PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET
UNIVERZITETA U NOVOM SADU

DRAGOSLAV HERCEG

DIFERENCNI POSTUPCI SA NEEKVIDISTANTNIM MREŽAMA

DOKTORSKA DISERTACIJA

NOVI SAD, 1979.

S A D R Ž A J

U V O D N I   D E O

§1. Uvod

1. U ovom radu se posmatra diskretni analogon

$$\text{(DKP)} \qquad A_h x = B_h F_h x + r_h[\gamma_0,\gamma_1] \quad \text{u} \quad \mathbb{R}^{I_h}$$

konturnog problema

$$\text{(KP)} \qquad -x'' - p(t)x' = f(t,x) \ \text{na } I, \quad R_i x = \gamma_i \ (i = 0,1)$$

formiran neekvidistantnom diskretizacijom. Pritom je $I = [0,1]$, I_h konačan podskup od I, $p \in C(I)$, $f \in C(I \times \mathbb{R})$, $\gamma_i \in \mathbb{R}$ $(i=0,1)$, a R_i pripada jednoj od četiri klase linearnih funkcionala na $C^1(I)$, koje ćemo kasnije navesti. Parametar h karakteriše diskretizaciju i u medjusobnoj je zavisnosti sa I_h. A_h, $B_h \in L[\mathbb{R}^{I_h}]$ su matrice nastale diskretizacijom konturnog problema (KP), $r_h \in L[\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^{I_h}]$, F_h je nelinearno preslikavanje $\mathbb{R}^{I_h}$ u samog sebe, pri čemu elemenat $x \in \mathbb{R}^{I_h}$ se preslikava u elemenat $F_h x \in \mathbb{R}^{I_h}$ sa t-tom komponentom

$$(F_h x)(t) = f(t,x(t)) \, (t \in I_h).$$

U §4. definisani su parametar h, skup I_h i detaljno opisane matrice A_h i B_h.

2. Problemi vezani za numeričko rešavanje diskretnih analogona konturnih zadataka tipa (KP), nastalih ekvidistantnom diskretizacijom, posmatrani su u mnogim knjigama i radovima. Navedimo samo neke: [1b], [2a, c, d, e, f], [3], [5], [7], [11], [12a, b], [10]. U [3] je dato 20 shema za numeričko rešavanje konturnog zadatka (KP) pomoću ekvidistantne diskretizacije. Pored novih rezultata [3] sadrži i mnoge dobro poznate rezultate koji se odnose na ekvidistantnu diskretizaciju (KP).

U [3] se za $I = [a,b]$, $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$, definiše korak diskretizacije $h = (b-a)m^{-1}$, $m \in \mathbb{N}$, i odgovarajuća mreža $I_h = \{t_j = a + jh : j = 0,1,\dots,m_1\}$, pri čemu je $m_1 \in \{m,m-1\}$ (što zavisi od funkcionala R_i). Diskretni analogon konturnog problema (KP) je oblika (DKP), tj. predstavljen je sistemom nelinearnih jednačina. Inverzna monotonija matrice A_h pokazuje se u [3] kao veoma važna u dokazivanju rešivosti sistema (DKP), jednoznačnosti rešenja i konvergencije diskretnog rešenja ka rešenju problema (KP) kada $h \to 0$. Takodje, inverzna monotonija matrice A_h koristi se za dokaz stabilnosti sistema (DKP) i konvergenciju niza aproksimacija dobijenih pomoću Newtonove ili metode paralelne sečice ka rešenju sistema (DKP).

Slučaj $p(t) \equiv 0$ posebno je obradjen u [2c, e, f], a slučaj $p(t) \equiv 0$ i $f \in C(I)$ u [8a].

3. Matrica A_h nastala ekvidistantnom diskretizacijom konturnog problema (KP) je trakasta i relativno jednostavnog oblika, što pruža mogućnost da se sistem nelinearnih jednačina (DKP) dosta lako rešava. Pored toga, inverzna monotonija matrica A_h se dokazuje bez većih teškoća, [3], [12a]. Medjutim, iako ekvidistantna diskretizacija pruža mnoge pogodnosti u numeričkom rešavanju problema (KP), postoji potreba i za neekvidistantnom diskretizacijom, koja bi vodila računa o karakteru traženog rešenja. Ilustrovaćemo to primerom. Jednačina

$$(1) \qquad -x'' = a^2(1-x), \quad \text{na } I, \quad x(0) = x'(1) = 0$$

ima rešenje

$$x(t) = 1 - \frac{e^{a(t-1)} + e^{a(1-t)}}{e^{a} + e^{-a}}.$$

Za a = 100 važi $x(t) \in (0.9999977, 1]$ za $t \in [0.13, 1]$. Ako vrednosti rešenja $x(t)$ za $t \in [0.13, 1]$ smatramo poznatim i jednakim sa 1, onda možemo posmatrati broj tačaka mreže I_h, dobijene ekvidistantnom ili neekvidistantnom diskretizacijom, koje pripadaju intervalu $[0,0.13)$. U [8] su posmatrane dve ekvidistantne diskretizacije sa mrežama $I_{hj} = \{i/n : i = 0,1,\dots,n\}$ za n = 20 (j=1) i n = 100 (j=2), i neekvidistantna diskretizacija sa mrežom $I_{h,3} = \{k_i/800 : i = 0,1,2,\dots,20\}$, $(k_0, k_1,\dots,k_{20}) = (0,1,1,1,1,1,1,2,2,2,4,4,4,8,8,20,44,88,148,200,260)$. Označimo sa n_j ukupan broj tačaka mreže $I_{h,j}$, sa m_j broj tačaka iste mreže koje pripadaju intervalu $[0, 0.13)$, i neka je

$$\varepsilon_j = \max_{0\le i\le n_j} |x_j^h(t_i) - x(t_i)|,$$

pri čemu je x_j^h rešenje diskretnog analogona (DKP) nastalog diskretizacijom nad mrežom $I_{h,j}$. Tada imamo sledeću tabelu

j	n_j	m_j	ε_j
1	21	3	0.030350
2	101	14	0.014087
3	21	17	0.001037

Vidimo da neekvidistantna diskretizacija u navedenom primeru daje bolje rezultate od obe ekvidistantne diskretizacije, pri čemu uporedjujemo brojeve m_j, ε_j, i broj nepoznatih u sistemu nelinearnih jednačina (DKP) n_j.

Konturni problemi tipa (KP), čija rešenja u većem delu posmatranog intervala I imaju približno konstantnu vrednost, a u malim podintervalima intervala I se naglo menjaju, sreću se u mehanici fluida (problem graničnog sloja) [14a], [13], [6], i u kvantnoj mehanici (WKB problemi) [14a,b],[16],[17], u teoriji elasticiteta [6], [14a], [18], zatim u električnim kolima, hemijskim reakcijama itd. Primeri pojednostavljenih Navier-Stokes-ovih jednačina, čija rešenja imaju osobinu da su konstantna sem u jednom delu posmatranog intervala, gde se naglo menjaju, nalaze se u [14b] za slučaj udarne talasne jednačine i u [18] za slučaj hidrodinamičke teorije o podmazivanju.

Kako pri diskretizaciji (KP) težimo da dobijemo što tačnije aproksimacije i što manje jednačina i nepoznatih u sistemu (DKP), prirodno se pojavljuje neekvidistantna diskretizacija. Pritom na raspored tačaka diskretizacije utiče i karakter rešenja za (KP).

4. Numeričko rešavanje konturnih problema tipa (KP) neekvidistantnom diskretizacijom sreće se u [14a,b], [2i]. U [18] neekvidistantna diskretizacija koristi se kao medjufaza u tamo navedenoj metodi rešavanja pojednostavljenih Navier-Stokesovih jednačina za slučaj hidrodinamičke teorije podmazivanja. Medjutim, način na koji se koristi neekvidistantna diskretizacija nije naveden. U [12c,d] se posmatra (KP) sa $\alpha(t,x) \in C(I \times R)$ umesto $p(t)$, $-\varepsilon x''$ umesto x'' i dati interval se deli na dva podintervala u kojima se postavljaju ekvidistantne mreže različitog koraka. Kako se tu radi o singularnom perturbacionom problemu, u podintervalu, u kojem se uticaj člana $-\varepsilon x''$ može zanemariti, koristi se neka od metoda za numeričko rešavanje početnog problema (npr. metoda Runge-Kutta), a u podintervalu gde se član $-\varepsilon x''$ ne zanemaruje koriste se neke od shema iz [3]. U [14a] konturni problem (KP) sa $f(t,x) = g(t)x - h(t)$, $g,h \in C(I)$, svodi se na rešavanje sistema linearnih jednačina i koristi se Gaussova metoda eliminacije za izračunavanje približnih vrednosti rešenja.

Pri rešavanju singularnog perturbacionog problema tipa (KP) u [2i] se koristi neekvidistantna diskretizacija na mreži $I_h = \{t_0 = 0,\ t_j = t_{j-1} + k_j h : j = 1,2,\ldots,M\}$. Pri tom je $M \in \mathbb{N}$, $k_j \in \mathbb{N}(j = 1,2,\ldots,M)$, $h^{-1} = \sum_{j=1}^{M} k_j$, i za $1 \leq N_1 < N_2 < M$ i

$k_{N_2} = 2$

$k_i = k_1 (i = 1,\ldots,N_1)$, $2k_i = k_{i-1}$ $(i = N_1 + 1,\ldots,N_2)$,

$k_i = 1$ $(i = N_2 + 1,\ldots,M)$.

U [2i], kao i u [3] i [12a] inverzna monotonija koristi se kao osnova u proučavanju diskretizacije i rešivosti diskretnog analogona singularnog perturbacionog problema tipa (KP). Takodje su navedene tri sheme zasnovane na neekvidistantnoj mreži. Kao što se vidi, za tu mrežu je karakteristično da su k_j $(j = 1,\ldots,M)$ prirodni brojevi i da se formiraju na odredjeni način. Interval I se deli na tri podintervala, od kojih dva sadrže ekvidistantne mreže sa korakom $k_1 h$, odnosno h, a treći (srednji) neekvidistantnu mrežu sa promenljivim korakom oblika $k_{N_1+j} = hk_1/2^j$ $(j = 1,\ldots,N_2)$. Ovako izabrana mreža I_h omogućava diskretizaciju pomoću simetričnih diferencnih formula u svakoj tački $t_j \in I_h$ $(j = 1,2,\ldots,M-1)$.

U jednom kratkom komentaru u [7] samo se navodi jedna takva mogućnost, tj. diskretizacija sa neekvidistantnom mrežom pomoću simetričnih diferencnih formula. Naime, preporučuje se da dužina koraka diskretizacije u jednom podintervalu bude proizvod prirodnog broja i dužine koraka diskretizacije u drugom podintervalu.

5. U ovom radu posmatra se diskretizacija konturnog problema (KP) sa neekvidistantnom mrežom I_h definisanom kao u [2i], sa slabijim pretpostavkama za k_j i uz korišćenje nesimetričnih diferencnih formula. Inverzna monotonija se koristi kao osnovno sredstvo u proučavanju diskretnog analogona (DKP) konturnog problema (KP).

Rad je podeljen u tri dela i 8 paragrafa. Pojedini paragrafi izdeljeni su na više tačaka.

U uvodnom delu navedene su definicije, oznake i teoreme koje se koriste u ovom radu. Pretežno su uzete iz [1a], [2a], [3] i [12a].

Drugi deo rada, centralni, podeljen je na tri paragrafa: §3, §4, §5. U §3 prikazane su diferencne formule za aproksimaciju izvoda u eksplicitnom obliku prema E. Pflanzu [15b]. Posebno se posmatra aproksimacija prvog i drugog izvoda, koji se koriste za formiranje diskretnog analogona (DKP) konturnog problema (KP).

U §4. posmatra se sedam slučajeva konturnog problema (KP) i njihova diskretizacija pomoću neekvidistantnih mreža. Prvih pet slučajeva su isti kao u [3], a preostala dva su nastala iz prethodnih pet promenom jednog konturnog uslova. Pri definisanju neekvidistantnih mreža predpostavljeno je da rešenje konturnog problema (KP) u intervalu $[a,1]$, $0 < a \ll 1$, ima približno konstantnu vrednost, a u intervalu $[0,a]$ da se brzo menja. Opisano je 12 neekvidistantnih shema, od kojih prvih 8 sadrže kao specijalne (ekvidistantne) slučajeve odgovarajuće sheme iz [3]. Preostale sheme su dobijene na osnovu prethodnih osam.

U poslednjem paragrafu drugog dela dokazana je i inverzna monotonija matrica A_h nastalih diskretizacijom (KP) na osnovu shema iz §4. Iskaz teoreme 5.1, koji se odnosi na shemu I, u ekvidistantnom slučaju je već poznat [2f]. Medjutim, dokaz teoreme 5.1 je potpuno različit od dokaza odgovarajuće teoreme iz [2f].

Treći deo rada posvećen je iterativnom rešavanju diskretnih analogona konturnih problema iz §4. Kao što je za ekvidistantne diskretizacije u [3] dato pod kojim uslovima inverzna monotonija matrica A_h uslovljava konvergenciju iteracije paralelne sečice, tako je u §6. na osnovu rezultata §5. dokazana kovergencija iteracije paralelne sečice za neekvidistantne diskretizacije iz §4.

Za razliku od ekvidistantnog slučaja, gde je $h = n^{-1}$, $n \in N$, i $h \to 0$ kada $n \to \infty$, u slučaju neekvidistantne diskretizacije potrebno je posebno proučiti pod kojim uslovima parametar h teži nuli. To je učinjeno u paragrafima 6. i 7.

Ispitivanje nejednačine stabilnosti i konvergencije rešenja (DKP) ka rešenju (KP) kada $n \to \infty$ sprovedeno je u §7. Koristeći se rezultatima §5. i §6. i tehnikom iz [3] dobijeni su rezultati koji se u ekvidistantnom slučaju svode na odgovarajuće rezultate iz [3].

U §8. navedeno je nekoliko primera koji treba da ilustruju odredjene prednosti neekvidistantne diskretizacije u odnosu na ekvidistantnu za navedene probleme.

Neki rezultati ovog rada prikazani su u Matematičkom institutu univerziteta u Münsteru, SR Nemačka, Institutu za matematiku u Novom Sadu i na Internacionalnom kongresu matematičara u Helsinkiju 1978. godine.

Rad na ovoj disertaciji započet je za vreme mog boravka, finansiranog od strane SIZ-e za naučni rad SAP Vojvodine, u Matematičkom institutu univerziteta u Münsteru od 1.11.1977.g. do 27.4.1978.g. pod rukovodstvom profesora dr Ericha Bohla. Na pažnji sa kojom je pratio moj rad, savetima i sugestijama koji su bili od koristi pri izradi ove disertacije izražavam mu zahvalnost.Takodje se zahvaljujem njegovim asistentima dr Jensu Lorenzu i dr Wolf-Jürgenu Beynu na mnogim diskusijama.

Posebno se zahvaljujem akademiku dr Bogoljubu Stankoviću na svesrdnoj i stalnoj pomoći koju mi je pružao u toku izrade ove disertacije.

§2. Neke oznake, definicije i teoreme

Oznake, definicije i teoreme navedene u ovom paragrafu preuzete su uglavnom iz [1a], [2a], [3], [12a]. Navedimo prvo neke oznake:

$\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$	skup prirodnih, realnih i pozitivnih realnih brojeva
I	zatvoreni interval $[0,1]$,
I_h	konačan podskup od I,
Y^X	skup preslikavanja definisanih u X sa vrednostima u Y,
$L(X,Y)$	skup linearnih preslikavanja definisanih u X sa vrednostima u Y,
$L(X)$	$= L(X,X)$
E	identitet,
$C^k(X)$	skup k-puta neprekidno diferencijabilnih realnih funkcija u $X \subset \mathbb{R}$,
0	nula elemenat posmatranog vektorskog prostora,
x^n, $\{x^n\}$	niz sa članovima x^n $(n \in \mathbb{N})$,
δ	vektor čije su sve komponente jednake jedinici,
$\emptyset$	prazan skup,
$\delta(t)$	$= 1$, $t \in I$.

Ako je n kardinalni broj skupa I_h onda se elementi $x \in \mathbb{R}^{I_h}$ identifikuju sa vektorima $x = (x(t_1),x(t_2),\dots,x(t_n)) \in \mathbb{R}^n$, ili kraće $x = (x_1,x_2,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$, a linearni operatori $A \in L(\mathbb{R}^{I_h})$ sa matricama

$$A = (A_{ij})_{n\times n} \in \mathbb{R}^{n,n}.$$

Definicija 2.1. Za $x,y \in \mathbb{R}^{I_h}$ pisaćemo

$$x \leq (<)\ y \quad \text{ako je} \quad x(t) \leq (<)\ y(t) \qquad (t \in I_h)$$

i

$$|x|(t) = |x(t)| \qquad (t \in I_h).$$

Definicija 2.2. Za svako $e > 0$, $e \in \mathbb{R}^{I_h}$ i $x \in \mathbb{R}^{I_h}$

$\|x\|_e$ označava $\max\ \{|x(t)|\, e(t)^{-1} : t \in I_h\}$.

Prema [2a] sa $\|x\|_e$ je definisana norma u $\mathbb{R}^{I_h}$.

Definicija 2.3. Za svako $e \geq 0$, $e \in \mathbb{R}^{I_h}$, $\mathbb{R}_e^{I_h}$ označava skup $\{x \in \mathbb{R}^{I_h} : e(t) = 0 \Rightarrow x(t) = 0\}$.

Definicija 2.4. Preslikavanje F skupa $\mathbb{R}^{I_h}$ u samog sebe naziva se monotono ako

$$x \leq y \Rightarrow Fx \leq Fy \quad \text{za svako} \quad x,y \in \mathbb{R}^{I_h}.$$

Skup svih linearnih monotonih operatora na $\mathbb{R}^{I_h}$ označavaćemo sa $L_+(\mathbb{R}^{I_h})$.

Definicija 2.5. Preslikavanje $A \in L(\mathbb{R}^{I_h})$ se naziva inverzno-monotono (skraćeno i.m.) ako postoji inverzno preslikavanje $A^{-1} \in L_+(\mathbb{R}^{I_h})$.

Definicija 2.6. Preslikavanje F na $\mathbb{R}^{I_h}$ se naziva P-ograničeno kao je $P \in L_+(\mathbb{R}^{I_h})$ i ako za svako $x,y \in \mathbb{R}^{I_h}$ važi

$$|Fx - Fy| \leq P|x - y|.$$

Definicija 2.7. Za $A,B \in L(\mathbb{R}^{I_h})$ definišemo

$$A \leq B \quad \text{sa} \quad B - A \in L_+(\mathbb{R}^{I_h}).$$

Definicija 2.8. Za svako $A \in L(\mathbb{R}^{I_h})$ definišemo matrice A_d, A_0, A^+, $A^- \in L(\mathbb{R}^{I_h})$ na sledeći način

$$A_d(t,s) = \begin{cases} A(t,s) & \text{ako je} \quad t = s \\ 0 & \text{ako je} \quad t \neq s \end{cases},$$

$$A_0 = A - A_d,$$

$$A^+(t,s) = \begin{cases} A(t,s) & \text{ako je} \quad A(t,s) > 0 \\ 0 & \text{ako je} \quad A(t,s) \leq 0 \end{cases},$$

$$A^- = A - A^+.$$

Definicija 2.9. Neka su I_h^1 i I_h^2 disjunktni podskupovi skupa I_h. Reći ćemo da $A \in L(\mathbb{R}^{I_h})$ povezuje I_h^1 sa I_h^2 ako za svako $t \in I_h^1$ postoje tačke $t_0 = t, t_1, \ldots, t_r \in I_h$ $(r = r(t) \in \mathbb{N})$ takve da je $A(t_{i-1}, t_i) \neq 0$ i $t_r \in I_h^2$.

Definicija 2.10. I_h^0 i I_h^+ označavaju sledeće skupove

$$I_h^0(e) = \{t \in I_h : e(t) = 0\}, \quad I_h^+(e) = \{t \in I_h : e(t) > 0\}$$

za $e \in \mathbb{R}^{I_h}$.

Definicija 2.11. Matrica $A \in L(\mathbb{R}^{I_h})$ je L-matrica ako je $A_d > 0$ i $A \leq 0$.

Definicija 2.12. Matrica $A \in L(\mathbb{R}^{I_h})$ je M-matrica ako je L-matrica i ako je i.m.

Definicija 2.13. $\lambda(h)$ označava funkciju

$$2h^{-2}\left(1 - \cos\left(\frac{\pi h}{1+2\varepsilon}\right)\right), \quad \varepsilon \geq 0, \ \varepsilon \in \mathbb{R}$$

Funkcija $\lambda(h)$ monotono opada za $h \in \left[0, \frac{1}{2}+\varepsilon\right]$ i važi

$$\lambda(0) = \left(\frac{\pi}{1+2\varepsilon}\right)^2, \quad \lambda(h) > 0 \quad ([2f], [3]).$$

Definicija 2.14. Za preslikavanje T skupa $\mathbb{R}^{I_h}$ u samog sebe kažemo da zadovoljava nejednačinu stabilnosti ako za svako $x,y \in \mathbb{R}^{I_h}$ važi

$$\| x - y \|_\delta \geq a \| T_x - T_y \|_\delta$$

pri čemu je $a \geq 0$ konstanta nezavisna od x,y.

Teorema 2.1. (M-kriterijum). Neka je $A \in L(\mathbb{R}^{I_h})$, $e \in \mathbb{R}^{I_h}$. Ako je $A_0 \leq 0$, $e \geq 0$, $Ae \geq 0$ i ako A povezuje $I_h^0(Ae)$ sa $I_h^+(Ae)$, tada je

(i) $e > 0$ i $A(t,t) > 0$ za sve $t \in I_h$.

(ii) A je i.m., tj. A je M-matrica.

Teorema 2.2. Neka je $A \leq B$ $(A,B \in L(\mathbb{R}^{I_h}))$ i pretpostavimo da je B i.m.. Tada je A i.m. ako postoji $e > 0$ takvo da je $B^{-1} Ae > 0$.

Teorema 2.3. Neka je $C \leq A \leq B$ $(A,B,C \in L(\mathbb{R}^{I_h}))$. Ako su B i C i.m. tada je A i.m.

Teorema 2.4. (ML-kriterijum). Matrica $A \in L(\mathbb{R}^{I_h})$ je i.m. ako postoje dve matrice $M,L \in L(\mathbb{R}^{I_h})$ koje zadovoljavaju sledeće uslove

(i) $$A \leq ML.$$

(ii) M je M-matrica i $L_0 \leq 0$.

(iii) Postoji $e > 0$ takvo da je $Ae > 0$ i M ili L povezuje $I_h^0(Ae)$ sa $I_h^+(Ae)$.

Teorema 2.5. Neka za preslikavanje F skupa $\mathbb{R}^{I_h}$ u samog sebe važi

(i) $$Q \leq F \leq P$$

za neko $Q,P \in L[\mathbb{R}^{I_h}]$, $Q \leq P$. Neka za $A,R \in L[\mathbb{R}^{I_h}]$ važi

(ii) $A - P$, $A - R$ su i.m., $2R \leq P + Q$.

Tada $(A - F)^{-1}$ postoji i $(A - P)^{-1}$- ograničeno je, i iteracija paralelne sečice

PCI: $$x^0 \in \mathbb{R}^{I_h}, \quad (A - R)x^{n+1} = (F - R)x^n, \quad n \in \mathbb{N}$$

konvergira za svako x^0 jedinstvenom rešenju jednačine

$$Ax = Fx.$$

D R U G I   D E O

DISKRETIZACIJA SA NEEKVIDISTANTNIM MREŽAMA

U §3. navodi se opšta diferencna formula za aproksimaciju m-tog izvoda $x^{(m)}(t_0)$ funkcije $x(t)$ u tački t_0, koju je dao E. Pflanz u [15b]. Posebno se posmatraju slučajevi $m = 1$ i $m = 2$. Diferencne formule u tim slučajevima imaju osobine (3.6)-(3.8) za $m = 1$ i (3.13), ako važi (3.12), za $m = 2$. Ove osobine su značajne za dokaz inverzne monotonije matrica A_h nastalih diskretizacijom na osnovu shema iz §4. Zbog toga su sheme I-VII iz §4. tako postavljene da su osobine (3.6)-(3.8) i (3.13) sačuvane.

