} \frac{F(s^\star)}{(s^\star - s_N^\star)^{k+1}}, \tag{4.36}$$

gde $k_\infty \in \aleph_0$ je najmanji ne negativni ceo broj takav da

$$\lim_{|\vec{\varrho}^\star| \to +\infty} \frac{s^\star F(s^\star)}{(s^\star - s_N^\star)^{1+k_\infty}} = 0, \tag{4.37}$$

budući da svi singulariteti $s_\kappa^\star$ $(\kappa = 1, 2, ..., n)$, odnosno sve tačke beskonačnog diskontinuiteta, funkcije $F(s^\star)$, su izvan oblasti konvergencije $\mathcal{R}_\Omega^\star = \{\vec{\varrho}_A^\star \mid 0 < |\vec{\varrho}_A^\star - \vec{\varrho}_N^\star| < R\}$ (Sarić, 2002b).

Ako postoji najmanje jedan beskonačni diskontinuitet (singularitet) singularno-analitičke funkcije $s^\star \mapsto \tilde{F}(s^\star)$ koji leži na putanji integracije $G = \{\vec{\varrho}_A^\star \mid |\vec{\varrho}_A^\star| = 1\}$, može se reći da bilo realni ili imaginarni deo singularno-analitičke funkcije $s \mapsto F(s)$ nije *Riman*-integrabilan na segmentu $[-i\pi, i\pi]$. Shodno tome, može se postaviti fundamentalno pitanje: Postoji li razvoj singularno-analitičke funkcije $F(s)$ u *Furijeov* trigonometrijski red na segmentu $[-i\pi, i\pi]$ i u ovom globalnom slučaju? Drugim rečima: Da li je i u ovom globalnom slučaju beskonačni *Loranov* razvoj funkcije $\tilde{F}(s^\star)$:

$$vp \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Phi(k)(s^\star - s_N^\star)^k, \tag{4.38}$$

gde $\Phi(k) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{G} \frac{\tilde{F}(s^\star)}{(s^\star - s_N^\star)^{k+1}} ds^\star$, zbirljiv? Jasno, trebalo bi prethodno napraviti konceptualnu razliku između sumiranja reda u *Košijevom* smislu i njegove zbirljivosti (Mitrinović, 1980)[3].

Odgovor na prethodna pitanja je u onom što sledi.

[3] Za beskonačni red, koji je ili neodređeno divergentan (konvergentan), ili samo konvergentan, u *Košijevom* smislu, a kome je na ovaj ili onaj način pridružena suma, kaže se da je zbirljiv.

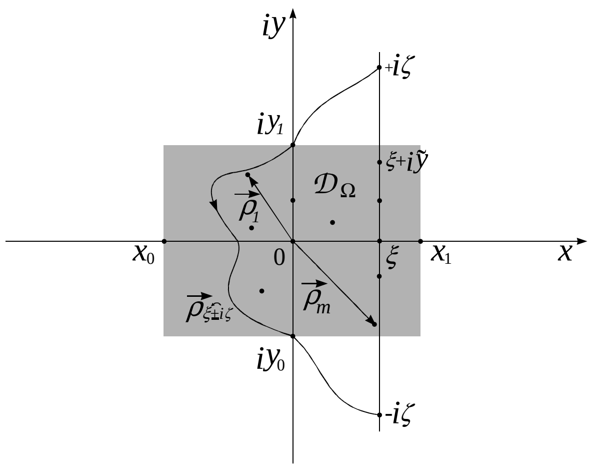
4.2 Fundamentalna granična integralna vrednost

Prethodni rezultati su osnova za dalju generalizaciju mnogih fundamentalnih rezultata kompleksne analize, koji su u eksplicitnoj ili implicitnoj vezi sa *Košijevim* računom ostataka. Jedan takav rezultat je i rezultat ranije pomenute *Žordanove* teoreme, odnosno *Dirihlejeve* teoreme, u vezi sa ekspanzijom realnih funkcija u beskonačni *Furijeov* trigonometrijski red, o čemu je bilo reči u prethodnoj sekciji poglavlja. Naime, na osnovu rezultata iz prethodnog poglavlja, moguća je dalja generalizacija rezultata *Dirihlejeve* i *Loranove* teoreme, odnosno *Teoreme 7* iz ovog poglavlja disertacije.

Neka je oblast $\mathcal{D}_\Omega = \{(x, iy) \mid x \in [x_0, x_1],\ y \in [y_0, y_1]\}$ $(0 \in \mathcal{D}_\Omega)$, real*i*realne ravni $\vec{\varrho}$, singularna oblast singularno-analitičke funkcije $f(s)$, koja je regularno-analitička funkcija van oblasti $\mathcal{D}_\Omega$. U ovom naglašenom slučaju, na osnovu rezultata (3.149) i (3.113), sledi da

$$vt \overset{\circlearrowleft}{\int_{\Gamma}} f(s)\, e^{w[(\xi+i\tilde{y})-s]} ds = \sum_{\kappa=1}^{m} p^{\Gamma}_{\vec{\varrho}_\kappa} \underset{\vec{\varrho}=\vec{\varrho}_\kappa}{\Re^2 es} \{f(s)\, e^{w[(\xi+i\tilde{y})-s]}\}, \tag{4.39}$$

gde $w \in \mathbb{C}$ je kompleksni parametar, Γ zatvorena konturna kriva, koja se sastoji iz segmenta $[-i\zeta, i\zeta]$, prave paralelne imaginarnoj osi $\Im$ real*i*realne ravni $\vec{\varrho}$ i na rastojanju $\xi \in \mathbb{R}_+$ od nje, kao i luka $\vec{\varrho}_{\overset{\frown}{\xi\pm i\zeta}}$ proizvoljne glatke *Žordanove* krive $\vec{\varrho}_\gamma$, koji obuhvata sve singularne tačke $\vec{\varrho}_\kappa$ $(\kappa = 1, 2, ..., m)$ funkcije $f(s)$ u poluravni $\Re(s) \leq \xi$, $\tilde{y} \in (y_{\hat{\kappa}}, y_1)$, a $s_{\hat{\kappa}}$ je singularitet funkcije $f(s)$ najbliži gornjoj granici $(y = y_1)$ oblasti $\mathcal{D}_\Omega$ (slika 4.3).



Slika 4.3: Zatvorena konturna kriva Γ u oblasti $\mathcal{D}_\Omega$ real*i*realne ravni $\vec{\varrho}$

Shodno tome

$$vt \int_{\xi-i\zeta}^{\xi+i\zeta} f(s)\, e^{w[(\xi+i\tilde{y})-s]} ds = \sum_{\kappa=1}^{m} p^{\Gamma}_{\vec{\varrho}_\kappa} \underset{\vec{\varrho}=\vec{\varrho}_\kappa}{\Re^2 es} \{f(s)\, e^{w[(\xi+i\tilde{y})-s]}\} - F^{l}_{\xi\pm i\zeta}(w, i\tilde{y}), \tag{4.40}$$

gde

$$F^{l}_{\xi\pm i\zeta}(w, i\tilde{y}) = \int_{\vec{\varrho}_{\overset{\frown}{\xi\pm i\zeta}}} f(s)\, e^{w[(\xi+i\tilde{y})-s]} ds.$$

Ako se pretpostavi, ne gubeći ništa od opštosti, da je luk $\vec{\varrho}_{\widehat{\xi \pm i\zeta}}$, glatke *Žordanove* krive $\vec{\varrho}_{\gamma}$, lučni deo kružne putanje integracije $\vec{\varrho}_{\kappa}\left(\vec{\varrho}_{\xi}, \zeta\right)$, u poluravni $x \leq \xi$ real*i*realne ravni $\vec{\varrho}$, tada u graničnom slučaju, kada $\zeta \to +\infty$,

$$\lim_{\zeta \to +\infty} vt \int\limits_{\xi - i\zeta}^{\xi + i\zeta} f\left(s\right) e^{w[(\xi + i\tilde{y}) - s]} ds + \lim_{\zeta \to +\infty} F^{l}_{\xi \pm i\zeta}\left(w, i\tilde{y}\right) = \sum_{\kappa=1}^{m} p_{\vec{\varrho}_{\kappa}}^{\overset{+\infty}{\Im_{||}\xi}{-\infty}} \underset{\vec{\varrho} = \vec{\varrho}_{\kappa}}{\Re^{2} es} \left\{f\left(s\right) e^{w[(\xi + i\tilde{y}) - s]}\right\}. \tag{4.41}$$

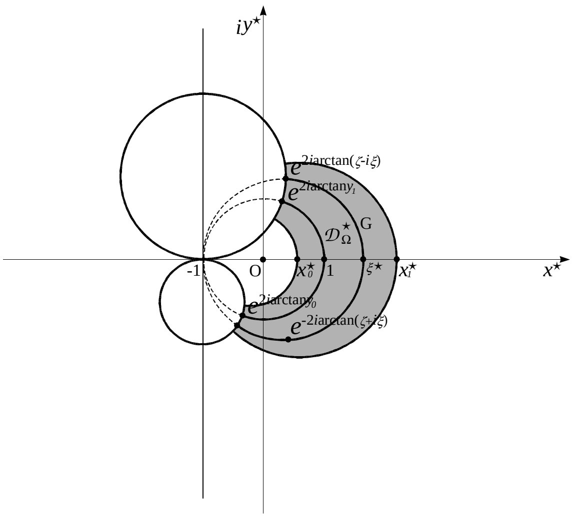
Sa druge strane, budući da je po definiciji

$$vt \int\limits_{\xi - i\infty}^{\xi + i\infty} f\left(s\right) e^{w[(\xi + i\tilde{y}) - s]} ds = \lim_{\zeta \to +\infty} vt \int\limits_{\xi - i\zeta}^{\xi + i\zeta} f\left(s\right) e^{w[(\xi + i\tilde{y}) - s]} ds + \begin{cases} \lim\limits_{\zeta \to +\infty} F^{l}_{\xi \pm i\zeta}\left(w, i\tilde{y}\right) \\ \lim\limits_{\zeta \to +\infty} F^{d}_{\xi \pm i\zeta}\left(w, i\tilde{y}\right) \end{cases}, \tag{4.42}$$

gde

$$F^{d}_{\xi \pm i\zeta}\left(w, i\tilde{y}\right) = \int\limits_{\vec{\varrho}_{\widehat{\xi \pm i\zeta}}} f\left(s\right) e^{w[(\xi + i\tilde{y}) - s]} ds \text{ i}$$

$\vec{\varrho}_{\widehat{\xi \pm i\zeta}}$ je lučni deo kružne putanje integracije $\vec{\varrho}_{\kappa}\left(\vec{\varrho}_{\xi}, \zeta\right)$ u poluravni $x \geq \xi$ real*i*realne ravni $\vec{\varrho}$, na osnovu poznatih osobina bilinearnog preslikavanja $s = \frac{s^{\star} - 1}{s^{\star} + 1}$, za svako $w \in \mathbb{C}$



Slika 4.4: Kružne putanje integracije u real*i*realnoj ravni $\vec{\varrho}^{\star}$

$$vt \int\limits_{\xi - i\infty}^{\xi + i\infty} f\left(s\right) e^{w[(\xi + i\tilde{y}) - s]} ds = 2vt \overset{\circlearrowleft}{\int\limits_{G}} f\left(\frac{s^{\star} - 1}{s^{\star} + 1}\right) \frac{e^{w\left(\frac{\tilde{s}^{\star} - 1}{\tilde{s}^{\star} + 1} - \frac{s^{\star} - 1}{s^{\star} + 1}\right)}}{\left(s^{\star} + 1\right)^{2}} ds^{\star} =$$

$$= 2vt \overset{\circlearrowleft}{\int\limits_{G}} f\left(\frac{s^{\star} - 1}{s^{\star} + 1}\right) \frac{vp \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{w^{k}}{k!} \left(\frac{\tilde{s}^{\star} - 1}{\tilde{s}^{\star} + 1} - \frac{s^{\star} - 1}{s^{\star} + 1}\right)^{k}}{\left(s^{\star} + 1\right)^{2}} ds^{\star}, \tag{4.43}$$

gde G je kružnica u real*i*realnoj ravni $\vec{\varrho}^{\star}$ i $\tilde{s}^{\star} = e^{2i \arctan(\tilde{y} - i\xi)}$ (slika 4.4).

Shodno tome

$$vt\int\limits_{\xi-i\infty}^{\xi+i\infty} f\,(s)\,e^{w[(\xi+i\tilde{y})-s]}ds = p_{|\vec{\varrho}|=+\infty}^{\overset{+\infty}{\underset{-\infty}{\Im\|\xi}}} \underset{|\vec{\varrho}|=+\infty}{\Re^2 es}\,\{f\,(s)\,e^{w[(\xi+i\tilde{y})-s]}\}+$$

$$+\sum_{\kappa=1}^{m} p_{\vec{\varrho}_\kappa}^{\overset{+\infty}{\underset{-\infty}{\Im\|\xi}}} \underset{\vec{\varrho}=\vec{\varrho}_\kappa}{\Re^2 es}\,\{f\,(s)\,e^{w[(\xi+i\tilde{y})-s]}\}, \tag{4.44}$$

gde $p_{|\vec{\varrho}|=+\infty}^{\overset{+\infty}{\underset{-\infty}{\Im\|\xi}}} = p^{G}_{\vec{\varrho}^{\star}_{-1}}$, odnosno

$$vt\int\limits_{\xi-i\infty}^{\xi+i\infty} f\,(s)\,e^{w[(\xi+i\tilde{y})-s]}ds = \sum_{\kappa=1}^{m} p_{\vec{\varrho}_\kappa}^{\overset{+\infty}{\underset{-\infty}{\Im\|\xi}}} \underset{\vec{\varrho}=\vec{\varrho}_\kappa}{\Re^2 es}\,\{f\,(s)\,e^{w[(\xi+i\tilde{y})-s]}\}-$$

$$-p_{|\vec{\varrho}|=+\infty}^{\overset{+\infty}{\underset{-\infty}{\Im\|\xi}}} \sum_{\kappa=1}^{n} \underset{\vec{\varrho}=\vec{\varrho}_\kappa}{\Re^2 es}\,\{f\,(s)\,e^{w[(\xi+i\tilde{y})-s]}\}, \tag{4.45}$$

budući da suma svih ostataka (rezidijuma) funkcije $f\,(s)\,e^{w[(\xi+i\tilde{y})-s]}$, u dovršenoj (proširenoj) real$i$realnoj ravni $\vec{\varrho} \cup \{|\vec{\varrho}| = +\infty\}$, je po definiciji jednaka nuli.

