

ИЗВЕШТАЈ О ОЦЕНИ ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ

„Уопштени стохастички процеси у бесконачнодимензионалним просторима са применама на сингуларне стохастичке парцијалне диференцијалне једначине“

EVALUATION REPORT OF THE DOCTORAL DISSERTATION

**Generalized Stochastic Processes in Infinite Dimensional Spaces with Applications to Singular Stochastic Partial Differential Equations**

**I ПОДАЦИ О КОМИСИЈИ  
DATA OF THE COMMISSION BOARD**

1. **Датум и орган који је именовао комисију:** Наставно-научно веће Природно-математичког факултета у Новом Саду, 11.04.2007.

**Date and institution which nominated the commission:** Scientific Board of the Faculty of Science in Novi Sad, 11<sup>th</sup> of April 2007.

2. **Састав комисије са знаком имена и презимена сваког члана, звања, назива уже научне области за коју је изабран у звање, датума избора у звање и назив факултета, установе у којој је члан комисије запослен:**

1. Проф. др Марко Недељков, редовни професор ПМФ-а у Новом Саду, уже научна област Анализа и вероватноћа, изабран 01.07.2005. – председник
2. Проф. др Стеван Пилиповић, дописни члан САНУ, редовни професор ПМФ-а у Новом Саду, уже научна област Анализа и вероватноћа, изабран 25.02.1998. – ментор
3. Проф. др Михаел Обрегугенбергер, ванредни професор Универзитета у Инсбруку (Аустрија), уже научна област Математика, изабран 01.03.1997. – члан
4. Проф. др Загорка Лозанов Црвенковић, редовни професор ПМФ-а у Новом Саду, уже научна област Анализа и вероватноћа, изабрана 02.11.1999. – члан
5. Др Данијела Рајтер Ћирић, доцент ПМФ-а у Новом Саду, уже научна област Анализа и вероватноћа, изабрана 29.04. 2002. – члан

**List of the commission members:**

1. Prof. dr Marko Nedeljkov, Full Professor, Faculty of Science Novi Sad, scientific field Analysis and probability, elected 01.07.2005. – president
2. Prof. dr Stevan Pilipović, corresponding member of SANU, Full Professor, Faculty of Science Novi Sad, scientific field Analysis and probability, elected 25.02.1998. – mentor
3. Prof. dr Michael Obreguggenberger, Associate Professor, University in Innsbruck (Austria), scientific field Mathematics, elected 01.03.1997. – member
4. Prof. dr Zagorka Lozanov Crvenković, Full Professor, Faculty of Science Novi Sad, scientific field Analysis and probability, elected 02.11.1999. – member
5. Dr Danijela Rajter Ćirić, Assistant Professor, Faculty of Science Novi Sad, scientific field Analysis and probability, elected 29.04. 2002. – member

II ПОДАЦИ О КАНДИДАТУ DATA OF THE CANDIDATE	
1. <b>Име, име једног родитеља, презиме:</b>	Дора, Ђерђ, Селеши
<b>Name, name of one of the parents, surname:</b>	Dora, Djerdj, Seleši
2. <b>Датум рођења, општина, Република:</b>	22. 04. 1978. Зрењанин, Србија
<b>Date of birth, community, republic:</b>	22 <sup>nd</sup> of April 1978, Zrenjanin, Serbia
3. <b>Датум одбране, место и назив магистарске тезе:</b>	16. 02. 2004. ПМФ у Новом Саду, Експанзија уопштених стохастичких процеса са применама у једначинама
<b>Date of the defense, place and title of the Master thesis:</b>	16 <sup>th</sup> of February 2004, Faculty of Science, Novi Sad, Expansion of generalized stochastic processes with applications to equations
4. <b>Научна област из које је стечено академско звање магистра наука:</b>	Математика
<b>Scientific field from which the MSc rank is obtained:</b>	Mathematics
<b>III НАСЛОВ ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ:</b> Уопштени стохастички процеси у бесконачнодимензионалним просторима са применама на сингуларне стохастичке парцијалне диференцијалне једначине  <b>TITLE OF THE DOCTORAL DISSERTATION:</b> Generalized Stochastic Processes in Infinite Dimensional Spaces with Applications to Singular Stochastic Partial Differential Equations	

## IV ПРЕГЛЕД ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ:

Докторска дисертација има укупно 155 страница и подељена је у три поглавља. Прва глава с насловом *Простори уопштених функција* (20 страница текста) је експозиторан и садржи преглед основних појмова и познатих резултата теорија разних простора детерминистичких и стохастичких уопштених функција.