Kao što je već napomenuto, posmatraćemo konturne probleme (KP) za čije rešenje je poznato da je približno jednako konstanti u intervalu $[a,1]$, $0 < a \ll 1$, i da se u intervalu $[0,a]$ brzo menja. Zbog toga je poželjno da fiksni broj tačaka mreže I_h rasporedimo tako,da ih što više bude u intervalu $[0,a]$. S obzirom na to uslov (4.8), pod kojim su konstruisane sheme, je prirodan.

Slučajevi kada je rešenje problema (KP) približno jednako konstanti u intervalu $[0,1-a]$, a u intervalu $[1-a,1]$ se brzo menja , mogu se prevesti u oblik pogodan za primenu shema iz §4.

Uz male promene mogu se sheme iz §4. koristiti za diskretizaciju (KP) i u slučajevima kada njegovo rešenje ima približno konstantnu vrednost u $[a,b]$, $a < b$, $0 < b \ll 1$, a u $[0,a] \cup [1-b,1]$ brzo se menja. To ćemo prikazati na primeru sheme I, str. 25.

Sve sheme opisane u §4. u specijalnom slučaju (videti primedbu na kraju §4.) svode se na poznate ekvidistantne sheme. U formiranju shema I - IV interesantna je uloga parametra α_1. Naime, s obzirom na (4.10), pruža se mogućnost da se matrica A_h u slučajevima I - IV formira kao M-matrica ili matrica sa više slobode u "dijagonalnom ometanju" (videti teoreme 5.2, i 5.7 i njihove posledice).

U [2f] je za jednu klasu simetričnih diferencnih formula iznet rezultat koji je u teoremi 5.1 prenet i na diferencne formule iz sheme I. Dokaz teoreme 5.1 se bitno razlikuje od dokaza analognog rezultata za ekvidistantnu diskretizaciju. Koristeći se rezultatom teoreme 5.1 u teoremama 5.2, 5.8, 6.2, 7.3, 7.4 formulisani su i dokazni iskazi o neekvidistantnim diskretizacijama koje su u slučaju ekvidistantne diskretizacije dati u [3].

Ostale teoreme iz §5. dokazane su korišćenjem ML-kriterijuma datog u [3], a iskazuju tvrdjenja o neekvidistantnim shemama koje se u ekvidistantnom slučaju nalaze u [3], [12a].

§3. Diferencne formule za izvode prema E. Pflanzu

1. E. Pflanz u [15b] je dao u eksplicitnom obliku diferencne formule za m-ti izvod $x^{m}(t_0)$ funkcije $x(t)$ u tački t_0. Njegov rezultat iskazuje sledeća teorema:

Teorema 3.1. Neka je $x \in C^{n+1}(I)$, $n \in \mathbb{N}$, $h \in \mathbb{R}_+$, $\alpha_j \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ $(j=1,2,\dots,n)$, $\alpha_i \neq \alpha_j$ za $i \neq j$ $(i,j = 1,2,\dots,n)$, i t_0, $t_0 + h\alpha_j \in I$.

Tada je za $m \leq n$, $m \in \mathbb{N}$,

$$(3.1)\qquad x^{(m)}(t_0) = h^{-m}(-1)^m\, m!\,S_m x(t_0) + $$

$$+ h^{-m}(-1)^{n-1} m! \prod_{i=1}^{n} \alpha_i \sum_{j=1}^{n} \frac{F(m,n,\alpha_j)}{\alpha_j^{m+1} \prod_{i=1}^{n}{}' (\alpha_j - \alpha_i)} \cdot$$

$$\cdot\, x(t_0 + \alpha_j h) + R_{m,n}$$

sa

$$(3.2)\qquad R_{m,n} = h^{n+1-m} \frac{(-1)^n m! \sum_{i=1}^{n} \alpha_i}{(n+1)!} \sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j^{n-m} F(m,n,\alpha_j)}{\prod_{i=1}^{n}{}' (\alpha_j - \alpha_i)}$$

$$\cdot\, x^{(n+1)}(t_0 + \Theta_j \alpha_j h)$$

$$(|\Theta_j| \le 1,\ j = 1,2,\dots,n).$$

U (3.1) i (3.2) je $F(1,n,\alpha_j) = 1$, $F(m,n,\alpha_j) = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} \alpha_j^{k-1} S_{k-1}$ $(m = 2,3,\dots,n)$, pri čemu je $S_0 = 1$, a S_k suma brojeva $(\alpha_{i_1} \cdot \alpha_{i_2} \cdots \alpha_{i_k})^{-1}$ gde $(i_1, i_2, \dots, i_k)$ prolazi skupom kombinacija k-te klase bez ponavljanja elemenata $(1,2,\dots,n)$. Proizvod $\prod_{i=1}^{n}{}' (\alpha_j - \alpha_i)$ (za fiksno j, $1 \le j \le n$) se formira za $i = 1,2,\dots,n$ sa izuzetkom $i = j$, a za $n = 1$ je 1. Umesto podvučenih izraza n+1, n+1-m, n-m u (3.2) mogu se uzeti za 1 povećani brojevi n+2, n+2-m, n-m+1 tada i samo tada kada je m paran broj a tačke $t_0 + \alpha_j h$ su simetrične u odnosu na t_0.

Teorema 3.1 daje aproksimaciju izvoda $x^{(m)}(t_0)$ u opštem slučaju, tj. sa neekvidistantnim čvorovima interpolacije, u obliku

$$(3.3)\qquad x^{(m)}(t_0) = h^{-m} \sum_{j=0}^{n} a_j x(t + \alpha_j h) + O(h^{n+1-m}) \quad (\alpha_0 = 0)$$

sa koeficijentima $a_0, a_1, \ldots, a_n$ koji su dati u (3.1). Pod pretpostavkama teoreme 3.1 u [5] i [9] se navodi postupak za formiranje sistema n+1 linearne jednačine sa n+1 nepoznatom $a_0, a_1, \ldots, a_n$ tako da važi (3.3), ali opšte rešenje nije dato. Aproksimacije drugog izvoda (m=2) pomoću neekvidistantnih čvorova interpolacije za n = 3 nalazimo u [12a] i [4], a za n = 2 u [12a], [14a,b] i [6]. Diferencne formule za prvi izvod (m = 1) sa neekvidistantnim čvorovima interpolacije navode se u [12a] i [14a,b].

Diferencne formule za $x^{(m)}(t_0)$ sa ekvidistantnim čvorovima interpolacije $t_0 + jh$, $j = 0,1,\ldots,q,-1,-2,\ldots,-p$, $n = p + q$ ($p,q \geq 0$ su celi brojevi, $p + q \geq 1$) su specijalni slučajevi formule (3.1) i nalaze se u radovima E. Pflanza [15b] i [15a]. L. Collatz u [5] je dao tabele sa diferencnim formulama za izvode reda 1,2,3 i 4 nastale pomoću ekvidistantnih čvorova interpolacije sa različitim brojem čvorova interpolacije i svrstao ih u dve grupe - simetrične i nesimetrične.

Pri numeričkom rešavanju diferencijalnih jednačina zasnovanom na aproksimaciji izvoda diferencnim formulama najčešće su korišćene formule dobijene pomoću ekvidistantnih čvorova interpolacije, posebno simetrične formule. Navedimo samo [2a,f,c,d,e], [3], [5], [7], [9], [11], [12a,b]. Razlog za čestu primenu simetričnih diferencnih formula izmedju ostalog je i taj da je $R_{m,n} = O(h^{n+2-m})$, za $x \in C^{(n+2)}(I)$, umesto $R_{m,n} = O(h^{n+1-m})$ u opštem slučaju pri istom broju n+1 interpolacionih čvorova.

Diferencne formule dobijene pomoću ekvidistantnih čvorova interpolacije, odnosno pomoću neekvidistantnih čvorova interpolacije, nazivaćemo ekvidistantne diferencne formule, odnosno neekvidistantne diferencne formule.

2. Posmatrajmo sada formule (3.1) i (3.2) za m = 2 i m = 1 i obeležimo $x^{(2)}(t)$ sa $x''(t)$ i $x^{(1)}(t)$ sa $x'(t)$.

Neka su za n = 2 i m = 1 ispunjene pretpostavke teoreme 3.1, tada je

$$(3.4)\qquad x'(t_0) = h^{-1}(a'x(t_0+\alpha_1 h) + b'x(t_0) + c'x(t_0+\alpha_2 h) + O(h^2)$$

$$(3.5)\qquad a' = \frac{-\alpha_2}{\alpha_1(\alpha_1-\alpha_2)},\ b' = -\frac{\alpha_1+\alpha_2}{\alpha_1\alpha_2},\quad c' = \frac{-\alpha_1}{\alpha_2(\alpha_2-\alpha_1)}.$$

Zaista, iz (3.1) i (3.2) sledi

$$x'(t_0) = h^{-1}(-S_1 x(t_0) - \alpha_1\alpha_2\left\{\frac{1}{\alpha_1^2(\alpha_1-\alpha_2)}x(t_0+\alpha_1 h) + \frac{1}{\alpha_2^2(\alpha_2-\alpha_1)}x(t_0+\alpha_2 h)\right\} + O(h^2)$$

jer je $F(1,2,\alpha_j) = 1 (j = 1,2)$, a kako je

$$S_1 = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} = \frac{\alpha_1+\alpha_2}{\alpha_1\alpha_2},$$

neposredno sledi (3.4) i (3.5).

Lako se vidi da važi

$$(3.6)\qquad (0 < \alpha_1 < \alpha_2) \Rightarrow (a' > 0,\ b' < 0,\ c' < 0),$$

$$(3.7)\qquad (\alpha_1 < 0,\ \alpha_1 + \alpha_2 \geq 0) \Rightarrow (a' < 0,\ b' \geq 0,\ c' > 0),$$

$$(3.8)\qquad (\alpha_1 < \alpha_2 < 0) \Rightarrow (a' > 0,\ b' > 0,\ c' < 0).$$

Neka su sada ispunjene pretpostavke teoreme 3.1 za $n = 3$ i $m = 2$. Tada je

$$(3.9)\qquad -x''(t_0) = h^{-2}(ax(t_0+\alpha_1 h) + bx(t_0) + cx(t_0+\alpha_2 h) + dx(t_0+\alpha_3 h)) + O(h^2)$$

$$a = \frac{2(\alpha_2 + \alpha_3)}{\alpha_1(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)}, \qquad b = \frac{-2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)}{\alpha_1\alpha_2\alpha_3},$$

(3.10)

$$c = \frac{2(\alpha_1 + \alpha_3)}{\alpha_2(\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_2 - \alpha_3)}, \qquad d = \frac{2(\alpha_1 + \alpha_2)}{\alpha_3(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_2)}.$$

Prema (3.1) je

$$h^2x''(t_0) = 2S_2x(t_0) + 2\alpha_1\alpha_2\alpha_3\Big\{\frac{F(2,3,\alpha_1)}{\alpha_1^3(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)}\cdot$$

(3.11)

$$\cdot\, x(t_0 + \alpha_1 h) + \frac{F(2,3,\alpha_2)}{\alpha_2^3(\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_2 - \alpha_3)}\, x(t_0 + \alpha_2 h)$$

$$+ \frac{F(2,3,\alpha_3)}{\alpha_2^3(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_2)}\, x(t_0 + \alpha_3 h)\Big\} + O(h^2).$$

Kako je

$$S_1 = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_3} = \frac{\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3}{\alpha_1\alpha_2\alpha_3},$$

$$S_2 = \frac{1}{\alpha_1\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_1\alpha_3} + \frac{1}{\alpha_2\alpha_3} = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}{\alpha_1\alpha_2\alpha_3},$$

to je

$$F(2,3,\alpha_1) = 1 - \alpha_1 S_1 = -\frac{\alpha_1(\alpha_2 + \alpha_3)}{\alpha_2\alpha_3},$$

$$F(2,3,\alpha_2) = 1 - \alpha_2 S_2 = -\frac{\alpha_2(\alpha_1 + \alpha_3)}{\alpha_1\alpha_3},$$

$$F(2,3\ \alpha_3) = 1 - \alpha_3 S_3 = -\frac{\alpha_3(\alpha_1 + \alpha_2)}{\alpha_2\alpha_3},$$

te se iz (3.11) lako dobija (3.9) i (3.10).

Iz (3.10) pod pretpostavkama

$$(3.12) \qquad \alpha_1 < 0, \quad 0 < \alpha_2 < \alpha_3, \quad \alpha_1 + \alpha_3 \geq 0$$

očigledno sledi

$$(3.13) \qquad a < 0, \quad b > 0, \quad c \leq 0, \qquad d \begin{cases} \leq 0 & \text{za} \quad \alpha_1 + \alpha_2 \leq 0, \\ > 0 & \text{za} \quad \alpha_1 + \alpha_2 > 0. \end{cases}$$

U posebnom slučaju $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$ iz (3.5) i (3.10) se dobija

$$(3.14) \qquad \begin{aligned} b' &= 0, \quad a' = -c' = -(2\alpha_2)^{-1}, \\ d &= 0, \quad a = c = -\frac{b}{2} = -\alpha_2^{-2}. \end{aligned}$$

Ako je $\alpha_1 + \alpha_3 = 0$ iz (3.10) se dobija

$$(3.15) \qquad c = 0, \quad a = d = -\frac{b}{2} = -\alpha_3^{-2}.$$

§4. Diskretizacija konturnih problema drugog reda

1. U ovom paragrafu daćemo 12 shema za diskretizaciju konturnog problema

(KP) $\quad - x'' - p(t)x' = f(t,x) \quad$ na I, $R_i x = \gamma_i \quad (i = 0,1)$

sa 4 klase linearnih funkcionala R_i na $C^1(I)$. Pretpostavimo $p \in C(I)$, $f \in C(I \times \mathbb{R})$ i $\gamma_i \in \mathbb{R} (i = 0,1)$. Kasnije ćemo navesti i druge pretpostavke kada se ukaže potreba.

Za $n \in \mathbb{N}$, $k_j \in \mathbb{R}_+$ $(j = 1,2,\ldots,n)$ definišemo parametar h sa

$$h^{-1} = \sum_{j=1}^{n} k_j, \tag{4.1}$$

a odgovarajuću mrežu I_h na I sa

$$I_h = \{t_0 = 0,\ t_j = t_{j-1} + k_j h : j = 1,2,\ldots,n\}. \tag{4.2}$$

Ako je $k_i \neq k_j$ bar za jedno $i \neq j$, $i,j \in \{1,2,\ldots,n\}$, mreža I_h se naziva neekvidistantna ili neregularna ([2i]). Za $k_j = 1$ $(j = 1,2,\ldots,n)$ mreža I_h je ekvidistantna.

Diskretni problem koji odgovara problemu (KP) ima kanonički oblik

(DKP) $\quad A_h x = B_h F_h x + r_h [\gamma_0, \gamma_1] \quad$ u $\mathbb{R}^{I_h}$, gde je $A_h, B_h \in L[\mathbb{R}^{I_h}]$, $r_h \in L[\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^{I_h}]$, i F_h nelinearno preslikavanje $\mathbb{R}^{I_h}$ u samog sebe, koje elementu $x \in \mathbb{R}^{I_h}$ pridružuje elemenat $F_h x \in \mathbb{R}^{I_h}$ čija je t-ta komponenta data sa

$$(F_h x)(t) = f(t,x(t)) \quad (t \in I_h).$$

Matrice A_h i B_h nastaju u postupku zamene jednačine i konturnih uslova iz (KP) odgovarajućim diferencnim jednačinama u tačkama mreže I_h. One ne zavise od funkcije $f(t,x)$, nego od diferencnih formula kojima se aproksimiraju prvi i drugi izvod, x' i x'', u (KP), od funkcije $p(t)$ i funkcionala R. Ilustrovaćemo to primerom.

Neka je $p(t) \equiv 0$, $R_0 x = x(0)$, $R_1 x = x(1)$, $n \in \mathbb{N}$, $k_j = 1$ $(j = 1,2,\dots,n)$. Za $t \in I_h \setminus \{0,1\}$ koristićemo (3.9) sa $\alpha_1 = -1$ i $\alpha_2 = 1$ za diskretizaciju (KP). Tada je

$$x(0) = \gamma_0, \quad x(1) = \gamma_1 \tag{4.3}$$

$$h^{-2}(-x(t-h) + 2x(t) - x(t+h)) = f(t,x(t))$$
$$t \in I_h \setminus \{0,1\},$$

a otuda

$$A_h = h^{-2}\begin{bmatrix} h^2 & & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & & h^2 \end{bmatrix} \tag{4.4}$$

$$B_h = \operatorname{diag}(0,1,\dots,1,0) \quad \text{i} \quad r_h[\gamma_0,\gamma_1] = (\gamma_0,0,\dots,0,\gamma_1).$$

Znači, sa (DKP) je dat sistem n+1-ne nelinearne jednačine sa n+1-nom nepoznatom $x_i = x(t_i)$ $(i = 0,1,\dots,n)$. Ako elemente matrica A_h i B_h označimo sa $A_h(i,j)$, odnosno $B_h(i,j)$ $(i,j = 0,1,2,\dots,n)$, a i-tu komponentu vektora $r_h[\gamma_0,\gamma_1]$ sa $r_h[\gamma_0,\gamma_1](i)$, i-ta jednačina iz (DKP) će biti

$$\sum_{j=0}^{n} A_h(i,j)x_j = \sum_{j=0}^{n} B_h(i,j)F_h x_j + r_h[r_0,\gamma_1](i),$$

što ćemo zapisivati kraće ([3]) u obliku

$$(A_h(i,0),\dots, \underline{A_h(i,i)},\dots, A_h(i,n)) =$$

$$= (B_h(i,0),\dots, \underline{B_h(i,i)},\dots, B_h(i,n)) +$$

$$+ r_h[\gamma_0,\gamma_1](i).$$

Pritom ćemo zajednički faktor elemenata odgovarajuće matrice pisati ispred zagrade, a elemente jednake nuli nećemo pisati. Tako,na primer, diskretizaciju opisanu sa (4.3) možemo skraćeno zapisati sa

$$(4.5)\qquad \begin{array}{lll} (\underline{1}) & = (\underline{0}) + \gamma_t & t = 0,1 \\ h^{-2}(-1,\underline{2},-1) & = (\underline{1}) & t \in I_h \setminus \{0,1\}. \end{array}$$

Dijagonalni elementi su podvučeni.

2. Sada ćemo opisati sheme koje ćemo koristiti za diskretizaciju (KP). Razlikovaćemo sledeće slučajeve:

I $\qquad R_0x = x(0),\ R_1x = x(1),\ p \equiv 0.$

II $\quad R_0x = g_0x(0) - x'(0),\ R_1x = g_1x(1) + x'(1),\ p \equiv 0,$

$g_i \in \mathbb{R}\ \ (i = 0,1),\ \ g_0 \geq 0,\ g_1 \geq 0,\ g_0 + g_1 > 0.$

III $\quad R_0x = x(0),\ \ R_1x = g_1x(1) + x'(1),\ p \equiv 0,\ g_1 \in \mathbb{R},$

$g_1 \geq 0$ ili $R_0x = g_0x(0) - x'(0),\ R_1x = x(1),\ p \equiv 0,$

$g_0 \in \mathbb{R},\ g_0 \geq 0.$

IV $\quad R_0x = gx(0) - g_0x'(0) + g_1x'(1),\ R_1x = x(0) - x(1),$

$p \equiv 0,\ g, g_0, g_1 \in \mathbb{R}_+$ i $\gamma_1 = 0.$

V $\quad R_0$ i R_1 kao u slučajevima I - IV i $p \not\equiv 0.$

VI $\quad R_1x = x'(1), \gamma_1 = 0,\ R_0$ kao u slučajevima I i II,

$x(1-t) = x(1+t)$ za $t \in I,\ \ p \equiv 0.$

VII $\quad R_0$ i R_1 kao u VI, $\ x(1-t) = x(1+t)$ za $t \in I,\ p \not\equiv 0.$

U svim slučajevima ćemo pretpostaviti da je $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, $k_j \in \mathbb{R}_+$ $(j = 1,2,\ldots,n)$ i definisati h sa (4.1). Mreža diskretizacije će biti I_h iz (4.2) sa ili bez tačke $t_n = 1$, što zavisi od funkcionala R_i. Za aproksimacije prvog i drugog izvoda koristićemo formule (3.4) i (3.9):

(4.6) $\quad x'(t) \sim h^{-1}(a'x(t + \alpha_1 h) + b'x(t) + c'x(t + \alpha_2 h)),$

(4.7) $\quad x''(t) \sim h^{-2}(ax(t + \alpha_1 h) + bx(t) + cx(t + \alpha_2 h) +$

$+ dx(t + \alpha_3 h)),$

pri čemu su koeficijenti a', b', c', a, b, c, d, koji zavise od

α_1, α_2 i α_3 dati su sa (3.5) i (3.10).

Slučaj I. Neka je $I_h = \{t_0 = 0,\ t_j = t_{j-1} + k_j h : j = 1,2,\ldots,n\}$ i

$$1 \le k_i \le k_{i+1} \quad (i = 1,2,\ldots,n-2), \tag{4.8}$$

$$k_n = \sum_{j=0}^{p_{n-1}} k_{n-1-j} \quad \text{za neko } p_{n-1} \in \{0,1,2,\ldots,n-2\}.$$

Definišimo

$$\alpha_2(i) = k_{i+1},\ \alpha_3(i) = \alpha_2(i) + k_{i+2} \tag{4.9}$$

$$(i = 1,2,\ldots,n-1;\quad k_{n+1} := k_n).$$

$$\alpha_1(i) = -\sum_{j=0}^{p_i} k_{i-j} \quad (i = 1,2,\ldots, n-1) \tag{4.10}$$

pri čemu je p_{n-1} odredjeno sa (4.8), a $p_i \in \{0,1,\ldots,i-1\}$ $(i = 1,2,\ldots,n-2)$ se odredjuje tako da važi

$$\alpha_1(i) + \alpha_3(i) \ge 0 \quad (i = 1,2,\ldots, n-2). \tag{4.11}$$

Iz (4.8) - (4.11) sledi

$$\alpha_1(i) < 0, \quad 0 < \alpha_2(i) \le \tfrac{1}{2}\alpha_3(i) \tag{4.12}$$

$$\alpha_1(i) + \alpha_3(i) \ge 0 \quad (i = 1,2,\ldots, n-1),$$

$$\alpha_1(n-1) + \alpha_2(n-1) = 0, \tag{4.13}$$

$$t_i + \alpha_j(i)h \in I \; (j = 1,2;\; i = 1,2,\dots,n-1),$$

$$t_i + \alpha_3(i)h \in I \; (j = 1,2,\dots, n-2).$$

Zbog (4.13) su tačke $T_{-1} := t_{n-1} + \alpha_1(n-1)h$ i $T_1 := t_{n-1} + \alpha_2(n-1)h$ simetrične u odnosu na tačku $T_0 := t_{n-1}$, te na osnovu teoreme 3.1 imamo

$$(4.15) \qquad - x''(T_0) = (\alpha_2(n-1)h)^{-2}(- x(T_{-1}) + 2x(T_0) - x(T_1)) + O(h^2).$$

Formula (4.15) sledi takodje iz (3.9), sa $\alpha_1 = \alpha_1(n-1)$ i $\alpha_2 = \alpha_2(n-1)$, na osnovu (3.14).

Na osnovu (4.13) i (4.14), s obzirom na (4.15), može se aproksimacija (4.7) koristiti u svim tačkama t_i $(i = 1,2,\dots,n-1)$. Ako sa a_i, b_i, c_i, d_i označimo keoficijente a,b,c,d dobijene iz (3.10) sa $\alpha_1(i)$, $\alpha_2(i)$, $\alpha_3(i)$ umesto sa α_1, α_2, α_3 imamo sledeću shemu.