Na pravoj, koja je paralelna imaginarnoj osi $\Im$ i na rastojanju $\xi + c$ od nje ($c \in \mathbb{R}$ je takvo da su sve singularne tačke $\vec{\varrho}_\kappa (\kappa = 1, 2..., n)$ funkcije $f\,(s)$ levo ili desno od prave paralelne imaginarnoj osi $\Im$ i na rastojanju $\xi + c$ od nje), integralna vrednost funkcije $f\,(s)\,e^{w[(\xi+i\tilde{y})-s]}$:

$$vt\int\limits_{(\xi+c)-i\infty}^{(\xi+c)+i\infty} f\,(s)\,e^{w[(\xi+i\tilde{y})-s]}ds = sign\,(c)\,p_{|\vec{\varrho}|=+\infty}^{\overset{+\infty}{\underset{-\infty}{\Im\|\xi}}} \sum_{\kappa=1}^{n} \underset{\vec{\varrho}=\vec{\varrho}_\kappa}{\Re^2 es}\,\{f\,(s)\,e^{w[(\xi+i\tilde{y})-s]}\}, \tag{4.46}$$

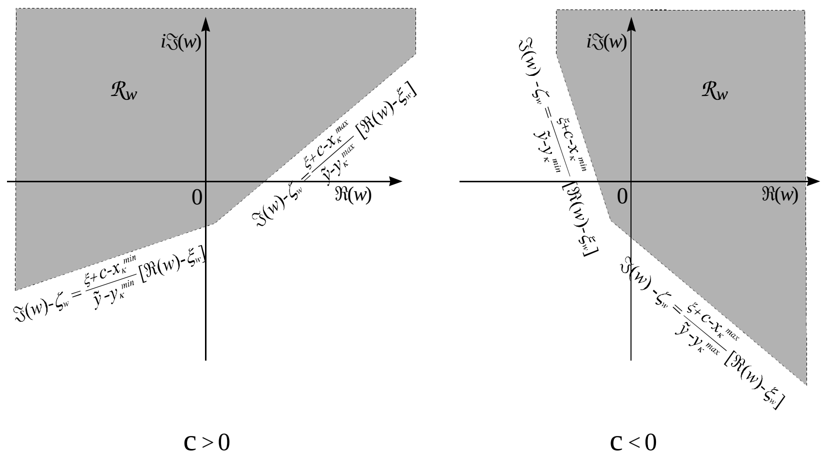
gde $sign\,(c)$ je funkcija znaka, svodi se smenom $\vec{\varrho} = \vec{\varrho} - \frac{c\sqrt{2}}{2}\,(\vec{e}^{\star}_1 + \vec{e}^{\star}_2)$ na integralnu vrednost:

$$vt\int\limits_{\xi-i\infty}^{\xi+i\infty} f\,(c+s)\,e^{w[(\xi+i\tilde{y})-s]}ds = sign\,(c)\,p_{|\vec{\varrho}|=+\infty}^{\overset{+\infty}{\underset{-\infty}{\Im\|\xi}}} \sum_{\kappa=1}^{n} \underset{\vec{\varrho}=\vec{\varrho}_\kappa}{\Re^2 es}\,\{f\,(c+s)\,e^{w[(\xi+i\tilde{y})-s]}\}. \tag{4.47}$$

Jasno, na osnovu rezultata (4.47), regioni konvergencije $\mathcal{R}_w$ integralne vrednosti funkcije $wf\,(c+s)\,e^{w[(\xi+i\tilde{y})-s]}$, za $c > 0$ i $c < 0$, kada $|w| \to +\infty$:

$$\lim_{|w|\to+\infty} vt\int\limits_{\xi-i\infty}^{\xi+i\infty} wf\,(c+s)\,e^{w[(\xi+i\tilde{y})-s]}ds = 0, \tag{4.48}$$

su one oblasti, u real$i$realnoj ravni $\vec{\varrho}_w$, koje su definisane uslovima: $\varphi_w \in (\frac{\xi+c-x^{max}_\kappa}{\tilde{y}-y^{max}_\kappa}, \frac{\xi+c-x^{min}_\kappa}{\tilde{y}-y^{min}_\kappa})$ i $\varphi_w \in (\frac{\xi+c-x^{max}_\kappa}{\tilde{y}-y^{max}_\kappa}, 2\pi + \frac{\xi+c-x^{min}_\kappa}{\tilde{y}-y^{min}_\kappa})$ (slika 4.5), gde s^{min}_κ i s^{max}_κ su singulariteti funkcije $f\,(s)$, za koje φ_w ima ekstremalne vrednosti, respektivno. Pod uslovom da je kompleksna funkcija $s \mapsto f\,(s)$ regularno-analitička funkcija u real$i$realnoj ravni $\vec{\varrho}$, odnosno singularno-analitička funkcija u real$i$realnoj ravni $\vec{\varrho}$ sa ostatkom (rezidijumom), na skupu tačaka u beskonačnosti ($|\vec{\varrho}| = +\infty$), jednakim nuli, region konvergencije $\mathcal{R}_w$, totalne integralne vrednosti funkcije



Slika 4.5: Regioni konvergencije $\mathcal{R}_w$ integralne vrednosti funkcije $wf\,(c+s)\,e^{w[(\xi+i\tilde{y})-s]}$

$wf\,(c+s)\,e^{w[(\xi+i\tilde{y})-s]}$, na dovršenim (proširenim) pravama, koje su paralelne imaginarnoj osi $\Im$ real*i*realne ravni $\vec{\varrho}$ i na rastojanju ξ od nje, je cela real*i*realna ravan $\vec{\varrho}_w$, budući da je, za svako $\xi \in \mathbb{R}$, u oba slučaja

$$vt\int_{\xi-i\infty}^{\xi+i\infty} f\,(c+s)\,e^{w[(\xi+i\tilde{y})-s]}ds \equiv 0. \tag{4.49}$$

Drugim rečima, pod uslovom da je kompleksna funkcija $s \mapsto f\,(s)$ *Riman*-integrabilna funkcija u real*i*realnoj ravni $\vec{\varrho}$, totalne integralne vrednosti funkcije $wf\,(s)\,e^{w[(\xi+i\tilde{y})-s]}$, na dovršenim (proširenim) pravama, koje su paralelne imaginarnoj osi $\Im$ real*i*realne ravni $\vec{\varrho}$ i na rastojanju $\xi \in \mathbb{R}$ od nje, identički su jednake nuli, odnosno region konvergencije $\mathcal{R}_w$, totalnih integralnih vrednosti funkcije $wf\,(s)\,e^{w[(\xi+i\tilde{y})-s]}$, na dovršenim (proširenim) pravama, koje su paralelne imaginarnoj osi $\Im$ real*i*realne ravni $\vec{\varrho}$ i na rastojanju $\xi \in \mathbb{R}$ od nje, je cela real*i*realna ravan $\vec{\varrho}_w$.

Primer 7 *Na osnovu integralne relacije (4.42), za svako* $w \in \mathbb{C}$

$$vt\int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{-ws}ds = 2vt\int_{G}^{\circlearrowleft} \frac{e^{-w\frac{s^\star-1}{s^\star+1}}}{(s^\star+1)^2}ds^\star, \tag{4.50}$$

odnosno

$$vt\int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{-ws}ds = 2vt\int_{G}^{\circlearrowleft} \frac{vp\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\frac{(-w)^k}{k!}\left(\frac{s^\star-1}{s^\star+1}\right)^k}{(s^\star+1)^2}ds^\star = 0, \tag{4.51}$$

ako se zna, iz Košijevog računa ostataka, da je za svako $k \in \aleph$

$$\underset{\vec{\varrho}^\star=\frac{\sqrt{2}}{2}(e^{-i\pi}\vec{e}_1^\star+e^{i\pi}\vec{e}_2^\star)}{R^2es}\frac{(s^\star-1)^k}{(s^\star+1)^{k+2}} = \frac{1}{(k+1)!}\frac{d^{k+1}(s^\star-1)^k}{(ds^\star)^{k+1}}\,|_{s^\star=-1}= 0. \tag{4.52}$$

Shodno tome

$$vt\int_{\substack{+\infty\\ \Im\\ -\infty}}^{i\tilde{y}\overset{\frown}{(\mp i\infty)}iy_0} e^{w(i\tilde{y}-s)}ds = vt\int_{\substack{+\infty\\ \Im\\ -\infty}}^{i\tilde{y}\overset{\frown}{\;}iy_0} e^{w(i\tilde{y}-s)}ds, \tag{4.53}$$

gde $\int\limits_{\overset{+\infty}{\underset{-\infty}{\Im}}}^{i\tilde{y}(\mp\overset{\frown}{i\infty})iy_0}$ *označava integraciju na delu dovršene (proširene) imaginarne ose* $\overset{+\infty}{\underset{-\infty}{\Im}}$*, kojim se povezuju tačke* iy_0 *i* $i\tilde{y}$ *preko beskonačnosti, odnosno*

$$vt \int\limits_{\overset{+\infty}{\underset{-\infty}{\Im}}}^{i\tilde{y}(\mp\overset{\frown}{i\infty})iy_0} e^{w(i\tilde{y}-s)}ds = \frac{1}{w}[e^{w(i\tilde{y}-iy_0)} - 1].\blacktriangledown \tag{4.54}$$

Ako je i rubna tačka $i\tilde{y}$ intervala $(iy_0, i\tilde{y})$ prave paralelne imaginarnoj osi $\Im$ real$i$realne ravni $\vec{\varrho}$ i na rastojanju ξ od nje, singularna tačka singularno-analitičke funkcije $s \mapsto f(s)$, odnosno ako je segment $[x_0, x_1]$, linije paralelne realnoj osi $\Re$ i na rastojanju $\tilde{y}$ od nje, skup tačaka konačnog diskontinuiteta funkcije $f(s)$, koja je kontinualna funkcija u odnosu na y s' desna i leva, respektivno, na tom segmentu, tada

$$e^{w(i\tilde{y}-iy_0)} \int\limits_{\xi}^{\xi+\tau} f(s+iy_0)\, e^{-w(s-\xi)}ds + e^{-w\tau} \int\limits_{\xi+iy_0}^{\xi+i\tilde{y}} f(s+\tau)\, e^{w[(\xi+i\tilde{y})-s]}ds -$$

$$- \int\limits_{\xi}^{\xi+\tau} \lim_{\zeta\to 0^+} f[s+i(\tilde{y}-\zeta)]\, e^{-w(s-\xi)}ds - vt \int\limits_{\xi+iy_0}^{\xi+i\tilde{y}} f(s)\, e^{w[(\xi+i\tilde{y})-s]}ds =$$

$$= sign(\tau) \sum_{\kappa_\xi=1}^{m_\xi} \left. \begin{matrix} p_{\vec{\varrho}_{\kappa_\xi}}^{\xi+i\tilde{y}}{}_{\xi+iy_0}\square_{\xi+\tau+iy_0}^{\xi+\tau+i\tilde{y}} (\tau > 0) \\ p_{\vec{\varrho}_{\kappa_\xi}}^{\xi+\tau+i\tilde{y}}{}_{\xi+\tau+iy_0}\square_{\xi+iy_0}^{\xi+i\tilde{y}} (\tau < 0) \end{matrix} \right\} \underset{\vec{\varrho}=\vec{\varrho}_{\kappa_\xi}}{\Re^2 es} \{f(s)\, e^{w[(\xi+i\tilde{y})-s]}\}, \tag{4.55}$$

gde sa konturama: ${}^{\xi+i\tilde{y}}_{\xi+iy_0}\square^{\xi+\tau+i\tilde{y}}_{\xi+\tau+iy_0}$ $(\tau > 0)$ i ${}^{\xi+\tau+i\tilde{y}}_{\xi+\tau+iy_0}\square^{\xi+i\tilde{y}}_{\xi+iy_0}$ $(\tau < 0)$, u real$i$realnoj ravni $\vec{\varrho}$, su obuhvaćeni samo singulariteti $\vec{\varrho}_{\kappa_\xi}$ $(\kappa_\xi = 1, ..., m_\xi)$ funkcije $f(s)$ na pravoj, koja je paralelna imaginarnoj osi $\Im$ i na rastojanju ξ od nje.

Jasno, integralna funkcija $w \mapsto vt \int\limits_{\xi+iy_0}^{\xi+i\tilde{y}} f(s)\, e^{w[(\xi+i\tilde{y})-s]}ds$ je regularno-analitička funkcija u real$i$realnoj ravni $\vec{\varrho}_w$, uzimajući u obzir činjenicu da su i preostale tri integralne funkcije, u prethodnoj relaciji, regularno-analitičke funkcije u real$i$realnoj ravni $\vec{\varrho}_w$.

Budući da u regionima $\left\{ (|\vec{\varrho}_w|, i\varphi_w) \mid \begin{matrix} \varphi_w \in (\pi/2, \pi), \text{ za } \tau < 0 \\ \varphi_w \in (0, \pi/2), \text{ za } 0 < \tau \end{matrix} \right\}$, real$i$realne ravni $\vec{\varrho}_w$, (Mitrinović i Kečkić, 1978)

$$\lim_{|w|\to+\infty} we^{-w\tau} \int\limits_{\xi+iy_0}^{\xi+i\tilde{y}} f(s+\tau)\, e^{w[(\xi+i\tilde{y})-s]}ds = 0 \text{ i}$$

$$\lim_{|w|\to+\infty} we^{w(i\tilde{y}-iy_0)} \int\limits_{\xi}^{\xi+\tau} f(s+iy_0)\, e^{-w(s-\xi)}ds = 0, \tag{4.56}$$

odnosno

$$\lim_{|w|\to+\infty}\int\limits_{\xi}^{\xi+\tau} w\lim_{\zeta\to 0^+} f\left[s+i\left(\tilde{y}-\zeta\right)\right]e^{-w(s-\xi)}ds=\lim_{\zeta\to 0^+} f\left[\xi+i\left(\tilde{y}-\zeta\right)\right], \tag{4.57}$$

navedeni regioni su u regionu konvergencije $\mathcal{R}_w$ totalne vrednosti nesvojstvenog integrala

$$\lim_{|w|\to+\infty} vt\int\limits_{\xi+iy_0}^{\xi+i\tilde{y}} wf\left(s\right)e^{w[(\xi+i\tilde{y})-s]}ds=-\lim_{\zeta\to 0^+} f\left[\xi+i\left(\tilde{y}-\zeta\right)\right], \tag{4.58}$$

odnosno region $\mathcal{R}_w=\{(|\vec{\varrho}_w|,i\varphi_w)\mid\varphi_w\in(0,\pi)\}$ je region konvergencije totalne integralne vrednosti (4.58), budući da je granična integralna vrednost (4.58) invarijantna u odnosu na vrednosti realne konstante τ, pa samim tim i u odnosu na $\Re\left(w\right)$.

Kako je i u regionima $\left\{(|\vec{\varrho}_w|,i\varphi_w)\mid\begin{array}{c}\varphi_w\in(\pi/2,\pi)\,,\text{ za }\tau<\varepsilon\\ \varphi_w\in(0,\pi/2)\,,\text{ za }\varepsilon<\tau\end{array}\right\}$, real*i*realne ravni $\vec{\varrho}_w$,

$$\lim_{|w|\to+\infty} we^{-w(\tau-\varepsilon)}\int\limits_{\xi+iy_0}^{\xi+i\tilde{y}} f\left(s+\tau\right)e^{w[(\xi+i\tilde{y})-s]}ds=0,$$

$$\lim_{|w|\to+\infty} we^{w(i\tilde{y}-iy_0)}\int\limits_{\xi+\varepsilon}^{(\xi+\varepsilon)+\tau} f\left(s+iy_0\right)e^{-w[s-(\xi+\varepsilon)]}ds=0 \text{ i}$$

$$\lim_{|w|\to+\infty}\int\limits_{\xi+\varepsilon}^{(\xi+\varepsilon)+\tau} w\lim_{\zeta\to 0^+} f\left[s+i\left(\tilde{y}-\zeta\right)\right]e^{-w[s-(\xi+\varepsilon)]}ds=\lim_{\zeta\to 0^+} f\left[(\xi+\varepsilon)+i\left(\tilde{y}-\zeta\right)\right], \tag{4.59}$$

region $\{(|\vec{\varrho}_w|,i\varphi_w)\mid\varphi_w\in(0,\pi)\}$ je region konvergencije $\mathcal{R}_w$ integralne vrednosti

$$\lim_{|w|\to+\infty}\int\limits_{\xi+iy_0}^{\xi+i\tilde{y}} wf\left(s+\varepsilon\right)e^{w[(\xi+i\tilde{y})-s]}ds=-\lim_{\zeta\to 0^+} f\left[(\xi+\varepsilon)+i\left(\tilde{y}-\zeta\right)\right]. \tag{4.60}$$

Po analogiji, za $w\in\{(|\vec{\varrho}_w|,i\varphi_w)\mid\varphi_w\in(-\pi,0)\}$,

$$\lim_{|w|\to+\infty} vt\int\limits_{\xi+i\tilde{y}}^{\xi+iy_1} wf\left(s\right)e^{w[(\xi+i\tilde{y})-s]}ds=\lim_{\zeta\to 0^+} f\left[\xi+i\left(\tilde{y}+\zeta\right)\right]. \tag{4.61}$$

Komentar 4 *Ako se ima u vidu činjenica da obe totalne integralne vrednosti (4.58) i (4.60) konvergiraju i za $\varphi_w=\pi/2$, tada uporednom analizom rezultata (4.56) i (4.57) dolazi se do zaključka da i u slučaju kada je $\varphi_w=\pi/2$*

$$\lim_{|w|\to+\infty}\int\limits_{\xi}^{\xi+\tau} w\lim_{\zeta\to 0^+} f\left[s+i\left(\tilde{y}-\zeta\right)\right]e^{-w(s-\xi)}ds-$$

$$-\lim_{|w|\to+\infty} we^{-w\tau}\int\limits_{\xi+iy_0}^{\xi+i\tilde{y}} f\left(s+\tau\right)e^{w[(\xi+i\tilde{y})-s]}ds=\lim_{\zeta\to 0^+} f\left[\xi+i\left(\tilde{y}-\zeta\right)\right].\blacktriangledown$$

4.2.1 Fundamentalna granična integralna vrednost: Alternativno izvođenje Rezultat (4.58) je od krucijalne važnosti za dokazivanje teoreme o razvoju singularno-analitičkih funkcija u *Furijeov* trigonometrijski red, na intervalu (iy_0, iy_1) prave paralelne imaginarnoj osi $\Im$ i na rastojanju ξ od nje, pa shodno tome, imajući u vidu njegov značaj, prezentuje se, u onome što sledi, alternativni put kojim se može doći do pomenutog rezultata.

Neka je u singularnoj oblasti $\mathcal{D}_\Omega$ tačka $(0, i0)$ jedina singularna tačka funkcije $s \mapsto f(s)$, $\gamma(\theta) = \frac{i(\tilde{y}-y_0)}{2}e^{i\theta} + \frac{i(\tilde{y}+y_0)}{2}$ obostrano-jednoznačno preslikavanje kompaktnog segmenta $[-\pi, 0]$ $(\theta \in [-\pi, 0])$ skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$ u $\vec{\varrho}$ i n-podela $P_n = \{\theta_0 = -\pi, \theta_1, ..., \theta_i, ..., \theta_n = 0\}$ $(n \in \aleph)$ jedna od mogućih n-podela segmenta $[-\pi, 0]$.