Друга глава с насловом *Уопштени стохастички процеси* (54 страница текста, организовано у 6 секција) садржи оригиналне резултате истраживања који су везани за саму структуру уопштених стохастичких процеса. Посматране су две класе уопштених стохастичких процеса са вредностима у Хилбертовом простору. За прву класу су изведене структурне теореме у виду хаос експанзије облика

$$\sum_{i=1}^{\infty} \langle f_i, \alpha \rangle e_i, \quad x \in I, \omega \in \Omega,$$
 где су  $f_{ij} (i, j \in \mathbb{N})$  детерминистичке

уопштене функције,  $H_d (\alpha \in \mathfrak{D})$  је ортогонална база простора белог шума, а  $e_i (i \in \mathbb{N})$  је ортонормирана база Хилбертовог простора који представља кодомен процеса  $\Phi$ . За другу класу процеса је добијена интегрална репрезентација у виду

$$\int_{\mathfrak{D}} f_i(\alpha) dM_d(\alpha), \quad \omega \in \Omega, x \in I,$$
 где су

$f_i(\alpha) = \sum_{k=1}^{\infty} \langle \alpha, M_d e_k \rangle e_k$  класични случајни процеси,  $M_d$  тежинске функције које дефинишу простор  $\mathcal{K}\{M_p\}$ , а  $\langle \cdot | \cdot \rangle_H$  скаларни производ у Хилбертовом простору  $H$ . Уведени су појмови Виковог производа уопштених стохастичких процеса, као и Коломбоовске екстензије простора уопштених стохастичких процеса, и приказане су њихове главне карактеристике. С циљем да се искажу разлике у концепту уопштених стохастичких процеса дефинисаних преко разних услова непрекидности, бројни примери су дати, а посматрана је и стохастичка диференцијална једначина  $\mathcal{U}x(\alpha) = f(x(\alpha))$ , где је  $\mathcal{U}$  уопштен стохастички процес који има вредност у тачки у смислу Лојашјевича.

Трећа глава с насловом *Примене на сингуларне стохастичке парцијалне диференцијалне једначине* (56 страница текста, организовано у 3 секције) садржи оригиналне резултате истраживања који су посвећени решавању линеарног елиптичног Дирихлеовог проблема са стохастичким коефицијентима и стохастичким рубним условима. Посматрана је једначина облика

$$L(x(\alpha)) = f(x(\alpha)), \quad U(x(\alpha)) = g(x(\alpha)), \quad x \in I, \omega \in \Omega,$$

где је оператор  $L$  стриктно елиптичан дат у дивергентном облику

$$L(x(\alpha)) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 x(\alpha)}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} a_{ij}(\alpha) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial x(\alpha)}{\partial \alpha_i} b_i(\alpha) + c(x(\alpha)),$$

Множење уопштених процеса је моделирано Виковим производом који се означава са  $\diamond$ , а сами процеси (елементи матрице  $A$  и вектора  $b, c$  и  $d$ , као и рубни услов  $g$  и функције  $f, h$ ) су посматрани као елементи Коломбоовске екстензије простора уопштених стохастичких процеса. Доказана је егзистенција и јединственост решења Дирихлеовог проблема, као и непрекидна зависност решења од рубних услова и коефицијената елиптичног диференцијалног оператора. На крају треће главе дата је и примена Фуријеове трансформације на решавање стохастичке Хелмхолцове једначине

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 x(\alpha)}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} a_{ij}(\alpha) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial x(\alpha)}{\partial \alpha_i} b_i(\alpha) + c(x(\alpha)) = f(x(\alpha)), \quad x \in I, \omega \in \Omega.$$

Докторска дисертација садржи и све остале предвиђене елементе: уводну реч, резиме, индекс појмова, библиографске референце, биографију кандидата и кључну документацијску информацију.

**SUMMARY OF THE DOCTORAL DISSERTATION:**

The dissertation consists of 155 pages organized in three chapters. The first chapter entitled *Generalized function spaces* (20 pages) is expository and contains an overview of fundamental notions and known results of deterministic and stochastic generalized functions theory.