Shema I.

$$(\underline{1}) = (\underline{0}) + \gamma_i \quad \text{za } t = 0,1,$$

$$h^{-2}(a_i,0,\underbrace{\dots}_{p_i},0,\underline{b_i},c_i,d_i) = (\underline{1}) \quad \text{za } t_i \in I_h \setminus \{0,1,t_{n-1}\},$$

$$h^{-2}(a_{n-1},0,\underbrace{\dots}_{p_{n-1}},0,\underline{b_{n-1}},c_{n-1}) = (\underline{1}) \quad \text{za } t = t_{n-1}.$$

Primedba. Ukoliko želimo da mreža I_h ima više tačaka bliže levom kraju intervala I, onda je prvi deo uslova (4.8) prirodan. Drugi deo istog uslova nije bitno ograničenje za k_n, jer se lako ispunjava. Na primer, $k_n = k_{n-1}$ $(p_{n-1} = 0)$. Uslov (4.11) je takodje lako zadovoljiti, na primer, dovoljno je uzeti $p_i = 0$ $(i = 1,2,\dots,n-2)$.

Ako rešenje problema (KP), u slučaju I, ima približno konstantnu vrednost u $[a,b]$, $0 < a,b \ll 1$, a u $[0,a] \cup [1-b,1]$ brzo se menja, može se shema I koristiti za diskretizaciju (KP) na sledeći način.

Neka $k_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ ispunjavaju uslov (4.8) i neka su $\alpha_1(i)$, $\alpha_2(i)$, $\alpha_3(i)$, p_i $(i = 1,2,\ldots,n-1)$ definisani kao u slučaju I ((4.9) - (4.11)). Ako definišemo

$$k_{n+1} = k_{n+1-i} \quad (i = 1,2,\ldots,n), \qquad h^{-1} = 2\sum_{j=1}^{n} k_j,$$

$$t_0 = 0, \quad t_{i+1} = t_i + k_{i+1}h \quad (i = 0,1,\ldots,2n-1),$$

$$I_h^1 = \{t_i : i = 0,1,\ldots,n\},$$

$$I_h^2 = \{t_i : i = n+1, n+2,\ldots, 2n\},$$

$$-\alpha_1(n) = \alpha_2(n) = k_n, \quad \alpha_3(n) = k_n + k_{n-1}, \quad p_n = 0,$$

možemo (KP) diskretizovati prema:

$$(\underline{1}) \qquad\qquad =(\underline{1}) + \gamma_i, \text{ za } t=0,1$$

$$h^{-2}(a_i, \underbrace{0,\ldots,0}_{p_i}, \underline{b_i}, c_i, d_i) \qquad =(\underline{1}), \text{ za } t_i \in I_h^1 \setminus \{0\}.$$

$$h^{-2}(d_{2n-i}, c_{2n-i}, \underline{b_{2n-i}}, \underbrace{0,\ldots,0}_{p_i}, a_{2n-i}) =(\underline{1}), \text{ za } t_i \in I_h^2 \setminus \{1\}.$$

Pritom se koeficijenti a_i, b_i, c_i, d_i računaju kao u shemi I.

Slučaj II. Neka je I_h kao u slučaju I, k_i $(i = 1,2,\ldots,n)$ neka zadovoljavaju (4.8), a $\alpha_1(i)$, $\alpha_2(i)$, $\alpha_3(i)$ $(i = 1,2,\ldots,n-1)$ neka su definisani prema (4.9)-(4.11). Za diskretizaciju (KP) u ovom slučaju koristićemo sledeću shemu

Shema II. Za $t \in I_h \setminus \{0,1\}$ kao u I,

$$h^{-1}(\underline{-b_0' + hg_0,\ -a_0',\ -c_0'}) = (\underline{0}) + \gamma_0 \quad za\ t = 0,$$

$$h^{-1}(c_n', \underbrace{0,\ldots,0}_{p_{n-1}}, a_n', \underline{b_n' + hg_1}) = (\underline{0}) + \gamma_1 \quad za\ t = 1$$

Koeficijenti a_0', b_0', c_0' su dati sa (3.5) za $\alpha_1 = -\alpha_1(1) = k_1$, $\alpha_2 = \alpha_2(1) - \alpha_1(1) = k_1 + k_2$, a koeficijenti a_n', b_n', c_n' su dati takodje sa (3.5) za $\alpha_1 = -\alpha_2(n-1) = -k_n$ i $\alpha_2 = -\alpha_2(n-1) + \alpha_1(n-1) = -2k_n$. S obzirom na to, imamo

(4.16) $$a_0' = \frac{k_1 + k_2}{k_1 k_2}, \quad b_0' = -\frac{2k_1 + k_2}{k_1(k_1 + k_2)}, \quad c_0' = \frac{-k_1}{k_2(k_1 + k_2)},$$

(4.17) $$a_n' = \frac{-2}{k_n}, \qquad b_n' = \frac{3}{2k_n}, \qquad c_n' = \frac{1}{2k_n}.$$

Slučaj III. Neka je I_h kao u slučaju I, $k_i (i = 1,2,\ldots,n)$ neka nezadovoljavaju (4.8), a $\alpha_1(i)$, $\alpha_2(i)$, $\alpha_3(i) (i = 1,2,\ldots,n-1)$ neka su definisani prema (4.9)-(4.11). Tada imamo sledeću shemu:

Shema III.

$R_0 x = x(0)$: za $t = 0$ kao u I,

a za $t \in I_h \setminus \{0\}$ kao u II

$R_1 x = x(1)$: za $t = 1$ kao u I,

a za $t \in I_h \setminus \{1\}$ kao u II.

Slučaj IV. Neka je $I_h = \{t_0 = 0,\ t_j = t_{j-1} + k_j h : j = 1,2,\ldots,n-1\}$. Za k_i $(i = 1,2,\ldots,n)$ neka je (4.8) zadovoljeno sa $p_{n-1} = 0$. Dalje, neka su $\alpha_1(i)$, $\alpha_2(i)$, $\alpha_3(i)$ $(i = 1,2,\ldots,n-1)$

definisani sa (4.9) - (4.11).

Shema IV. Za $t \in I_h \setminus \{0, t_{n-1}, t_{n-2}\}$ kao u I,

$$h^{-1}(\underline{-b_0' g_0 + b_n' g_1 + gh}, -a_0' g_0, -c_0' g_0, 0, \ldots, 0, c_n' g_1, a_n' g_1) =$$

$$= (\underline{0}) + \gamma_0 \quad \text{za } t = 0,$$

$$h^{-2}(d_{n-2}, 0, \ldots, 0, a_{n-2}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{p_{n-2}}, \underline{b_{n-2}}, c_{n-2}) = (\underline{1})$$

$$\text{za } t = t_{n-2}, \text{ i } p_{n-2} < n-3,$$

$$h^{-2}(d_{n-2} + a_{n-2}, 0, \ldots, 0, \underline{b_{n-2}}, c_{n-2}) = (\underline{1})$$

$$\text{za } t = t_{n-2} \text{ i } p_{n-2} = n-3,$$

$$h^{-2}(c_{n-1}, 0, \ldots, 0, a_{n-1}, \underline{b_{n-1}}) = (\underline{1})$$

$$\text{za } t = t_{n-1}.$$

Slučaj V. U prethodna četiri slučaja je bilo $p \equiv 0$. Sada ćemo posmatrati (KP) u slučajevima I - IV sa $p \not\equiv 0$. Neka je za

$$- x'' = f(t,x) \text{ na } I, \quad R_i x = \gamma_i \quad (i = 0,1)$$

diskretni analogon

$$A_h' x = B_h F_h x + r_h[\gamma_0, \gamma_1],$$

gde su A_h', B_h i r_h konstruisani na način opisan u slučajevima I - IV. Diskretni analogon za

(KP) $\qquad - x'' - p(t)x' = f(t,x) \;$ na I, $R_i x = \gamma_i \; (i = 0,1)$

dobija pored matrice A_h' još i matricu A_h^p, koja nastaje iz aproksimacije člana $p(t)x'$ diferencnim formulama, i ponovo je oblika (DKP) sa

$$A_h = A_h' - A_h^p .$$

Ponovo ćemo koristiti istu notaciju kao i ranije, a za matrice A_h^p pisaćemo samo one vrste čiji svi elementi nisu identički jednaki nuli.

Neka je $n = 2m$, $m \in \mathbb{N}$ i

$$\text{(4.18)} \qquad \begin{array}{ll} 1 \leq k_{2i-1} \leq k_{2i+1} & (i = 1,2,\dots,m-1) \\ k_{2i} = k_{2i-1} & (i = 1,2,\dots,m). \end{array}$$

Nizove $\alpha_1(i), \alpha_2(i), \alpha_3(i)$ $(i = 1,2,\dots,n-1)$ definišimo ponovo sa (4.9) i (4.10) i $p_i = 0$ $(i = 1,2,\dots,n-1)$. Tada umesto (4.10) za $\alpha_1(i)$ imamo

$$\text{(4.19)} \qquad \alpha_1(i) = - k_i \quad (i = 1,2,\dots,n-1).$$

Uslovi (4.8) i (4.11) su očigledno ispunjeni te možemo oslanjajući se na sheme I, II, III, IV, formulisati četiri nove sheme.

<u>*Shema V.1.*</u> R_0, R_1 su kao kao u slučaju I : I_h, A_h', B_h, r_h su kao u shemi I;

$$A_h^p : \; h^{-1} p(t_i)(a_i', \underline{b_i'}, c_i') \quad \text{za } t \in I_h \setminus \{0,1\}.$$

$$- a_{2j-1}' = c_{2j-1}' = \frac{1}{2k_{2j}}, \quad b_{2j-1}' = 0 \quad (j=1,2,\dots,m)$$

$$(4.20)\qquad a'_{2j} = \frac{-k_{2j+1}}{k_{2j}(k_{2j}+k_{2j+1})}, \qquad b'_{2j} = \frac{k_{2j+1}-k_{2j}}{k_{2j}k_{2j+1}},$$

$$c'_{2j} = \frac{k_{2j}}{k_{2j+1}(k_{2j}+k_{2j+1})}, \qquad (j = 1,2,\dots,m-1)$$

Koeficijenti a'_i, b'_i, c'_i se odredjuju prema (3.5).

Shema V.2. R_0, R_1 kao u slučaju II: I_h, A'_h, B_h, r_h kao u shemi II; A^p_h kao u shemi V.1.

Shema V.3. R_0, R_1 kao u slučaju III: I_h, A'_h, B_h, r_h kao u shemi III; A^p_h kao u shemi V.1.

Shema V.4. R_0 i R_1 kao u slučaju IV: I_h, A'_h, B_h, r_h kao u shemi IV; A^p_h za $t \in I_h \setminus \{t_{n-1}, t_n\}$ kao u shemi V.1. i

$$h^{-1}p(t_{n-1})(0.5k_n^{-1}, 0,\dots,0, -0.5k_n^{-1}, \underline{0}) \quad \text{za } t = t_{n-1}.$$

Slučaj VI. Neka je I_h kao u slučaju I, $k_i (i = 1,2,\dots,n)$ neka zadovoljavaju (4.8), a $\alpha_1(i)$, $\alpha_2(i)$, $\alpha_3(i)$ $(i = 1,2,\dots,n-1)$ neka su definisani prema (4.9) - (4.11). Definišimo još

$$-\alpha_1(n) = \alpha_2(n) = k_n, \quad \alpha_3(n) = k_n + k_{n-1}.$$

Koristeći se osobinom

$$x(1-t) = x(1+t), \qquad t \in I$$

rešenja x problema (KP) i shemama I i II, sada možemo formulisati sledeće dve sheme.

Shema VI.1. R_0 kao u I: Za $t \in I_h \setminus \{1\}$ kao u I,

$$h^{-2}(-\ 2k_n^{-2},\ \underline{2k_n^{-2}}) = (\underline{1}) + \gamma_1 \quad \text{za } t = 1.$$

Shema VI.2. R_0 kao u II sa $g_0 > 0$: Za $t \in I_h \setminus \{1\}$ kao u II, a za $t = 1$ kao u VI.1.

Kao što se vidi matrice A_h nastale prema shemama VI.1. i VI.2. razlikuju se od matrica A_h nastalih prema shemama I i II samo u poslednjoj vrsti.

Slučaj VII. Za razliku od slučaja VI sada predpostavljamo da je $p \not\equiv 0$. Neka je za

$$-\ x'' = f(t,x) \text{ na } I, \quad R_i x = \gamma_i \quad (i = 0,1)$$

diskretan analogon

$$A_h' x = B_h F_h x + r_h[\gamma_0, \gamma_1],$$

gde su A_h', B_h i r_h konstruisani na način opisan u VI.1. i VI.2. Diskretni analogon za (KP) dobija pored matrice A_h' još i matricu A_h^p, koja nastaje aproksimacijom člana $p(t)x'$ diferencnim formulama, i ponovo je oblika (DKP) sa $A_h = A_h' - A_h^p$.

Neka je $n = 2m$, $m \in \mathbb{N}$, i neka je $k_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ ispunjavaju uslov (4.18). Koeficijenti $\alpha_1(i)$, $\alpha_2(i)$; $\alpha_3(i)$ $(i = 1,2,\ldots,n-1)$ neka su definisani kao u slučaju V, a $\alpha_1(n)$, $\alpha_2(n)$, $\alpha_3(n)$ kao u slučaju VI.

Na osnovu shema VI.1 i VI.2, koristeći se osobinom $x(1-t) = x(1+t)$, $t \in I$, možemo obrazovati sledeće dve sheme.

Shema VII.1. R_0 kao u VI.1: I_h, A_h', B_h, r_h kao u VI.1, a A_h^p kao u V.1.

Shema VII.2. R_0 kao u VI.2: I_h, A_h', B_h, r_h kao u VI.2, a A_h^p kao u V.1.

Sve opisane sheme zasnivaju se na diferencnim formulama (3.4) i (3.9). Pod pretpostavkom $1 \leq k_i \leq k_0$ $(i = 1,2,\ldots,n)$, pri čemu je $k_0 \in \mathbb{R}$ neka konstanta, red konzistencije tih formula je k za funkcije iz $C^{k+2}(I)$, tj. za svako $t \in I_h$ i svako $x \in C^{k+2}(I)$ imamo

$$(A_h x_h - B_h(-x'' - p(\cdot)x')_h - r_h[R_0 x, R_1 x])(t) = O(h^k).$$

Sa y_h je označena restrikcija funkcije y koja je definisana na I na I_h. Red konzistencije $k = k(t)$, u opštem slučaju zavisi od tačke t mreže I_h i od sheme. Za sheme I i V.1 u tačkama $t = 0$, $t = 1$ i za sheme VI.1 i VII.1 u tački $t = 0$ je $k(t) = \infty$, a $k(t) = 2$ u preostalim tačkama mreže I_h. Za sve ostale sheme je $k(t) = 2$ za $t \in I_h$.

Primedba. Sheme I - IV, V.i $(i = 1,2,3,4)$ u ekvidistantnom slučaju $k_j = 1$ $(j = 1,2,\ldots,n)$, $p_i = 0$ $(i = 1,2,\ldots,n-1)$ su date u [3], i to su sheme (I.1), (II.1), (III,1), (IV,1), (V,1,2, 3,4).

§5. Neke osobine shema iz §4.

U ovom paragrafu se posmatraju sheme iz §4. i dokazuje se inverzna monotonija matrica A_h formiranih na osnovu tih shema. Pritom se koriste teoreme 2.1 (M-kriterijum), 2.2, 2.3, 2.4 (ML-kriterijum) ([2a], [3], [12a]).

Sve sheme navedene u §4. zasnivaju se na shemi I, te ćemo zbog toga nju posebno posmatrati u tačkama 1, 2, 3.

1. Matrica A_h dobijena pomoću sheme I je

$$
(5.1) \qquad A_h = h^{-2}\begin{bmatrix}
h^2 & & & & & & & \\
a_{10} & b_1 & c_1 & d_1 & & & & \\
a_{21} & a_{20} & b_2 & c_2 & d_2 & & & \\
\cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \\
\cdot & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
a_{n-2,n-3} & a_{n-2,n-4}, & \cdots & a_{n-2,0}, & b_{n-2} & c_{n-2} & d_{n-2} & \\
a_{n-1,n-2}, & a_{n-1,n-3}, & \cdots & & & a_{n-1,0}, & b_{n-1} & c_{n-1} \\
 & & & & & & & h^2
\end{bmatrix}
$$

gde je za $i = 1,2,\ldots,n-1$; $j = 0,1,2,\ldots,i-1$

$$(5.2) \qquad a_{i,j} = \begin{cases} a_i, & \text{ako je } j = p_i, \\ 0, & \text{ako je } j \neq p_i. \end{cases}$$

S obzirom na način formiranja sheme I, važe nejednakosti (4.11) - (4.13). Na osnovu tih nejednakosti i (3.12), (3.13) sledi da od elemenata van glavne dijagonale matrice A_h pozitivni mogu biti samo elementi $A_h(i, i+2) = d_i$ $(i = 1,2,\ldots,n-2)$. Ako uvedemo oznaku

$$(5.3) \qquad \tau_d^+ = \{i : \alpha_1(i) + \alpha_2(i) > 0, \quad i = 1,2,\ldots,n-2\},$$

imamo

$$(5.4) \qquad d_i > 0, \quad \text{ako je } \; i \in \tau_d^+ .$$

Takodje na osnovu (4.11) - (4.13), važi za $i = 1,2,\ldots,n-1$

$$(5.5) \qquad a_i < 0, \; c_i \begin{cases} < 0, & \text{ako je } \; d_i \geq 0, \\ \leq 0, & \text{ako je } \; d_i < 0, \end{cases}$$

pri čemu uzimamo da je $d_{n-1} = 0$.

U daljem radu je od posebnog interesa odredjivanje vektora $e \geq 0$, $e \in \mathbb{R}^{I_h}$, tako da važi $A_h e \geq 0$.

Teorema 5.1. Neka, kao u slučaju I, za $k_i \in \mathbb{R}_+$

$(i = 1,2,\ldots,n)$ važi (4.8), h je definisano sa (4.1) i $t_0 = 0$, $t_i = t_{i-1} + k_i h$ $(i = 1,2,\ldots,n)$, Tada za vektor e sa komponentama

$$(5.6) \qquad e_i = \sin\left(\frac{\pi(t_i + \varepsilon)}{1 + 2\varepsilon}\right), \quad \varepsilon \in R_+ \quad (i = 0,1,\ldots,n)$$

važi $e > 0$ i

$$(5.7) \qquad (A_h e)_i = \lambda_i e_i > 0 \qquad (i = 0,1,\ldots,n),$$

gde je

$$(5.8) \qquad \lambda_i = \begin{cases} 1, & \text{ako je } i = 0,n \\ \frac{h^{-2}}{e_i}\left[a_i(e_{i-1-p_i} - e_i) + c_i(e_{i+1} - e_i) + \right. \\ \qquad \left. + d_i(e_{i+2} - e_i)\right], & \text{ako je } i = 1,2,\ldots,n-1. \end{cases}$$

Dokaz. Kako je $0 \leq t_i \leq 1$ $(i = 0,1,\ldots,n)$ neposredno iz (5.6) sledi $e > 0$. Iz $(A_h e)_i = e_i$ $(i = 0,n)$ vidimo da je (5.8) tačno za $i = 0,n$. Očigledno važi

$$(A_h e)_i = h^{-2}(a_i e_{i-1-p_i} + b_i e_i + c_i e_{i+1} + d_i e_{i+2})$$

$$(i = 1,2,\ldots,n-1).$$

Otuda, s obzirom da je $b_i = -(a_i + c_i + d_i)$ dobijamo

$$(A_h e)_i = h^{-2}(a_i(e_{i-1-p_i} - e_i) + c_i(e_{i+1} - e_i) +$$

$$+ d_i(e_{i+2} - e_i) \qquad (i = 1,2,\ldots,n-1).$$

Time je (5.7) dokazano. Ostaje još da se dokaže da je $\lambda_i > 0$ $(i = 1,2,\ldots,n-1)$.

Za $i = n-1$ imamo

$$-\alpha_1(i) = \alpha_2(i) = k_n,$$

$$e_{i-1} + e_{i+1} = 2e_i \cos\frac{\pi h}{1+2\varepsilon} k_n,$$

$$-2a_{n-1} = -2c_{n-1} = b_{n-1} = 2\alpha_2^{-2}(n-1).$$

Sada je

$$(A_h e)_{n-1} = \frac{h^{-2}}{\alpha_2^2(n-1)}(2e_{n-1} - (e_{n-2} + e_n))$$

$$= \frac{2h^{-2}}{\alpha_2^2(n-1)} e_{n-1}\left[1 - \cos\frac{\pi\alpha_2(n-1)h}{1+2\varepsilon}\right]$$

$$= \lambda(\alpha_2(n-1)h)e_{n-1} = \lambda_{n-1}e_{n-1},$$

gde je $\lambda(h) = 2h^{-2}(1 - \cos\frac{\pi h}{1+2\varepsilon})$, $\varepsilon \geq 0$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$.

Imamo $n \geq 3$, $\alpha_2(n-1) = k_n$, $h^{-1} = \sum_{j=1}^{n} k_j$. Iz (4.8) sledi

$$k_n \leq \sum_{j=1}^{n-1} k_j,$$

te je

$$h^{-1} \geq 2k_n \quad \text{i} \quad \alpha_2(n-2)h \leq \frac{k_n}{2k_n} = \frac{1}{2}.$$

Zbog $\varepsilon > 0$, sledi $\lambda(\alpha_2(n-1)h) > 0$.

Dokazaćemo sada da je $\lambda_i > 0$ za $i \in \{1,2,\ldots,n-2\}$. Neka je za proizvoljno ali fiksno $i \in \{1,2,\ldots,n-2\}$ $x = \alpha_1(i)$, $\alpha_2 = \alpha_2(i)$, $\alpha_3 = \alpha_3(i)$ i

$$(5.9) \qquad \alpha = \frac{\pi h}{1+2\varepsilon}, \qquad \tau = \frac{\varepsilon}{h} + \sum_{j=1}^{i} k_j .$$

Tada je $e_i = \sin\alpha\tau$, $e_{i+1} = \sin\alpha(\tau + \alpha_2)$, $e_{i+2} = \sin\alpha(\tau + \alpha_3)$, $e_{i-1-p_i} = \sin\alpha(\tau + x)$, pri čemu je p_i odredjeno kao u slučaju I. Poznato je da važi

$$-\tau < x \leq -1.$$

S obzirom na (5.7), da bi dokazali da je $\lambda_i > 0$ dovoljno je da dokažemo da važi

$$\xi(x) := \frac{h^2}{2}(A_h e)_i > 0, \qquad x \in (-\tau, -1].$$

Funkciju $\xi(x)$ možemo prikazati u obliku

$$\xi(x) = \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{(\alpha_2 - x)(\alpha_3 - x)} f(x) - \frac{\alpha_3 + x}{(\alpha_2 - x)(\alpha_3 - \alpha_2)} f(\alpha_2) + \frac{\alpha_2 + x}{(\alpha_3 - x)(\alpha_3 - \alpha_2)} f(\alpha_3),$$

gde je

$$(5.10) \qquad f(x) = \frac{1}{x}(\sin\alpha(\tau + x) - \sin\alpha\tau).$$

Kako je $\alpha_2 - x > 0$, $\alpha_3 - \alpha_2 > 0$, $\alpha_3 - x > 0$, to je $\xi(x) > 0$ za $x \in (-\tau, -1]$, ako i samo ako je

$$\psi(x) := (\alpha_3^2 - \alpha_2^2) f(x) - (\alpha_3^2 - x^2) f(\alpha_2) + (\alpha_2^2 - x^2) f(\alpha_3) > 0, \qquad x \in (-\tau, -1].$$

Sada možemo dokazati da je $\psi'(x) < 0$, $x \in (-\tau, 0]$, i da važi

$$\psi(x) \geq \psi(0) > 0, \quad x \in [-\tau, 0].$$

Na osnovu toga imamo da je $\lambda_i > 0$.
Dokažimo najpre sledeću lemu.