Ako se uzme u obzir činjenica da je kompleksna funkcija $\theta \mapsto f[\gamma(\theta)]\, e^{w[\tilde{y}-\gamma(\theta)]}$, realne promenljive θ, diferencijabilna na segmentu $[-\pi, 0]$, na osnovu teoreme o srednjoj vrednosti, za svaki parcijalni segment $[\theta_{i-1}, \theta_i]$ segmenta $[-\pi, 0]$

$$\Re\{\frac{d}{d\theta}\left\{f[\gamma(\theta)]\, e^{w[i\tilde{y}-\gamma(\theta)]}\right\}\}_{\theta=\theta_i^\star} =$$

$$= \frac{\Re\left\{f[\gamma(\theta_i)]\, e^{w[i\tilde{y}-\gamma(\theta_i)]}\right\} - \Re\left\{f[\gamma(\theta_{i-1})]\, e^{w[i\tilde{y}-\gamma(\theta_{i-1})]}\right\}}{\theta_i - \theta_{i-1}} \text{ i}$$

$$\Im\{\frac{d}{d\theta}\left\{f[\gamma(\theta)]\, e^{w[i\tilde{y}-\gamma(\theta)]}\right\}\}_{\theta=\theta_i^{\star\star}} =$$

$$= \frac{\Im\left\{f[\gamma(\theta_i)]\, e^{w[i\tilde{y}-\gamma(\theta_i)]}\right\} - \Im\left\{f[\gamma(\theta_{i-1})]\, e^{w[i\tilde{y}-\gamma(\theta_{i-1})]}\right\}}{\theta_i - \theta_{i-1}}, \tag{4.62}$$

gde $\{\theta_i^\star, \theta_i^{\star\star}\} \in [\theta_{i-1}, \theta_i]$. Shodno tome, ako se formiraju integralne sume

$$\sum_{i=1}^{n} \Re\{\frac{d}{d\theta}\left\{f[\gamma(\theta)]\, e^{w[i\tilde{y}-\gamma(\theta)]}\right\}\}_{\theta=\theta_i^\star}(\theta_i - \theta_{i-1}) = \Re[f(i\tilde{y})] - \Re\left[f(iy_0)\, e^{w(i\tilde{y}-iy_0)}\right] \text{ i}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \Im\{\frac{d}{d\theta}\left\{f[\gamma(\theta)]\, e^{w[i\tilde{y}-\gamma(\theta)]}\right\}\}_{\theta=\theta_i^{\star\star}}(\theta_i - \theta_{i-1}) = \Im[f(i\tilde{y})] - \Im\left[f(iy_0)\, e^{w(i\tilde{y}-iy_0)}\right], \tag{4.63}$$

one se, nakon izvršene operacije diferenciranja funkcije, pod znakom integralnih suma, svode na integralne sume

$$\sum_{i=1}^{n} \{\Re\{\frac{d}{d\theta} f[\gamma(\theta)]\, e^{w[i\tilde{y}-\gamma(\theta)]}\}_{\theta=\theta_i^\star}(\theta_i - \theta_{i-1}) -$$

$$-\Re\left\{wf[\gamma(\theta)]\, e^{w[i\tilde{y}-\gamma(\theta)]}\gamma'(\theta)\right\}_{\theta=\theta_i^\star}(\theta_i - \theta_{i-1})\} = \Re[f(i\tilde{y})] - \Re\left[f(iy_0)\, e^{w(i\tilde{y}-iy_0)}\right] \text{ i}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \{\Im\{\frac{d}{d\theta} f[\gamma(\theta)]\, e^{w[i\tilde{y}-\gamma(\theta)]}\}_{\theta=\theta_i^{\star\star}}(\theta_i - \theta_{i-1}) -$$

$$-\Im\left\{wf[\gamma(\theta)]\, e^{w[i\tilde{y}-\gamma(\theta)]}\gamma'(\theta)\right\}_{\theta=\theta_i^{\star\star}}(\theta_i - \theta_{i-1})\} = \Im[f(i\tilde{y})] - \Im\left[f(iy_0)\, e^{w(i\tilde{y}-iy_0)}\right], \tag{4.64}$$

gde $\gamma'(\theta)$ je funkcija prvog izvoda funkcije $\gamma(\theta)$. Sa druge strane, za $\theta \in (-\pi, 0)$

$$w[i\tilde{y} - \gamma(\theta)] = w[\frac{i(\tilde{y}-y_0)}{2}]\left(1 - e^{i\theta}\right) =$$

$$= [\frac{i(\tilde{y}-y_0)}{2}][\Re(w) + i\Im(w)](1 - \cos\theta)[1 - i\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}], \tag{4.65}$$

budući da $\gamma(\theta) = \frac{i(\tilde{y}-y_0)}{2} e^{i\theta} + \frac{i(y_0+\tilde{y})}{2}$. U tom slučaju $e^{w[i\tilde{y}-\gamma(\theta)]} \to 0^+$, kada

$$(1-\cos\theta)\,[\Im(w) - \Re(w)\,\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}] \to +\infty. \tag{4.66}$$

Ako se ima u vidu da je $\frac{\Im(w)}{\Re(w)} = \tan\varphi_w$, uslov (4.66) je zadovoljen za $\varphi_w \in [0, \frac{\pi}{2}]$, odnosno $\lim\limits_{|w|\to+\infty} e^{w[i\tilde{y}-\gamma(\theta)]} = 0$, za svako $\varphi_w \in [0, \frac{\pi}{2}]$ i $\theta \in (-\pi, 0)$.

Shodno tome, u graničnom slučaju, kada broj podela segmenta $[-\pi, 0]$ teži beskonačnosti $(n \to +\infty)$, odnosno kada se maksimalni parcijalni segment $[\theta_{i-1}, \theta_i]$, segmenta $[-\pi, 0]$, sažme u tačku, uslov $\varphi_w \in [0, \frac{\pi}{2}]$ definiše region konvergencije $\mathcal{R}_w$, u real$i$realnoj ravni $\vec{\varrho}_w$, parametarskog konturnog integrala

$$\lim_{|w|\to+\infty} w \int\limits_{\gamma_{\mathrm{P}}}^{\frown} f(s)\,e^{w(i\tilde{y}-s)}ds = -f(i\tilde{y}), \tag{4.67}$$

gde $\gamma_{\mathrm{P}} = \{(x, iy) \mid x = -\frac{\tilde{y}-y_0}{2}\sin\theta,\ y = \frac{\tilde{y}-y_0}{2}\cos\theta + \frac{\tilde{y}+y_0}{2} \text{ i } \theta \in [-\pi, 0]\}$.

U sledećem koraku, na mesto krive γ_{P}, uzima se, za putanju integracije, ravanska kriva γ_{p}, koja se sastoji od segmenata: $[iy_0, -i\varepsilon]$ i $[i\varepsilon, i\tilde{y}]$ $(i\varepsilon \in \Im_+)$, imaginarne ose $\Im$ real$i$realne ravni $\vec{\varrho}$ i luka $\vec{\varrho}_{\overset{\frown}{i\varepsilon,-i\varepsilon}}$ kružne putanje integracije $\vec{\varrho}_\gamma(\vec{\varrho}_O, \varepsilon) = \{\vec{\varrho}_A \mid \vec{\varrho}_A = \varepsilon\frac{\sqrt{2}}{2}(e^{-i\varphi}\vec{e}_1^{\,\star} + e^{i\varphi}\vec{e}_2^{\,\star})\}$, koji je definisan obostrano-jednoznačnim preslikavanjem $\gamma(\theta) = i\varepsilon e^{i\theta}$ kompaktnog segmenta $[-\pi, 0]$ $(\theta \in [-\pi, 0])$ skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$ u $\vec{\varrho}$. U tom slučaju, suma integralnih vrednosti

$$vp \int\limits_{\Im}^{\overset{\frown}{i\tilde{y}iy_0}} f(s)\,e^{w(i\tilde{y}-s)}ds = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\{\int\limits_{\Im}^{\overset{\frown}{-i\varepsilon iy_0}} f(s)\,e^{w(i\tilde{y}-s)}ds + \int\limits_{\Im}^{\overset{\frown}{i\tilde{y}i\varepsilon}} f(s)\,e^{w(i\tilde{y}-s)}ds\} \text{ i}$$

$$vs \int\limits_{\Im}^{\overset{\frown}{i\tilde{y}iy_0}} f(s)\,e^{w(i\tilde{y}-s)}ds = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left\{\begin{array}{l} \int\limits_{\vec{\varrho}_{\overset{\frown}{i\varepsilon,-i\varepsilon}}} f(s)\,e^{w(i\tilde{y}-s)}ds \\ \int\limits_{\vec{\varrho}_{\overset{\frown}{-i\varepsilon,i\varepsilon}}} f(s)\,e^{w(i\tilde{y}-s)}ds \end{array}\right., \tag{4.68}$$

po definiciji je totalna vrednost nesvojstvenog integrala funkcije $s \mapsto f(s)\,e^{w(i\tilde{y}-s)}$.

Za putanju integracije $\gamma(\theta) = i\varepsilon e^{i\theta}$ $(\theta \in [-\pi, 0])$

$$w\,[i\tilde{y} - \gamma(\theta)] = [\Re(w) + i\Im(w)][i(\tilde{y} - \varepsilon\cos\theta) + \varepsilon\sin\theta]. \tag{4.69}$$

Shodno tome, za $\theta \in (-\pi, 0)$, $e^{w[i\tilde{y}-\gamma(\theta)]} \to 0^+$, kada

$$[\Re(w)\,\varepsilon\sin\theta - \Im(w)\,(\tilde{y} - \varepsilon\cos\theta)] \to -\infty. \tag{4.70}$$

Budući da je $\tilde{y} > \varepsilon$, postoji $k \in \mathbb{R}_+$, takvo da $\tilde{y} = (1+k)\,\varepsilon$. Na osnovu uslova (4.70), koji se u ovim okolnostima svodi na uslov

$$k\Im(w) + (1-\cos\theta)\,[\Im(w) - \Re(w)\,\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}] \to +\infty, \tag{4.71}$$

sledi da uslov $\varphi_w \in [0, \pi/2 + \arctan k]$ definiše region konvergencije, u real$i$realnoj ravni $\vec{\varrho}_w$, parametarskog konturnog integrala

$$\lim_{|w|\to+\infty} w \int\limits_{\vec{\varrho}_{\overset{\frown}{i\varepsilon,-i\varepsilon}}} f(s)\,e^{w(i\tilde{y}-s)}ds = 0. \tag{4.72}$$

Sa druge strane, na segmentima: $[iy_0, -i\varepsilon]$ i $[i\varepsilon, i\tilde{y}]$, imaginarne ose $\Im$ real$i$realne ravni $\vec{\varrho}$, funkcija $f(s)$ zadovoljava dobro-poznate *Dirihlejeve* uslove, tako da za svako $\varphi_w \in (0,\pi)$

$$\lim_{|w|\to+\infty} w \int\limits_{iy_0}^{-i\varepsilon} f(s)\, e^{w(i\tilde{y}-s)} ds = 0 \text{ i}$$

$$\lim_{|w|\to+\infty} w \int\limits_{i\varepsilon}^{i\tilde{y}} f(s)\, e^{w(i\tilde{y}-s)} ds = -f(i\tilde{y}) \tag{4.73}$$

Ako se uzme u obzir činjenica da u graničnom slučaju, kada $\varepsilon \to 0^+$, a za svako $\tilde{y} > 0$, $k \to +\infty$ $(\tilde{y} = (1+k)\,\varepsilon)$, konačno sledi, na osnovu prethodna dva rezultata (4.72) i (4.73), da u regionu $\mathcal{R}_w = \{(|\vec{\varrho}_w|, i\varphi_w) \mid \varphi_w \in (0,\pi)\}$, real$i$realne ravni $\vec{\varrho}_w$, konvergira totalna vrednost nesvojstvenog integrala funkcije $s \mapsto f(s)\, e^{w(i\tilde{y}-s)}$:

$$\lim_{|w|\to+\infty} vt \int\limits_{iy_0}^{i\tilde{y}} wf(s)\, e^{w(i\tilde{y}-s)} ds = -f(i\tilde{y}) \,. \tag{4.74}$$

Po analogiji, u regionu $\mathcal{R}_w = \{(|\vec{\varrho}_w|, i\varphi_w) \mid \varphi_w \in (-\pi,0)\}$, real$i$realne ravni $\vec{\varrho}_w$,

$$\lim_{|w|\to+\infty} vt \int\limits_{i\tilde{y}}^{iy_1} wf(s)\, e^{w(i\tilde{y}-s)} ds = f(i\tilde{y}) \text{ i}$$

$$\lim_{|w|\to+\infty} vt \int\limits_{iy_0}^{i\tilde{y}} wf(s)\, e^{w(iy_0-s)} ds = f(iy_0) \,, \tag{4.75}$$

za svako $\tilde{y} \in (y_0, y_1)$.

Komentar 5 *Analizom postupka izvođenja fundamentalnih graničnih integralnih vrednosti (4.74) i (4.75), lako se može izvesti zaključak da za razliku od graničnih vrednosti integrala:*

$$\lim_{|w|\to+\infty} w \int\limits_{\gamma_p}^{\curvearrowleft} f(s)\, e^{w(i\tilde{y}-s)} ds = -f(i\tilde{y}) \;\; i$$

$$\lim_{|w|\to+\infty} vt \int\limits_{iy_0}^{i\tilde{y}} wf(s)\, e^{w(i\tilde{y}-s)} ds = -f(i\tilde{y}) \,, \tag{4.76}$$

koje su jednake, regioni konvergencije $\mathcal{R}_w$, definisani uslovima: $\varphi_w \in [0,\pi/2]$ i $\varphi_w \in (0,\pi)$, respektivno, su različiti.

Jasno, ukoliko je kompleksna funkcija $s \mapsto f(s)$ Riman-integrabilna duž dela imaginarne ose $\Im$ real$i$realne ravni $\vec{\varrho}$, Košijeva glavna vrednost integrala funkcije $s \mapsto f(s)\, e^{w(i\tilde{y}-s)}$, na bilo kom segmentu $[iy_0, i\tilde{y}]$ toga dela imaginarne ose $\Im$, upravo je jednaka samoj integralnoj vrednosti te funkcije na tom segmentu, odnosno Žordanova singularna integralna vrednost funkcije $s \mapsto f(s)\, e^{w(i\tilde{y}-s)}$, na tom segmentu toga dela imaginarne ose $\Im$, jednaka je nuli.▼

4.3 Integralne transformacije

Fundamentalne granične integralne vrednosti (4.58) i (4.61) mogu se, u *Košijevom* računu ostataka, tačnije kompleksnoj analizi, zbog njihove primenljivosti pri konturnoj integraciji, efikasno primeniti u postupku generalizacije fundamentalnih integralnih relacija, prvenstveno u teoriji integralnih transformacija, kao što sledi.

Neka je real*i*realna ravan $\vec{\varrho}_w$ podeljena pravcima $\vec{\varrho}_w^{\,\alpha(\varepsilon)}$ i $\vec{\varrho}_w^{\,\pi-\alpha(\varepsilon)}$:

$$\begin{aligned}\vec{\varrho}_w^{\,\alpha(\varepsilon)} &= \{\vec{\varrho}_w \mid \vec{\varrho}_w - \vec{\varrho}_{wA} = |\vec{\varrho}_w - \vec{\varrho}_{wA}|\,\vec{\varrho}_{w0},\, \varphi_w = \alpha(\varepsilon)\} \text{ i}\\ \vec{\varrho}_w^{\,\pi-\alpha(\varepsilon)} &= \{\vec{\varrho}_w \mid \vec{\varrho}_w - \vec{\varrho}_{wA} = |\vec{\varrho}_w - \vec{\varrho}_{wA}|\,\vec{\varrho}_{w0},\, \varphi_w = \pi - \alpha(\varepsilon)\},\end{aligned} \tag{4.77}$$

gde $\varepsilon \mapsto \alpha(\varepsilon)$ je realna ugaona funkcija, konačno malih pozitivnih vrednosti, koja zadovoljava uslov $\alpha(\varepsilon) \to 0^+$, kada $\varepsilon \to +\infty$, a $\vec{\varrho}_{wA}$ je proizvoljna tačka real*i*realne ravni $\vec{\varrho}_w$, na dve oblasti, za neko konačno ε ($\varepsilon \in \mathbb{R}_+$).