The second chapter with title *Generalized Stochastic Processes* (54 pages, organized in 6 sections) contains original research results related to the very structure of generalized stochastic processes. Two classes of Hilbert space valued generalized stochastic processes are considered. For the first class, structure theorems in

terms of a chaos expansion are obtained in form of 
$$\Phi(x, \omega) = \sum_{\alpha \in \mathcal{D}} f_{ij}(\alpha) H_{\alpha}(d) e_{\alpha}(x), \quad x \in I, \omega \in \Omega,$$

where  $f_{ij}(i, j \in \mathbb{N})$  are deterministic generalized functions,  $H_{\alpha}(d \in \mathcal{D})$  is the orthogonal base of the white noise space, and  $e_i(i \in \mathbb{N})$  is the orthonormal base of the Hilbert space representing the codomain of the process  $\Phi$ . For the second class of processes an integral representation is derived in form of

$$\Phi(x, \omega) = \int_H f_i(x, d) M_d(\omega) e_i(x), \quad \text{where}$$

$f_i(i=1, 2, \dots, K, d)$  are classical stochastic processes,  $M_d$  are the weight functions defining the space  $\mathcal{K}\{M_p\}$ , and  $\langle \cdot | \cdot \rangle_H$  the inner product in the Hilbert space  $H$ . The notions of the Wick product and the Colombeau extension of generalized stochastic process spaces are introduced, and their main characteristics are presented. In order to emphasize the differences in the concept of generalized random processes defined by various types of continuity, numerous examples are provided, and the stochastic differential equation  $\mathcal{X}(x, d) = f(x, d)$  is considered, where  $y$  is a generalized random process having a point value at  $x = 0$  in sense of Lojasiewicz.

The third chapter entitled *Applications to singular stochastic partial differential equations* (56 pages, organized in 3 sections) contains original research results related to solving a linear elliptic Dirichlet problem with stochastic coefficients and stochastic boundary data. The equation

$$L(u(x, d)) = f(x, d), \quad u(x, d)|_{\partial I} = g(x, d), \quad x \in I, \omega \in \Omega,$$

is considered, where the operator  $L$  is strictly elliptic and given in divergence form

$$L(u) = -\text{div}(A \nabla u) + B u = f, \quad \text{where } A = (a_{ij}(x, d)), \quad B = (b_i(x, d)), \quad f = f(x, d).$$

The multiplication of generalized processes is modeled by the Wick product denoted as  $\diamond$ , while the processes themselves are considered as elements of the Colombeau extension of generalized stochastic process spaces. Existence and uniqueness of the solution of the Dirichlet problem are proved; the solution is also proved to continuously depend on the boundary data and on the coefficients of the elliptic differential operator. At the end of chapter 3 an application of the Fourier transformation is presented to solving the

stochastic Helmholtz equation 
$$-\Delta u(x, d) = f(x, d), \quad x \in I, \omega \in \Omega.$$

The dissertation contains all other elements foreseen: an introduction, conclusion, index, references, CV of the candidate end key words documentation.

**V ВРЕДНОВАЊЕ ПОЈЕДИНИХ ДЕЛОВА ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ:**

Дисертација у целини, као и њени појединачни делови имају добро систематизовану структуру и план излагања. Кандидат је показао не само математичку прецизност у раду, већ и висок степен креативности и леп стил писања. Уводни експозиторни део дисертације је добро организован, садржи све релевантне дефиниције и теореме потребне за разумевање даљих делова излагања. Друга и трећа глава дисертације садрже особито квалитетне резултате истраживања који припадају актуелним токовима науке. Излагање резултата је јасно и прецизно организовано у логичке целине. У другој глави је дат комплетан историјски преглед теорије уопштених стохастичких процеса и њихове класификације. Проблематика истраживања је јасно формулисана и мотивисана. Сами резултати истраживања (теореме о репрезентацији процеса, Виков производ, Коломбоова алгебра) су прецизно изложени, на високом теоријском нивоу, уз илустрацију преко бројних примера. Трећа глава дисертације такође садржи прецизну формулацију циљева примене на стохастичке једначине са сингуларитетима. Дате су савремене мотивације за решавање стохастичког Дирихлеовог проблема које се налазе у областима физике, математике финансија и медицине. Поступак решавања Дирихлеовог проблема је јасно и прецизно изложен, а дата је комплетна анализа особина добијеног решења.