Lema 1. Za funkciju f(x) važi

(a) $$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} g^{(j)}(0)\, \frac{x^{j-1}}{j!}, \quad x \in [-\tau, \alpha_3],$$

$$g(x) := \sin\alpha(\tau + x) ;$$

(b) $$f'(x) < 0, \text{ ako je } x \in [-\tau, \alpha_3];$$

(c) $$f''(x) > 0, \text{ ako je } x \in [0, \alpha_3] \text{ i } \alpha\tau > \pi/2 ;$$

(d) $$f'''(x) > 0, \text{ ako je } x \in [-\tau, \alpha_3].$$

Dokaz. Kako je funkcija g(x) analitička u $[-\tau, \alpha_3]$ to važi

$$g(x) = g(0) + \sum_{j=1}^{\infty} g^{(j)}(0)\, \frac{x^j}{j!} .$$

(a) Očigledno važi

$$f(x) = \frac{1}{x}(g(x) - g(0)) = \sum_{j=1}^{\infty} g^{(j)}(0)\, \frac{x^{j-1}}{j!} .$$

(b) Važi

$$f'(x) = \frac{1}{x^2} g_1(x),$$

gde je

$$g_1(x) := \alpha x \cos\alpha(\tau + x) - \sin\alpha(\tau + x) + \sin\alpha\,\tau .$$

Iz $g_1'(x) = -\alpha^2 x \sin\alpha(\tau + x)$ sledi

$$g_1'(x) \begin{cases} = 0, & \text{ako je } x = -\tau, \\ > 0, & \text{ako je } x \in (-\tau, 0), \\ = 0, & \text{ako je } x = 0, \\ < 0, & \text{ako je } x \in (0, \pi/\alpha - \tau), \\ = 0 & \text{ako je } x = \pi/\alpha - \tau. \end{cases}$$

Znači, imamo

$$g_1(x) \leq g_1(0) = 0, \quad x \in (-\tau, \pi/\alpha - \tau).$$

Iz $x \in [-\tau, \alpha_3]$ sledi

$$0 \leq \alpha(\tau + x) \leq \frac{\pi}{1+2\varepsilon}(\varepsilon + t_{i+2}) < \pi ,$$

tj.

$$x \in [-\tau, \pi/\alpha - \tau] .$$

Na osnovu (a) imamo

$$f'(0) = \frac{1}{2} g_1''(0) = -\alpha^2 \sin\tau < 0,$$

a time i $f'(x) < 0$.

(c) Nalazimo

$$f''(x) = \frac{1}{x^3} g_2(x),$$

gde je

$$g_2(x) := -\ 2\alpha x\ \cos\alpha(\tau+x)\ +\ (2-\alpha^2x^2)\sin\alpha(\tau+x)\ -\ 2\sin\alpha\tau.$$

Kako je

$$g_2'(x) = -\ \alpha^3\ x^2\cos\alpha(\tau+x),$$

to za $\alpha\tau\ > \pi/2$ sledi

$$g_2'(x) \begin{cases} < 0, & \text{ako je } x \in [-\tau,\ \pi/2\alpha - \tau), \\ = 0, & \text{ako je } x = \pi/2\alpha - \tau, \\ > 0, & \text{ako je } x \in (\pi/2\alpha - \tau, 0), \\ = 0, & \text{ako je } x = 0, \\ > 0, & \text{ako je } x \in (0, \pi/\alpha - \tau). \end{cases}$$

Iz $x \in [-\tau,\alpha_3]$ sledi $x < \pi/\alpha - \tau$, a iz $\alpha\tau < \pi$ sledi $\pi/\alpha - \tau < 0$.
Sada imamo

$$g_2(x) \geq g_2(0) = 0, \quad x \in [0,\alpha_3].$$

Na osnovu (a) važi

$$g''(0) = \frac{1}{3}g^{(3)}(0) = -\ \frac{1}{3}\ \alpha^3\cos\alpha\ \tau\ ,$$

a kako je $\pi/2 < \alpha\tau < \pi$ to je $f''(0) > 0$.
Time je tvrdjenje leme pod (c) dokazano.

(d) Imamo

$$g'''\ (x) = \frac{1}{x^4}g_3(x), \quad \text{gde je}$$

$$g_3(x) := (6\alpha x - \alpha^3x^3)\cos\alpha(\tau+x) + (3\alpha^2x^2 - 6)\sin\alpha(\tau+x)$$
$$+ 6\sin\alpha\tau.$$

Dalje nalazimo

$$g_3'(x) = \alpha^4x^3\sin\alpha(\tau+x)$$

i

$$g_3'(x) \begin{cases} = 0, & \text{ako je } x = -\tau, \\ < 0, & \text{ako je } x \in (-\tau,0), \\ = 0, & \text{ako je } x = 0, \\ > 0, & \text{ako je } x \in (0,\pi/\alpha - \tau). \end{cases}$$

Znači, $g_3(x) \geq g_3(0) = 0$, ako je $x \in [-\tau,\alpha_3]$.

Kako je prema (a)

$$f'''(0) = \frac{1}{4}g^{(4)}(0) = \frac{1}{4}\alpha^4\sin\alpha\tau > 0$$

to je

$$f'''(x) > 0 \quad \text{za} \quad x \in [-\tau,\alpha_3].$$

Time je lema dokazana.

Dokažimo sada da je $\psi'(x) < 0$; $\psi(x) \geq \psi(0) > 0$ za $x \in [-\tau,0]$. Kako je

$$\psi'(x) \doteq (\alpha_3^3 - \alpha_2^2)f'(x) + 2x(f(\alpha_2) - f(\alpha_3))$$

to zbog $f'(x) < 0$; $f(\alpha_2) > f(\alpha_3)$ (jer je $\alpha_2 < \alpha_3$), važi

$$\psi'(x) < 0 \quad \text{i} \quad \psi(x) \geq \psi(0) \quad \text{ako je} \quad x \in [-\tau,0].$$

Da bi dokazali da je $\psi(0) > 0$ posmatraćemo dva slučaja.

I $\alpha\tau < \pi/2$. Prema (a), Lema 1, imamo

$$\psi(0) = (\alpha_3^2 - \alpha_2^2)f(0) - \alpha_3^2 f(\alpha_2) + \alpha_2^2 f(\alpha_3)$$

$$= (\alpha_3^2 - \alpha_2^2)f(0) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{g^{(j)}(0)}{j!}(\alpha_2^2\,\alpha_3^{j-1} - \alpha_3^2\,\alpha_2^{j-1}).$$

Kako je $f(0) = g'(0) = \alpha\cos\alpha\tau$, to je

$$\psi(0) = \sum_{j=2}^{\infty} \frac{g^{(j)}(0)}{j!}\,[\alpha_2^2\alpha_3^{j-1} - \alpha_3^2\alpha_2^{j-1}].$$

Očigledno važi

$$g^{(j)}(x) = \begin{cases} (-1)^{k-1}\,\alpha^{2k-1}\cos\alpha(\tau+x), \text{ ako je } j = 2k-1, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (j = 1,2,\ldots) \\ (-1)^{k}\,\alpha^{2k}\sin\alpha(\tau+x), \text{ ako je } j = 2k. \end{cases}$$

Zbog toga je

$$\psi(0) = -\,\alpha^2\sin\alpha\tau(\alpha_2^2\alpha_3 - \alpha_3^2\alpha_2) - \alpha^3\cos\alpha\tau(\alpha_2^2\alpha_3^2 - \alpha_3^2\alpha_2^2)$$

$$+ \sin\alpha\tau \sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k\,\frac{\alpha^{2k}}{(2k)!}\,(\alpha_2^2\alpha_3^{2k-1} - \alpha_3^2\alpha_2^{2k-1})$$

$$+ \cos\alpha\tau \sum_{k=3}^{\infty}(-1)^{k-1}\,\frac{\alpha^{2k-1}}{(2k-1)!}\,(\alpha_2^2\,\alpha_3^{2k-2} - \alpha_3^2\,\alpha_2^{2k-2}),$$

odnosno

$$\psi(0) = \alpha^2\alpha_2\alpha_3(\alpha_3 - \alpha_2)\sin\alpha\tau + \sin\alpha\tau\sum_{k=1}^{\infty}(A_{4k} + A_{4k+2})$$

$$+ \cos\alpha\tau\sum_{k=1}^{\infty}(B_{4k+1} + B_{4k+3}),$$

gde je

$$A_{4k} := (-1)^{2k} \frac{\alpha^{4k}}{(4k)!} (\alpha_2^2\alpha_3^{4k-1} - \alpha_3^2\alpha_2^{4k-1}), \quad (k=1,2,\ldots),$$

$$A_{4k+2} := (-1)^{2k+1} \frac{\alpha^{4k+2}}{(4k+2)!}(\alpha_2^2\alpha_3^{4k+1} - \alpha_3^2\alpha_2^{4k+1}),$$

$$(k = 1,2,\ldots),$$

$$B_{4k+1} := (-1)^{2k} \frac{\alpha^{4k+1}}{(4k+1)!}(\alpha_2^2\alpha_3^{4k} - \alpha_3^2\alpha_2^{4k}), \quad (k = 1,2,\ldots),$$

$$B_{4k+3} := (-1)^{2k+1} \frac{\alpha^{4k+3}}{(4k+3)!} (\alpha_2^2\alpha_3^{4k+2} - \alpha_3^2\alpha_2^{4k+2})$$

$$(k = 1,2,\ldots).$$

Zbog $0 < \alpha\tau < \pi/2$ imamo $\sin\alpha\tau > 0$ i $\cos\alpha\tau > 0$.

Dalje je za $k = 1,2,\ldots$

$$A_{4k} + A_{4k+2} = \frac{\alpha^{4k}}{(4k)!} \alpha_2^2\alpha_3^2 \Big[\alpha_3^{4k-3} - \alpha_2^{4k-3} -$$

$$- \frac{\alpha^2}{(4k+2)(4k+1)} (\alpha_3^{4k-1} - \alpha_2^{4k-1})\Big],$$

$$A_{4k} + A_{4k+2} > \frac{\alpha^{4k}}{(4k)!} \alpha_2^2\alpha_3^2 \Big[\alpha_3^{4k-3} - \alpha_2^{4k-3} -$$

$$- \frac{\alpha^2\alpha_3^2}{(4k+2)(4k+1)} \alpha_3^{4k-3}\Big].$$

Kako je $\alpha\alpha_3 < \pi$ i $k \geq 1$, to je

$$\frac{\alpha^2\alpha_3^2}{(4k+2)(4k+1)} < \frac{\pi^2}{42} < \frac{1}{3}.$$

Znajući da je $\alpha_3 \geq 2\alpha_2$, sada imamo

$$A_{4k} + A_{4k+2} > \frac{\alpha^{4k}}{(4k)!}\,\alpha_2^2\alpha_3^2\left[\alpha_3^{4k-3}\left(1 - \frac{1}{3}\right) - \alpha_2^{4k-3}\right]$$

$$> \frac{\alpha^{4k}}{(4k)!}\,\alpha_2^2\alpha_3^2\alpha_2^{4k-3}\left(2^{4k-3}\cdot\frac{2}{3} - 1\right)$$

$$> \frac{\alpha^{4k}}{(4k)!}\,\alpha_3^2\alpha_2^{4k-1}\left(2\cdot\frac{2}{3} - 1\right) > 0.$$

Dalje važi

$$B_{4k+1} + B_{4k+3} = \frac{\alpha^{4k+1}}{(4k+1)!}\,\alpha_2^2\alpha_3^2\left[\alpha_3^{4k-2} - \alpha_2^{4k-2} - \right.$$

$$\left. - \frac{\alpha^2}{(4k+3)(4k+2)}(\alpha_3^{4k} - \alpha_2^{4k})\right] \geq$$

$$> \frac{\alpha^{4k+1}}{(4k+1)!}\,\alpha_2^2\alpha_3^2\left[\alpha_2^{4k-2}\left(1 - \frac{1}{4}\right) - \alpha_2^{4k-2}\right]$$

$$> \frac{\alpha^{4k+1}}{(4k+1)!}\,\alpha_2^2\alpha_3^2\alpha_2^{4k-2}\left(2^{4k-2}\cdot\frac{3}{4} - 1\right) > 0,$$

jer je $2^{4k-2}\cdot\frac{3}{4} > 1$ za $k \geq 1$, $\alpha_3 \geq 2\alpha_2$ i

$$\frac{\alpha^2(\alpha_3^{4k} - \alpha_2^{4k})}{(4k+3)(4k+2)} < \frac{\alpha^2\alpha_3^2\cdot\alpha_3^{4k-2}}{42} < \frac{1}{4}\,\alpha_3^{4k-2}$$

Zbog $\alpha\alpha_3 < \pi$.

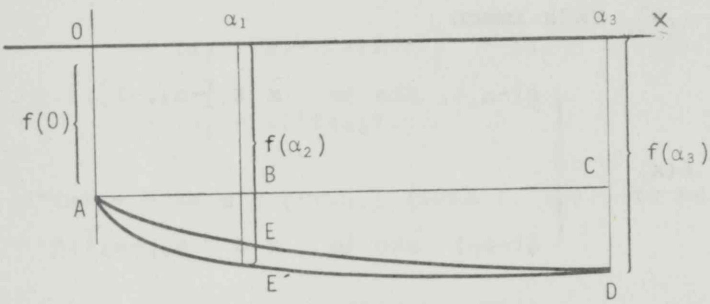
Kako smo pokazali da su svi sabirci u izrazu za $\psi(0)$ pozitivni, sledi

$$\psi(0) > 0, \text{ ako je } \quad x \in [-\tau, 0] \quad \text{i} \quad \alpha\tau < \pi/2.$$

II $\alpha\tau > \pi\alpha$. U ovom slučaju imamo da je $f''(x) > 0$ za $x \in [0,\alpha_3]$ (Lema 1, (c)). Zbog $f'(x) < 0$ za $x \in [-\tau,\alpha_3]$ (Lema 1,(b)) važi

$$0 < f(0) - f(\alpha_2) < f(0) - f(\alpha_3)$$

jer je $0 < \alpha_2 < \alpha_3$. Sada imamo situaciju prikazanu na sledećoj slici.



jer je $f(0) = \alpha\cos\alpha\tau < 0$ zbog $\pi/2 < \alpha\tau < \pi$. Iz trouglova ΔABE i ΔACD sledi $(\alpha_3 > \alpha_2)$

$$\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2} > \frac{\alpha_3}{\alpha_2} = \frac{AC}{AB} = \frac{CD}{BE} > \frac{f(0) - f(\alpha_3)}{BE'} = \frac{f(0) - f(\alpha_3)}{f(0) - f(\alpha_2)}$$

a otuda (zbog $f(0) - f(\alpha_2) > 0$)

$$\alpha_3^2(f(0) - f(\alpha_2)) > \alpha_2^2(f(0) - f(\alpha_3))$$

ili

$$\psi(0) = (\alpha_3^2 - \alpha_2^2)f(0) - \alpha_3^2 f(\alpha_2) + \alpha_2^2 f(\alpha_3) > 0.$$

Time je tvrdjenje teoreme 5.1 u potpunosti dokazano. U specijalnom slučaju može se o λ_i nešto više reći.

Lema 2. Neka su ispunjene pretpostavke teoreme 5.1. Tada važi

$$\tau \geq \alpha_2(i) \geq -\alpha_1(i) \Rightarrow \lambda_i \geq \lambda(\alpha_2(i)h),$$

$$-\tau \leq -\alpha_3(i) \leq \alpha_1(i) < -\alpha_2(i) \Rightarrow \lambda_i \geq \lambda(\alpha_3(i)h).$$

Dokaz. Koristeći se oznakama uvedenim u dokazu teoreme 5.1 dovoljno je dokazati da je $\xi(x)$ monotono rastuća funkcija u $[-\tau,0]$. Tada imamo

$$\xi(x) \geq \begin{cases} \xi(-\alpha_2), \text{ ako je } & x \in [-\alpha_2,-1], \\ \\ \xi(-\alpha_3) \text{ ako je } & x \in [-\alpha_3,-\alpha_2). \end{cases}$$

Dalje, za $x = -\alpha_2$ ($d_i = 0$ prema (3.14)) imamo

$$\xi(-\alpha_2) = \frac{1}{2\alpha_2^2}(-\sin\alpha(\tau-\alpha_2) - \sin\alpha(\tau+\alpha_2) + 2\sin\alpha\tau)$$

$$= \frac{1}{\alpha_2^2}\sin\alpha\tau(1-\cos\alpha\alpha_2) = \frac{1}{2}h^2\lambda(\alpha_2 h)\sin\alpha\tau.$$

Otuda sledi

$$(A_h e)_i = 2h^{-2}\xi(-\alpha_2) = \lambda(\alpha_2 h)e_i$$

i

$$\lambda_i = \lambda(\alpha_2 h).$$

Potpuno analogno za $x = -\alpha_3$ ($c_i = 0$ prema (3.15)), imamo

$$\xi(-\alpha_3) = \frac{1}{2}h^2\lambda(\alpha_3 h)\sin\alpha\tau \quad \text{i} \quad \lambda_i = \lambda(\alpha_3 h).$$

Ostalo je još da se dokaže da je $\xi(x)$ monotono rastuća funkcija u intervalu $[-\tau, 0]$. Posmatrajući $\xi'(x)$ vidimo da za $x \in [-\tau, 0]$ važi

$$D(x) > 0 \Rightarrow \xi'(x) > 0,$$

gde je

$$D(x) := (\alpha_3 - \alpha_2)\Big[(\alpha_2 - x)(\alpha_3 - x)f'(x) + (\alpha_3 + \alpha_2 - 2x)f(x)\Big] + (\alpha_2 - x)^2 f(\alpha_3) - (\alpha_3 - x)^2 f(\alpha_2).$$

Kako je $f'''(x) > 0$ za $x \in [-\tau, \alpha_3]$ (lema 1, (d)), to važi za $x_1, x_2 \in [-\tau, \alpha_3]$

(5.11) $$x_1 < x_2 \Rightarrow f''(x_1) \le f''(x_2).$$

Posmatrajmo $D(x)$ i dokažimo da je $D(x) > 0$. Očigledno je

$$D'(x) = f''(x)(\alpha_2 - x)(\alpha_3 - x)(\alpha_3 - \alpha_2) - 2f(x)(\alpha_3 - \alpha_2) - 2(\alpha_2 - x)f(\alpha_3) + 2(\alpha_3 - x)f(\alpha_2)$$

ili

$$D'(x) = (\alpha_3 - \alpha_2)(\alpha_2 - x)(\alpha_3 - x)f''(x) - 2(\alpha_3 - \alpha_2) \cdot \left[f(x) - \frac{(\alpha_3 - x)f(\alpha_2) - (\alpha_2 - x)f(\alpha_3)}{\alpha_3 - \alpha_2}\right].$$

Kako je

$$f(x) - \frac{(\alpha_3 - x)f(\alpha_2) - (\alpha_2 - x)f(\alpha_3)}{\alpha_3 - \alpha_2} = f''(\sigma)\,\frac{(\alpha_2 - x)(\alpha_3 - x)}{2},$$

pri čemu je σ nezavisno od x, α_2, α_3 i važi

$$\min\{x,\alpha_2,\alpha_3\} < \sigma < \max\{x,\alpha_2,\alpha_3\},$$

imamo

$$D'(x) = (\alpha_2 - x)(\alpha_3 - x)(\alpha_3 - \alpha_2)(f''(x) - f''(\sigma)).$$

Za $x \in [-\tau,\alpha_2]$ dobijamo

$$x < \sigma < \alpha_3 . \tag{5.12}$$

Sada, zbog (5.11) i (5.12) sledi $D'(x) < 0$ za $x \in [-\tau,\alpha_2]$ i $D'(\alpha_2) = 0$. Otuda za $x \in [-\tau,\alpha_2)$ važi $D(x) > D(\alpha_2) = 0$.

Znači, $D(x) > 0$ za $x \in [-\tau,0]$, a time i $\xi'(x) > 0$ za $x \in [-\tau,0]$, što je i trebalo dokazati.

Primedba. U slučaju $k_i = 1$ $(i = 1,2,\dots,n)$ imamo $h = n^{-1}$ i sa $\alpha_2(i) = -\alpha_1(i) = 1$ dobijamo dobro poznatu matricu A_h ((4.4)). Tada je $\lambda_i e_i = \lambda(h)$ $(i = 1,2,\dots,n-1)$. U ovom specijalnom (ekvidistantnom) slučaju tvrdjenje teoreme 5.1 nalazi se u [2f].

Koristeći se rezultatima prethodne teoreme možemo dokazati nekoliko sledećih teorema.

Teorema 5.2. Matrica A_h iz sheme I je

(a) M - matrica, ako je $\tau_d^+ = \emptyset$,

(b) i.m. matrica, ako je $\tau_d^+ \neq \emptyset$ i ako za svako $i \in \tau_d^+$ važi

$$\alpha_1(i + 1) \geq z_1, \tag{5.13}$$

pri čemu je z_1 manje rešenje jednačine

$$(5.14) \qquad z^2 + \alpha_3(i+1)z + \alpha_2(i+1)\Delta = 0$$

sa

$$(5.15) \qquad \Delta^{-1} = \frac{-1}{\alpha_3(i+1) + \alpha_2(i+1)} +$$

$$+ \frac{\alpha_3(i+1)\alpha_3(i)(\alpha_3^2(i) - \alpha_1^2(i))}{4\alpha_2(i)(\alpha_2^2(i) - \alpha_1^2(i))(\alpha_3^2(i+1) - \alpha_2^2(i+1))} .$$

Dokaz. a) Neka je $\tau_d^+ = \emptyset$. Tada je prema (3.13) $d_i \leq 0$ $(i = 1,2,\dots,n-2)$, $a_i < 0$, $c_i \leq 0$, $b_i > 0$ $(i = 1,2,\dots,n-1)$ te je A_h L-matrica. Da bi dokazali da je i M-matrica dovoljno je, prema M-kriterijumu, primetiti da je $I_h^0(A_h e) = \emptyset$, pri čemu je vektor $e > 0$ definisan u teoremi 5.1.

b) Neka je $\tau_d^+ \neq \emptyset$ i $A := h^2 A_h$. Primenjujući ML-kriterijum dokazaćemo da je matrica A i.m., a time i inverznu monotonost matrice A_h.

Ako je $A \leq M\cdot L$, gde je M M-matrica i $L_0 \leq 0$, i ako postoje $e > 0$ takvo da je $Ae \geq 0$ i da M ili L povezuje $I_h^0(Ae)$ sa $I_h^+(Ae)$, prema ML-kriterijumu biće A i.m. matrica.