Kako je integralna funkcija $w \mapsto vt \int\limits_{\xi+iy_0}^{\xi+i\tilde{y}} f(s)\, e^{w[(\xi+i\tilde{y})-s]}ds$ regularno-analitička funkcija u real*i*realnoj ravni $\vec{\varrho}_w$, neposredno sledi, na osnovu rezultata (3.132), kao i fundamentalne granične integralne vrednosti (4.58), da za svako $\tilde{y} > 0$

$$\lim_{\varepsilon\to+\infty}\{\int\limits_{\vec{\varrho}_w^{\,\pi-\alpha(\varepsilon)}}^{\varepsilon\searrow 0}\{vt\int\limits_{\xi+iy_0}^{\xi+i\tilde{y}} f(s)\, e^{w[(\xi+i\tilde{y})-s]}ds\}dw + \int\limits_{\vec{\varrho}_w^{\,\alpha(\varepsilon)}}^{0\nearrow\varepsilon}\{vt\int\limits_{\xi+iy_0}^{\xi+i\tilde{y}} f(s)\, e^{w[(\xi+i\tilde{y})-s]}ds\}dw\} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+\infty}\int\limits_{\vec{\varrho}_{w\kappa}(\vec{\varrho}_{wA},\varepsilon)_{\alpha(\varepsilon)}^{\pi-\alpha(\varepsilon)}}^{\curvearrowright}\{vt\int\limits_{\xi+iy_0}^{\xi+i\tilde{y}} f(s)\, e^{w[(\xi+i\tilde{y})-s]}ds\}dw = \pi i \lim_{\zeta\to 0^+} f[\xi + i(\tilde{y} - \zeta)], \tag{4.78}$$

gde $\vec{\varrho}_{w\kappa}(\vec{\varrho}_{wA},\varepsilon)_{\alpha(\varepsilon)}^{\pi-\alpha(\varepsilon)}$ je lučni deo kružne putanje integracije $\vec{\varrho}_{w\kappa}(\vec{\varrho}_{wA},\varepsilon)$ u oblasti real*i*realne ravni $\vec{\varrho}_w$, koja je u regionu konvergencije $\mathcal{R}_w$ integralne vrednosti funkcije $f(s)\, e^{w[(\xi+i\tilde{y})-s]}$, omeđene pravcima $\vec{\varrho}_w^{\,\alpha(\varepsilon)}$ i $\vec{\varrho}_w^{\,\pi-\alpha(\varepsilon)}$.

Jasno, region konvergencije $\mathcal{R}_w$, fundamentalne granične integralne vrednosti (4.58), ima ugaoni raspon koji obezbeđuje egzistenciju *Košijeve* glavne vrednosti nesvojstvenog integrala integralne funkcije $w \mapsto vt \int\limits_{\xi+iy_0}^{\xi+i\tilde{y}} f(s)\, e^{w[(\xi+i\tilde{y})-s]}ds$, drugim rečima za svako $\zeta_w \in \mathbb{R}$

$$\lim_{\omega\to+\infty}\int\limits_{i\zeta_w-\omega}^{i\zeta_w+\omega}\{vt\int\limits_{\xi+iy_0}^{\xi+i\tilde{y}} f(s)\, e^{w[(\xi+i\tilde{y})-s]}ds\}dw = \pi i \lim_{\zeta\to 0^+} f[\xi + i(\tilde{y} - \zeta)], \tag{4.79}$$

što je u saglasnosti sa *Mitrinovićevim* rezultatom na *str. 22* u (Mitrinović, 1966).

Po analogiji, za svako $\zeta_w \in \mathbb{R}$

$$\lim_{\omega\to+\infty}\int\limits_{i\zeta_w-\omega}^{i\zeta_w+\omega}\{vt\int\limits_{\xi+i\tilde{y}}^{\xi+iy_1} f(s)\, e^{w[(\xi+i\tilde{y})-s]}ds\}dw = \pi i \lim_{\zeta\to 0^+} f[\xi + i(\tilde{y} + \zeta)]. \tag{4.80}$$

Shodno tome, za svako $\zeta_w \in \mathbb{R}$ i svako $s \neq s_{\kappa_\xi}$, takvo da $\Re(s) = \xi$ i $\Im(s) \in [y_0, y_1]$

$$\frac{1}{2\pi i}\lim_{\omega\to+\infty}\int\limits_{i\zeta_w-\omega}^{i\zeta_w+\omega}[vt\int\limits_{\xi+iy_0}^{\xi+iy_1} f(s)\, e^{-ws}ds]e^{sw}dw = \mathcal{F}(s), \tag{4.81}$$

gde $\mathcal{F}(s)$ je normalizovana funkcija $f(s)$.

Ako postoji region $\mathcal{R}_w = \{(\Re(w), i\Im(w)) \mid \beta > \Im(w)\}$ ($\beta \in \mathbb{R}$), real*i*realne ravni $\vec{\varrho}_w$, u kome apsolutno konvergira integralna funkcija $w \mapsto vt \int\limits_{\xi+i0}^{\xi+i\zeta} f(s)\, e^{-ws} ds$:

$$\lim_{\zeta\to+\infty} vt \int\limits_{\xi+i0}^{\xi+i\zeta} f(s)\, e^{-ws} ds = \tilde{F}(w)\,, \tag{4.82}$$

sledi, na osnovu rezultata (4.81), da za svako $s \neq s_{\kappa_\xi}$, takvo da $\Re(s) = \xi$ i $\Im(s) \geq 0$, kao i za svako $\zeta_w < \beta$

$$\frac{1}{2\pi i} \lim_{\omega\to+\infty} \int\limits_{i\zeta_w-\omega}^{i\zeta_w+\omega} [\lim_{\zeta\to+\infty} vt \int\limits_{\xi+i0}^{\xi+i\zeta} f(s)\, e^{-ws} ds] e^{sw} dw = \mathcal{F}(s)\,. \tag{4.83}$$

U slučaju da i u regionu $\mathcal{R}_w = \{(\Re(w), i\Im(w)) \mid \alpha < \Im(w)\}$ ($\alpha < \beta$), real*i*realne ravni $\vec{\varrho}_w$, apsolutno konvergira integralna funkcija $w \mapsto vt \int\limits_{\xi-i\zeta}^{\xi+i0} f(s)\, e^{-ws} ds$:

$$\lim_{\zeta\to+\infty} vt \int\limits_{\xi-i\zeta}^{\xi+i0} f(s)\, e^{-ws} ds = \tilde{F}(w)\,, \tag{4.84}$$

sledi, na osnovu rezultata (4.81), da za svako $s \neq s_{\kappa_\xi}$, takvo da $\Re(s) = \xi$, kao i za svako $\zeta_w \in (\alpha, \beta)$

$$\frac{1}{2\pi i} \lim_{\omega\to+\infty} \int\limits_{i\zeta_w-\omega}^{i\zeta_w+\omega} [\lim_{\zeta\to+\infty} vt \int\limits_{\xi-i\zeta}^{\xi+i\zeta} f(s)\, e^{-ws} ds] e^{sw} dw = \mathcal{F}(s)\,. \tag{4.85}$$

Ako se dalje pretpostavi, ne gubeći ništa od opštosti, da kompleksna funkcija $s \mapsto f(s)$, koja je singularno-analitička funkcija u real*i*realnoj ravni $\vec{\varrho}$, nema drugih singularnih tačaka u poluravni $\Re(s) \leq \xi$ real*i*realne ravni $\vec{\varrho}$, osim singulariteta u tački $(\xi, i0)$ i onih singularnih tačaka $\vec{\varrho}_\kappa$ ($\kappa = 1, 2, ..., m$) koje su unutar konturne krive Γ (slika 4.1), sledi da

$$vp \int\limits_{\xi-i\zeta}^{\xi+i\zeta} f(s)\, e^{-ws} ds = -F^l_{\xi\pm i\zeta}(w) + 2\pi i \sum_{\kappa=1}^{m} \underset{\vec{\varrho}=\vec{\varrho}_\kappa}{\Re^2 es} [f(s)\, e^{-ws}] + \pi i \underset{\vec{\varrho}=\vec{\varrho}_\xi}{\Re^2 es} [f(s)\, e^{-ws}]. \tag{4.86}$$

Shodno rezultatu jedne od *Baskinovih* opštih teorema (Baskin, 1962), za svako w takvo da $sf(s)\, e^{-ws} = o(|s|^{-1})$[4] za $\varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ (preporučljivo je pogledati (Mitrinović, 1966) *str.* 22 ili (Mitrinović & Kečkić, 1978) *str.* 103)

$$vp \int\limits_{\xi-i\infty}^{\xi+i\infty} f(s)\, e^{-ws} ds = -2\pi i \sum_{\kappa=m+1}^{n} \underset{\vec{\varrho}=\vec{\varrho}_\kappa}{\Re^2 es} [f(s)\, e^{-ws}] - \pi i \underset{\vec{\varrho}=\vec{\varrho}_\xi}{\Re^2 es} [f(s)\, e^{-ws}], \tag{4.87}$$

[4] $u(\bullet) = o\{v(\bullet)\}$ - znači da za kompleksne funkcije $u(\bullet)$ i $v(\bullet)$, definisane na skupu $\{\bullet \mid |\bullet| > R\}$, postoje $\hat{R} \geq R$ i funkcija $\bullet \mapsto \varepsilon(\bullet)$, takva da $\varepsilon(\bullet) \to 0$ ($|\bullet| \to +\infty$) i $u(\bullet) = \varepsilon(\bullet)\, v(\bullet)$, za svako $|\bullet| > \hat{R}$.

gde $\vec{\varrho}_\kappa$ $(\kappa = m+1, m+2, ..., n)$ su singularne tačke funkcije $s \mapsto f(s)$ u desnoj poluravni $\Re(s) > \xi$.

Na osnovu integralnih relacija (4.86) i (4.87), konačno sledi da

$$vp \int\limits_{\xi-i\infty}^{\xi+i\infty} f(s)\, e^{-ws} ds = -\lim_{\zeta\to+\infty} F^l_{\xi\pm i\zeta}(w) + 2\pi i \sum_{\kappa=1}^{m} \underset{\vec{\varrho}=\vec{\varrho}_\kappa}{\Re^2 es} \left[f(s)\, e^{-ws}\right] +$$

$$+\pi i \underset{\vec{\varrho}=\vec{\varrho}_\xi}{\Re^2 es} \left[f(s)\, e^{-ws}\right] = -2\pi i \sum_{\kappa=m+1}^{n} \underset{\vec{\varrho}=\vec{\varrho}_\kappa}{\Re^2 es} \left[f(s)\, e^{-ws}\right] - \pi i \underset{\vec{\varrho}=\vec{\varrho}_\xi}{\Re^2 es} \left[f(s)\, e^{-ws}\right],$$

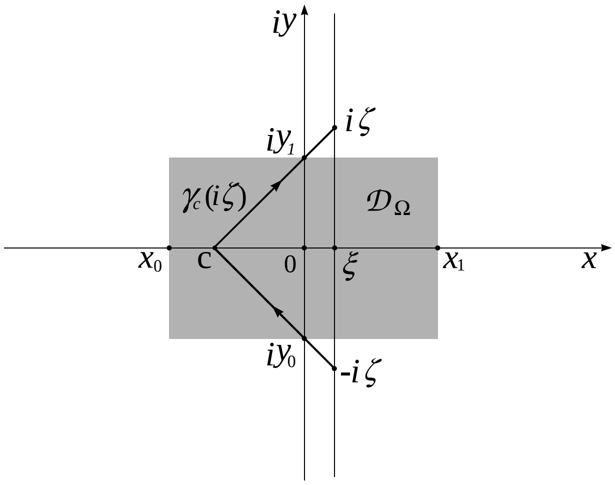
za svako w takvo da $sf(s)\, e^{-sw} = o(|s|^{-1})$ za $\varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, odnosno

$$\lim_{\zeta\to+\infty} F^l_{\xi\pm i\zeta}(w) = 2\pi i \sum_{\kappa=0}^{n} \underset{\vec{\varrho}=\vec{\varrho}_\kappa}{\Re^2 es} \left[f(s)\, e^{-ws}\right]. \tag{4.88}$$

Ako su sve singularne tačke funkcije $f(s)$ u poluravni $\Re(s) > c$, gde $c \in \mathbb{R}_-$ je takvo da, za $0 \le r^2 \le (\xi - c)^2 + \zeta^2$ (slika 4.6),

$$\gamma_c(i\zeta) = \{(x, iy) \mid (x-c) + iy = re^{i\arctan\frac{\zeta}{\xi-c}} \cup (x-c) + iy = re^{-i\arctan\frac{\zeta}{\xi-c}}\}, \tag{4.89}$$

odnosno $f(s) = o(|s|^{-1})$ za $\varphi \in [0, 2\pi]$, eksplicitno sledi, na osnovu izvedene relacije (4.88), da za $\Im(w) = 0$, $\Re(w) > 0$ i $\Re(s^\star) < c$



Slika 4.6: Konturna kriva $\gamma_c(i\zeta)$ u real*i*realnoj ravni $\vec{\varrho}$

$$\lim_{\omega\to+\infty} \int\limits_{0^+}^{\omega} \{\sum_{\kappa=0}^{n} \underset{\vec{\varrho}=\vec{\varrho}_\kappa}{\Re^2 es} \left[f(s)\, e^{-ws}\right]\} e^{s^\star w} dw = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\omega\to+\infty} \int\limits_{0^+}^{\omega} [\lim_{\zeta\to+\infty} F^l_{\xi\pm i\zeta}(w)] e^{s^\star w} dw =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i} \lim_{\omega\to+\infty} \int\limits_{0^+}^{\omega} [\lim_{\zeta\to+\infty} \int\limits_{\gamma_c}^{\xi - i\overset{\frown}{\zeta\xi} + i\zeta} f(s)\, e^{-w(s-s^\star)} ds] dw =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i} \lim_{\zeta\to+\infty} \int\limits_{\gamma_c}^{\xi - i\overset{\frown}{\zeta\xi} + i\zeta} \frac{f(s)}{(s-s^\star)} ds = f(s^\star). \tag{4.90}$$

4.4 Generalizacija rezultata *Žordanove* teoreme

Analizom integralnih relacija, koje definišu konačnu, unilateralnu i bilateralnu *Laplasovu* integralnu transformaciju i koje su izvedene u prethodnoj sekciji ovog poglavlja disertacije, na osnovu rezultata (4.81) i fundamentalnih graničnih integralnih vrednosti (4.58) i (4.61), moguće je doći do zaključka da se prethodno dobijeni rezultati mogu generalizovati i na klasu singularno-analitičkih funkcija, koje na nekom intervalu (iy_0, iy_1) prave paralelne imaginarnoj osi $\Im$ real*i*realne ravni $\vec{\varrho}$ i na rastojanju $\xi \in \mathbb{R}$ od nje, osim singulariteta u formi konačnog diskontinuiteta, imaju i singularitete u formi beskonačnog diskontinuiteta funkcije. Drugim rečima, rezultat (4.85), kao posledica rezultata (4.81) i fundamentalnih graničnih integralnih vrednosti (4.58) i (4.61), koji generalizuje rezultat *Furijeove* integralne teoreme, implicitno dokazuje da se i rezultat *Dirihlejeve* teoreme, odnosno *Žordanove* teoreme, kao opštije, čija je posledica i *Teorema 7* iz uvoda ovog poglavlja disertacije, može generalizovati, u smislu da je aplikativan i na prethodno pomenutu klasu funkcija. Iz razloga fundamentalnosti jednog takvog rezultata, formulisaće se i ekplicitno dokazati teorema, kojom se generalizuje rezultat *Žordanove* teoreme.

Teorema 8 *Ako je linearna oblast* $\mathcal{D}_{\Im\|\xi} = \{(x, iy) \mid x = \xi,\ y \in [y_0 + a, y_1 - a]\}\ (a \in \mathbb{R}_+)$, *prave paralelne imaginarnoj osi* $\Im$ *real*i*realne ravni* $\vec{\varrho}$ *i na rastojanju* $\xi \in \mathbb{R}$ *od nje, singularna oblast kompleksne funkcije* $f(s)$, *tada za svako* $s \in \mathcal{D}_{\Im\|\xi}$ *i* $s \neq s_k$, *gde* s_k *su singularne tačke beskonačnog diskontinuiteta funkcije* $f(s)$ *u oblasti* $\mathcal{D}_{\Im\|\xi}$, *važi*

$$\mathcal{F}(s) = vt \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Phi(k)\, e^{\frac{2k\pi}{a}s}, \tag{4.91}$$

gde $\mathcal{F}(s)$ *je normalizovana funkcija* $f(s)$ *i*

$$\Phi(k) = \frac{1}{ai} vt \int_{\xi+iy_0}^{\xi+iy_1} f(s)\, e^{-\frac{2k\pi}{a}s} ds. \blacktriangledown \tag{4.92}$$

Za totalnu vrednost (vt) sume beskonačnog funkcionalnog reda relacije (4.91), prethodno formulisane teoreme, može se reći da je definisana u opštijem smislu u odnosu na *Košijevu* glavnu vrednost (vp). Drugim rečima, ovaj beskonačni funkcionalni red, a koji neodređeno divergira u *Košijevom* smislu, je zbirljiv i ima definisanu sumu. Shodno tome, za koeficijente funkcionalnog reda $\Phi(k)$, generalno govoreći, ne važi rezultat *Riman-Lebegove* teoreme, koji je i posledica *Beselove* nejednakosti, čak šta više moguće je da je, u pojedinim slučajevima, $\lim\limits_{k\to\pm\infty} \Phi(k) = \pm\infty$.

