

ИЗВЕШТАЈ О ОЦЕНИ ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ  
КАНДИДАТА КРИСТИНЕ АГО БАЛОГ

<b>I ПОДАЦИ О КОМИСИЈИ</b>
<p>1. Датум и орган који је именовано комисију Наставно-научно веће Природно-математичког факултета у Новом Саду, на електронској седници одржаној 28. маја 2020. год.</p> <p>2. Састав комисије са назнаком имена и презимена сваког члана, звања, назива уже научне области за коју је изабран у звање, датума избора у звање и назив факултета, установе у којој је члан комисије запослен:</p> <p>1. Др Ивица Бошњак, ванредни професор, алгебра и математичка логика, 31. 1. 2020, Природно-математички факултет у Новом Саду, председник комисије</p> <p>2. Др Борис Шобот, ванредни професор, алгебра и математичка логика, 4. 5. 2017, Природно-математички факултет у Новом Саду, члан комисије</p> <p>3. Др Марко Радовановић, доцент, алгебра и математичка логика, 9. 11. 2015, Математички факултет у Београду, члан комисије</p> <p>4. Др Бојан Башић, ванредни професор, дискретна математика, 1. 4. 2018, Природно-математички факултет у Новом Саду, ментор</p>
<b>II ПОДАЦИ О КАНДИДАТУ</b>
<p>1. Име, име једног родитеља, презиме: Кристина (Јожеф) Аго Балог</p> <p>2. Датум рођења, општина, држава: 24. 2. 1991, Суботица, Југославија</p> <p>3. Назив факултета, назив студијског програма дипломских академских студија – мастер и стечени стручни назив Природно-математички факултет у Новом Саду, студијски програм: математика, звање: мастер математичар</p> <p>4. Година уписа на докторске студије и назив студијског програма докторских студија 2015, студијски програм: математика</p> <p>5. Назив факултета, назив магистарске тезе, научна област и датум одбране: нема</p> <p>6. Научна област из које је стечено академско звање магистра наука: нема</p>
<b>III НАСЛОВ ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ:</b> <b>On some reversal-invariant complexity measures of multiary words (О неким реверзноинваријантним мерама сложености вишеарних речи)</b>

## IV ПРЕГЛЕД ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ:

Докторска дисертација има 134 стране, 4 поглавља подељена на укупно 12 одељака, при чему су два одељка подељена још на по три пододељка. Писана је на енглеском језику. Дисертација започиње изводом, затим следи предговор, а потом поглавља нумерисана на следећи начин:

1. Introduction
  - 1.1. On words
  - 1.2. Palindromic defect
    - 1.2.1. Defect of some periodic words
    - 1.2.2. Highly potential words
    - 1.2.3. A few more aperiodic words of finite defect
  - 1.3. MP-ratio
2. Generalized highly potential words
  - 2.1 Construction
  - 2.2 Standard form
  - 2.3 Basic properties
  - 2.4 Defect of generalized highly potential words
  - 2.5 Periodic case
3. MP-ratio in the ternary case
  - 3.1 An upper bound on the MP-ratio
  - 3.2 Optimality of the upper bound
  - 3.3 A postponed technical theorem
    - 3.3.1 First proof
    - 3.3.2 Second proof
  - Appendix: Examples
  - 3.4 Another postponed technical theorem
- 4 Conclusion

У првом поглављу утврђују се нотација и неопходне дефиниције, као и сви претходни резултати на које се истраживање из дисертације непосредно надовезује. Поглавље је подељено на три одељка, при чему је први од њих уопштеног типа, други уводи тзв. *палиндромски дефект* и сродне појмове, а трећи уводи тзв. *МП-размеру* и сродне појмове.