Matrice M i L koje ispunjavaju uslove ML-kriterijuma konstruisaćemo na sledeći način [3]:

$$(5.16) \qquad M = A_d + B, \qquad L = E + A_d^{-1}C$$

pri čemu su matrice $B \leq 0$ i $C \leq 0$ odredjene iz $A^- = B + C$. Prema [3] tada je uslov $A \leq ML$ ekvivalentan sa uslovom

$$(5.17) \qquad A_0^+ \leq BA_d^{-1}C.$$

Ako uvedemo oznaku

$$\tilde{d}_i = \begin{cases} \tilde{d}_i & \text{za } i \in \tau_d^+ \\ 0 & \text{za } i \notin \tau_d^+ \end{cases} \qquad (i = 1,2,\ldots,n-2) \tag{5.18}$$

imamo

$$A_0^+ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & & & & & & \\ & 0 & 0 & \tilde{d}_1 & & & & \\ & & 0 & 0 & \tilde{d}_2 & & & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & & & \cdot & \cdot & \tilde{d}_{n-2} \\ & & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & & & 0 \end{bmatrix} \tag{5.19}$$

Kako je $A_d = \operatorname{diag}(h^2, b_1, \ldots, b_{n-1}, h^2)$, to je $A^- = A - A_d - A_0^+$. Za B uzimamo

$$B = \begin{bmatrix} 0 & & & & & & \\ a_{10} & 0 & \frac{1}{2}c_1 & d_1 - \tilde{d}_1 & & & \\ a_{21} & a_{20} & 0 & \frac{1}{2}c_2 & d_2 - \tilde{d}_2 & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ a_{n-2,n-3}, & \cdots & a_{n-2,0} & 0 & \frac{1}{2}c_{n-2} & d_{n-2} - \tilde{d}_{n-2} & \\ a_{n-1,n-2}, & \cdots & a_{n-1,1} & a_{n-1,0} & 0 & \frac{1}{2}c_{n-1} & \\ & & & & & 0 & \end{bmatrix} \tag{5.20}$$

sa

$$(5.21)\qquad a_{i,j} = \begin{cases} \frac{1}{2}a_i, & \text{za } j = p_i, \\ & \qquad (i = 1,2,\ldots,n-1) \\ & \qquad (j = 0,1,\ldots,i-1) \\ 0, & \text{za } j \neq p_i \end{cases}$$

Očigledno je $B \leq 0$ i $C = A^{-} - B \leq 0$. Sada se (5.17) svodi na

$$(5.22)\qquad 4d_i\, b_{i+1} \leq c_i\, c_{i+1} \qquad \text{za } i \in \tau_d^{+}.$$

Za $i \in \tau_d^{+}$ je $d_i > 0$, a u formiranju koeficijenata b_{i+1}, c_i, c_{i+1}, d_i učestvuju $\alpha_1(j), \alpha_2(j), \alpha_3(j)$ $(j = i, i+1)$. Da bi uslov (5.22) lakše ispitali neka je

$$y := \alpha_1(i), \quad \alpha := \alpha_2(i), \quad \beta := \alpha_3(i)$$

(5.23)

$$x := \alpha_1(i+1), \quad \gamma := \alpha_3(i+1).$$

S obzirom na uvedene oznake i $\alpha_2(i+1) = \beta - \alpha > 0$, (5.22) se posle delenja sa d_i svodi na

$$\frac{-2}{\gamma(\beta-\alpha)}\left(\frac{\gamma+\beta-\alpha+x}{x} + \frac{\beta\gamma\,(\beta^2 - y^2)}{4\alpha(\alpha^2 - y^2)(\gamma - \beta + \alpha)} \cdot \frac{\gamma + x}{\beta - \alpha - x}\right) \leq 0$$

odnosno

$$(5.24)\qquad \frac{\gamma+\beta-\alpha}{x} + 1 + \frac{p}{\gamma-\beta+\alpha}\,\frac{\gamma+x}{\gamma-\alpha-x} \geq 0$$

sa

$$P = \frac{\beta\gamma(\beta^2 - y^2)}{4\alpha(\alpha^2 - y^2)} .$$

Primetimo da je zbog $i \in \tau_d^+$ $\alpha + y > 0$, a zbog (4.8) i (4.12)

(5.25) $\alpha \leq \beta - \alpha$, $\alpha + x \leq 0$, $\gamma \geq \beta$, $\gamma \geq 2(\beta - \alpha)$.

Kako je $x < 0$ uslov (5.24) je ispunjen ako je

(5.26) $$g(x) := (P - \gamma + \beta - \alpha)(x^2 + \gamma x) + (\gamma^2 - (\beta - \alpha)^2)(\beta - \alpha) \leq 0 .$$

Očigledno je $g(0) > 0$ i

$$g(-\alpha) = P\alpha(\alpha - \gamma) + (\gamma - \beta + \alpha)(\alpha\gamma - \alpha^2 + (\beta - \alpha)(\gamma + \beta - \alpha)).$$

Kako je

$$P = \frac{\beta\gamma(\beta^2 - y^2)}{4\alpha(\alpha^2 - y^2)} ,$$

zbog $\alpha - \gamma < 0$ imamo

$$g(-\alpha) = \frac{\beta}{4(\alpha^2 - y^2)}(\gamma(\beta^2 - y^2)(\alpha - \gamma) + 4(\gamma - \beta + \alpha)(\gamma + \beta - 2\alpha)(\alpha^2 - y^2)),$$

$$g(-\alpha) = \frac{\beta}{4(\alpha^2 - y^2)}(-(\gamma^2 - \alpha\gamma)(\beta^2 - y^2 - 4(\alpha^2 - y^2)) - 4(\beta - \alpha)(\beta - 2\alpha)(\alpha^2 - y^2)) < 0.$$

Dalje je

$$P - \gamma + \beta - \alpha = \frac{1}{\alpha(\alpha^2 - y^2)}\left\{\frac{\gamma}{4}(\beta(\beta^2 - y^2) - 4\alpha(\alpha^2 - y^2)) + (\beta - \alpha)\alpha(\alpha^2 - y^2)\right\}$$

$$\geq \frac{1}{\alpha(\alpha^2 - y^2)}\left\{\gamma\alpha(\alpha^2 + \frac{y^2}{2}) + \alpha(\beta - \alpha)(\alpha^2 - y^2)\right\} > 0,$$

jer je $\beta \geq 2\alpha$.

Znači, $g(x) \leq 0$ za $x \in [z_1, z_2]$, gde su z_1, z_2 rešenja jednačine $g(x) = 0$. Zbog $P - \gamma + \beta - \alpha > 0$, $-\gamma/2 \leq -\alpha$ $g(0) = g(-\gamma) > 0$ i $g(-\alpha) < 0$ imamo $z_1 \in (-\gamma, -\gamma/2)$ i $z_2 \in (-\alpha, 0)$. S obzirom na $x = \alpha_1(i+1) \leq -\alpha_2(i) = -\alpha$ sledi $g(x) \leq 0$ za $\alpha_1(i+1) \in [z_1, -\alpha_2(i)]$.

Jednačina (5.14) je ekvivalentna sa jednačinom $g(x) = 0$, što znači da pod pretpostavkama teoreme 5.2. imamo ispunjen uslov (5.17).

Prema konstrukciji matrica B i C iz (5.16) sledi $M_0 \leq 0$ i $L_0 \leq 0$, tj. matrice M i L su L-matrice. Dokazaćemo još i da je M M-matrica, koristeći M-kriterijum. Sa $e = \delta$ imamo $(Me)_0 = (Me)_n = h^2$, $(Me)_{n-1} = \frac{1}{2}a_{n-1} + b_{n-1}$ i za $i = 1,2,\dots,n-2$

$$(5.27) \qquad (Me)_i = \frac{1}{2}a_i + b_i + \frac{1}{2}c_i + d_i - \tilde{d}_i = \begin{cases} \frac{1}{2}a_i + b_i + \frac{1}{2}c_i + d_i & \text{za } i \notin \tau_d^+, \\ \frac{1}{2}a_i + b_i + \frac{1}{2}c_i & \text{za } i \in \tau_d^+. \end{cases}$$

Kako je $c_i \leq 0$, $a_i < 0$ i $\frac{1}{2}a_i + d_i < 0$, to je

(5.28) $\quad (Me)_i > a_i + b_i + c_i + d_i = 0, \quad (i = 1,2,\ldots,n-1).$

Znači, $I_h^{\alpha}(Me) = \emptyset$, te prema M-kriterijumu je M M-matrica.

Neka je sada e vektor definisan u teoremi 5.1. Tada je $I_h^{\alpha}(Ae) = \emptyset$, te na osnovu ML-kriterijuma sledi tvrdjenje teoreme 5.2.

2. U prethodnoj teoremi je dokazano da je A_h M-matrica ako je $\tau_d^{+} = \emptyset$, tj. ako je

$$\alpha_2(i) = k_{i+1} \le \sum_{j=0}^{p_i} k_{i-j} = -\alpha_1(i) \quad (i = 1,2,\ldots,n-1). \tag{5.29}$$

Kako se $p_i (i = 1,2,\ldots,n-1)$ odredjuju iz (4.8) i (4.11), to sada možemo dokazati sledeću teoremu.

Teorema 5.3. Neka je $k_1 = k_2 \ge 1$,

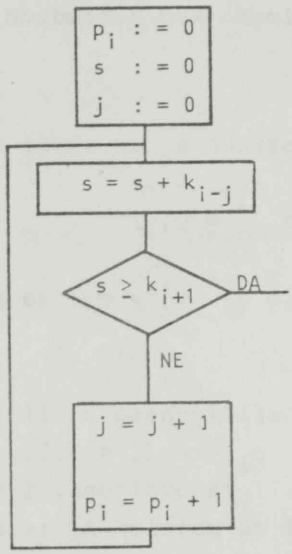
$$k_i \le k_{i+1} \le \sum_{j=0}^{i-1} k_{i-j} \quad (i = 3,4,\ldots,n-1), \tag{5.30}$$

i neka su k_n i p_{n-1} odredjeni prema (4.8). Tada se mogu odrediti $p_i \in \{0,1,\ldots,i-1\}$ $(i = 1,2,\ldots,n-2)$ tako da je matrica A_h nastala prema shemi I M-matrica.

Dokaz. Kako je $p_1 = 0$, to je (5.29) za $i = 1$ zadovoljeno zbog $k_2 = k_1$. S obzirom na (4.8) uslov (5.29) je zadovoljen i za $i = n-1$. U ostalim slučajevima, tj. za $i = 2,3,\ldots,n-2$ p_i treba izabrati tako da (zbog (5.29) i (4.11)) važi

$$k_{i+1} \le \sum_{j=0}^{p_i} k_{i-j} \le k_{i+1} + k_{i+2} \quad (i = 2,3,\ldots,n-2),$$

što je prema (5.30) uvek moguće. Na primer, za $i = 2,3,\ldots,n-2$ možemo p_i odrediti na sledeći način



Vrednost za p_i se dobija na odluci DA i zbog (5.30) je $p_i \in \{0,1,\ldots,i-1\}$.

Primedba. Kako za $k_1 = k_2$ iz (5.29) dobijamo

$$k_{i+1} \leq \sum_{j=0}^{p_i} k_{i-j} \leq \sum_{j=0}^{i-1} k_{i-j} \leq 2^{i-1}k_1 \quad (i = 2,3,\ldots,n-1)$$

to ako je $k_i > 2^{i-2}k_1$ za neko $i \in \{2,3,\ldots,n\}$ matrica A_h ne može biti M-matrica.

3. Analizirajući funkciju $g(x)$ definisanu sa (5.26) lako se uočava da je $g'(-\gamma/2) = 0$, te je $z_1 \in (-\gamma, -\gamma+\alpha)$, gde je z_1 manje rešenje jednačine (5.14). Zbog toga je uslov (5.13) ispunjen ako je

(5.31) $\quad \alpha_1(i+1) \geq \alpha_2(i) - \alpha_3(i+1) \quad$ za $\quad i \in \tau_d^+$.

Na osnovu toga imamo kao posledicu teoreme 5.2 sledeću teoremu.

Teorema 5.4. Matrica A_h iz sheme I je

(a) M-matrica ako je $\tau_d^+ = \emptyset$, i

(b) i.m. matrica, ako je $\tau_d^+ \neq \emptyset$ i za svako $i \in \tau_d^+$ važi (5.31).

Za formiranje koeficijenata $\alpha_1(i)$ $(i = 1,2,\ldots,n-1)$ najjednostavniji slučaj je $p_i = 0$ $(i = 1,2,\ldots,n-1)$, $k_n = k_{n-1}$. Tada su uslovi (4.8) i (4.11) zadovoljeni, i važi $d_i \geq 0$ $(i = 1,2,\ldots,n-1)$. To znači da matrica A_h iz sheme I može biti M-matrica samo ako je $k_i = k_1$ $(i = 2,3,\ldots,n)$, što daje poznatu ekvidistantnu diskretizaciju. Uslov (5.13) se u ovom slučaju svodi na

$$- k_{i+1} \geq k_{i+1} - k_{i+2} - k_{i+3} \quad \text{za} \quad i \in \tau_d^+.$$

Zbog (4.8), poslednji uslov je uvek zadovoljen. U ovom posebnom slučaju kao posledicu teoreme 5.2 imamo sledeću teoremu, koja se može dokazati i jednostavnije.

Teorema 5.5. Matrica A_h iz sheme I formirana sa $p_i = 0$ $(i = 1,2,\ldots,n-1)$, $k_n = k_{n-1}$ je i.m. matrica. Ako je još $k_i = k_1$ $(i = 1,2,\ldots,n-1)$, onda je A_h M-matrica.

Dokaz. Matrica A_h u ovom slučaju ima oblik

$$A_h = h^{-2}\begin{bmatrix} h^2 & & & & & & & \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & & & & \\ & a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & & a_{n-2} & b_{n-2} & c_{n-2} & d_{n-2} \\ & & & & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & & & & & h^2 \end{bmatrix}$$

Lako se proverava da je $A_h = M_1 \cdot M_2$, gde su M_1 i M_2 matrice oblika

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & 0 \\ & r_1 & s_1 & & & & \\ & & r_2 & s_2 & & & \\ & & & \cdot & \cdot & & \\ & & & & \cdot & \cdot & \\ & & & & & r_{n-2} & s_{n-2} \\ & & & & & & r_{n-1} \quad s_{n-1} \\ 0 & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_2 = 2h^{-2}\begin{bmatrix} 0.5h^2 & & & & & & 0 \\ A_1 & B_1 & C_1 & & & & \\ & A_2 & B_2 & C_2 & & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & & A_{n-2} & B_{n-2} & C_{n-2} \\ & & & & & A_{n-1} & B_{n-1} \quad C_{n-1} \\ 0 & & & & & & 0.5h^2 \end{bmatrix}$$

sa

$$r_i = \frac{\alpha_2(i) + \alpha_3(i)}{\alpha_3(i) - \alpha_1(i)}, \qquad s_i = -\frac{\alpha_1(i) + \alpha_2(i)}{\alpha_3(i) - \alpha_1(i)}$$

$$(i = 1,2,\ldots,n-1)$$

$$A_i = \frac{1}{\alpha_1(i)(\alpha_2(i) - \alpha_1(i))}, \quad B_i = \frac{-1}{\alpha_1(i)\alpha_2(i)},$$

$$C_i = \frac{-1}{\alpha_2(i)(\alpha_2(i) - \alpha_1(i))}, \quad (i = 1,2,\ldots,n-1).$$

Kako je prema (4.10), (4.11), (4.13)

$$\alpha_1(i) < 0, \; 0 < \alpha_2(i) < \alpha_3(i), \quad \alpha_2(i) + \alpha_1(i) \geq 0$$

$$(i = 1,2,\ldots,n-1)$$

to je

$$r_i > 0, \; s_i \leq 0, \; B_i > 0, \; A_i < 0, \; C_i < 0$$

$$(i = 1,2,\ldots,n-1).$$

Znači, M_1 i M_2 su L-matrice. Dokazaćemo da su M_1 i M_2 M-matrice, koristeći se M-kriterijumom, a time će A_h biti i.m. matrica, kao proizvod dve M-matrice.

Lako se vidi da je $r_i + s_i = 1$ $(i = 1,2,\ldots,n-1)$, te je sa $e = \delta$ $M_1 e = \delta$. Otuda je $I_h^0(M_1 e) = \emptyset$, pa na osnovu M-kriterijuma sledi da je M_1 M-matrica.

Zbog $A_i + B_i + C_i = 0$ $(i = 1,2,\ldots,n-1)$ sledi $M_2\delta = (1,0,\ldots,0,1)$ i $I_h^+(M_2\delta) = \{0,n\}$, $I_h^0(M_2\delta) = \{1,2,\ldots,n-1\}$. Kako je $A_i < 0$ $(i = 1,2,\ldots,n-1)$ povezivanje skupa $I_h^0(M_2\delta)$ sa $I_h^+(M_2\delta)$ pomoću M_2 postižemo na sledeći način. Za svako $i_0 \in I_h^0(M_2\delta)$ formira se niz

$$i_{j+1} = i_j - 1 \quad (j = 0,1,\ldots,r-1)$$

$$i_r = 0.$$

Ako je $k_i = k_1$ $(i = 1,2,\dots,n)$, imamo $\alpha_1(i) + \alpha_2(i) = 0$ $(i = 1,2,\dots,n-1)$, te je $s_i = 0$, $r_i = 1$, $(i = 1,2,\dots,n-1)$. Tada je $A_h = M_2$, tj. A_h je M-matrica.

4. Matrice A_h iz shema II, III, IV razlikuju se od matrice A_h iz sheme I samo u prvoj i poslednjoj vrsti, u prvoj ili poslednjoj, odnosno u prvoj, predposlednjoj i poslednjoj vrsti. Koristeći ML-kriterijum i postupajući kao u dokazu teoreme 5.2 pod (b), dokazaćemo sledeću teoremu.

Teorema 5.6. Za matrice A_h iz shema II, III, IV važi tvrdjenje (b) teoreme 5.2.

Dokaz. Neka je $A := h^2 A_h$. Dokazaćemo da je A_h i.m. matrica, tako što ćemo pokazati da je A i.m. matrica. Dokaz ćemo dati u tri dela, za svaki od tri navedena slučaja posebno.

Slučaj II. Neka je matrica B definisana sa (5.20) i sa izmenjenom prvom, drugom, predposlednjom i poslednjom vrstom koje sada glase

$(\underline{0},\ -a_0'h)$ - prva vrsta,

$(\frac{1}{2}a_1,\ \underline{0}\ \ q_1c_1,\ d_1 - \tilde{d}_1)$ - druga vrsta

$(qa_{n-1,n-2},\dots,qa_{n-1,0},\ \underline{0}\ \ \frac{1}{2}c_{n-1})$ - predposlednja, i

$(a_n'h,\ \underline{0})$ - poslednja vrsta,

pri čemu je $q \in (0,1/2)$ proizvoljno i

$$(5.33)\qquad q_1 = \begin{cases} 1/2, & \text{ako je } k_1 < k_2, \\ q, & \text{ako je } k_1 = k_2. \end{cases}$$

Koeficijenti $a_{n-1,j}$ $(j = 0,1,\ldots,n-2)$ odredjeni su sa (5.21).

Matrica A_0^+ je data sa (5.19) i, zbog $-c_0' > 0$, $c_n' > 0$, izmenjenom prvom i poslednjom vrstom, koje su sada oblika

$$(\underline{0},\ 0,\ -c_0'h) \qquad \text{- prva vrsta}$$

$$(c_{n,n-1}',\ c_{n,n-2}',\ldots,c_{n,0}',\ 0,\ \underline{0}) \text{ - poslednja vrsta}$$

sa

$$c_{n,j}' = \begin{cases} 0, & \text{ako je } j \neq p_{n-1}, \\ c_n'h, & \text{ako je } j = p_{n-1}. \end{cases} \qquad (j = 0,1,\ldots,n-1),$$

Sada imamo $A_d = \mathrm{diag}(h^2g_0 - hb_0',\ b_1,\ldots,b_{n-1},\ h^2g_1 + hb_n') > 0$ (jer je $g_i \geq 0$ $(i = 0,1)$, $-b_0' > 0$, $b_n' > 0$) i $A^- = A - A_d - A_0^+$. Matrice M i L definišemo prema (5.16), pri čemu je $C = A^- - B$.

Uslov $A \leq ML$ ML-kriterijuma ekvivalentan je sa

(i) (5.23), ako je $i \in \tau_d^+$,

(ii) $-c_0'hb_1 \leq -(1 - q_1)a_0'hc_1$,

(iii) $c_n'hb_{n-1} \leq (1 - q)a_{n-1}a_n'h$.

Iz dokaza teoreme 5.2 sledi da je (i) ispunjeno. Kako je $-a_0'c_1 > 0$ i $1 - q_1 \geq \frac{1}{2}$, to je (ii) zadovoljeno ako važi

$$-c_0'b_1 \leq -\frac{1}{2}a_0'c_1.$$

S obzirom na (3.10) i (4.16), poslednja nejednačina glasi

$$\frac{k_1}{k_2(k_1 + k_2)} \ \frac{2(2k_2 + k_3)}{k_1k_2(k_2 + k_3)} \leq \frac{1}{2} \ \frac{k_1 + k_2}{k_1k_2} \ \frac{2(k_3 + k_2 - k_1)}{k_2(k_2 + k_1)k_3}$$

i svaki se na

$$\frac{2k_1}{k_2 + k_3} \leq 1 \quad \text{i} \quad \frac{2k_1}{k_2 + k_3} \leq \frac{k_1 + k_2}{k_3} .$$

Očigledno je (ii) zadovoljeno, jer je $k_1 \leq k_2 \leq k_3$.
U slučaju $k_1 = k_2$, zbog $q \in (0,1/2)$ sledi iz (ii)

$$- c_0' b_1 + (1 - q) a_0' c_1 < 0. \tag{5.35}$$

Iz (3.14) dobijamo

$$b_{n-1} = - 2a_{n-1} = \frac{2}{k_n^2} ,$$

a iz (4.17)

$$4c_n' = - a_n' = \frac{2}{k_n} .$$

Otuda se lako vidi da je (iii) ispunjeno. Zbog $1 - q > 1/2$ sledi

$$c_n' b_{n-1} - (1 - q) a_{n-1} a_n' < 0.$$

Dokazaćemo sada da je matrica M M-matrica.

Imamo

$$(M\delta)_0 = g_0 h^2 \geq 0,$$

$$(M\delta)_1 = \frac{1}{2}a_1 + b_1 + qc_1 + d_1 - \tilde{d}_1 \geq \frac{1}{2} a_1 + b_1 + \frac{1}{2}c_1 + d_1 - \tilde{d}_1 > 0,$$

$$(M\delta)_i = \frac{1}{2}a_i + b_i + \frac{1}{2}c_i + d_i - \tilde{d}_i > 0,$$

$$(M\delta)_{n-1} = qa_{n-1} + b_{n-1} + \frac{1}{2}c_{n-1} > \frac{1}{2}a_{n-1} + b_{n-1} +$$

$$+ \frac{1}{2}c_{n-1} > 0,$$

$$(M\delta)_n = g_1h^2 \geq 0.$$

Znači,

$$I_h^0(M\delta) = \begin{cases} \{0\}, \text{ ako je } & g_0 = 0,\ g_1 > 0, \\ \emptyset\ , \text{ ako je } & g_0 > 0,\ g_1 > 0, \\ \{n\}, \text{ ako je } & g_0 > 0,\ g_1 = 0. \end{cases}$$

Očigledno je da matrica M povezuje skup $I_h^0(M\delta)$ sa

$$I_h^+(M\delta) = \{0,1,\dots,n\} \setminus I_h^0(M\delta).$$

Kako je $M_0 = B \leq 0$, sledi prema M-kriterijumu da je matrica M M-matrica.

Zbog $L_0 \leq 0$ i drugi uslov ML-kriterijuma je ispunjen.

U shemi II je $g_0 \geq 0$, $g_1 \geq 0$, $q_0 + q_1 > 0$, te je

$$I_h^+(A\delta) = \begin{cases} \{0\}, \text{ ako je } & g_0 > 0,\ g_1 = 0, \\ \{0,n\}, \text{ ako je } & g_0 > 0,\ g_1 > 0, \\ \{n\}, \text{ ako je } & g_0 = 0,\ g_1 > 0. \end{cases} \tag{5.36}$$

U prva dva slučaja matrica M povezuje skup

$$I_h^0(A\delta) = \{0,1,\dots,n\} \setminus I_h^+(A\delta)$$

sa $I_h^+(A\delta)$ na sledeći način: za $i_0 \in I_h^0(A\delta)$ formira se niz

$$
(5.37)\qquad \begin{aligned} & i_{j+1} = i_j - 1 - p_{i_j} \quad (j = 0,1,\ldots,r-1), \\ & i_r = 0, \end{aligned}
$$

pri čemu za $i_0 = n$, definišemo $p_{i_0} = 0$.

U trećem slučaju, $g_0 = 0$, $g_1 > 0$, povezivanje skupa $I_h^0(A\delta) = \{0,1,\ldots,n-1\}$ sa skupom $I_h^+(A\delta) = \{n\}$ pomoću matrice M ostvaruje se na sledeći način. Za $i_0 \in I_h^0(A\delta)$ obrazuje se niz

$$
(5.38)\qquad \begin{aligned} & I_{j+1} = i_j + 1 \quad (j = 0,1,\ldots,r-1), \\ & i_r = n. \end{aligned}
$$

Prema ML-kriterijumu sada sledi da je matrica A_h iz sheme II i.m. matrica.

Slučaj III. U ovom slučaju razlikujemo dve sheme, tj. dve matrice A. Definišimo matrice B i A_0^+ kao u slučaju II, sa prvom vrstom $(\underline{0})$ umesto (5.32), (5.34), a zatim M i L prema (5.16) ako je $R_0 x = x(0)$. Tada uslov (ii) nije potreban i imamo

$$
I_h^+(A\delta) = \begin{cases} \{0\}, & \text{za } g_1 = 0, \\ \{0,n\}, & \text{za } g_1 > 0. \end{cases}
$$

Za $R_2 x = x(1)$ se poslednje vrste u (5.32), (5.34) zamenjuju sa $(\underline{0})$, te uslov (iii) nije potreban i imamo

$$
I_h^+(A\delta) = \begin{cases} \{0,n\} & \text{za} \quad g_0 > 0, \\ \\ \{n\} & \text{za} \quad g_0 = 0. \end{cases}
$$

Da su uslovi ML-kriterijuma ispunjeni i u slučaju matrice A_h iz sheme III, uz navedene izmene, dokazuje se isto kao u slučaju II.