Kao neposredna posledica *Teoreme 8*, može se formulisati sledeća teorema.

Teorema 9 *Neka je kompleksna funkcija* $F(s^\star)$ *univalentna (uniformna) funkcija u oblasti* $\mathcal{D}^\star_\Omega = \{\vec{\varrho}^{\,\star}_A \mid |\vec{\varrho}^{\,\star}_A - \vec{\varrho}^{\,\star}_N| \in (A, B)\}$, *gde* $A \geq 0$ *i* $B \leq +\infty$, *koja je singularna oblast funkcije* $F(s^\star)$. *Tada, u svakoj tački* $\vec{\varrho}^{\,\star}_A \neq \vec{\varrho}^{\,\star}_\kappa$ *kružnice* $G_c = \{\vec{\varrho}^{\,\star}_A \mid |\vec{\varrho}^{\,\star}_A - \vec{\varrho}^{\,\star}_N| = C \in (A, B)\}$, *gde* $\vec{\varrho}^{\,\star}_\kappa$ *su singularne tačke beskonačnog diskontinuiteta funkcije* $F(s^\star)$ *na kružnici* G_c,

$$\mathcal{F}(s^\star) = vt \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \tilde{\Phi}(k)\, (s^\star - s^\star_N)^k, \tag{4.93}$$

gde

$$\tilde{\Phi}(k) = \frac{1}{2\pi i} vt \oint_{G_c} \frac{F(s^\star)}{(s^\star - s_N^\star)^{k+1}} ds^\star \ \ i$$

$$\mathcal{F}(s^\star) = \frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \to 0^+} [F(s^\star e^{i\varepsilon}) + F(s^\star e^{-i\varepsilon})]. \tag{4.94}$$

U slučaju da postoji i oblast konvergencije $\mathcal{R}_\Omega^\star = \{\vec{\varrho}_A^\star \mid |\vec{\varrho}_A^\star - \vec{\varrho}_N^\star| \in (\tilde{A}, \tilde{B})\}$ *potencijalnog reda (4.93) funkcije* $F(s^\star)$*, tada u svakoj tački oblasti* $\mathcal{R}_\Omega^\star$

$$F(s^\star) = vt \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Phi(k) (s^\star - s_N^\star)^k \ \ i$$

$$\Phi(k) = \frac{1}{2\pi i} vt \oint_{G_c} \frac{F(s^\star)}{(s^\star - s_N^\star)^{k+1}} ds^\star, \tag{4.95}$$

gde

$$G_c = \{\vec{\varrho}_A^\star \mid |\vec{\varrho}_A^\star - \vec{\varrho}_N^\star| = C \in (\tilde{A}, \tilde{B})\}.\blacktriangledown \tag{4.96}$$

Jasno, rezultat prethodne teoreme generalizuje rezultat *Loranove* teoreme, kao i rezultat *Teoreme 8.*

4.4.1 Dokaz Teoreme 8

Analiza ideje dokaza teoreme. Pretpostavlja se da funkcija $w \mapsto g(w, \xi + i\tilde{y})$, gde $w \in \mathbb{C}$ je promenljiva, nezavisna u odnosu na drugu promenljivu $(\xi + i\tilde{y}) \in \mathbb{C}$, ima beskonačno, ali prebrojivo mnogo, singulariteta $\vec{\varrho}_{wk}$ $(k \in \mathbb{Z})$ na realnoj osi $\Re_w$ real*i*realne ravni $\vec{\varrho}_w$, sa tačkama nagomilavanja u beskonačnosti. Ako u real*i*realnoj ravni $\vec{\varrho}_w$ postoji jedinstvena granična vrednost $\lim_{|w| \to +\infty} [wg(w, \xi + i\tilde{y})] = f(\xi + i\tilde{y})$, $\varphi_w \in [0, 2\pi]$, odnosno samo parcijalne granične vrednosti $\lim_{|w| \to +\infty} [wg(w, \xi + i\tilde{y})] = \begin{cases} f(\xi + i\tilde{y}),\ \varphi_w \in (0, \pi) \\ 0,\ \varphi_w \in (-\pi, 0) \end{cases}$, tada sledi, na osnovu *Definicije 35* i rezultata (3.134) *Leme 1*, da

$$vt \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underset{\vec{\varrho} = \vec{\varrho}_k}{\Re^2 es}\, g(w, \xi + i\tilde{y}) = - \underset{\vec{\varrho} = \{\vec{\varrho}_A \mid |\vec{\varrho}_A| = +\infty\}}{\Re^2 es} g(w, \xi + i\tilde{y}) = f(\xi + i\tilde{y}). \tag{4.97}$$

Komentar 6 *Beskonačna suma ostataka (rezidijuma) funkcije* $g(w, \xi + i\tilde{y})$*, odnosno suma beskonačnog funkcionalnog reda relacije (4.97), definisana je u opštijem smislu od Košijevog. Naime, niz parcijalnih suma ostataka (rezidijuma) funkcije* $g(w, \xi + i\tilde{y})$*, koje su jednake integralnim vrednostima funkcije* $g(w, \xi + i\tilde{y})$ *na kružnim putanjama integracije* $\vec{\varrho}_\kappa(\vec{\varrho}_{i\zeta}, \varepsilon_n)$ $(\zeta \in \mathbb{R}$ *i* $n \in \aleph)$*, takvim da na njihovim granicama nema singulariteta funkcije* $g(w, \xi + i\tilde{y})$*, može konvergirati, ili neodređeno divergirati (konvergirati), kada* $n \to +\infty$*. Međutim, u oba slučaja beskonačna suma ostataka (rezidijuma) funkcije* $g(w, \xi + i\tilde{y})$*, u formi beskonačnog reda, postoji i jednaka je vrednosti ostatka (rezidijuma) funkcije* $g(w, \xi + i\tilde{y})$ *u beskonačnosti, odnosno, u prvom slučaju, postoji suma beskonačnog reda, u relaciji (4.97), u Košijevom smislu, dok je u drugom slučaju beskonačni red, u relaciji (4.97), zbirljiv.*$\blacktriangledown$

Za funkciju $s \mapsto f(s)$, koja zadovoljava uslov *Teoreme 8*, funkcija $w \mapsto g(w, \xi + i\tilde{y})$ je, u jednom slučaju, integralna funkcija

$$w \mapsto \frac{p(w)}{q(w)} vt \int\limits_{\xi+iy_0}^{\xi+i\tilde{y}} f(s)\, e^{w[(\xi+i\tilde{y})-s]} ds, \tag{4.98}$$

a u drugom, integralna funkcija

$$w \mapsto \frac{r(w)}{q(w)} vt \int\limits_{\xi+i\tilde{y}}^{\xi+iy_1} f(s)\, e^{w[(\xi+i\tilde{y})-s]} ds, \tag{4.99}$$

gde $w \mapsto p(w)$, $w \mapsto r(w)$ i $w \mapsto q(w)$ su regularno-analitičke funkcije u real*i*realnoj ravni $\vec{\varrho}_w$, takve da $q(w) = p(w) + r(w)$, kao i da u oblastima $\varphi_w \in (0, \pi)$ real*i*realne ravni $\vec{\varrho}_w$:

$$\lim_{|w|\to+\infty} \frac{p(w)}{q(w)} = c, \quad \lim_{|w|\to+\infty} \frac{p(-w)}{q(-w)} = 0 \text{ i } \lim_{|w|\to+\infty} \frac{p(-w)}{q(-w)} e^{-w(i\tilde{y}-iy_0)} = 0, \tag{4.100}$$

odnosno

$$\lim_{|w|\to+\infty} \frac{r(w)}{q(w)} = 0, \quad \lim_{|w|\to+\infty} \frac{r(-w)}{q(-w)} = c \text{ i } \lim_{|w|\to+\infty} \frac{r(w)}{q(w)} e^{-w(iy_1-i\tilde{y})} = 0, \tag{4.101}$$

gde $c \in \mathbb{C}$ i da skup tačaka $\{(\Re(w), i\Im(w)) \mid \Im(w) = 0, \Re(w) = \frac{2k\pi}{a}\}$ ($k \in \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$ je skup celih brojeva), realne ose $\Re_w$ real*i*realne ravni $\vec{\varrho}_w$, je skup singularnih tačaka integralne funkcije $w \mapsto g(w, i\tilde{y})$, gde $i\tilde{y}$ je tačka iz intervala (iy_0, iy_1) prave paralelne imaginarnoj osi $\Im$ real*i*realne ravni $\vec{\varrho}$ i na rastojanju ξ od nje, u kojoj funkcija $s \mapsto f(s)$ nema singularitet u formi beskonačnog diskontinuiteta.

Na osnovu uslova (4.100), kao i fundamentalne granične integralne vrednosti, u oblastima $\varphi_w \in (0, \pi)$ real*i*realne ravni $\vec{\varrho}_w$,

$$\lim_{|w|\to+\infty} \frac{p(w)}{q(w)} vt \int\limits_{\xi+iy_0}^{\xi+i\tilde{y}} wf(s)\, e^{w[(\xi+i\tilde{y})-s]} ds = -c \lim_{\zeta\to0^+} f[\xi + i(\tilde{y} - \zeta)] \text{ i}$$

$$-\lim_{|w|\to+\infty} \frac{p(-w)}{q(-w)} e^{-w(i\tilde{y}-iy_0)} vt \int\limits_{\xi+iy_0}^{\xi+i\tilde{y}} wf(s)\, e^{w[s-(\xi+iy_0)]} ds = 0. \tag{4.102}$$

Druga, od prethodne dve integralne konvergencije, je konvergencija integralne funkcije (4.98) u oblastima $\varphi_w \in (-\pi, 0)$ real*i*realne ravni $\vec{\varrho}_w$.

Po analogiji, na osnovu uslova (4.101), u oblastima $\varphi_w \in (0, \pi)$ real*i*realne ravni $\vec{\varrho}_w$,

$$\lim_{|w|\to+\infty} \frac{r(w)}{q(w)} e^{-w(iy_1-i\tilde{y})} vt \int\limits_{\xi+i\tilde{y}}^{\xi+iy_1} wf(s)\, e^{w[(\xi+iy_1)-s]} ds = 0 \text{ i}$$

$$-\lim_{|w|\to+\infty} \frac{r(-w)}{q(-w)} vt \int\limits_{\xi+i\tilde{y}}^{\xi+iy_1} wf(s)\, e^{w[s-(\xi+i\tilde{y})]} ds = c \lim_{\zeta\to0^+} f[\xi + i(\tilde{y} + \zeta)]. \tag{4.103}$$

Na osnovu prethodno dobijenih rezultata i rezultata (4.97), konačno sledi da za svako $i\tilde{y}$ ($i\tilde{y}$ je tačka iz intervala (iy_0, iy_1) prave paralelne imaginarnoj osi $\Im$ real$i$realne ravni $\vec{\varrho}$ i na rastojanju $\xi \in \mathbb{R}$ od nje, u kojoj funkcija $f(s)$ nema singularitet u formi beskonačnog diskontinuiteta), kao i za $c = 1$,

$$vt\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underset{\vec{\varrho}=\vec{\varrho}_k}{\Re^2 es} \{\frac{r(w)}{q(w)} vt \int_{\xi+iy_0}^{\xi+iy_1} f(s)\, e^{w[(\xi+i\tilde{y})-s]} ds\} = \mathcal{F}(\xi+i\tilde{y}). \tag{4.104}$$

Iz analize ideje dokaza *Teoreme 8* jasno sledi da krucijalnu ulogu u dokazivanju teoreme imaju fundamentalne granične integralne vrednosti (4.58) i (4.61). Imajući to u vidu, dokaz je, sam po sebi, trivijalan.

Dokaz teoreme. **Dokaz.** Neka kompleksna funkcija $s \mapsto f(s)$ zadovoljava uslov teoreme,

$$p(w) = -1 \text{ i } r(w) = e^{awi}, \tag{4.105}$$

gde $a \in \mathbb{R}_+$.

U tom slučaju, skup tačaka $\{\Re(w), i\Im(w) \mid \Re(w) = \frac{2k\pi}{a}, \Im(w) = 0\}$ $(k \in \mathbb{Z})$, realne ose $\Re_w$ real$i$realne ravni $\vec{\varrho}_w$, je skup singularnih tačaka funkcije $w \mapsto q^{-1}(w)$:

$$q^{-1}(w) = \frac{1}{e^{awi}-1}. \tag{4.106}$$

Kako je rezidijum funkcije $w \mapsto q^{-1}(w)$ u tački $\frac{2k\pi}{a}$ $(k \in \mathbb{Z})$

$$\underset{\vec{\varrho}=\vec{\varrho}_k}{\Re^2 es} \frac{1}{e^{awi}-1} = \frac{1}{ai} \tag{4.107}$$

i funkcije $w \mapsto \frac{-1}{e^{-awi}-1} e^{-w(i\tilde{y}-iy_0)}$ i $w \mapsto \frac{e^{awi}}{e^{awi}-1} e^{-w(iy_1-i\tilde{y})}$ konvergiraju, u oblastima $\varphi_w \in (0,\pi)$ real$i$realne ravni $\vec{\varrho}_w$, za $\tilde{y} < y_0 + a$ i $\tilde{y} > y_1 - a$, respektivno, konačno sledi, a na osnovu rezultata (4.104), da za $\tilde{y} < y_0 + a$ i $\tilde{y} > y_1 - a$ ($i\tilde{y}$ je tačka iz intervala $(iy_0 + a, iy_1 - a)$ prave paralelne imaginarnoj osi $\Im$ real$i$realne ravni $\vec{\varrho}$ i na rastojanju $\xi \in \mathbb{R}$ od nje, u kojoj funkcija $f(s)$ nema singularitet u formi beskonačnog diskontinuiteta)

$$vt\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{ai} vt \int_{\xi+iy_0}^{\xi+iy_1} f(s)\, e^{\frac{2k\pi}{a}[(\xi+i\tilde{y})-s]} ds = \mathcal{F}(\xi+i\tilde{y}), \tag{4.108}$$

odnosno

$$\mathcal{F}(\xi+i\tilde{y}) = vt\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Phi(k)\, e^{\frac{2k\pi}{a}(\xi+i\tilde{y})}, \tag{4.109}$$

gde

$$\Phi(k) = \frac{1}{ai} vt \int_{\xi+iy_0}^{\xi+iy_1} f(s)\, e^{-\frac{2k\pi}{a}s} ds. \tag{4.110}$$

■

4.5 Primeri

Primer 8 *Za ilustraciju rezultata Teoreme 8, u Furijeov trigonometrijski red, na segmentu* $[-i\pi, i\pi]$ *imaginarne ose* $\Im$*, realirealne ravni* $\vec{\varrho}$*, razvija se funkcija* $s \mapsto \delta_c^0(s)$*, koja je funkcija prostornog izvoda funkcije* $s \mapsto \chi_c(s)$*, iz Primera 5 prethodnog poglavlja disertacije. Budući da je, na osnovu rezultata iz Primera 5, za svako* $k \in \mathbb{Z}$

$$vt \int_{-i\pi}^{i\pi} \delta_c^0(s)\, e^{-ks} ds = c,$$

sledi, na osnovu rezultata Teoreme 8 $(a = 2\pi)$*, za svako* $\Re(s) = 0$, $\Im(s) \in [-\pi, \pi]$ *i* $\Im(s) \neq 0$*, da*

$$vt \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ks} = 0, \tag{4.111}$$

odnosno, za svako $y \in [-\pi, \pi]$ *i* $y \neq 0$

$$1 + 2vt \sum_{k=1}^{+\infty} \cos(ky) = 0. \blacktriangledown \tag{4.112}$$

Primer 9 *Prethodni rezultat moguće je upotpuniti primenom rezultata Teoreme 8 na razvoj funkcije* $s \mapsto \frac{\sin(is)}{1-\cos(is)}$*, u Furijeov trigonometrijski red, na segmentu* $[-i\pi, i\pi]$ *imaginarne ose* $\Im$*, realirealne ravni* $\vec{\varrho}$*. Naime, kako je singularna tačka* $s = 0$*, funkcije* $\frac{\sin(is)}{1-\cos(is)}$*, u segmentu* $[-i\pi, i\pi]$*, sa jedne strane*

$$vp \int_{-i\pi}^{i\pi} \frac{\sin(is)}{1-\cos(is)} ds = -i[vp \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin y}{1-\cos y} dy] =$$

$$= -i \lim_{\varepsilon \to 0^+} [\int_{-\pi}^{-\varepsilon} \frac{\sin y}{1-\cos y} dy + \int_{\varepsilon}^{\pi} \frac{\sin y}{1-\cos y} dy] = 0,$$

a sa druge

$$vs \int_{-i\pi}^{i\pi} \frac{\sin(is)}{1-\cos(is)} ds = -ivs \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin y}{1-\cos y} dy = -ip_{\vec{\varrho}_O}^{\Im} \Re^1 es \ln(1-\cos y) =$$

$$= \pi \lim_{\varepsilon \to 0^+} \ln \frac{1-\cos\varepsilon}{1-\cos(-\varepsilon)} = 0.$$