**EVALUATION OF INDIVIDUAL PARTS OF THE DOCTORAL DISSERTATION:**

The dissertation as a whole, as well as its individual parts, has a well systematized structure and exposition plan. The candidate revealed not only a mathematical precision in her work, but also a high level of creativity and a fine writing style. The introductory expository part of the dissertation is well organized; it contains all relevant definitions and theorems needed to understand all further parts of the exposition. The second and third chapter of the dissertation contain research results that are particularly of high quality and belong to contemporary scientific fields. The exposition of the results is clearly and precisely organized into logical sections. In the second chapter a complete historical overview of generalized stochastic process theory and their classification is provided. The research goal is clearly formulated and motivated. The very results of the research (representation theorems of processes, Wick products, Colombeau algebras) are precisely stated, on a high theoretical level, with many illustrating examples. The third chapter of the dissertation also contains a precise formulation of the aims of applications to stochastic equations involving singularities. Contemporary motivations for solving the stochastic Dirichlet problem are given, which appear in the fields of physics, financial mathematics and medicine. The procedure of solving the Dirichlet problem is clearly and precisely specified, and a complete analysis of the properties of the obtained solution is provided.

**VI ЗАКЉУЧЦИ ОДНОСНО РЕЗУЛТАТИ ИСТРАЖИВАЊА:**

Резултати у другој глави дисертације се односе на структурне особине и репрезентацију уопштених стохастичких процеса дефинисаних преко разних врста непрекидности. За процесе типа I су изведене структурне теореме у виду хаос експанзије над простором белог шума, са коефицијентима експанзије у виду уопштених детерминистичких функција, и са вредностима у Хилбертовом простору. За процесе типа II, изведена је репрезентација у виду коначне суме дистрибуционих извода класичних случајних процеса. Са становишта примене, специјално су проучавани гаусовски процеси, и уопштени процеси који имају вредност у тачки у смислу Лојашјевича. Резултати треће главе дисертације се односе на примену добијених структурних теорема с циљем да се реше сингуларне стохастичке диференцијалне једначине. Изложени су поступак и теоријска основа за решавање елиптичног Дирихлеовог проблема са стохастичким коефицијентима и рубним условима. Дата је и анализа особина добијеног решења: доказано је да решење непрекидно зависи од рубних услова и коефицијената оператора, а математичко очекивање решења једнако је решењу одговарајућег детерминистичког Дирихлеовог проблема.

**CONCLUSIONS AND RESULTS OF THE RESEARCH:**

The results in Chapter 2 of the dissertation refer to structural properties and representation of generalized stochastic processes defined by various types of continuity. For processes of type I, structural theorems are obtained in terms of a chaos expansion in white noise space, where the coefficients of the expansion are deterministic generalized functions, with values in a Hilbert space. Processes of type II are proven to have a representation as a finite sum of distributional derivatives of classical stochastic processes. Especially, for the purpose of applications, Gaussian processes are studied, and processes which have a point value in sense of Lojasiewicz. The results of Chapter 3 of the dissertation are the applications of the obtained structural theorems in order to solve singular stochastic differential equations. The procedure and the theoretical fundament for solving the elliptic Dirichlet problem with stochastic coefficients and boundary data are exposed. The analysis of the obtained solution is also given: it is proved that the solution is continuously dependent on the boundary data and coefficients of the operator, while the mathematical expectation of the solution is equal to the solution of the corresponding deterministic Dirichlet problem.

**VII ОЦЕНА НАЧИНА ПРИКАЗА И ТУМАЧЕЊА РЕЗУЛТАТА ИСТРАЖИВАЊА:**

Област којој припада тема дисертације се данас сматра једном од водећих математичких области. То је теорија белог шума у оквиру бесконачнодимензионалне анализе и њена примена на стохастичке једначине. Добијени резултати у дисертацији су актуелни и на високом теоријском нивоу, оригинални су, квалитетни, и од изузетног значаја за савремене токове науке што обезбеђује релевантност тезе. Комбинација метода која је коришћена у истраживању је сама по себи изузетно значајна јер спаја више области математике нпр. теорију Кондратијевих простора и Виковог производа са Коломбоовим алгебрама, а у великој мери се користе и методе функционалне анализе у оквиру теорије стохастичких процеса. Приказ свих резултата истраживања је добро организован по логичким целинама, формулација резултата је математички прецизна, а дате су и интересантне мотивације и илустрације кроз примере. Тумачење добијених резултата је коректно изведено, уз детаљну анализу која пружа одговоре на велики број питања.