Slučaj IV. Neka je matrica B definisana prema

$$
B = \begin{bmatrix}
0 & -hg_0a_0 & & & & & & & hg_1a_n' \\
a_{10} & 0 & q_1c_1 & & & & & & \\
a_{21} & a_{20} & 0 & \frac{1}{2}c_2 & & & & & \\
 & \cdot & \cdot & 0 & & & & & \\
 & & \cdot & \cdot & \cdot & & & & \\
 & & & \cdot & & \cdot & & & \\
a_{n-3,n-4}, & & & & & a_{n-3,0} & 0 & \frac{1}{2}c_{n-3} & \\
a_{n-2,n-3}, & & & & & 0 & a_{n-2,0} & 0 & \frac{1}{2}c_{n-2} \\
c_{n-1} & & & & & & 0 & qa_{n-1} & 0
\end{bmatrix} \tag{5.39}
$$

a matrica A_0^+ prema

$$
A_0^+ = \begin{bmatrix}
0 & 0 & -hg_0c_0' & & & & & hg_1c_n' & 0\\
& 0 & 0 & \tilde{d}_1 & & & & & \\
& & & 0 & 0 & \tilde{d}_2 & & & \\
& & & & \cdot & \cdot & \cdot & & \\
& & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \\
& & & & & & 0 & 0 & \tilde{d}_{n-3}\\
\tilde{d}_{n-2} & & & & & & & 0 & 0\\
& & & & & & & & 0
\end{bmatrix} \tag{5.40}
$$

Pritom je q_1 i q_2 definisano kao u slučaju II, a_{ij} $(i = 1,2,\ldots,n-2;\ j = 0,1,\ldots,i-1)$ prema (5.21), d_i $(i = 1,2,\ldots,n-3)$ prema (5.18) i $\tilde{d}_{n-2}$ prema (5.18) ako je $p_{n-2} < n-3$ i $\tilde{d}_{n-2} = 0$ ako je $p_{n-2} = n-3$. Naime, za $p_{n-2} = n-3$ elemenat $A(n-2,0)$ matrice A je $d_{n-2} + a_{n-2} < 0$.

Dalje je $A_d = \mathrm{diag}(h^2g + hg_1b_n' - hg_0b_0', b_1,\ldots,b_{n-1})$, $A^- = A - A_0^+ - A_d$ i $C = A^- - B$.

Prvi uslov ML-kriterijuma svodi se na uslove (i), (ii), (iii) slučaja II, te je ispunjen. Drugi uslov istog kriterijuma će biti ispunjen ako pokažemo da je $M = A_d + B$ M-matrica.

Imamo

$$(M\delta)_0 = h^2g > 0, \quad (g > 0),$$

$$(M\delta)_{n-1} = c_{n-1} + b_{n-1} + qa_{n-1} > 0,$$

$$(M\delta)_i = \tfrac{1}{2}a_i + b_i + \tfrac{1}{2}c_i > 0, \ (i = 1,2,\ldots,n-2).$$

Znači, $I_h^0(M\delta) = \emptyset$. Prema M-kriterijumu matrica M je M-matrica.

Kako je $I_h^+(A\delta) = \{0\}$ i $I_h^0(A\delta) = \{1,2,\ldots,n-1\}$, to matrica M povezuje skup $I_h^0(A\delta)$ sa $I_h^+(A\delta)$ na način opisan u slučaju II, (5.37), sa $p_{i_0} = 0$ ako je $i_0 = n-1$.

Na ovaj način dokazano je da matrica A ispunjava sva tri uslova ML-kriterijuma, tj. da je i.m. matrica. Time je teorema 5.6 dokazana.

5. Za svaku shemu I - IV odgovarajuća matrica A_h je i.m. i $B_h = \mathrm{diag}(0,1,1,\ldots,1,0) \in L_+[\mathbb{R}^{I_h}]$. Znajući to sada možemo formulisati dve teoreme, čije rezultate ćemo koristiti u paragrafima 6. i 7..

Uvedimo, najpre, sledeće oznake:

$$\overline{Q}_1 = -b_1 - c_1(1-z)\left(\frac{k_1 + k_2}{k_1}\right)^2$$

$$z = \frac{1}{2}, \text{ ako je } k_1 < k_2,$$

$$z \in (0,1/2), \text{ ako je } k_1 = k_2,$$

$$\overline{Q}_i = \begin{cases} \infty, & \text{ako je } i-1 \notin \tau_d^+, \\ & (i = 2,3,\ldots,n-1) \\ \dfrac{c_i c_{i-1}}{4d_{i-1}} - b_i, & \text{ako je } i-1 \in \tau_d^+, \end{cases}$$

$$S = b_{n-1}(1 - 2z).$$

Teorema 5.7. Neka su $A_{h,j}$ $(j = 1,2,3,4)$ matrice koje odgovaraju shemama I, II, III, IV respektivno. Ako za svako $i \in \tau_d^+$ važi (5.13), tada

(a) postoji najmanja sopstvena pozitivna vrednost $\lambda_{h,j}$ sopstvenog problema $A_{h,j}X = \lambda B_h X$ $(j = 1,2,3,4)$;

(b) matrice $A_{h,j} - B_h D_h$ $(j = 1,2,3,4)$ su i.m. za svaku dijagonalnu matricu $D_h = \mathrm{diag}(\mu_0,\mu_1,\ldots,\mu_n) \in L[\mathbb{R}^{I_h}]$ za koju važi

$$\mu_i \in [-\overline{q}_i h^{-2}, \lambda_{hj}) \quad (i = 1,2,\ldots,n-1).$$

Pritom je

shema	I, III ($R_0x = x(0)$)	II, III ($R_1 x = x(1)$), IV
$\overline{q}$	∞	$\overline{Q}$,
$\overline{q}_i$ (i=2,3,...,n-2)	$\overline{Q}_i$	$\overline{Q}_i$
$\overline{q}_{n-1}$	$\overline{Q}_{n-1}$	$\min(S,\overline{Q}_{n-1})$

Za $\overline{q}_i = \infty$ uzimamo da je $[-\overline{q}_i h^{-2}, \lambda_{h,j}) = (-\infty, \lambda_{h,j})$.

Dokaz. S obzirom na (5.22), (5.35), (5.36) imamo $\overline{q}_i \geq 0$ $(i = 1,2,\ldots,n-1)$. Prema pretpostavkama teoreme za svako $j \in \{1,2,3,4\}$ matrica $A_{h,j}$ je i.m., te je $A_{h,j}^{-1}B_h \geq 0$. Spektralni radijus $\rho_{h,j} = \rho(A_{h,j}^{-1}B_h) > 0$ je sopstvena vrednost matrice $A_{h,j}^{-1}B_h$, te je $\lambda_{h,j} = \rho_{h,j}^{-1}$ najmanja pozitivna sopstvena vrednost problema $A_{h,j}x = \lambda B_h x$, [2a], [3]. Time je tvrdjenje teoreme pod (a) dokazano.

Za $0 \leq u_j < \lambda_{h,j}$ imamo

$$A_{h,j} - u_j B_h = A_{h,j}(E - u_j A_{h,j}^{-1}B_h), \quad \rho(u_j A_{h,j}^{-1}B_h) < 1$$

i otuda

$$(A_{h,j} - u_j B_h)^{-1} \geq 0.$$

Neka je sada $D_1 = \mathrm{diag}(d_0, d_1, \dots, d_n)$ takva matrica da važi $d_i \in [-\bar{q}_i h^{-2}, 0]$ $(i = 1,2,\dots,n-1)$ i $D_1 \leq D_h$. Tada se matrice $A_{h,j} - B_h D_1$ $(j = 1,2,3,4)$ razlikuju od matrica $A_{h,j}$ samo po elementima na glavnoj dijagonali. Tačnije, važi $(A_{h,j} - B_h D_1)_d \geq (A_{h,j})_d$. Za svako $j \in \{1,2,3,4\}$ inverzna monotonija matrice $A_{h,j} - B_h D_1$ se dokazuje pomoću ML-kriterijuma sa matricama M i L definisanim u dokazima teorema 5.2 i 5.6, pri čemu je $A_d = (A_{h,j} - B_h D_1)_d$. Kako su $\bar{q}_i$ odredjeni tako da drugi uslov ML-kriterijuma bude ispunjen, a prvi i treći uslov važe (što se dokazuje isto kao u teoremama 5.2 i 5.6), sledi da je matrica $A_{h,j} - B_h D_1$ i.m..

Ako je sada $D_1 \leq D_h \leq u_j E$, $0 \leq u_j < \lambda_{h,j}$, biće

$$A_{h,j} - u_j B_h \leq A_{h,j} - B_h D_h \leq A_{h,j} - B_h D_1,$$

te na osnovu teoreme 2.3 sledi da su matrice $A_{h,j} - B_h D_h$ $(j = 1,2,3,4)$ i.m..

Time je teorema dokazana.

Primedba. Očigledno $\bar{q}_i$ $(i = 1,2,\dots,n-1)$ ne zavisi od h. Ako je potrebno da za elemente μ_i dijagonalne matrice D važi $\mu_i \in (-\infty, \lambda_{h,j})$, to je moguće postići samo za $j = 1$, tj. za shemu I ako je $\tau_d^+ = \emptyset$. Dovoljan uslov za to dat je u teoremi 5.3. U ostalim slučajevima, $j = 2,3,4$, s obzirom na $\bar{q}_1$ i $\bar{q}_{n-1}$ tako nešto nije moguće.

U slučaju ekvidistantne diskretizacije $k_i = 1$, $p_i = 0$ $(i = 1,2,3,\dots,n)$ tvrdjenja teoreme 5.7 se svode na osobinu PO iz [3].

Ako se matrice $A_{h,j}$ $(j = 1,2,3,4)$ formiraju sa $p_i = 0$ $(i = 1,2,\dots,n-1)$ i ako se pretpostavi nešto više o $k_i (i = 1,2,\dots$ $\dots,n)$ nego što je dato u opisu shema, izraz za $\bar{q}_i$ može biti jednostavniji. Tako, na primer, ako je

$$k_j = \begin{cases} 1, & j = 1,2,\dots,p-1 \\ k, & j = p,\dots,n \end{cases}$$

imamo

$$\bar{q}_i = \begin{cases} \infty, & \text{ako je } i \neq p, \\ \dfrac{3}{2k^2(k^2-1)}, & \text{ako je } i = p. \end{cases}$$

Teorema 5.8. Neka za matricu $A_{h,l}$ važe pretpostavke prethodne teoreme. Tada je matrica $A_{h,l} - B_hD_h$ i.m. za svaku dijagonalnu matricu $D_h = \mathrm{diag}(\mu_0,\mu_1,\ldots,\mu_n)$ za koju važi

$$\mu_i \in [-\bar{q}_i h^{-2}, \lambda_i) \quad (i = 1,2,\ldots,n-1)$$

pri čemu je $\bar{q}_i$ definisano kao u teoremi 5.7, a λ_i kao u teoremi 5.1.

Dokaz. Kako je $\lambda_i > 0$ $(i = 1,2,\ldots,n-1)$ posmatrajmo matricu $D = \mathrm{diag}(d_0,d_1,\ldots,d_n)$ koja zadovoljava pretpostavke teoreme i za koju važi još $D \geq 0$, $D \geq D_h$. Očigledno je $A_{h,l} - B_hD \leq A_{h,l}$. Prema teoremi 5.1, za vektor e definisan sa (5.6) važi

$$e > 0, \ (A_{h,l}e)_i = \lambda_i e_i \ (i = 0,1,2,\ldots,n).$$

Otuda sledi

$$((A_{h,l} - B_hD)e)_i = \begin{cases} \lambda_i e_i, & \text{ako je } i = 0,n, \\ (\lambda_i - d_i)e_i, & \text{ako je } i = 1,2,\ldots,n-1. \end{cases}$$

Kako je $A_{h,l}^{-1} \geq 0$, sada imamo

$$A_{h,1}^{-1}(A_{h,1} - B_h D)e > 0,$$

te prema teoremi 2.2 ([2b]) sledi da je matrica $A_{h,1} - B_h D$ i.m..

Koristeći rezultat prethodne teoreme i relaciju $A_{h,1} - B_h D \leq A_{h,1} - B_h D_h$, sledi tvrdjenje teoreme.

Primedba. Specijalan (ekvidistantan) slučaj $k_i = 1$, $p_i = 0$, $(i = 1,2,\dots,n)$ ove teoreme nalazi se u [3], osobine PO i P9.

6. Sada ćemo posmatrati sheme V.i $(i = 1,2,3,4)$ i njima odgovarajuće matrice $A_{h,i}$ $(i = 1,2,3,4)$.

Teorema 5.9. Neka je

$$P = \max_{1\leq i\leq m-1} k_{2i}^{-1}\left(\sqrt{1 - \frac{k_{2i}(2k_{2i+1}^2 + k_{2i}^2)}{k_{2i+1}^2(2k_{2i+1} + k_{2i})}} - 1\right)$$

gde je $m = n/2$. Tada važi

(a) Ako je $2Ph^{-1} < p(t) < 2(k_n h)^{-1}$, $t \in I$, onda je matrica $A_{h,1}$ i.m..

(b) Ako je $\max(2Ph^{-1}, -(2k_2 h)^{-1}) < p(t) < (k_n h)^{-1}$, $t \in I$ onda su matrice $A_{h,2}$ i $A_{h,4}$ i.m..

(c) Ako je $2Ph^{-1} < p(t) < (k_n h)^{-1}$, $t \in I$, $R_1 x = x(1)$, odnosno

$$\max(2Ph^{-1}, -(2k_2 h)^{-1}) < p(t) < 2(k_n h)^{-1}, \ t \in I,$$

za $R_0 x = x(0)$, onda je matrica $A_{h,3}$ i.m..

Primedba. Kako je $P < 0$ te se uslovi za $p(t)$ iz (a), (b) i (c) mogu zameniti sa jednostavnijim uslovom

$$0 \leq p(t) < (k_n h)^{-1}.$$

Kod problema graničnog sloja za $p(t) \geq 0$ (KP) ima rešenje koje se naglo menja u okolini tačke $t = 0$. Naša neekvidistantna mreža odgovara upravo toj situaciji.

Dokaz. Neka je $p_i = p(t_i)(t_i \in I_h)$, i $A_{h,1}$ matrica nastala diskretizacijom (KP) pomoću sheme V.1. Definišimo $A = h^2 A_{h,1}$ i dokažimo inverznu monotonost matrice A.

Elementi $A(i,j)$ $(i = 0,1,2,\ldots,n)$ matrice A dati su sa

$$(5.41) \qquad A(i,j) = \begin{cases} h^2, & \text{za } i = j = 0,n, \\ a_i - a_i' h p_i & \text{za } j = i-1,\ i = 1,2,\ldots,n-1, \\ b_i, & \text{za } j = i,\ i = 1,3,\ldots,n-1, \\ b_i - b_i' h p_i & \text{za } j = i,\ i = 2,4,\ldots,n-2, \\ c_i - c_i' h p_i & \text{za } j = i+1,\ i = 1,2,\ldots,n-1, \\ d_i, & \text{za } j = i+2,\ i = 2,4,\ldots,n-2, \\ 0 & \text{za ostale vrednosti } i,j, \end{cases}$$

pri čemu su a_i', b_i', c_i' odredjeni prema (4.20), a a_i, b_i, c_i, d_i prema (3.5).

Očigledno je $A(i, i+2) \geq 0$ $(i = 1,2,\ldots,n-2)$ i $A(i,i) > 0$ $(i = 1,3,\ldots,n-1)$. Dokazaćemo da važi još

$$A(i,i) > 0 \quad (i = 2,4,\ldots,n-2), \quad A(i,i-1) < 0$$

$$(i = 1,2,\ldots,n-1)$$

$$A(i,i+1) < 0 \quad (i = 1,2,\ldots,n-1).$$

Zaista,

$$A(i,i) = \frac{3k_{i+1} - k_i}{k_{i+1}^2 k_i} - \frac{k_{i+1} - k_i}{k_{i+1}k_i} hp_i >$$

$$> \frac{1}{k_{i+1}^2 k_i}(k_{i+1} + k_i) > 0$$

jer je $\quad p_i < 2(k_n h)^{-1} \leq 2(k_{i+1}h)^{-1}$.

Za neparno i imamo, dalje,

$$A(i,i-1) = -\frac{1}{k_i^2} + \frac{1}{2k_i} hp_i < 0, \text{ jer je } hp_i < 2(k_i h)^{-1};$$

a za parno i

$$A(i,i-1) = \frac{-6k_{i+1}}{k_i(k_i + k_{i+1})(k_i + 2k_{i+1})} + \frac{k_{i+1}}{k_i(k_i + k_{i+1})} hp_i <$$

$$< \frac{2k_{i+1}}{k_i(k_i + k_{i+1})} \left(\frac{-3}{k_i + 2k_{i+1}} + \frac{1}{k_{i+1}} \right) \leq 0$$

Isto tako, za neparno i imamo

$$A(i,i+1) = -\frac{1}{k_i^2} - \frac{1}{2k_i} hp_i < -\frac{1}{k_i}\left(\frac{1}{k_i} + P\right) \leq 0,$$

jer je

$$P \geq -\frac{1}{k_i} \quad \left\{ P \geq -\frac{1}{k_i} + \frac{1}{k_i}\sqrt{\frac{k_{i+1} - k_i}{k_{i+1} + \frac{1}{2}k_i}} \right\},$$

a za parno i

$$A(i,i+1) = \frac{-2(2k_{i+1} - k_i)}{k_{i+1}^2(k_i + k_{i+1})} - \frac{k_i}{k_{i+1}(k_i + k_{i+1})} hp_i <$$

$$< \frac{-2}{k_{i+1}(k_i + k_{i+1})} \left(\frac{2k_{i+1} - k_i}{k_{i+1}} + P \right) \leq 0$$

jer je $P \geq -\dfrac{1}{k_{i+1}}$.

Na osnovu dokazanog, za matrice B i C, čiji su elementi dati sa

$$B(i,j) = \begin{cases} A(i,j) & \text{za} \quad j = i-1,\ i = 1,2,\dots,n-1, \\ \frac{1}{2}A(h,j) & \text{za} \quad j = i+1,\ i = 2,4,\dots,n-2, \\ 0 & \text{inače,} \end{cases} \tag{5.42}$$

$$C(i,j) = \begin{cases} A(i,j), & \text{za} \quad j = i+1,\ i = 1,3,\dots,n-1, \\ \frac{1}{2}A(i,j), & \text{za} \quad j = i+1,\ i = 2,4,\dots,n-2, \\ 0 & \text{inače,} \end{cases} \tag{5.43}$$

važi $B \leq 0$, $C \leq 0$ i $A^- = B + C$.

a) Sa matricama $M = A_d + B$ i $L = E + A_d^{-1}C$, prvi uslov, $A \leq ML$, ML-kriterijuma svodi se na (5.23), odnosno na

(5.44) $$d_i b_{i+1} \leq \frac{1}{2}(c_i - c_i' h p_i)(c_{i+1} - c_{i+1}' h p_{i+1}),$$

$$i \in \tau_d^+ \cap \{2,4,\ldots,n-2\}$$

Poznato je da važi $c_i < 0$, $c_i' > 0$ $(i = 1,2,\ldots,n-1)$. Za proizvoljno ali fiksno $i \in \tau_d^+ \cap \{2,4,\ldots,n-2\}$ razlikujemo sledeća četiri slučaja.

1. $p_i \geq 0$, $p_{i+1} \geq 0$. U ovom slučaju važi

$$-c_i c_{i+1}' p_{i+1} \geq 0, \quad -c_{i+1} c_i' p_i \geq 0, \quad c_i' c_{i+1}' p_i p_{i+1} \geq 0.$$

Zbog toga je

$$c_i c_{i+1} \leq (c_i - c_i' h p_i)(c_{i+1} - c_{i+1}' h p_{i+1}),$$

te kako zbog (5.23) važi $d_i b_{i+1} \leq \frac{1}{4} c_i c_{i+1}$ sledi da je (5.44) tačno.

2. $p_i < 0$, $p_{i+1} < 0$. Neka je $\bar{p} = \min\{p_i, p_{i+1}\}$. Tada je $\alpha \leq \beta$, gde je

$$\alpha := (c_i - c_i' h \bar{p})(c_{i+1} - c_{i+1}' h \bar{p}),$$

$$\beta := (c_i - c_i' h p_i)(c_{i+1} - c_{i+1}' h p_{i+1}).$$

Da bi to dokazali posmatrajmo

$$-\alpha + \beta = h(c_i' c_{i+1}(\bar{p} - p_i) + c_{i+1}' c_i(\bar{p} - p_{i+1}) +$$

$$+ h^2 c_i' c_{i+1}' (p_i p_{i+1} - \bar{p}^2).$$

Neka je $\bar{p} = p_{i+1}$. Tada je

$$\beta - \alpha = hc_i'(\bar{p} - p_i)(c_{i+1} - hc_{i+1}'\bar{p}) \geq 0$$

jer je $\bar{p} - p_i \leq 0$ i $c_{i+1} - hc_{i+1}'p_{i+1} = A(i+1,i+2) < 0$ (prema(5.41)).

Ako je $\bar{p} = p_i$, imamo

$$\beta - \alpha = hc_{i+1}'(\bar{p} - p_{i+1})(c_i - hc_i'p_i) \geq 0, \text{ jer je}$$

$\bar{p} - p_{i+1} \leq 0$ i $c_i - hc_i'p_i = A(i,i+1) < 0$(prema (5.41)).

Ako je ispunjen uslov

$$d_i b_{i+1} \leq \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}(c_i - c_i'h\bar{p})(c_{i+1} - c_{i+1}'h\bar{p})$$

važi i (5.44). Ovaj uslov je ekvivalentan sa

$$h^2 k_i \bar{p}^2 + 4h\bar{p} + \frac{4}{k_{i+1}^2} \cdot \frac{2k_{i+1}^2 + k_i^2}{2k_{i+1} + k_i} \geq 0,$$

i ispunjen je ako važi

$$\bar{p} \geq 2k_i^{-1}h^{-1}\left[\sqrt{1 - \frac{k_i\,(2k_{i+1}^2 + k_i^2)}{k_{i+1}^2(2k_{i+1} + k_i)}} - 1\right].$$

Kako je

$$\bar{p} \geq 2h^{-1}P \geq 2h^{-1}k_i^{-1}\left[\sqrt{1 - \frac{k_i\,(2k_{i+1}^2 + k_i^2)}{k_{i+1}^2(2k_{i+1} + k_i)}} - 1\right],$$

to je (5.44) tačno.

3. $p_i \geq 0,\ p_{i+1} \leq 0$. Sa $\bar{p} = p_{i+1}$ dokaz da (5.44) važi, isti je kao u prethodnom slučaju.

4. $p_i \leq 0,\ p_{i+1} \geq 0$. Sa $\bar{p} = p_i$ dokaz da (5.44) važi, isti je kao u drugom slučaju.

Na ovaj način smo dokazali da važi $A \leq ML$.