Shodno tome

$$\frac{1}{2\pi i} vt \int_{-i\pi}^{i\pi} \frac{\sin(is)}{1-\cos(is)} ds = 0. \tag{4.113}$$

Ako se zna da za $k \in \aleph$ *(formula 6 (Mitrinović, 1980), str. 95)*

$$\int_0^{i\pi} \frac{\sin[i(k+\frac{1}{2})s]}{\sin(\frac{i}{2}s)} ds = i \int_0^{\pi} \frac{\sin[(k+\frac{1}{2})y]}{\sin(\frac{1}{2}y)} dy = i\pi \;\; i \int_{-i\pi}^{i\pi} \cos(iks)\, ds = 0,$$

sledi da, za $k \in \aleph$,

$$\frac{1}{2\pi i} vt \int\limits_{-i\pi}^{i\pi} \frac{\sin{(is)}\sin{(iks)}}{1-\cos{(is)}} ds = \frac{1}{2\pi i} vt \int\limits_{-i\pi}^{i\pi} \cot(\frac{is}{2}) \sin{(iks)}\, ds = 1. \tag{4.114}$$

Sa druge strane, budući da je funkcija $y \mapsto \frac{\sin y \cos(ky)}{1-\cos y}$ neparna funkcija, sledi da

$$vp \int\limits_{-i\pi}^{i\pi} \frac{\sin{(is)}\cos{(iks)}}{1-\cos{(is)}} ds = -ivp \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin y \cos{(ky)}}{1-\cos y} dy = 0 \ \ i$$

$$vs \int\limits_{-i\pi}^{i\pi} \frac{\sin{(is)}\cos{(iks)}}{1-\cos{(is)}} ds = -ivs \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin y \cos{(ky)}}{1-\cos y} dy =$$

$$= -ip^{\Im}_{\vec{\varrho}O} \Re^1 es \int\limits_{-\pi}^{y} \frac{\sin y \cos{(ky)}}{1-\cos y} dy = i\pi \lim_{\varepsilon \to 0+} \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{\sin y \cos{(ky)}}{1-\cos y} dy = 0,$$

odnosno

$$vt \int\limits_{-i\pi}^{i\pi} \frac{\sin{(is)}\cos{(iks)}}{1-\cos{(is)}} ds = 0. \tag{4.115}$$

Na osnovu prethodnih rezultata, kao i rezultata Teoreme 8 ($a = 2\pi$), za svako $\Re(s) = 0$, $\Im(s) \in [-\pi, \pi]$ i $\Im(s) \neq 0$

$$\frac{\sin{(is)}}{1-\cos{(is)}} = 2vt \sum_{k=1}^{+\infty} \sin{(iks)}, \tag{4.116}$$

odnosno, za svako $y \in [-\pi, \pi]$ i $y \neq 0$

$$\frac{\sin y}{1-\cos y} = 2vt \sum_{k=1}^{+\infty} \sin{(ky)}. \tag{4.117}$$

Shodno tome, uzimajući u obzir i rezultat (4.112),

$$\frac{1}{2}\frac{\sin y}{1-\cos y} = vt \sum_{k=1}^{+\infty} \sin{(ky)} \ \ i \ 1 + 2vt \sum_{k=1}^{+\infty} \cos{(ky)} = 0, \tag{4.118}$$

odnosno

$$\frac{1-e^{\pm iy}}{1-\cos y} = -2vt \sum_{k=1}^{+\infty} e^{\pm iky}. \tag{4.119}$$

Za $y = \pm\pi$

$$vt \sum_{k=1}^{+\infty} \sin{(k\pi)} = 0 \ i \ 1 + 2vt \sum_{k=1}^{+\infty} \cos{(k\pi)} = 1 + 2vt \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k = 0. \blacktriangledown \tag{4.120}$$

Komentar 7 *Ako je, u singularnoj tački, ostatak (rezidijum) singularno-analitičke funkcije različit od nule, tada Žordanova singularna vrednost nesvojstvenog integrala funkcije zavisi od izabranog puta integracije, tako da nije, u opštem slučaju, jedinstveno definisana vrednost. Shodno tome, na mesto nulte singularne vrednosti nesvojstvenih integrala*

$$\int_{-i\pi}^{i\pi} \frac{\sin(is)}{1-\cos(is)} ds \ i \int_{-i\pi}^{i\pi} \frac{\sin(is)\sin(iks)}{1-\cos(is)} ds,$$

iz Primera 9, mogu se uzeti vrednosti ovih integrala na lučnim delovima kružne putanje, koja je ε-okolina singularne tačke $s=0$:

$$vs\int_{-i\pi}^{i\pi} \frac{\sin(is)}{1-\cos(is)} ds = \pm 2\pi \ i \ vs\int_{-i\pi}^{i\pi} \frac{\sin(is)\sin(iks)}{1-\cos(is)} ds = \pm 2\pi,$$

budući da, za $k \in \aleph$,

$$\lim_{|s|\to 0^+} \frac{s\sin(is)}{1-\cos(is)} = -2i \ i \ \lim_{|s|\to 0^+} \frac{s\sin(is)\cos(iks)}{1-\cos(is)} = -2i.$$

Shodno tome, za svako $\Re(s)=0$, $\Im(s)\in(-\pi,\pi)$ i $\Im(s)\neq 0$

$$\frac{\sin(is)}{1-\cos(is)} = \mp i[1 + 2vt\sum_{k=1}^{+\infty}\cos(iks)] + 2vt\sum_{k=1}^{+\infty}\sin(iks)\,. \tag{4.121}$$

Dobijeni rezultat je u saglasnosti sa prethodno dobijenim rezultatima.▼

Primer 10 *Prethodni rezultat može se potvrditi i primenom rezultata Teoreme 9 na razvoj funkcije $s^\star \to \frac{s^\star+1}{s^\star-1}$ u Furijeov trigonometrijski red. Naime, budući da*

$$\frac{1}{2\pi i} vt \oint_G \frac{s^\star+1}{s^\star-1}\frac{1}{(s^\star)^{k+1}} ds^\star = \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} 2 \\ 0 \end{array} \right. , \ za\ k<0 \\ \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ -1 \end{array} \right. , \ za\ k=0 \\ \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ -2 \end{array} \right. , \ za\ k>0 \end{array} \right. , \tag{4.122}$$

gde G je jedinična kružnica u $s^\star$-ravni, sledi da za svako $|s^\star|=1$ i $s^\star \neq 1$

$$\left. \begin{array}{r} 2vt\sum_{k=1}^{+\infty} e^{-iky}+1 \\ -2vt\sum_{k=1}^{+\infty} e^{iky}-1 \end{array} \right\} = -\frac{i\sin y}{1-\cos y}, \tag{4.123}$$

odnosno

$$vt\sum_{k=1}^{+\infty}\cos(yk) + \frac{1}{2} = 0 \ i \ vt\sum_{k=1}^{+\infty}\sin(yk) = \frac{1}{2}\frac{\sin y}{1-\cos y}.$$

Šta više, za svako $|s^\star|>1$ i $|s^\star|<1$

$$vp\sum_{k=1}^{+\infty}(s^\star)^{-k} = \frac{1}{s^\star-1} \ i \ vp\sum_{k=1}^{+\infty}(s^\star)^{k} = \frac{s^\star}{1-s^\star},$$

respektivno, budući da

$$\frac{1}{2\pi i}\overset{\circlearrowleft}{\int\limits_{G_c}}\frac{s^\star+1}{s^\star-1}\frac{1}{(s^\star)^{k+1}}ds^\star=\begin{cases}2, \ za\ k<0\\ 1, \ za\ k=0\\ 0, \ za\ k>0\end{cases},$$

gde $G_c=\{s^\star \mid |s^\star|=c\}$ $(c\in(1,+\infty))$, *odnosno*

$$\frac{1}{2\pi i}\overset{\circlearrowleft}{\int\limits_{G_a}}\frac{s^\star+1}{s^\star-1}\frac{1}{(s^\star)^{k+1}}ds^\star=\begin{cases}0, \ za\ k<0\\ -1, \ za\ k=0\\ -2, \ za\ k>0\end{cases},$$

gde $G_a=\{s^\star \mid |s^\star|=a\}$ $(a\in(0,1))$.▼

Primer 11 *U slučaju kompleksne funkcije* $s^\star\mapsto s^\star(1-s^\star)^{-2}$, *budući da*

$$\frac{1}{2\pi i}vt\overset{\circlearrowleft}{\int\limits_{G}}\frac{1}{(1-s^\star)^2}\frac{1}{(s^\star)^k}ds^\star=\begin{cases}\begin{cases}k\\0\end{cases}, \ za\ k<0\\ 0, \ za\ k=0\\ \begin{cases}0\\k\end{cases}, \ za\ k>0\end{cases}, \tag{4.124}$$

gde G *je jedinična kružnica u* $s^\star$*-ravni, za svako* $|s^\star|=1$ *i* $s^\star\neq 1$

$$2vt\sum_{k=1}^{+\infty}ke^{\pm iky}=-\frac{1}{1-\cos y}, \tag{4.125}$$

odnosno za svako $|s^\star|>1$ *i* $|s^\star|<1$

$$vp\sum_{k=1}^{+\infty}k(s^\star)^{-k}=\frac{s^\star}{(s^\star-1)^2}\ i\ vp\sum_{k=1}^{+\infty}k(s^\star)^{k}=\frac{s^\star}{(1-s^\star)^2},$$

respektivno.▼

Primer 12 *Prethodni rezultat može se dobiti i primenom rezultata Teoreme 8, odnosnom razvojem funkcije* $s\mapsto[1-\cos(is)]^{-1}$, *na segmentu* $[-i\pi,i\pi]$ *imaginarne ose* $\Im$ *realirealne ravni* $\vec{\varrho}$, *sa singularitetom u tački* $s=0$, *u Furijeov trigonometrijski red.*

Sa jedne strane

$$vt\int\limits_{-i\pi}^{i\pi}\frac{ds}{1-\cos(is)}=ivt\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{dy}{1-\cos y}=$$

$$=i\lim_{\varepsilon\to0^+}[\int\limits_{-\pi}^{-\varepsilon}\frac{dy}{1-\cos y}+\begin{cases}\overset{\curvearrowright}{\int\limits_{\vec{\varrho}_\kappa(\vec{\varrho}_O,\varepsilon)_\pi^0}}\frac{1}{1-\cos s}ds\\ \overset{\curvearrowleft}{\int\limits_{\vec{\varrho}_\kappa(\vec{\varrho}_O,\varepsilon)_{-\pi}^0}}\frac{1}{1-\cos s}ds\end{cases}+\int\limits_{\varepsilon}^{\pi}\frac{dy}{1-\cos y}]=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0^+}[\frac{2\sin\varepsilon}{1-\cos\varepsilon}+\begin{cases}\overset{\curvearrowright}{\int\limits_{\vec{\varrho}_\kappa(\vec{\varrho}_O,\varepsilon)_\pi^0}}\frac{ds}{1-\cos s}\\ \overset{\curvearrowleft}{\int\limits_{\vec{\varrho}_\kappa(\vec{\varrho}_O,\varepsilon)_{-\pi}^0}}\frac{ds}{1-\cos s}\end{cases}].$$

Sa druge strane

$$\int\limits_{\vec{e}_\kappa(\vec{e}_O,\varepsilon)_{-\pi}^{0}}^{\curvearrowleft} \frac{ds}{1-\cos s} = \int\limits_{-\pi}^{0} \frac{\varepsilon e^{i\theta}}{1-\cos\left(\varepsilon e^{i\theta}\right)} d\theta = -\frac{\sin\left(\varepsilon e^{i\theta}\right)}{1-\cos\left(\varepsilon e^{i\theta}\right)}\Big|_{-\pi}^{0} = -\frac{2\sin\varepsilon}{1-\cos\varepsilon}.$$

Shodno tome

$$vt\int\limits_{-i\pi}^{i\pi} \frac{ds}{1-\cos(is)} = 0. \tag{4.126}$$

Kako je, za $k\in\aleph$:

$$\lim_{|s-1|\to 0^+} \frac{(s-1)\,s^k}{s-1} = 1,$$

odnosno

$$vs\int\limits_{\vec{e}_\kappa(\vec{e}_O,1)}^{\circlearrowleft} \frac{s^k}{s-1} ds = \mp\pi i \ \ i\ vt \int\limits_{\vec{e}_\kappa(\vec{e}_O,1)}^{\circlearrowleft} \frac{s^k}{s-1} ds = \begin{cases} 0 \\ 2\pi i \end{cases},$$

sledi da

$$vp\int\limits_{\vec{e}_\kappa(\vec{e}_O,1)}^{\circlearrowleft} \frac{s^k}{s-1} ds = \pi i \ \ i$$

$$vp\int\limits_{\vec{e}_\kappa(\vec{e}_O,1)}^{\circlearrowleft} \frac{s^k}{s-1} ds = vp\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{ie^{ik\varphi}}{1-e^{-i\varphi}} d\varphi = vp\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{i\cos(k\varphi)}{2(1-\cos\varphi)} d\varphi -$$

$$-vp\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{i\cos[(k+1)\varphi]}{2(1-\cos\varphi)} d\varphi = \pi i,$$

budući da, za svako $k\in\aleph$

$$vp\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(k\varphi)\sin\varphi}{1-\cos\varphi} d\varphi = 0 \ \ i \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin(k\varphi)\,d\varphi = 0.$$

Sa druge strane, za $k\in\aleph$

$$\lim_{|s|\to 0^+} \left[s\cos(iks)\right] = 0 \ \ i \lim_{|s|\to 0^+} \frac{s\sin(iks)\sin(is)}{1-\cos(is)} = 0.$$

Shodno tome, za $k\in\aleph$

$$\frac{1}{2\pi i} vs \int\limits_{-i\pi}^{i\pi} \frac{\cos(iks)-\cos[i(k+1)s]}{2[1-\cos(is)]} ds =$$

$$= \frac{1}{4\pi i} vs \int\limits_{-i\pi}^{i\pi} [\cos(iks) + \frac{\sin(iks)\sin(is)}{1-\cos(is)}] ds = 0 \ \ i$$

$$vt[\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos{(k\varphi)}}{2\,(1-\cos\varphi)}d\varphi-\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos[(k+1)\,\varphi]}{2\,(1-\cos\varphi)}d\varphi]=\pi. \tag{4.127}$$

Dalje, na osnovu funkcionalne jednakosti $\cos{(2\varphi)}=1-2\,(\sin\varphi)^2$, *sledi da*

$$vt\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos{(2\varphi)}}{2\,(1-\cos\varphi)}d\varphi=vt[\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{d\varphi}{2\,(1-\cos\varphi)}-\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{(\sin\varphi)^2}{1-\cos\varphi}d\varphi],$$

odnosno

$$vt\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos{(2\varphi)}}{2\,(1-\cos\varphi)}d\varphi=-\int\limits_{-\pi}^{\pi}(1+\cos\varphi)\,d\varphi=-2\pi. \tag{4.128}$$

Imajući u vidu rezultate (4.127) i (4.128), dokazuje se, metodom matematičke indukcije, da za svako $k\in\aleph$

$$\frac{1}{2\pi i}vt\int\limits_{-i\pi}^{i\pi}\frac{\cos{(iks)}}{1-\cos{(is)}}ds=-k. \tag{4.129}$$

Usled neparnosti funkcije $\frac{\sin(iks)}{1-\cos(is)}$, *na segmentu* $[-i\pi,i\pi]$ *imaginarne ose* $\Im$ *realirealne ravni* $\vec{\varrho}$, *sledi da za* $k\in\aleph$

$$\frac{1}{2\pi i}vt\int\limits_{-i\pi}^{i\pi}\frac{\sin{(iks)}}{1-\cos{(is)}}ds=\pm\frac{ik}{2}, \tag{4.130}$$

budući da

$$\lim_{|s|\to0^+}\frac{s\sin{(iks)}}{1-\cos{(is)}}=ik.$$

Na osnovu prethodnoh rezultata i rezultata Teoreme 8, za svako $\Re\,(s)=0$, $\Im\,(s)\in[-\pi,\pi]$ *i* $\Im\,(s)\neq0$,

$$\frac{1}{1-\cos{(is)}}=2[-vt\sum_{k=1}^{+\infty}k\cos{(iks)}\pm ivt\sum_{k=1}^{+\infty}k\sin{(iks)}]\ \ i$$

$$\frac{1}{1-\cos y}=-2[vt\sum_{k=1}^{+\infty}k\cos{(ky)}\pm ivt\sum_{k=1}^{+\infty}k\sin{(ky)}]=-2vt\sum_{k=1}^{+\infty}ke^{\mp iky}, \tag{4.131}$$

odnosno

$$\frac{1}{2}\frac{1}{1-\cos y}=-vt\sum_{k=1}^{+\infty}k\cos{(ky)}\ \ i$$

$$vt\sum_{k=1}^{+\infty}k\sin{(ky)}=0. \tag{4.132}$$

U rubnim tačkama segmenta $[-\pi,\pi]$

$$\frac{1}{4}=-vt\sum_{k=1}^{+\infty}k\cos{(k\pi)}=-vt\sum_{k=1}^{+\infty}k\,(-1)^k\ \ i\ vt\sum_{k=1}^{+\infty}k\sin{(k\pi)}=0.\blacktriangledown \tag{4.133}$$