Друго поглавље посвећено је палиндромском дефекту и сродним концептима. Главни резултат овог поглавља чини конструкција класе бесконачних речи повезаних с великим бројем актуелних проблема из области комбинаторике на речима (пре свега, наравно, проблема у вези с појмом палиндромског дефекта). Сама конструкција ове класе речи дефинисана је у одељку 2.1. Кандидаткиња ове речи назива *уопштене високопотенцијалне речи*, будући да су један (врло) специјалан случај ове класе тзв. високопотенцијалне речи, дефинисане раније у литератури и тако именоване с обзиром на њихов висок потенцијал да представљају примере и контрапримере у вези с разним проблемима на речима. У одељку 2.2 уводи се један одређен начин за представљање уопштених високопоренцијалних речи који омогућава много погодности током њиховог изучавања. У одељку 2.3 се установљава да свака високопотенцијална реч има скуп фактора затворен за преокретање, да је рекурентна, да је униформно рекурентна ако и само ако је периодична, и даје се потпуна карактеризација случајева у којима је уопштена високопотенцијална реч периодична. Одељак 2.4 посвећен је дефекту уопштених високопотенцијалних речи, и у њему је садржан и главни резултат овог поглавља: свака уопштена високопотенцијална реч има коначан дефект, при чему је наведен и поступак како се тај дефект може израчунати. У одељку 2.5 засебно је посматран периодичан случај (који је у претходном одељку изузет из разматрања због неких одређених специфичности), и показано је да је и у том случају дефект увек коначан.

У трећем поглављу изучава се МП-размера у случају тернарног алфабета. Поглавље је подељено на четири одељка. У одељку 3.1 доказује се да је МП-размера у случају тернарног алфабета ограничена одозго константом 6, а у одељку 3.2 доказује се да је ова граница најбоља могућа. Током доказа из одељка 3.1 јавља се потреба за два резултата који су издвојени и доказани у засебним одељцима, 3.3 односно 3.4, будући да би они, због своје техничке природе, били превише оптерећујући по текст уколики би били изложени у оквиру одељка 3.1.

Четврто поглавље закључног је типа. Сумирају се добијени резултати из дисертације, и наводе се неки могући правци којима би могла тећи даља истраживања у овој области.

Потом се даје проширени извод на српском језику (будући да је дисертација писана на енглеском језику), а затим списак литературе и на крају кратка биографија кандидаткиње.

## V ВРЕДНОВАЊЕ ПОЈЕДИНИХ ДЕЛОВА ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ:

У првом поглављу кандидаткиња презентује раније резултате из литературе на које се истраживање из дисертације непосредно надовезује. Кандидаткиња ово поглавље дели на три одељка, у којима се презентују резултати уопштеног типа, резултати који се односе на палиндромски дефект, и резултати који се односе на МП-размеру, респективно. Резултати су јасно и прегледно изложени, и притом не само што су сви дати са уредним референцама, већ је за сваки од коришћених резултата у тезу уврштен и његов доказ, што, поред научне, тези додаје и велику методичку вредност.

Друго и треће поглавље у потпуности су сачињени од оригиналних резултата истраживања.

У литератури је познато тек мало речи које су апериодичне, имају скуп фактора затворен за преокретање, и имају коначан, позитиван дефект (а речи са овим склопом особина су повезане са разним хипотезама и резултатима у области комбинаторике на речима). Такве су већ поменуте високопотенцијалне речи, али сем њих, познати су још само понеки спорадични примери. Уопштене високопотенцијалне речи конструисане у другом поглављу тезе обухватају као специјалан случај практично све до сада познате примере из литературе (прецизније, једине необухваћене речи су неке униформно рекурентне речи, које свакако и не могу бити обухваћене јер уопштене високопотенцијалне речи никада нису униформно рекурентне осим ако су периодичне). Већ ово је јасан показатељ нивоа генералности резултата у другом поглављу тезе, а утисак додатно појачава чињеница да уопштене високопотенцијалне речи обухватају и неке друге типове речи досад виђене у литератури, као што су (у тези наведени) неки примери богатих речи (тј. речи дефекта 0) које су рекурентне али не и униформно рекурентне. Велики су изгледи да ће ова конструкција надаље имати запажену улогу у истраживањима из ове области.