Prema konstrukciji matrica M i L vidi se da su one L-matrice. Dalje je

$$(5.45) \qquad (M\delta)_i = \begin{cases} a_i - a_i' h p_i + b_i, & \text{za } i = 1,3,5,\dots,n-1, \\ (a_i - a_i' h p_i) + b_i - b_i' h p_i + \frac{1}{2}(c_i - c_i' h p_i), & \\ \qquad \text{za } i = 2,4,\dots,n-2, & \\ h^2 \quad \text{za } i = 0,\ i = n. & \end{cases}$$

Kako je $p_i h > 2P \geq -\frac{2}{k_i}$ imamo

$$(M\delta)_i = \frac{1}{k_i^2}(-1+2) - hp_i \frac{-1}{2k_i} > \frac{1}{k_i^2} - \frac{2}{2k_i^2} = 0,$$

$$i = 1,3,\dots,n-1,$$

i za $i = 2,4,\dots,n-2$

$$(M\delta)_i \geq (a_i + b_i + c_i + d_i) - (\tfrac{1}{2}c_i + d_i) - hp_i(a_i' + b_i' + c_i')$$

$$+ \tfrac{1}{2}hp_i c_i' \geq -(\tfrac{1}{2}c_i + d_i) + \tfrac{1}{2}hp_i c_i' >$$

$$> \frac{2_{k+1} - k_i}{k_{i+1}^2(k_{i+1} + k_i)} - \frac{k_{i+1} - k_i}{k_{i+1}^2(2k_{i+1} + k_i)} -$$

$$- \frac{1}{k_i} \frac{k_i}{k_{i+1}(k_{i+1} + k_i)} > 0.$$

Znači, $I_h^0(M\delta) = \emptyset$, te je (prema M-kriterijumu) M M-matrica.

Povezivanje skupa $I_h(A\delta) = \{1,2,\ldots,n-1\}$ sa skupom $I_h^+(A\delta) = \{0,n\}$ pomoću matrice M ostvaruje se na sledeći način: za $i_0 \in I_h^0(A\delta)$ formira se niz

$$i_{j+1} = i_j - 1 \quad (j = 1,2,\ldots,r-1)$$

$$i_r = 0.$$

Na osnovu ML-kriterijuma sada sledi tvrdjenje teoreme pod a).

b) Neka je prvo $A = h^2 A_{h,2}$, gde je $A_{h,2}$ matrica nastala diskretizacijom pomoću sheme V.2. Elementi $A(i,j)$ matrice A su definisani kao u (5.41) za $i = 1,2,\ldots,n-1$; $j = 0,1,\ldots$ $\ldots,n-1$. Za $i = 0$ je

$$A(0,j) = \begin{cases} h(-b_0' + hg_0), & \text{za } j = 0, \\ - a_0' h, & \text{za } j = 1, \\ - c_0' h, & \text{za } j = 2, \\ 0, & \text{za } j = 3,4,\ldots,n, \end{cases}$$

a za $i = n$

$$A(n,j) = \begin{cases} 0, & \text{za } j = 0,1,2,\dots,n-3, \\ hc_n', & \text{za } j = n-2, \\ ha_n', & \text{za } j = n-1, \\ h(a_n' + g_1 h), & \text{za } j = n. \end{cases}$$

Neka su matrice B i C definisane prema (5.42), odnosno (5.43), uz sledeće izmene

$$B(0,1) = -\tfrac{2}{3}a_0'h, \quad C(0,1) = -\tfrac{1}{3}a_0'h,$$

$$C(n,n-1) = ha_n'.$$

Očigledno važi $B \leq 0$ i $C \leq 0$ i $A^- = B + C$. Sa matricama $M = A_d + B$ i $L = E + A_d^{-1}C$ prvi uslov ML-kriterijuma svodi se na (5.44) za $i = 2,4,\dots,n-2$, i, prema delu dokaza pod a), je ispunjen. S obzirom na promene u matrici $A_{h,2}$ u odnosu na matricu $A_{h,1}$, prvi uslov ML-kriterijuma se dopunjava još sa

$$(5.46) \qquad -b_1c_0'h \leq \tfrac{2}{3}(-a_0'h)(c_1 - c_1'hp_1),$$

$$(5.47) \qquad b_{n-1}c_n'h \leq a_n'h(a_{n-1} - a_{n-1}'hp_{n-1}).$$

Kako je $b_1 = -2c_1 = \dfrac{2}{k_2^2}$, $\quad -c_0' = c_1' = \dfrac{1}{2k_2} = 4a_0'$

Uslov (5.46) je ekvivalentan sa

$$0 \leq \tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{3}k_2hp_1.$$

Iz $p_1 > -(2k_2h)^{-1}$ (uslov b), teorema 5.9) sledi

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3}k_2hp_1 > \frac{1}{3} + \frac{2}{3}k_2h \frac{-1}{2k_2h} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0.$$

Time je uslov (5.46) ispunjen.

Zbog $b_{n-1} = - 2a_{n-1} = \dfrac{2}{k_n^2}$, $4c_n' = - a_n' = \dfrac{2}{k_n} = - 4a_{n-1}'$

uslov (5.47) je ekvivalentan sa

$$0 \leq 1 - 2k_nhp_{n-1}.$$

Kako je $p(t) < (k_nh)^{-1}$ taj uslov je ispunjen.

Prema tome, uslovi (5.44), (5.46) i (5.47) su ispunjeni, te imamo da je $A \leq ML$.

Kako su matrice M i L L-matrice, dokažimo da je M M-matrica, čime će i drugi uslov ML-kriterijuma biti zadovoljen.

Sa $e = (1,4/5,1,\dots,1,3/4,1)$ dobijamo

(5.48) $\quad (Me)_i = (M\delta)_i > 0, \quad i = 3,4,5,\dots,n-3,$

gde je $(M\delta)_i$ odredjeno prema (5.45). Za $i = 0,1,2$ dobijamo

$$(Me)_0 = h^2g_0 + h(-b_0' - \frac{8}{15}a_0') = h^2g_0 + \frac{13}{30k_2} > 0$$

$$(g_0 \geq 0)$$

$$(Me)_1 = a_1 + \frac{4}{5}b_1 - a_1'hp_1 > \frac{3}{5k_2^2} + \frac{1}{2k_2}\left(- \frac{1}{k_2}\right) = \frac{1}{10k_2^2} > 0,$$

$$(Me)_2 = (M\delta)_2 - \frac{1}{5}(a_2 - a_2'hp_2) > 0$$

jer je $a_2 - a_2'hp_2 < 0$ i $(M\delta)_2 > 0$.

Za $i = n-2,\ n-1,\ n$ imamo

$$(Me)_{n-2} = (M\delta)_{n-2} - \frac{5}{8}(c_{n-2} - c_{n-2}'hp_{n-2}) > 0$$

jer je

$$c_{n-2} - c_{n-2}hp_{n-2} < 0 \quad i \quad (M\delta)_{n-2} > 0,$$

$$(Me)_{n-1} = a_{n-1} - a'_{n-1}hp_{n-1} + \frac{3}{4}b_{n-1} >$$

$$> -\frac{1}{k_n^2} + \frac{1}{2k_n}\left(-\frac{1}{k_n}\right) + \frac{3}{4}\cdot\frac{2}{k_n^2} = 0$$

$$(Me)_n = h(\frac{3}{4}a'_n + b'_n) + h^2g_1 = h^2g_1 \geq 0 \quad (g_1 \geq 0).$$

Ako je $g_1 = 0$, onda je $I_h^0(Ae) = \{n\}$. Zbog $M(n,n-1) = ha'_n \neq 0$ matrica M je M-matrica. Za $g_1 > 0$ je $(Me)_n > 0$ i $I_h^0(Ae) = \emptyset$, te je, prema M-kriterijumu, M M-matrica.

Kako je $I_h^+(A\delta)$ dato sa (5.36), to u slučajevima kada je $g_0 > 0$ matrica M povezuje skup $I_h^0(A\delta) = \{0,1,\ldots,n\} \setminus I_h^+(A\delta)$ sa $I_h^+(A\delta)$ na sledeći način: za $i_0 \in I_h^0(A\delta)$ obrazuje se niz

(5.49)
$$i_{j+1} = i_j - 1, \quad (j = 0,1,\ldots,r-1)$$
$$i_r = 0.$$

Kada je $g_0 = 0$, $g_1 > 0$ povezivanje skupa $I_h^0(A\delta)$ sa skupom $I_h^+(A\delta)$ ostvaruje se pomoću matrice L na sledeći način: za $i_0 \in I_h^0(A\delta)$ obrazuje se niz

(5.50)
$$i_{j+1} = i_j + 1, \quad (j = 0,1,\ldots,r-1)$$
$$i_r = n.$$

Prema ML-kriterijumu sledi da je matrica $A_{h,2}$ i.m.

Neka je sada $A = h^2 A_{h,4}$, gde je $A_{h,4}$ matrica nastala diskretizacijom pomoću sheme V.4. Elementi $A(i,j)$ $(i,j = 0,1,\ldots$ $\ldots,n-1)$ matrice A su definisani sa (5.41) za $i = 1,2,\ldots,n-3$; $j = 0,1,\ldots,n-1$. Za $i = 0$ je

$$A(0,j) = \begin{cases} h(-b_0' g_0 + b_n' g_1 + gh), & \text{za } j = 0, \\ -a_0' g_0 h, & \text{za } j = 1, \\ -c_0' g_0 h, & \text{za } j = 2, \\ c_n' g_1 h, & \text{za } j = n-2, \\ a_n' g_1 h, & \text{za } j = n-1, \\ 0, & \text{za } j = 3,4,\ldots,n-3, \end{cases}$$

Za $i = n-2$

$$A(n-2,j) = \begin{cases} d_{n-2}, & \text{za } j = 0, \\ A(n-2,j) & \text{iz (5.41), za } j = n-3, n-2, n-1, \\ 0 & \text{za } j = 1,2,\ldots,n-4, \end{cases}$$

i za $i = n-1$

$$A(n-1,j) = \begin{cases} A(n-1,n) & \text{iz (5,41), za } j = 0, \\ 0, & \text{za } j = 1,2,\ldots,n-3, \\ A(n-1,j) & \text{iz (5.41), za } j = n-2,\ n-1. \end{cases}$$

Neka su matrice B i C definisane prema (5.42) i (5.43) za $i,j = 0,1,2,\ldots,n-1$, uz sledeće izmene

$$B(0,1) = -\frac{2}{3} a_0' g_0 h, \quad B(0,n-1) = a_n' g_1 h$$

$$C(0,1) = -\frac{1}{3}a_0'g_0h,$$

$$C(n-1,0) = C(n-1,n) \text{ iz } (5.43).$$

Očigledno važi $B \leq 0$, $C \leq 0$ i $A^- = B + C$. Sa matricama $M = A_d + B$, $L = E + A_d^{-1}C$ prvi uslov ML-kriterijuma svodi se na (5.44) za $i \in \tau_d^+ \cap \{2,4,\dots,n-2\}$ i (5.46) i (5.47), te je, ranije dokazano, ispunjen.

Sa $e = (1,4/5,1,\dots,1,3/4)$ dobijamo

$$(Me)_i = (M\delta)_i > 0, \quad i = 3.4.,,,.n-3,$$

gde je $(M\delta)_i$ odredjeno prema (5.45). Za $i = 0$ dobijamo

$$(Me)_0 = gh^2 + g_0h(-b_0' - \frac{8}{15}a_0') + g_1h(b_n' + \frac{3}{4}a_n') =$$

$$= gh^2 + \frac{13}{30k_2} > 0 \quad (g > 0).$$

Za $i = 1,2,n-2,n-1$ analogno kao i u dokazu pod b) dobija se $(Me)_i > 0$. Otuda je $I_h^0(Me) = \emptyset$, te je matrica M M-matrica.

Kako je $g > 0$, to je $I_h^+(A\delta) = \{0\}$. Matrica M povezuje skup $I_h^0(A\delta) = \{1,2,\dots,n-1\}$ sa $I_h^+(A\delta)$, tako što se za $i_0 \in I_h^0(A\delta)$ formira niz (5.49).

Na osnovu dokazanog i ML-kriterijuma sledi da je i $A_{h,4}$ i.m.

c) U ovom slučaju razlikujemo dve sheme, tj. dve matrice $A_{h,3}$. Ako je $R_0x = x(0)$ matrica $A_{h,3}$ ima, sem u 0-toj vrsti, sve elemente jednake elementima matrice $A_{h,2}$. Kako $A_{h,3}(0,0) = h^2$ i $A_{h,3}(o,j) = 0$ $(j = 1,2,\dots,n)$ to je

$$I_h^+(A_{h,3}\delta) = \begin{cases} \{0\}, & \text{za } g_1 = 0, \\ \{0,n\}, & \text{za } g_1 > 0. \end{cases}$$

Ako je $R_1x = x(1)$ matrica $A_{h,3}$ ima elemente jednake elementima matrice $A_{h,2}$, sem u poslednjoj vrsti. Kako je $A_{h,3}(n,n) = h^2$ i $A_{h,3}(n,j) = 0$ $(j = 0,1,\dots,n-1)$, to je

$$I_h^+(A_{h,3}\delta) = \begin{cases} \{0,n\}, & \text{za } g_0 > 0, \\ \\ \{0\}, & \text{za } g_0 = 0. \end{cases}$$

Matrice B i C definišu se prema (5.42), odnpsno (5.43) uz izmene

$$B(0,1) = -\frac{2}{3}a_0'h, \quad C(0,1) = -\frac{1}{3}a_0'h \quad \text{ako je } R_1x = x(1),$$

$$C(n,n-1) = ha_n', \quad \text{ako je } R_0x = x(0).$$

Da su uslovi ML-kriterijuma ispunjeni dokazuje se sada kao pod b). Znači, matrica $A_{h,3}$ je i.m..

Time je teorema 5.9 dokazana.

Primedba. U ekvidistantnom slučaju, $k_i = 1$ $(i = 1,2,\dots$ $\dots,n)$ uslovi teoreme 5.9 se pojednostavljuju. Tada se, naime, parametar P, dobijen iz uslova (i) ML-kriterijuma, javlja samo kod matrica $A_{h,j}$ $(j = 2,3,4)$ i to samo na jednom ili dva mesta. Tada je $P = -1$ i pretpostavke teoreme se svode na poznate pretpostavke [12a,b].

Pod navedenim pretpostavkama matrice $A_{h,j}$ $(j = 1,2,3,4)$, koje odgovaraju shemama V.j $(j = 1,2,3,4)$ respektivno, su i.m.. To nam omogućava da tvrdjenje teoreme 5.7 prenesemo i na ove matrice, ali sa $\bar{q}_i(p) > 0$ koje zavisi od funkcije $p(t)$. Parametre $\bar{q}_i(p)$ odredjujemo, kao i u teoremi 5.7 parametre $\bar{q}_i$, tako da prvi uslov ML-kriterijuma bude zadovoljen. U opštem slučaju izrazi za $\bar{q}_i(p)$ su glomazni, te ih ne navodimo.

7. Matrica A_h iz sheme VI.1 razlikuje se od matrice A_h iz sheme I samo u poslednjoj vrsti, koja glasi

$$h^{-2}(-\ 2k_n^{-2},\ \underline{2k_n^{-2}}).$$

Teorema 5.10. Za matricu A_h iz sheme VI.1 važe tvrdjenja teorema 5.2, 5.3, 5.4 i 5.5.

Dokaz. Postupajući na potpuno isti način kao sa matricom A_h iz sheme I dokazuje se da tvrdjenje teoreme 5.3 važi i za matricu A_h iz sheme VI.1.

Kako su teoreme 5.4 i 5.5 direktne posledice teoreme 5.2, dovoljno je dokazati da za matricu A_h iz sheme VI.1 važi tvrdjenje teoreme 5.2.

Neka je najpre $\overset{+}{\tau}_d = \emptyset$. Tada je matrica A_h L-matrica (dokaz a) teoreme 5.2). Da bi dokazali da je A_h i M-matrica poslužićemo se M-kriterijumom. Kako je $I_h^0(A_h\delta) = \{1,2,\dots,n\}$ i $\overset{+}{I}_h(A_h\delta) = \{0\}$, to je dovoljno dokazati da A_h povezuje skup $I_h^0(A_h\delta)$ sa skupom $\overset{+}{I}_h(A_h\delta)$. To povezivanje se ostvaruje na sledeći način: za $i_0 \in I_h^0(A_h\delta)$ formira se niz (5.37), pri čemu je $p_{i_0} = 0$ za $i_0 = n$.

Ako je $\overset{+}{\tau}_d \neq \emptyset$ definišimo $A := h^2A_h$. Inverznu monotoniju matrica A dokazaćemo pomoću ML-kriterijuma. Neka su matrice M i L definisane sa (5.16), pri čemu je $A_d = \mathrm{diag}(h^2, b_1, \dots$ $\dots, b_{n-1}, 2k_n^{-2})$, $\overset{+}{A}_0$ je dato sa (5.19), matrica B je definisana sa (5.20) uz izmenu poslednje vrste koja sada glasi $(k_n^{-2},\ \underline{0})$. Matrica C je odredjena sa $C = \bar{A} - B$, gde je $\bar{A} = A - A_d - \overset{+}{A}_0$.

Da je $A \leq ML$ dokazuje se potpuno isto kao u teoremi 5.2. Kako je $(M\delta)_n = k_n^{-2} > 0$, $(M\delta)_0 = h^2$ a $(M\delta)_i$ $(i = 1,2,\dots,n-1)$ dato sa (5.17) imamo da je $I_h^0(M\delta) = \emptyset$. Zbog $M_0 \leq 0$ sada na osnovu M-kriterijuma sledi da je M M-matrica. Povezivanje skupa $I_h^0(A\delta) = \{1,2,\dots,n\}$ sa skupom $\overset{+}{I}_h(A\delta) = \{0\}$ pomoću matrice M ostvaruje se pomoću niza (5.37) za svako $i_0 \in I_h^0(A_h\delta)$ (za $i_0 = n$ je $p_{i_0} = 0$).

8. Sada ćemo posmatrati maticu A_h nastalu na osnovu sheme VI.2.

Teorema 5.11. Za matricu A_h iz sheme VI.2 važi tvrdjenje b) teoreme 5.2.

Dokaz ove teoreme je analogan dokazu teoreme 5.6 za slučaj II, uz izmenu poslednje vrste matrica A_h.

Neka je $A = h^2 A_h$, gde je A_h matrica iz sheme VI.2. Inverznu monotoniju matrice A dokazaćemo pomoću ML-kriterijuma. Neka je matrica B definisana kao u slučaju II iz teoreme 5.6 uz izmenu poslednje vrste koja sada glasi $(-k_n{}^2, \underline{0})$. Matrica A_0^+ je data sa (5.19) i zamenjenom prvom vrstom, koja je data sa (5.34). Dalje imamo $A_d = \mathrm{diag}(h^2 g_0 - hb_0', b_1, \ldots, b_{n-1}, 2k_n^{-2}) > 0$ $(g_0 \geq 0, -b_0' > 0)$ i $A^- = A - A_d - A_0^+$. Matrice M i L definišemo prema (5.16), pri čemu je $C = A^- - B$.

Uslov $A \leq ML$ ML-kriterijuma ekvivalentan je sa (i), (ii) iz dokaza teoreme 5.6 (slučaj II) i, kao što je tamo dokazano, ispunjen je.

Da je matrica M M-matrica dokazuje se potpuno isto kao i u dokazu teoreme 5.6 (slučaj II). Pritom je potrebno primetiti da je $(M\delta)_n = k_n^{-2} > 0$. Zbog $L_0 \leq 0$ i drugi uslov ML-kriterijuma je ispunjen.

Kako je $I_h^+(A\delta) = \{0\}$ (jer je $g_0 > 0$) to se povezivanje skupa $I_h^0(A\delta) = \{1,2,\ldots,n\}$ sa skupom $I_h^+(A\delta)$ postiže nizom (5.37) za svako $i_0 \in I_h^0(A\delta)$ (za $i_0 = n$ je $p_{i_0} = 0$).

Kako su time ispunjena sva tri uslova ML-kriterijuma, sledi da je matrica A_h iz sheme VI.2 i.m..

9. Kao analogon teoremi 5.7, za matrice A_h iz shema VI.1 i VI.2 imamo sledeću teoremu.

Teorema 5.12. Neka su $A_{h,j}$ matrice koje odgovaraju shemama VI.j (j = 1,2) respektivno. Ako za svako $i \in \tau_d^+$ važi (5.13), tada

(a) postoji najmanja pozitivna sopstvena vrednost $\lambda_{h,j}$ sopstvenog problema $A_{h,j}x = \lambda B_h x$ $(j = 1,2)$;

(b) matrice $A_{h,j} - B_h D_h$ $(j = 1,2)$ su i.m. za svaku dijagonalnu matricu $D_h = \mathrm{diag}(\mu_0,\mu_1,\dots,\mu_n) \in L[\mathbb{R}^{I_h}]$ za koju važi

$$\mu_i \in [-\bar{q}_i h^{-2},\ \lambda_{h,j}] \quad (i = 1,2,\dots,n-2).$$

Pritom je

$$\bar{q}_i = \bar{Q}_i \quad (i = 2,3,\dots,n-2)$$

$$\bar{q}_1 = \begin{cases} \infty & \text{za sheme VI.1,} \\ \bar{Q}_1 & \text{za shemu VI.2,} \end{cases}$$

$$\bar{q}_{n-1} = \begin{cases} \bar{Q}_{n-1}, & \text{za shemu VI.1,} \\ \min\{S,\bar{Q}_{n-1}\} & \text{za shemu VI.2,} \end{cases}$$

a $\bar{Q}_i$ $(i = 1,2,\dots,n-1)$ i S su definisani kao u tački 5.

<u>*Dokaz*</u> ove teoreme je potpuno isti kao i dokaz teoreme 5.7.

10. Sada ćemo posmatrati sheme VII.i $(i = 1,2)$ i njima odgovarajuće matrice $A_{h,i}$. Kao posledicu teoreme 5.9 imamo sledeću teoremu.

<u>*Teorema 5.13.*</u> Neka je P definisano kao u teoremi 5.9. Tada za $A_{h,1}$ važi tvrdjenje a) teoreme 5.9, a za $A_{h,2}$ važi tvrdjenje b) teoreme 5.9.

Dokaz. Neka je $A := h^2 A_{h,1}$. Tada su $A(i,j)$ dati sa (5.41) i

$$-A(n,n-1) = A(n,n) = 2k_n^{-2}.$$

Matrice B i C neka su definisane kao u dokazu teoreme 5.9 (sa (5.42) i (5.43)), a matrice M i L neka su odredjene prema (5.16).

(a) Da je $A_{h,1}$ i.m. sledi na osnovu ML-kriterijuma. Dokaz je analogan dokazu teoreme 5.9 pod a) uz primedbu da je $(M\delta)_n = k_n^{-2}$; $I_h^o(A\delta) = \{1,2,\ldots,n\}$ i $I_h^+(A\delta) = \{0\}$.

(b) Neka je $A := h^2 A_{h,2}$. Elementi $A(i,j)$ definisani su pod (a) uz izmene

$$A(0,j) = \begin{cases} h(-b_0' + hg_0), & \text{za } j = 0, \\ -a_0'h, & \text{za } j = 1, \\ -c_0'h, & \text{za } j = 2, \\ 0, & \text{za } j = 3,4,\ldots,n. \end{cases}$$

Neka su matrice B i C definisane kao pod (a) uz izmene

$$B(0,1) = -\tfrac{2}{3}a_0'h, \quad C(0,1) = -\tfrac{1}{3}a_0'h.$$

Da A ispunjava prvi uslov ML-kriterijuma dokazuje se kao u teoremi 5.9, b). Uslov (5.47) je u ovom slučaju nepotreban.

Kako je

$$(Me)_n = k_n^{-2}(2 - \tfrac{3}{4}) = \tfrac{5}{4}k_n^{-2} > 0,$$

gde je $e = (1,4/5,1,\ldots,1,3/4,1)$ i $(Me)_i > 0$ $(i = 0,1,2,\ldots,n-1)$ (dokaz teoreme 5.9, b)), sledi da je M M-matrica.

Time je i drugi uslov ML-kriterijuma ispunjen.

Povezivanje skupa $I_h^o(A\delta) = \{1,2,\ldots,n\}$ sa $I_h^+(A\delta) = \{0\}$ ostvaruje se pomoću niza (5.49).

Prema ML-kriterijumu sledi da je matrica $A_{h,2}$ i.m..

Time je teorema 5.13 dokazana.

TREĆI DEO

ITERATIVNO REŠAVANJE DISKRETNIH ANALOGONA KONTURNIH PROBLEMA IZ §4.