Komentar 8 *Ako se ima u vidu da je sa jedne strane, na osnovu rezultata iz Primera 8, za svako* $\Re(s) = 0$ *i* $\Im(s) \in [-\pi, \pi]$ *i za svako* $s^\star$, *takvo da* $\Re(s^\star) = 0$ *i* $\Im(s) - \Im(s^\star) \in (-\pi, \pi)$,

$$i\delta^0_{2\pi}(s - s^\star) = vt \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{k(s-s^\star)},$$

odnosno

$$i\delta^0_{2\pi}(s - s^\star) = 1 + 2vt \sum_{k=1}^{+\infty} \cos[ik(s - s^\star)],$$

a sa druge

$$f(s^\star) = \frac{1}{2\pi i} vt \int_{-i\pi}^{i\pi} f(s)\,[i\delta^0_{2\pi}(s - s^\star)]ds,$$

za bilo koju singularno-analitičku funkciju $f(s)$, *takvu da u svim tačkama segmenta* $[-i\pi, i\pi]$, *imaginarne ose* $\Im$ *realirealne ravni* $\vec{\varrho}$, *rezidualne vrednosti funkcije* $f(s)$ *su konačne, a tačka* $s^\star \in (-i\pi, i\pi)$ *nije singularna tačka funkcije* $f(s)$, *sledi da*

$$f(s^\star) = \frac{1}{2\pi i} vt \int_{-i\pi}^{i\pi} f(s)\,\{1 + 2vt \sum_{k=1}^{+\infty} \cos[ik(s - s^\star)]\}ds,$$

odnosno

$$f(s^\star) = \frac{1}{2\pi i} vt \int_{-i\pi}^{i\pi} f(s)\,ds + vt \sum_{k=1}^{+\infty} \{[\frac{1}{\pi i} vt \int_{-i\pi}^{i\pi} f(s)\cos(iks)\,ds]\cos(iks^\star) +$$

$$+[\frac{1}{\pi i} vt \int_{-i\pi}^{i\pi} f(s)\sin(iks)\,ds]\sin(iks^\star)\} = \frac{1}{2}\varphi(0) + vt \sum_{k=1}^{+\infty} [\varphi(k)\cos(iks^\star) + \phi(k)\sin(iks^\star)],$$

gde za svako $k \in \aleph_0$

$$\varphi(k) = \frac{1}{\pi i} vt \int_{-i\pi}^{i\pi} f(s)\cos(iks)\,ds \;\; i \;\; \phi(k) = \frac{1}{\pi i} vt \int_{-i\pi}^{i\pi} f(s)\sin(iks)\,ds.$$

Ako je, za svako $k \in \aleph_0$, $\Phi(k) = \frac{1}{2}[\varphi(k) + i\phi(k)]$ *i* $\Phi(-k) = \Phi^*(k)$, *odnosno*

$$\Phi(k) = \frac{1}{2\pi i} vt \int_{-i\pi}^{i\pi} f(s)\,e^{-ks}ds,$$

tada

$$f(s^\star) = vt \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Phi(k)\,e^{ks^\star},$$

što je implicitna potvrda rezultata Teoreme 8 i Primera 8.

Na osnovu razvoja realnih funkcija

$$f\left(y\right)=\left\{\begin{array}{l}\frac{\sin y}{1-\cos y},\ \zeta<\left|y\right|\le\pi\\ 0,\ \left|y\right|\le\zeta\end{array}\right.\quad \text{i } g\left(y\right)=\left\{\begin{array}{l}b,\ \zeta<\left|y\right|\le\pi\\ 0,\ \left|y\right|\le\zeta\\ a,\ -\pi\le y<-\zeta\end{array}\right.\qquad\left(\zeta>0\right),$$

koje zadovoljavaju Dirihlejeve uslove u segmentu $[-\pi,\pi]\in\Re$, *u Furijeov trigonometrijski red*

$$f\left(y\right)=\sum_{k=1}^{+\infty}[\frac{1}{\pi}\int\limits_{\zeta}^{\pi}\frac{\sin y}{1-\cos y}\sin\left(ky\right)dy]\sin\left(ky\right)\quad\left(\left|y\right|\in\left(\zeta,\pi\right]\right)\ i$$

$$g\left(y\right)=\frac{1}{2\pi}(\int\limits_{-\pi}^{-\zeta}ady+\int\limits_{\zeta}^{\pi}bdy)+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{\pi}\{[\int\limits_{-\pi}^{-\zeta}a\sin\left(ky\right)dy+\int\limits_{\zeta}^{\pi}b\sin\left(ky\right)dy]\sin\left(ky\right)+$$

$$+\int\limits_{-\pi}^{-\zeta}a\cos\left(ky\right)dy+\int\limits_{\zeta}^{\pi}b\cos\left(ky\right)dy]\cos\left(ky\right)\}\quad\left(\left|y\right|\in\left(\zeta,\pi\right]\right),$$

odnosno[5]

$$f\left(y\right)=(1-\frac{\zeta}{\pi}-\frac{\sin\zeta}{\pi})\sin\left(ky\right)+$$

$$+\sum_{k=2}^{+\infty}[1-\frac{\zeta}{\pi}-2\sum_{\kappa=1}^{k-1}\frac{\sin\left(\kappa\zeta\right)}{\kappa\pi}-\frac{\sin\left(k\zeta\right)}{k\pi}]\sin\left(ky\right)\left(\left|y\right|\in\left(\zeta,\pi\right]\right)\ i$$

$$g\left(y\right)=\frac{a+b}{2}-\frac{a+b}{\pi}[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\sin\left(k\zeta\right)}{k\zeta}\cos\left(ky\right)]\zeta+$$

$$+\frac{b-a}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}[\cos\left(k\zeta\right)-\left(-1\right)^{k}]\frac{\sin\left(ky\right)}{k}\quad\left(\left|y\right|\in\left(\zeta,\pi\right]\right),$$

sledi, za $a=b$, $\left|y\right|\in\left(\zeta,\pi\right]$ *i* $\zeta>0$, *da*

$$\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\sin\left(k\zeta\right)}{k\zeta}\cos\left(ky\right)=0.\tag{4.134}$$

---

[5] Na osnovu trigonometrijskih jednakosti izvodi se rekurentna formula za *Furijeove* koeficijente funkcije $f\left(y\right)$ u segmentu $[-\pi,\pi]$:

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{\zeta}^{\pi}\frac{\sin y\sin\left[\left(k+1\right)y\right]}{1-\cos y}dy=\frac{1}{\pi}\int\limits_{\zeta}^{\pi}\frac{\sin y\sin\left[\left(k-1\right)y\right]}{1-\cos y}dy-\frac{2\sin\left(k\zeta\right)}{k\pi}-\frac{\sin\left[\left(k+1\right)\zeta\right]}{\left(k+1\right)\pi}-\frac{\sin\left[\left(k-1\right)\zeta\right]}{\left(k-1\right)\pi},\ k\in\aleph.$$

Sa druge strane, za $k=1$ i $k=2$*:*

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{\zeta}^{\pi}\frac{\left(\sin y\right)^{2}}{1-\cos y}dy=\frac{1}{\pi}\int\limits_{\zeta}^{\pi}\left(1+\cos y\right)dy=1-\frac{\zeta}{\pi}-\frac{\sin\zeta}{\pi}\ \text{i}$$

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{\zeta}^{\pi}\frac{\sin\left(2y\right)\sin y}{1-\cos y}dy=\frac{2}{\pi}\int\limits_{\zeta}^{\pi}\left(1+\cos y\right)\cos ydy=1-\frac{\zeta}{\pi}-2\frac{\sin\zeta}{\pi}-\frac{\sin\left(2\zeta\right)}{2\pi},$$

respektivno.

Shodno tome, za $y \in (\zeta, \pi)$ *i* $\zeta > 0$,

$$\frac{\pi}{2} = \sum_{k=1}^{+\infty} [\cos(k\zeta) - (-1)^k] \frac{\sin(ky)}{k},$$

odnosno, za $y \in (\zeta, \pi)$,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \cos(k\zeta) \frac{\sin(ky)}{k} = \frac{\pi}{2} - \frac{y}{2}, \tag{4.135}$$

ako se zna da za $y \in (-\pi, \pi)$ *(Mitrinović, 1980)*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{\sin(ky)}{k} = -\frac{y}{2}.$$

Sa druge strane, budući da je

$$\lim_{k \to +\infty} [1 - \frac{\zeta}{\pi} - 2 \sum_{\kappa=1}^{k} \frac{\sin(\kappa\zeta)}{\kappa\pi} - \frac{\sin(k\zeta)}{k\pi}] = 0,$$

konačno sledi, za $\zeta \in (0, \pi)$, *da*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(k\zeta)}{k} = \frac{\pi}{2} - \frac{\zeta}{2}, \tag{4.136}$$

odnosno, za $\zeta = \frac{\pi}{2}$,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(k\frac{\pi}{2})}{k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin[(2k-1)\frac{\pi}{2}]}{2k-1} = \frac{\pi}{4}. \tag{4.137}$$

Kako realni parametar ζ *uzima vrednosti iz intervala* $(0, \pi)$, *pa i konačno male vrednosti, postavlja se pitanje da li relacija (4.134) važi i u graničnom slučaju, kada* $\zeta \to 0^+$? *Drugim rečima, da li je granična vrednost sume, u ovom naglašenom slučaju, jednaka sumi graničnih vrednosti, kada* $\zeta \to 0^+$? *Jasno, odgovor na prethodno postavljeno pitanje, kao posledica dobijenih rezultata, je pozitivan. Međutim, ostaje otvoreno pitanje generalizacije jednog takvog zaključka.*

Po analogiji, ako se zna da je $\frac{d}{dy}\frac{\sin y}{(1-\cos y)} = -\frac{1}{(1-\cos y)}$ *i* $\frac{d}{dy}\ln[2(1-\cos y)] = \frac{\sin y}{(1-\cos y)}$, *za* $|y| \in (0, \pi)$, *postavlja se i pitanje, u vezi sa rezultatima (4.121) i (4.131), kao i rezultatom iz teorije redova:* $\ln[2(1-\cos y)] = -2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(ky)}{k}$, *za* $|y| \in (0, \pi)$ *(Slavić, 1970), kada je izvod sume beskonačnog funkcionalnog reda jednak sumi izvoda svakog člana reda, separatno, kao što je to u prethodno pomenutim slučajevima? Ovo pitanje takođe ostaje otvorenim.*

Sa druge strane, interesantan je, sam po sebi, rezultat (4.120) iz Primera 9. Alternativni numerički red $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k$, *koji je neodređeno divergentan (konvergentan) u Košijevom smislu, zbirljiv je i njegova suma je* $\frac{1}{2}$, *upravo onako kako su to pretpostavili, bez dokaza, davno još Ojler i Lajbnic, koji su, koristeći se tom hipotezom, dobijali korektne i tačne rezultate. Mnogo godina kasnije, redefinisanjem samog pojma sume alternativnih redova u Košijevom smislu, dokazana je vrednost sume ovog alternativnog reda. Što se tiče rezultata (4.133) Primera 12 on je kauzalno povezan sa rezultatom (4.120). Naime, ako se zna da je vt* $\sum_{k=1}^{+\infty} k\sin(kt) = 0$ *za* $t = \frac{\pi}{2}$, *odnosno vt* $\sum_{k=0}^{+\infty} (2k+1)(-1)^k = 0$, *sledi da* $2vt \sum_{k=0}^{+\infty} k(-1)^k = -vt \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k = -\frac{1}{2}$.▼

Glava 5

Zaključak

U uvodnom delu disertacije uveden je i pojam real*i*realnih vektorskih prostora $\vec{r}$ (vektorskih prostora definisanih nad poljem realnih brojeva $\mathbb{R}$), kao opštiji pojam u odnosu na pojam realnih vektorskih prostora. Vektorska baza real*i*realne ravni $\vec{\varrho}$ (dvo-dimenzionalnog ravnog real*i*realnog vektorskog prostora) je ortonormirani realni vektorski sistem $\{\vec{e}_k\}$ $(k = 1, 2)$. Ako se na mesto ortonormiranog realnog vektorskog sistema $\{\vec{e}_k\}$ $(k = 1, 2)$, uvede u analizu ortonormirani kompleksni vektorski sistem $\{\vec{h}_k\}$ $(k = 1, 2)$, gde $\vec{h}_1 = \vec{e}_1$ i $\vec{h}_2 = i\vec{e}_2$, kao baza dvo-dimenzionalnog *Hilbertovog* vektorskog prostora $\vec{\varrho} = x\vec{h}_1 + y\vec{h}_2$, definisanog nad poljem realnih brojeva $\mathbb{R}$, tada je vektorski sistem $\{\vec{\omega}_k\}$ $(k = 1, 2)$, takav da $\vec{\omega}_1 = (\sqrt{2}/2)(\vec{h}_1 - \vec{h}_2)$ i $\vec{\omega}_2 = (\sqrt{2}/2)(\vec{h}_1 + \vec{h}_2)$, koji je konormiran, u smislu da $\vec{\omega}_i \cdot \vec{\omega}_j = \delta^{\mathrm{e}}_{ij}$, gde δ^{e}_{ij} je ekvivalentni *Kronekerov* δ-simbol, tačnije matrica $\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}$, koja je ekvivalentna jediničnoj 2×2 matrici, baza dvo-dimenzionalnog vektorskog prostora $\vec{\varrho} = \xi\vec{\omega}_1 + \zeta\vec{\omega}_2$, gde $\xi = x - y$ i $\zeta = x + y$, koji je definisan nad poljem realnih brojeva $\mathbb{R}$. U ovom naglašenom slučaju $\vec{h}_1 = (\sqrt{2}/2)(\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2)$ i $\vec{h}_2 = (\sqrt{2}/2)(\vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1)$, što znači da vektorski prostori: $\vec{\rho} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$ i $\vec{\rho} = s^*\vec{\omega}_1 + s\vec{\omega}_2$, definisani nad poljem realnih brojeva i sa bazama u formi ortonormiranog realnog vektorskog sistema i konormiranog kompleksnog vektorskog sistema, respektivno, su izomorfni vektorski prostori. Dakle, shodno svemu što je prethodno rečeno, moguće je kompletnu analizu, koja je sprovedena u disertaciji, fokusirati i na realni vektorski prostor, definisan nad poljem realnih brojeva, sa bazom koja je u formi ortonormiranog realnog vektorskog sistema $\{\vec{e}_k\}$ $(k = 1, 2)$, koji je izomorfan sa realnim vektorskim prostorom $\vec{\rho}$, definisanim nad poljem realnih brojeva $\mathbb{R}$ i sa bazom u formi konormiranog kompleksnog vektorskog sistema $\{\vec{\omega}_k\}$ $(k = 1, 2)$, a što može biti interesantno i sa tačke gledišta uporedne analize dobijenih rezultata.

Kroz rezultat *Teoreme 7*, jednako bitan rezultat *Poglavlja 4* disertacije, a koja je opštija od poznate *Loranove* teoreme i neposredna posledica *Žordanove* teoreme, tvrdi se da *Loranov* potencijalni red univalentne (uniformne) funkcije, iz klase kompleksnih funkcija, konvergira u linearnoj oblasti $\mathcal{D}^{\star}_{\Omega}$, real*i*realne ravni $\vec{\varrho}^{\,\star}$, u kojoj je kompleksna funkcija funkcija ograničene varijacije u odnosu na argument (arg) kompleksne promenljive. Kako je oblast $\mathcal{D}^{\star}_{\Omega}$ singularna oblast kompleksne funkcije, budući da funkcija prostornog (integralnog) izvoda kompleksne funkcije nije definisana u svim tačkama oblasti $\mathcal{D}^{\star}_{\Omega}$, prethodno pomenuti rezultat *Teoreme 7* je otvorio mogućnost da se dokaže još opštiji rezultat, u smislu da se u *Furijeov* beskonačni trigonometrijski red mogu razviti i one funkcije iz klase singularno-analitičkih funkcija, koje u singularnoj oblasti real*i*realne ravni $\vec{\varrho}$ imaju i diskontinuitete u formi beskonačnosti, što je i dokazano u *Poglavlju 4* disertacije. Međutim, da bi se jedan ovakav fundamentalni rezultat i dokazao, bilo je neophodno da se prethodno redefiniše pojam *Rimanovih* integralnih suma, kao i pojam *Košijevog* ostatka, odnosno rezidijuma kompleksnih funkcija, sve sa ciljem da se definišu, kako pojam *Žordanove* singularne, tako i pojam totalne vrednosti nesvojstvenih integrala kompleksnih funkcija, uz prethodno već definisani pojam *Košijeve* glavne vrednosti nesvojstvenih integrala, što je i učinjeno u *Poglavljima 2 i 3* disertacije.