Резултати у трећем поглављу проширују концепт МП-размере на тернарне речи. Појам МП-размере оригинално је био дефинисан само за бинарне речи, и заснивао се на идеји проширења задате бинарне речи до тзв. *минимално палиндромичне* речи. Јасно је шта је природан аналогон појма минимално палиндромичне речи над алфабетом кардиналности веће од 2, а главна потешкоћа се јавља код питања добре дефинисаности МП-размере у том случају (тј. питања егзистенције проширења вишеарних речи до минимално палиндромичне речи). Највероватније главно отворено питање око МП-размере (постављено већ у иницијалном раду, а на које до сада није било одговора) јесте да ли се аналоган појам може дефинисати и за арности веће од 2. Потврдан одговор на ово питање за тернарни алфабет, дат у трећем поглављу, представља велик научни допринос изучаваној проблематици. Резултати из овог поглавља дисертације разјашњавају зашто је ово питање до сада изазивало такве потешкоће у литератури, будући да (позитивно) разрешавање питања добре дефинисаности МП-размере у тернарном случају запрема око тридесет страница тезе! (Поређења ради, у бинарном случају се добра дефинисаност МП-размере показује у свега неколико редова текста.) Такође је показано да је МП-размера за тернарне речи ограничена одозго константом 6, као и да је ово и најбоље могуће горње ограничење (тј. да за сваки позитиван реалан број  $\varepsilon$  постоји тернарна реч чија је МП-размера већа од  $6 - \varepsilon$ ).

Сви резултати су веома јасно и прегледно изложени. Поједини резултати из дисертације су прихваћени за објављивање у склопу научног рада у часопису са ISI листе и излагани су на међународној конференцији, а још два научна рада с резултатима из дисертације су тренутно у процесу рецензије (од тога један у заршној фази) у часописима са ISI листе.

Према правилима Универзитета, текст дисертације тестиран је на плагијаризам коришћењем софтвера *iThenticate*. Софтвер је пријавио око 15% преклапања текста дисертације с текстом рада:

K. Ago, B. Bašić, On highly palindromic words: The ternary case, *Discrete Appl. Math.*, doi: 10.1016/j.dam.2020.04.006

(што је очекивано, будући да је ово кандидаткињин коауторски рад на основу ког је стекла услове за предају дисертације), док је за све остале изворе преклапање мање од 1%.

## **VI СПИСАК НАУЧНИХ И СТРУЧНИХ РАДОВА КОЈИ СУ ОБЈАВЉЕНИ ИЛИ ПРИХВАЋЕНИ ЗА ОБЈАВЉИВАЊЕ НА ОСНОВУ РЕЗУЛТАТА ИСТРАЖИВАЊА У ОКВИРУ РАДА НА ДОКТОРСКОЈ ДИСЕРТАЦИЈИ**

1. (M22) K. Ago, B. Bašić, On highly palindromic words: The ternary case, *Discrete Appl. Math.*, doi: 10.1016/j.dam.2020.04.006.
2. (M34) K. Ago, B. Bašić, S. Načko, D. Mitrović, *On generalized highly potential words*, The 90th Workshop on General Algebra, Novi Sad, 2015.

## **VII ЗАКЉУЧЦИ ОДНОСНО РЕЗУЛТАТИ ИСТРАЖИВАЊА**

Циљ дела истраживања које је у вези с палиндромским дефектом и сродним концептима био је да се пронађе нова класа речи које су уједно апериодичне, чији је скуп фактора затворен за преокретање, и које имају коначан позитиван дефект – а све с идејом да се оформи још издашнија залиха (у поређењу с високопотенцијалним речима, које су се показале као врло корисне за ту сврху) примера и контрапримера за разне проблеме о речима. Овај циљ је врло успешно реализован, будући да конструисана класа не само што надограђује класу високопотенцијалних речи, него обједињује више разних речи које су се појављивале у литератури у разне сврхе (оригинално конструисане независно једне од других), међу којима има и речи које су оригинално конструисане у вези с неким питањима која се тичу речи дефекта 0 (при чему је у тези дата карактеризација уопштених високопотенцијалних речи које имају дефект 0).