**EVALUATION OF THE PRESENTATION AND INTERPRETATION OF THE RESEARCH RESULTS:**

The field the dissertation belongs to is considered as one of the leading mathematical disciplines of today. It is the white noise theory in frame of infinite dimensional analysis and its applications to stochastic equations. The results obtained in the dissertation are up-to-date and on a high theoretical level, they are original, of high quality and of remarkable importance for contemporary scientific progresses. The combination of methods used in the research is rather important for itself, because it is a combination of several mathematical fields e.g. the Kondratiev space theory and the Wick product are combined with Colombeau algebras, and methods of functional analysis are being used in the framework of stochastic processes. The presentation of the research results is well organized into logical sections, the formulation of the results is mathematically precise, and also some interesting motivations and illustrations by examples are provided. The interpretation of the obtained results is correctly deduced, with a detailed analysis providing answers to a large number of questions.

**VIII КОНАЧНА ОЦЕНА ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ:  
FINAL REVIEW OF THE DOCTORAL DISSERTATION:**

**1. Да ли је дисертација написана у складу са образложењем наведеним у пријави теме**

Увидом у образложење наведено у пријави теме може се утврдити да је дисертација написана у потпуности у складу са програмом истраживања наведеним у пријави теме и да су добијени резултати који су предвиђани у пријави теме.

**Is the dissertation written according to the annotation given in the application form?**

According to the submitted report concerning the plan and the program of the doctoral dissertation, we confirm that the thesis is done according to this report and that the results which are obtained in the thesis are those which were planned.

**2. Да ли дисертација садржи све битне елементе**

Дисертација садржи све битне елементе које треба да има дисертација из математике.

**Does the dissertation contain all essential elements?**

The dissertation contains all important and essential characteristics for a dissertation in the field of Mathematics.

**3. По чему је дисертација оригиналан допринос науци**

У дисертацији су на оригиналан начин уведени нови простори са хаос експанзијама као и структурне теорије уопштених стохастичких процеса што је коришћено у решавању стохастичких парцијалних диференцијалних једначина. Резултати у вези са једначинама којима је посвећен највећи део дисертације су оригинални резултати аутора. Дисертација садржи модерну литературу и представља значајан научни допринос проучавању стохастичких процеса и стохастичких једначина.

**Why is the dissertation an original contribution to science?**

In the dissertation new spaces with chaos expansions as well as the structural theorems for generalized stochastic processes are introduced in an original way. This is used for solving stochastic partial differential equations. The results related to equations, making the integral part of the thesis, are the original contribution of the author. The dissertation contains a modern literature and presents an important scientific contribution to the investigation of stochastic processes and equations.

**4. Недостаци дисертације и њихов утицај на резултат истраживања**

Дисертација нема недостатака.

**Deficiencies of the dissertation and their impact to the research results**

The dissertation does not have any deficiency.

**IX ПРЕДЛОГ:**

На основу укупне оцене дисертације, комисија предлаже да се докторска дисертација прихвати а кандидату одобри одбрана.

**RESOLUTION:**

Based on the final evaluation of the dissertation, the commission board recommends to accept the doctoral dissertation and to allow the candidate the defense.

ПОТПИСИ ЧЛАНОВА КОМИСИЈЕ  
SIGNATURES OF THE COMMISSION MEMBERS

1. Проф. др Марко Недељков,  
ред. проф. ПМФ-а у Новом Саду – председник
2. Проф. др Стеван Пилиповић, дописни члан САНУ,  
ред. проф. ПМФ-а у Новом Саду – ментор
3. Prof. dr Michael Oberguggenberger,  
ванредни проф. Универзитета у Инсбруку – члан  
(Associate Prof. Univ. Innsbruck – member)
4. Проф. др Загорка Лозанов Црвенковић,  
ред. проф. ПМФ-а у Новом Саду – члан
5. Доцент др Данијела Рајтер Ћирић,  
доцент ПМФ-а у Новом Саду – члан