Sam pojam totalne vrednosti nesvojstvenog integrala kompleksnih funkcija, koji uopšteno govoreći nema jedinstveno definisanu vrednost, iz razloga što je po definiciji suma graničnih integralnih vrednosti, kompleksnih funkcija, na putanjama integracije, koje se u graničnom slučaju svode na putanju integracije, na kojoj funkcija ima jednu ili više singularnih tačaka, je kamen temeljac za dalju generalizaciju fundamentalnih rezultata matematičke analize. Shodno tome, u *Poglavljima 2 i 3* disertacije, generalizovan je dobro poznat rezultat *Stoksove*, odnosno *Grin-Rimanove* teoreme, kao i rezultat teoreme *Gaus-Ostrogradskog*, rezultati koji su i ranijih godina bili predmetom generalizacije, isto tako na bazi prethodne generalizacije pojma *Riman* integrabilnih funkcija, odnosno na bazi *Lebegove* integrabilnosti.

Shodno svemu prethodno rečenom, veoma je važno naglasiti da rezultat (2.33) *Teoreme 1* ekvilibrira apsolutne (totalne) integralne sume kovektorskih polja, što drugim rečima znači da oba kovektorska polja, kaja figurišu u tom rezultatu, ne moraju da budu i a priori definisana na kompaktnoj mnogostrukosti $\mathcal{M}$. Dovoljno je da su apsolutno (totalno) integrabilna po $\mathcal{M}$. U tačkama u kojima nisu definisana kovektorska polja difinisane su rezidualne vrednosti tih kovektorskih polja. Stoga, primera radi u slučaju da je kovektorsko polje *Riman* integrabilno, ali ne i prostorno diferencijabilno ($\mathcal{M}$ je singularna oblast tog kovektorskog polja), postoji apsolutna (totalna) integralna suma kovektorskog polja, koje je kovektorsko polje prostornog izvoda tog kovektorskog polja. Ako je uz to, na skupu regularnih tačaka singularne oblasti $\mathcal{M}$, kovektorsko polje prostornog izvoda tog kovektorskog polja identički jednako nuli, tada rezultat (2.33) *Teoreme 1* generalizuje rezultat *Košijeve* integralne teoreme *Košijevog* računa ostataka. Uz zadovoljeni uslov *Pretpostavke 2*, integralna forma rezultata (2.33) *Teoreme 1*, u ovom naglašenom slučaju, dobija se iz rezultata (2.41).

Svi ovi rezultati, koji trasiraju jedan orginalan put generalizacije fundamentalnih, ali i izvođenja novih rezultata, kako u realnoj, tako i u kompleksnoj analizi, su posledica, manje ili više, uvođenja u analizu i neodređenih izraza tipa $\infty-\infty$ ili $\infty 0$, koji mogu imati egzaktno određenu vrednost, sve u zavisnosti od prirode izraza koji se u graničnom slučaju svode na te neodređene izraze. Tako, primera radi, rezidualna vrednost funkcije prostornog izvoda neke funkcije, u tački u kojoj nije definisana funkcija prostornog izvoda, svodi se na neodređeni izraz, koji vrednosno determiniše ostatak (rezidijum) funkcije u toj tački. Drugi primer je beskonačni *Furijeov* trigonometrijski red klase kompleksnih funkcija u *Teoremi 8* disertacije, koji je u opštem slučaju zbirljiv i koji se, u zavisnosti od funkcije čiji je to red, može svesti, u pojedinim tačkama, na alternativni red, neodređeno divergentan (konvergentan) u *Košijevom* smislu, čija suma je determinisana vrednošću neodređenog izraza tipa $\infty - \infty$, na koji se svodi taj alternativni red, kao što je to ilustrovano primerima iz *Poglavlja 4* disertacije.

Krucijalnu ulogu u dokazivanju rezultata *Teoreme 8* odigrale su fundamentalne granične integralne vrednosti *Poglavlja 4* disertacije, koje su poslužile i za izvođenje integralnih relacija fundamentalnih integralnih transformacija. Akcenat bi trebalo staviti na konačnu *Laplasovu* integralnu transformaciju, budući da ona do sada nije bila definisana. Bitno je naglasiti da u svim integralnim transformacijama figurišu totalne integralne vrednost singularno-analitičkih funkcija, tako da su to fundamentalno novi rezultati, koji se mogu veoma dobro iskoristiti u procesu izvođenja novih rezultata u mnogim granama matematike, tačnije u svim oblastima matematike i primenjene matematike gde se koriste integralne transformacije.

Literatura

P. Acker (1998), The Missing Link, *Math. Intell., No. 18, pp. 4-9.*

T. Anđelić (1980), *Tenzorski račun*, Beograd: Naučna knjiga.

V. Arnold (1978), *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, New York: Springer-Verlag.

M. Arsenović, M. Dostanić i D. Jocić (1998), *Teorija mere Funkcionalna analiza Teorija operatora*, Beograd: Matematički fakultet.

J. Baskin (1962), *Neke opšte teoreme za računanje konačnih integrala Košijevom teoremom o rezidijumima,* Magistarska teza, odbranjena u Decembru na Katedri za matematiku na Pensilvanijskom državnom univerzitetu u USA.

B. Bongiorno (2000), On the minimal solution of the problem of primitives. *J. Math. Analysis and Applications*, *Vol. 251, No. 2 , pp. 479-487.*

R. A. Gordon (1994), *The Integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron and Henstock.* Graduate Studies in Math., Vol. 4, Providence: AMS.

F. Jung (1908), Ableitungsbildung im räumlichen Grössenfelde, *Zeitschr. für Math. und Phys., No. 56., S. 337.*

L. V. Kantorovič i G. P. Akilov (1984), *Funkcionalna analiza*, Moskva: Nauka.

A. Macdonald (2002), Stokes' theorem. *Real Analysis Exchange, Vol. 27, pp. 739-747.*

J. Mawhin (1981), Generalized *Riemann* integrals and divergence theorem for differentiable vector fields, *E. B. Christoffel, Birkhauser, Basel-Boston, pp. 704-714.*

D. Mihailović i D. Đ. Tošić (1983), *Elementi matematičke analize II, Treće izdanje*, Beograd: Naučna knjiga.

D. S. Mitrinović (1966), *Račun ostataka, Tutorial text, No. 4,* Groningen: Noordhoff Ltd.

D. S. Mitrinović i J. D. Kečkić (1978), *Košijev račun ostataka sa primenama, Matematički problemi i Ekspoziture, Vol. 8*, Beograd: Naučna knjiga.

D. S. Mitrinović (1980), *Predavanja o redovima*, Beograd: Građevinska knjiga.

D. S. Mitrinović i J. D. Kečkić (1981), *Matematika 2*, Beograd: Građevinska knjiga.

D. Nonnenmacher (1994), A descriptive, additive modification of *Mawhin's* integral and divergence theorem with singularities, *Ann. Polon. Math., No. 59, pp. 85-98.*

Lj. T. Grujić (1980), *Diskretni sistemi*, Beograd: Mašinski fakultet.

H. Grunsky (1983), *The General Stokes's Theorem*, Boston: Pitman.

D. Hestenes (1968), Multivector calculus, *J. Math. Anal. and Appl., No. 24, pp. 313-325.*

D. Hestenes i G. Sobczyk (1984), *Clifford algebra to Geometric calculus: A unified language for mathematics and physics*, Dordrecht: D. Reidel.

D. Hestenes i R. Ziegler (1991), Projective Geometry with Clifford algebra, *Acta Applicandae Mathematicae, No. 23, pp. 25-63.*

R. Henstock (1961), Definitions of *Riemann* type of the variational integrals, *Proc. London. Math. Soc., No. 11, pp. 402-418.*

J. Kurzweil (1957), Generalized ordinary differential equations and continuous dependence on a parameter, *Czech. Math. J., No. 82, pp. 418-446.*

D. A. Overdijk, N. van de Wouw i A. de Kraker (2001), Alternative Methods in Spectral Factorization. A Modeling and Design Tool, *Z. Ag. Math. Mech., 81, No. 2, pp. 140-144.*

W. Pfeffer (1987), The multidimensional fundamental theorem of calculus, *J. Austral. Math. Soc., Ser. A, No. 43, pp. 143-170.*

V. C. Poor (1930), Residues of polygenic functions, *Trans. Amer. Math. Soc., 32, No. 2, pp. 216-222.*

V. C. Poor (1953), On residues of polygenic functions, *Trans. Amer. Math. Soc., 75, pp. 244-255.*

V. Perić (1987), *Algebra I*, Sarajevo: Svjetlost.

W. Rudin (1966), *Real and Complex Analysis*, New York: McGraw-Hill.

B. Sarić (1999), *Koncept energetske hiper-stabilnosti nestacionarnih nelinearnih vremenski-kontinualnih sistema automatskog upravljanja.* Magistarska teza, odbranjena u Maju na Katedri za automatsko upravljanja Mašinskog fakulteta Univerziteta u Beogradu.

B. Sarić (2002a), On the finite *Fourier* transforms of functions with infinite discontinuities, *Inter. J. Math. Math. Sci. (IJMMS), Vol. 30, No. 5, pp. 301-317.*

B. Sarić (2002b), *Analiza dinamičkog ponašanja linearnih implicitno-singularnih sistema automatskog upravljanja sa čistim vremenskim kašnjenjem na konačnom i beskonačnom vremenskom intervalu.* Doktorska disertacija, odbranjena u Junu na Katedri za automatsko upravljanja Mašinskog fakulteta Univerziteta u Beogradu.

B. Sarić (2003), On a residue of complex functions in the 3-dimensional *Euclidean* complex vector space, *Inter. J. Math. Math. Sci. (IJMMS), Vol. 2003, No. 29, pp. 1867-1882.*

S. Schwabik i J. Kurzweil (2004), On McShane integrability of Banach space-valued functions. *Real Analysis Exchange, Vol. 29, No. 2* , pp. 763-780.

D. V. Slavić (1970), On summation of series*, Univerzitet u Beogradu, Publik. Elektr. fakulteta, Serija: Matematika i Fizika, No. 302-319, pp. 53-59.*

B. Stanković (1972), *Teorija funkcija kompleksne promenljive,* Beograd: Naučna knjiga.

E. Stipanić i M. Trifunović (1988), *Matematika II, Treće izdanje*, Beograd: Naučna knjiga.

Kratka biografija

Dr Branko V. Sarić, dipl. maš. inž., rođen je u Sarajevu, 13. Septembra 1960. godine. Osnovnu školu pohađa i završava školske 1974/75. godine u Užicu. Gimnaziju, prirodno-matematičkog smera, pohađa i završava školske 1978/79. god. u istom gradu. Školske 1979/80. god. upisuje se na Mašinski fakultet Univerziteta u Beogradu. Diplomirao je 27. Oktobra 1984. god., na grupi za automatsko upravljanje, sa najvišom ocenom i prosečnom ocenom 8, 76 u toku studija. Poslediplomske studije, takođe na grupi za automatsko upravljanje Mašinskog fakulteta Univerziteta u Beogradu, upisuje školske 1984/85. godine. Magistarski rad, pod naslovom **Koncept energetske hiper-stabilnosti nestacionarnih nelinearnih vremenski kontinualnih sistema automatskog upravljanja**, odbranio je 27. Maja 1999. god., na Mašinskom fakultetu Univerziteta u Beogradu. Na tom fakultetu brani i doktorsku disertaciju, pod naslovom **Analiza dinamičkog ponašanja linearnih implicitno-singularnih sistema automatskog upravljanja sa čistim vremenskim kašnjenjem na konačnom i beskonačnom vremenskom intervalu**, 12. Juna 2002. godine, pod mentorstvom Prof. dr Dragutina Lj. Debeljkovića. Nakon završetka studija, 1984. godine, radio je u SOUR "Prvi Partizan", OOUR "Gama" u Užicu. Od 1. Januara 1985. godine, pa sve do 31. Decembra 2001. godine, bio je u radnom odnosu sa Institutom "Kirilo Savić" u Beogradu. Na Višoj tehničkoj školi u Čačku, u zvanje Profesora, izabran je 2. Februara 2004. godine. Dr Branko Sarić je do sada objavio dvanaest naučnih radova kao samostalni autor, a kao koautor i dva prethodna saopštenja. Svoje naučne radove je objavljivao u nekoliko internacionalnih časopisa i saopštavao na domaćim konferencijama. Za stalnog referenta američkog žurnala **Mathematical Reviews** izabran je 2001. godine. Recezent je i za internacionalni žurnal **Stability and Control: Theory and Applications** koji izdaju **The Academy of Nonlinear Sciences - ANS (Russia)** i **The International Association for the Advancement of Methods for System Analysis and Design - IAAMSAD (SA)**. Oženjen je i otac je jednog deteta. Stanuje u Čačku.

Novi Sad, 13. januar 2007. godine *Branko V. Sarić*

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FUKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR

Identifikacioni broj:
IBR

Tip dokumentacije: **Monografska dokumentacija**
TD

Tip zapisa: **Tekstualni štampani materijal**
TZ

Vrsta rada: **Doktorska disertacija**
VR

Autor: **Branko Sarić**
AU

Mentor: **dr Stevan Pilipović**
MN

Naslov rada: **Furijeov red jedne klase funkcija sa diskontinuitetima**
NR

Jezik publikacije: **Srpski (latinica)**
JP

Jezik izvoda: **Srpski/Engleski**
JI

Zemlja publikacije: **Republika Srbija**
ZP

Uže geografsko područje: **Vojvodina**
UGP

Godina: **2007**
GO

Izdavač: **Autorski reprint**
IZ

Mesto i adresa: Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet, Trg Dositeja Obradovića 4
MA

Fizički opis rada: 5/7+107/38/0/16/0/0
(broj poglavlja/strana/citata/tabela/slika/grafika/priloga)
FO

Naučna oblast: Matematika
NO

Naučna disciplina: Analiza
ND

Predmetna odrednica/Ključne reči: kovektorsko polje, totalna vrednost nesvojstvenog integrala, Fourijeov red
PO

UDK:
UDK

Čuva se: U biblioteci Departmana za matematiku i informatiku PMF-a u Novom Sadu
ČU

Važna napomena:
VN

Izvod: U disertaciji se na bazi redefinisanih pojmova kako prostornog (integralnog) izvoda tako i ostatka (rezidijuma) kompleksnih funkcija definiše pojam totalne vrednosti nesvojstvenih integrala. Ova redefinisana vrednost integrala iskorišćena je za dokaz teoreme, koja je uopštenje Dirihlejeve teoreme o razvoju realnih funkcija u Furijeov trigonometrijski red.
IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN Veća: 5. Jul 2004. godine
DP

Datum odbrane:
DO

Članovi komisije:
Predsednik: dr Arpad Takači, redovni profesor, PMF Novi Sad
Mentor: dr Stevan Pilipović, redovni profesor, PMF Novi Sad
Član: dr Nenad Teofanov, vanredni profesor, PMF Novi Sad
Član: dr Miodrag Mateljević, redovni profesor, MF Beograd
KO

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FUCULTY OF SCIENCE
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO

Identification number:
INO

Document type: Monographic type
DT

Type of record: Text printed material
TR

Contens code: PhD thesis
CC

Author: Branko Sarić
AUR

Mentor: dr Stevan Pilipović
MN

Title: The Fourier series of one class of functions with discontinuities
TI

Language of text: Serbian
LT

Language of abstract: Serbian/English
LA

Country of publication: Republic of Serbia
CP

Locality of publication: Vojvodina
LP

Publication year: 2007
PY

Publisher: Author's reprint
PU

Publication place: University of Novi Sad, Faculty of Science, Trg Dositeja Obradovića 4

PP

Physical description: 5/7+107 /38/0/16/0/0
(chapters/pages/literature/tables/pictures/graphs/additional lists)
PD

Scientific field: Mathematics
SF

Scientific discipline: Analysis
SD

Subject/Key words: covector field, total value of improper integrals, the Fourier series
SKW

UC:
UC

Holding data: The Library of the Department of Mathematics and Informathics, Novi Sad
HD

Note:
N

Abstract: In this thesis we define the notion of the total value of improper integrals based on the redefined notions of the spatial (integral) derivative and the residue of complex functions. This redefined integrals is used to prove the theorem which is generalization of Dirichlet theorem on the expansion of real valued functions into Fourier trigonometric series.
AB

Accepted by Scientific Board on: July 5. 2004
ASB

Defended:
DE

Thesis defend board:
President: dr Arpad Takači, Full professor, FS Novi Sad
Mentor: dr Stevan Pilipović, Full professor, FS Novi Sad
Member: dr Nenad Teofanov, Associate professor, FS Novi Sad
Member: dr Miodrag Mateljević, Full professor, FM Belgrade
DB