У вези са МП-размером и сродним концептима, показано је да бинарност алфабета није кључан услов за добру дефинисаност МП-размере, тј. показано је да се МП-размера (тј. њен очигледно природан аналогон) може дефинисати и у случају тернарног алфабета, те је пронађено најбоље горње ограничење МП-размере у том случају (износи 6). За питање добре дефинисаности МП-размере у небинарном случају, након што је постављено у литератури, до сада није било никаквог помака, што сведочи о тежини и значају истраживања из овог дела тезе.

## **VIII ОЦЕНА НАЧИНА ПРИКАЗА И ТУМАЧЕЊА РЕЗУЛТАТА ИСТРАЖИВАЊА**

Резултати и њихови докази веома су јасно и прегледно приказани. Веза између резултата из дисертације и резултата истраживања других аутора из ове тематике такође је веома јасно успостављена.

<b>IX КОНАЧНА ОЦЕНА ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ:</b>	
1.	<p>Да ли је дисертација написана у складу са образложењем наведеним у пријави теме</p> <p>Дисертација је у потпуности написана у складу с образложењем наведеним у пријави теме.</p>
2.	<p>Да ли дисертација садржи све битне елементе</p> <p>Дисертација садржи све битне елементе. Ранији резултати неопходни за даљи ток истраживања груписани су у првом поглављу, а наредна поглавља садрже у потпуности оригиналне резултате. Велика већина библиографских јединица објављена је током последњих десетак година, што сведочи о томе да је кандидаткиња добро упозната с разматраном проблематиком и добро упућена у њене савремене токове.</p>
3.	<p>По чему је дисертација оригиналан допринос науци</p> <p>Резултати дисертације пружају бољи увид у многе појмове повезане са реверзноинваријантним мерама сложености речи, с посебним акцентом на палиндромски дефект и МП-размеру.</p> <p>Конструкцијом класе уопштених високопотенцијалних речи, уз чињеницу да та класа обухвата разне досад засебно конструисане речи, оформљен је унифициран оквир за разне гране истраживања у домену ове тематике. Велики су изгледи да би уопштене високопотенцијалне речи у будућности могле заузети значајну позицију у склопу истраживања разних проблема у вези са палиндромским дефектом и сродним концептима.</p> <p>Доказ да бинарност алфабета није кључан услов за добру дефинисаност МП-размере, тј. да се МП-размера може дефинисати и у случају тернарног алфабета, представља први прогрес у литератури по овом питању, на ком није било никаквог напретка откако је први пут постављено (пре више од десет година). Нагласимо још, у закључку тезе кандидаткиња напомиње да је истраживање започето у оквиру тезе настављено и након комплетирања главног текста тезе, и наводи да је, као резултат тог даљег истраживања, у коауторству доказала добру дефинисаност МП-размере у случају алфабета произвољне кардиналности. Ово додатно увећава вредност истраживања обухваћеног у тези, будући да се сада може констатовати да је то истраживање представљало значајан корак ка резултату који је од суштинске важности за даља истраживања у домену ове тематике.</p> <p>О оригиналности резултата из дисертације сведочи и рад кандидаткиње прихваћен за објављивање у часопису са ISI листе категорије M22, те излагање кандидаткиње на међународној конференцији <i>The 90th Workshop on General Algebra (AAA90)</i>, категорије M34, као и још два рада с резултатима из дисертације тренутно под рецензијом, од тога један у завршној фази.</p>
4.	<p>Недостаци дисертације и њихов утицај на резултат истраживања</p> <p>Дисертација нема недостатака.</p>

<b>X ПРЕДЛОГ:</b>
На основу укупне оцене дисертације, комисија предлаже:
- да се докторска дисертација <b>On some reversal-invariant complexity measures of multiary words (О неким реверзноинваријантним мерама сложености вишеарних речи)</b> прихвати, а кандидаткињи <b>Кристини Аго Балог</b> одобри одбрана.

ПОТПИСИ ЧЛАНОВА КОМИСИЈЕ

---

Др Ивица Бошњак,  
ванр. проф. ПМФ-а,  
председник комисије

---

Др Борис Шобот,  
ванр. проф. ПМФ-а,  
члан комисије

---

Др Марко Радовановић,  
доцент Математичког факултета у Београду,  
члан комисије

---

Др Бојан Башић,  
ванр. проф. ПМФ-а,  
ментор