U ovom delu se posmatra numeričko rešavanje diskretnog analogona

(DKP) $A_h x = B_h F_h x + r_h \quad u \quad \mathbb{R}^{I_h}$

konturnog problema (KP). Koristeći se rezultatima paragrafa 4 i 5 daju se uslovi pod kojima iteracija paralelne sečice (PCI iz teoreme 2.5) konvergira ako se primeni na (DKP). Tvrdjenje teoreme 6.1 u ekvidistantnom slučaju nalazi se u [3]. Pored toga, u §6 se daje ocena veličine $[\bar{x}^h - x^n]$, gde je $\bar{x}^h$ rešenje sistema (DKP) a x^n je njegova n-ta aproksimacija dobijena pomoću PCI. Pod pretpostavkom (6.6) diskutuju se uslovi (6.2), (6.3) teoreme 6.1. U ekvidistantnom slučaju ova diskusija je znatno jednostavnija.

Teorema 6.2 omogućava odredjivanje broja tačaka mreže I_h, tako da se teorema 6.1 može primeniti na (DKP). Analogni rezultati u ekvidistantnom slučaju dati su u [3].

U §7. dokazana je nejednačina stabilnosti u obliku navedenom u definiciji 2.12 za shemu I - IV. Za shemu I teoreme 7.3 i 7.4 iskazuju tvrdjenja za neekvidistantnu diskretizaciju analogna tvrdjenjima iz [3] za ekvidistantnu diskretizaciju. Nejednačine stabilnosti iz teorema 7.3 i 7.4 koriste se za ocenu veličine $[\bar{x}^h - x^n]$, kao što je pokazano u tački 4 paragrafa 7.

Nejednačina stbilnosti i tvrdjenje teoreme 7.2 prema postupku iz [12a] daju $\|\bar{x}^h - u_h\|_\delta \to 0$ kada $n \to \infty$. Pritom je u_h restrikcija rešenja konturnog problema (KP) na I_h.

Poslednji paragraf sadrži nekoliko primera, koji ilustruju mogućnosti neekvidistantne diskretizacije i, u navedenim primerima, neke prednosti u odnosu na ekvidistantnu diskretizaciju.

§6. Iteracija paralelne sečice

1. Neka su A_h i B_h matrice definisane jednom od shema I - IV, VI.j (j = 1,2) i neka je $T_h = A_h - B_h F_h$. Posmatraćemo sistem nelinearnih jednačina (DKP) pod sledećim pretpostavkama:

(6.1) $$q(v - w) \le f(t,v) - f(t,w) \le \mu(v - w), \qquad v,w \in \mathbb{R},\ w \le v$$

za neko $q, \mu \in \mathbb{R}$, pri čemu je

(6.2) $$-h^{-2}\bar{q} \le \mu < \lambda_h$$

gde je λ_h najmanja sopstvena vrednost za $A_h x = \lambda B_h x$,

$\bar{q} = \min\{\bar{q}_i : i = 1,2,\dots,n-1\}$ sa $\bar{q}_i$ iz teoreme 5.7;

$h > 0$ je dovoljno malo da važi

(6.3) $$-h^{-2}\bar{q} < \rho_h := 0.5(\lambda_h + q).$$

Uslov (6.3) je ispunjen za svako h ako je $\bar{q} > 0$ i $\lambda_h + q \geq 0$. U slučaju da je $\rho_h \leq - h^{-2}\bar{q}$, ne može se garantovati rešivost sistema (DKP).

Sa navedenim oznakama i pretpostavkama možemo dokazati sledeću teoremu.

Teorema 6.1. Neka je matrica A_h tako konstruisana da za svako $i \in \tau_d^+$ važi (5.13). Ako su ispunjene pretpostavke (6.1), (6.2) i (6.3), tada važi

(a) T_h^{-1} je $(A_h - \mu B_h)^{-1}$ - ograničeno,

(b) Za svaku dijagonalnu matricu $D_h = \mathrm{diag}(d_0, d_1, \ldots, d_n) \in L[\mathbb{R}^{I_h}]$, za koju važi $d_i \in [- h^{-2}\bar{q}_i, \rho_h)$ $(i = 1,2,\ldots,n-1)$ iteracija paralelne sečice

$$(6.4) \qquad x^0 \in \mathbb{R}^{I_h}, \; (A_h - B_h D_h)x^{n+1} = B_h(F_h - D_h)x^n + r_h, \quad n \in \mathbb{N}$$

konvergira za svaku početnu aproksimaciju x^0 ka jedinstvenom rešenju sistema $T_h x = r_h$.

Dokaz. Neka je $S = \mathrm{diag}(s_0, s_1, \ldots, s_n)$ i $s = \max\{s_i : i = 1,2,\ldots,n-1\} \leq 0.5(\mu+q)$. Tada, zbog $q \leq \mu$, sledi $s \leq \mu < \lambda_h$ i na osnovu teorema 5.7 i 5.12 $(A_h - \mu B_h)^{-1} \geq 0, (A_h - B_h D_h)^{-1} \geq 0$. Na osnovu (6.1) imamo ([3])

$$q\, B_h \leq B_h F_h \leq \mu B_h.$$

Primenjujući teoremu 2.5 sa

$$A = A_h, \quad F = B_h F_h, \quad P = \mu B_h, \quad Q = q B_h, \quad R = B_h S$$

$(2R = 2B_h S \leq 2sB_h \leq (\mu+q)B_h = P + Q)$ sledi tvrdjenje teoreme pod (a).

Neka je $d = \max\{d_i: i = 1,2,\dots,n-1\}$. Tada ako je $d \le 0.5(\mu+q)$ tvrdjenje teoreme pod (b) sledi prema teoremi 2.5 sa $R = B_hD_h$ i A,F,P,Q kao gore. Ako je $d > 0.5(\mu+q)$, definišemo $a = 2d - q$. Tada imamo $0.5(\lambda_h + q) > d = 0.5(a + q)$. Sa $P = aB_h$ $A = A_h$, $F = B_hF_h$, $Q = qB_h$, $R = B_hD_h$ na osnovu teoreme 2.5 dobijamo tvrdjenje teoreme pod (b).

Neka je $\bar{x}^h$ rešenje sistema $T_hx = r_h$. Na osnovu tvrdjenja pod (a) prethodne teoreme i definicije 2.5, imamo za svako $y \in \mathbb{R}^{I_h}$

$$|\bar{x}^h - y| \le (A_h - \mu B_h)^{-1}|r_h - T_hy|.$$

Koristeći se tim rezultatom može se oceniti $|\bar{x}^h - x^n|$, gde je x^n aproksimacija za $\bar{x}^h$ dobijena iz (6.4). Naime, imamo

$$|\bar{x}^h - x^n| \le (A_h - \mu B_h)^{-1}|r_h - T_hx^n|. \tag{6.5}$$

Praktičniju ocenu za $|\bar{x}^h - x^n|$ dobijamo na sledeći način ([3]): za rešenje z nejednačine

$$(A_h - \mu B_h)z \ge |r_h - T_hx^n|$$

važi

$$|\bar{x}^h - x^n| \le z.$$

2. Posmatrajući uslove (6.1), (6.2), (6.3) možemo zaključiti sledeće. Kada za datu funkciju $f \in C(I \times \mathbb{R})$ odredimo realne brojeve q i μ tako da (6.1) važi, potrebno je ispitati uslove (6.2) i (6.3). Za poznate n i k_i $(i = 1,2,\dots,n)$ matrice A_h i B_h su potpuno odredjene (u zavisnosti od izbora sheme i konturnih uslova), kao i h i q_i $(i = 1,2,\dots,n-1)$. Ako je poznato λ_h (ili neka njegova aproksimacija $\bar{\lambda}_h < \lambda_h$), onda je moguće

proveriti da li su uslovi (6.2) i (6.3) ispunjeni.

U slučaju da su ti uslovi ispunjeni važi tvrdjenje teoreme 6.1. U suprotnom slučaju, može se pokušati da se promenom broja n i parametara k_i $(i = 1,2,\dots,n)$ ispune uslovi (6.2) i (6.3). Promenu sopstvene vrednosti λ_h (odnosno $\bar{\lambda}_h$) u oštem slučaju je teško pratiti i ostaje da se u svakom konkretnom slučaju izračuna λ_h (odnosno $\bar{\lambda}_h$). U slučaju sheme I može se i nešto više reći o λ_h, kao što pokazuje teorema 6.2.

Da bi se uslovi (6.2) i (6.3) mogli uvek ispuniti, menjanjem broja n i parametara k_i $(i = 1,2,\dots,n)$, dovoljno je da bude $\bar{q} > 0$. Medjutim, kako je $\bar{q}_i \geq 0$, a time i $\bar{q} \geq 0$, da bi se obezbedilo da $\bar{q}$ bude pozitivno, moraju se uvesti još neke pretpostavke za matricu A_h i za k_i.

Predpostavimo da za k_i $(i = 1,2,\dots,n)$ važi

$$(6.6) \qquad 1 \leq k_i \leq k_{i+1} \leq k_0 \quad (i = 1,2,\dots,n-1)$$

za neko fiksno $k_0 \geq 1.33$, $k_0 \in \mathbb{R}$.

Matrica A_h iz I - IV, VI.j $(j = 1,2)$ neka je tako konstruisana da je ispunjen sledeći uslov:

$$(6.7) \qquad \alpha_2(i) \geq -\alpha_1(i) \quad \text{ako je} \quad i-1 \in \tau_d^+ .$$

To znači, ako je $\alpha_2(i-1) + \alpha_1(i-1) > 0$ treba da bude $\alpha_2(i) + \alpha_1(i) \geq 0$, tj. ako je $i-1 \in \tau_d^+$ treba da važi $i \in \tau_d^+$ ili $\alpha_2(i) + \alpha_1(i) = 0$.

Uslov (6.7) je moguće uvek ispuniti, dovoljno je uzeti da je $p_i = 0$.

Dokazaćemo sada da važi

$$(6.8) \qquad \bar{q}_i \geq \frac{3}{2k_{i+1}^2(k_{i+1}^2 - 1)} \geq \frac{3}{2k_n^2(k_n^2 - 1)} \geq \frac{3}{2k_0^2(k_0^2 - 1)}$$

$$(i = 1,2,\dots,n-1).$$

Ova relacija je tačna za svako $i \in \{1,2,\dots,n-2\}$ za koje važi $i-1 \notin \tau_d^+$ jer je tada $\bar{q}_i = \infty$. Stoga predpostavimo da za neko fiksno $i \in \{2,\dots,n-2\}$ važi $i-1 \in \tau_d^+$ i uvedimo sledeće oznake:

$$x := \alpha_1(i-1),\ \alpha := \alpha_2(i-1) = k_i,$$

$$\beta := \alpha_3(i-1) - \alpha = \alpha_2(i) = k_{i+1},$$

$$\gamma := \alpha_3(i) - \beta = k_{i+2},\quad y := \alpha_1(i).$$

Očigledno je $\alpha \leq \beta \leq \gamma$. Iz $i-1 \in \tau_d^+$ sledi $\alpha > -x$, a uslov (6.7) sada glasi $\beta \geq y$. S obzirom na navedene oznake, imamo

$$\bar{q}_i = \frac{\alpha + \beta + y}{2\beta\gamma(\beta - y)}\, f(\alpha) + \frac{2}{\beta y}\, \frac{2\beta + \gamma + y}{\beta + \gamma}$$

gde je

$$f(\alpha) := \frac{\alpha + \beta}{\alpha}\, \frac{(\alpha + \beta)^2 - x^2}{\alpha^2 - x^2}.$$

Kako je

$$f'(\alpha) = -\frac{\beta}{\alpha}\, \frac{(\alpha + \beta)^2 - x^2}{\alpha^2 - x^2} - \frac{\alpha + \beta}{\alpha}\, \frac{2\beta}{(\alpha^2 - x^2)^2}\,(\alpha^2 + \alpha\beta + x^2) < 0$$

to je

$$f(\alpha) \geq f(-y),$$

jer je

$$-y = \sum_{j=0}^{p_i} k_{i-j} \geq k_i = \alpha.$$

S obzirom da je $f(\alpha) > 0$ (jer je $\alpha \geq -x$), imamo sada

$$\bar{q}_i \geq \frac{\beta + \gamma + y}{2\beta\gamma(\beta - y)} f(-y) + \frac{2}{\beta y} \cdot \frac{2\beta + \gamma + y}{\beta + \gamma},$$

odnosno,

$$\bar{q}_i \geq \frac{\beta + \gamma + y}{-2\beta\gamma y} \cdot \frac{(\beta - y)^2 - x^2}{y^2 - x^2} + \frac{2}{\beta y} \cdot \frac{2\beta + \gamma + y}{\beta + \gamma} = : \psi .$$

Dalje je

$$\psi = -\frac{1}{2\beta y}\left\{\left(1 + \frac{\beta + y}{\gamma}\right)\left(1 + \frac{\beta(\beta - 2y)}{y^2 - x^2}\right) - 4 - \frac{4(\beta + y)}{\beta + \gamma}\right\}$$

$$= -\frac{1}{2\beta y}\left\{-3 + \frac{(\beta + y)(\beta - 3\gamma)}{\gamma(\beta + \gamma)} + \frac{\beta(\beta - 2y)}{y^2 - x^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\beta(\beta - 2y)(\beta + y)}{\gamma(y^2 - x^2)}\right\} .$$

Kako je za $x^2 \geq 1$

$$\xi \ : = \frac{3x^2}{2y^2(y^2 - x^2)} \geq \frac{3}{2y^2(y^2 - 1)} = \frac{3}{2k_{i+1}^2(k_{i+1}^2 - 1)}$$

to da bi dokazali (6.8) dovoljno je da dokažemo da važi $\psi - \xi \geq 0$.

Imamo $(y < 0)$

$$2\beta(-y)(\psi - \xi) = -3 + \frac{\beta + y}{\gamma} \cdot \frac{\beta - 3\gamma}{\beta + \gamma} +$$

$$+ \frac{\beta}{y^2 - x^2}\left\{(\beta - 2y)\left(1 + \frac{\beta + y}{\gamma}\right) + \frac{3x^2}{y}\right\} .$$

Kako je $\beta \geq -\gamma$, važi

$$(\beta - 2\gamma)\left[1 + \frac{\beta + \gamma}{\gamma}\right] \geq -3\gamma > 0.$$

Zbog toga je $\psi - \xi \geq 0$ ekvivalentno sa

$$-3 + \frac{\beta + \gamma}{\gamma} \cdot \frac{\beta - 3\gamma}{\beta + \gamma} - \frac{3\beta}{\gamma} \geq 0,$$

odnosno sa

$$\tau := 3\gamma(\beta + \gamma)\gamma - \gamma(\beta + \gamma)(\beta - 3\gamma) + 3\beta\gamma(\beta + \gamma) \geq 0.$$

Sada imamo

$$\tau = 3\gamma^2(\beta + \gamma) + 3\gamma(\beta + \gamma)^2 - \beta\gamma(\beta + \gamma) \geq 0$$

jer je $\gamma \geq \beta \geq -\gamma > 0$. Time je dokazano da važi $\psi - \xi \geq 0$, tj. da je relacija (6.8) tačna za $i = 1,2,\ldots,n-2$.

Za $i = n-1$ imamo

$$\bar{q}_{n-1} = \frac{2}{k_n^2}(1 - 2z), \qquad z \in (0,0.5).$$

Kako je

$$\bar{q}_{n-1} \geq \frac{3}{2k_0^2(k_0^2 - 1)} \tag{6.9}$$

tačno ako važi

$$k_0^2 > 1 + \frac{3}{4(1 - 2z)}$$

to se može izabrati dovoljni malo $z \in (0,0.5)$, takvo da za $k_0 \geq 1.33$ važi relacija (6.9).

U slučaju $k_1 = k_2$ je $\bar{q}_1 = \frac{2}{k_2^2}(1 - 2z)$, te je moguće izabrati $z \in (0,0.5)$ tako da za $k_0 \geq 1.33$ važi

$$\bar{q}_1 \geq \frac{3}{2k_0^2(k_0^2 - 1)} .$$

Kako je

$$h^{-1} = \sum_{j=1}^{n} k_j \geq n$$

relacija

$$h^{-2}\bar{q} \geq n^2 \min\{ \frac{3}{2k_0^2(k_0^2 - 1)}, \bar{q}_1\}$$

je tačna ako su ispunjene pretpostavke (6.7) i (6.6) sa $k_0 \geq 1.33$. Otuda sledi da je moguće odrediti tako veliko $n \in \mathbb{N}$ da važi

$$- h^{-2}\bar{q} < \min\{\rho_h, \mu\} .$$

Za $k_1 = k_2$ i $k_0 \geq 1.33$ pod pretpostavkama (6.6) i (6.7) dovoljno je odrediti $n \in \mathbb{N}$ iz relacije

$$\frac{-3n^2}{2k_0^2(k_0^2 - 1)} < \min\{\rho_h, \mu\}$$

pa da uslovi (6.2) i (6.3) budu ispunjeni.

Primedba. Dokaz teoreme 6.1 zasnovan je na teoremi 5.7. Tvrdjenje teoreme 5.7 može se proširiti i na matrice A_h iz shema V (primedba posle dokaza teoreme 5.9), a zatim i na matrice A_h iz shema VII.j (j = 1,2). Saglasno tome, može se i tvrdjenje teoreme 6.1 preneti na matrice A_h iz shema V i VII.j (j = 1,2), ako se u uslovima (6.2) i (6.3) $\bar{q}$ odredi kao funkcija od p(t).

3. Kao što smo videli, da bi se ispitali uslovi (6.2) i (6.3) potrebno je poznavati λ_h, najmanju sopstvenu vrednost za $A_h x = \lambda B_h x$, ili $\bar{\lambda}_h \leq \lambda_h$. Ako je A_h matrica nastala diskretizacijom pomoću sheme I, onda važi sledeća teorema.

Teorema 6.2. Za shemu I imamo $\lambda_h \geq \lambda_0$, gde je

$$\lambda_0 = \min\{ \lambda_i : i = 1,2,\ldots,n-1\},$$

a λ_i $(i = 1,2,\ldots,n-1)$ su definisani kao u teoremi 5.1 sa $\varepsilon = 0$.

Dokaz. Zbog $\varepsilon = 0$ za vektor e definisan kao u teoremi 5.1, (5.6), važi $e_0 = e_n = 0$. Kako je $B_h = \mathrm{diag}(0,1,\ldots,1,0)$, to je

$$(A_h e)_i = (B_h e)_i = 0, \quad (i = 0,n).$$

Istim postupkom, kao u dokazu teoreme 5.1, dobijamo

$$(A_h e)_i = \lambda_i (B_h e)_i \quad (i = 1,2,\ldots,n-1)$$

a otuda

$$A_h e \geqslant \lambda_0 B_h e.$$

Kako je A_h i.m., dobijamo

$$e \geqslant \lambda_0 A_h^{-1} B_h e,$$

i

$$\|A_h^{-1} B_h e\|_e \leqslant \lambda_0^{-1}.$$

Znamo da je λ_h^{-1} spektralni radijus nenegativne matrice $A_h^{-1}B_h$ te je otuda $\lambda_h^{-1} \leq \|A_h^{-1}B_h e\|_e$, [2a], [3]. To daje $\lambda_h^{-1} \leq \lambda_0^{-1}$ ili $\lambda_0 \leq \lambda_h$. Time je teorema dokazana.

U slučaju da za svako $i = 1,2,\dots,n-2$ važi

$$k_{i+1} + k_{i+2} = \alpha_3(i) \leq \sum_{j=1}^{i} k_j =: \tau$$

imaćemo

$$-\tau \leq -\alpha_3(i) \leq \alpha_1(i).$$

Prema lemi 2, tada važi za $i = 1,2,\dots,n-2$

$$\lambda_i \geq \begin{cases} \lambda(\alpha_2(i)h), \text{ ako je } & -\alpha_1(i) \leq \alpha_2(i), \\ \lambda(\alpha_3(i)h), \text{ ako je } & \alpha_1(i) < -\alpha_2(i). \end{cases}$$

Kako je $\lambda(h)$ monotono opadajuća funkcija za $h \in [0,0.5]$, tada imamo

$$\lambda_i \geq \lambda(2k_n h) \quad (i = 1,2,\ldots,n-2)$$

jer je $2k_n \geq \alpha_3(i) \geq 2\alpha_2(i)$. Znači, dokazali smo da važi

$$\lambda_0 \geq \lambda(2k_n h).$$

Uslove (6.2) i (6.3) možemo ispuniti ako važi

$$(6.10) \quad \mu \leq \lambda(2k_n h), \qquad -h^{-2}\bar{q} < \min\{\mu, 0.5(\lambda(2k_n h) + q)\}.$$

Pod predpostavkama $\mu < \lambda(0) = \pi^2$, (6.6) sa $k_0 \geq 1.33$ i (6.7) može se odrediti n dovoljno veliko da ovaj uslov bude ispunjen. U tom slučaju je, dakle, moguće odrediti dovoljno veliko n tako da se može primeniti teorema 6.1.

Ako se diskretizacija na osnovu sheme I izvodi sa $p_i = 0 \quad (i = 1,2,\ldots,n-1)$ i ako važi

$$k_{i+1} = \alpha_2(i) \leq \sum_{j=1}^{i} k_j,$$

tada na osnovu leme 2 sledi

$$\lambda_0 \geq \lambda(k_n h).$$

(Za $p_i = 0$ imamo $-\alpha_1(i) \leq \alpha_2(i)$.)

Uslov (6.10) se sada menja i glasi

$$(6.11) \quad \mu < \lambda(k_n h), \qquad -h^{-2}\bar{q} < \min\{\mu, 0.5(\lambda(k_n h) + q)\}.$$

U ekvidistantnom slučaju, $k_i = 1$, $p_i = 0 \quad (i = 1,2,\ldots,n)$ ($k_0 = 1$) uslov (6.8) se svodi na poznati uslov [3].

§7. Stabilnost i konvergencija

U ovom paragrafu ćemo posmatrati sheme I - IV, VI.j ($j = 1,2$), za koje su $k_i \in \mathbb{R}$ ($i = 1,2,\ldots,n$) za svako fiksno $n = 3,4,\ldots$, odredjeni tako da važi

$$1 \leq k_i \leq k_{i+1} \leq k_0 \quad (i = 1,2,\ldots,n-1) \tag{7.1}$$

za neko fiksno $k_0 \in \mathbb{R}$. Koeficijenti $\alpha_1(i), \alpha_2(i), \alpha_3(i)$ ($i = 1,2,\ldots$ $\ldots,n-1$) neka su odredjeni tako da su ispunjene pretpostavke teoreme 5.2, a A_h i B_h neka su matrice definisane jednom od shema I - IV i VI.j ($j = 1,2$), pod navedenim uslovima.

1. Kako je

$$h^{-1} = \sum_{i=1}^{n} k_i \geq n,$$

to $h \to 0$ kada $n \to \infty$. Iz teoreme 3.1 imamo da je greška $R_{2,3}(t)$ aproksimacije drugog izvoda - $x''(t)$ u tački $t \in I_h$, diferencnom formulom (3.9), koju koristimo u svim shemama,

$$R_{2,3}(t) = -\frac{h^2}{12}\left\{\frac{\alpha_1^3(\alpha_2+\alpha_3)}{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)}x^{(4)}(t+\theta_1\alpha_1 h) + \right.$$

$$+\frac{\alpha_2^3(\alpha_1+\alpha_3)}{(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)}x^{(4)}(t+\theta_2\alpha_2 h) +$$

$$\left. + \frac{\alpha_3^3(\alpha_1+\alpha_2)}{(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)}x^{(4)}(t+\theta_3\alpha_3 h)\right\},$$

$|\theta_j| \leq 1, \quad (j = 1,2,3).$

Otuda je, sa $M_4 = \max\{|x^{(4)}(t)| : t \in I\}$

$$(7.2) \qquad |R_{2,3}(t)| \leq \frac{h^2}{6} M_4(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2).$$

Najpre zbog $\alpha_3 \geq 2\alpha_2 > 0$ i $0 > \alpha_1 \geq -\alpha_3$ imamo

$$|R_{2,3}(t)| \leq \frac{h^2}{12} M_4 \xi$$

gde je

$$\xi := \frac{-\alpha_1^3(\alpha_2+\alpha_3)}{(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_1)} + \frac{\alpha_2^3(\alpha_1+\alpha_3)}{(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)} + \frac{\alpha_3^2\,\psi}{(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)},$$

$$\psi := \begin{cases} \alpha_2 + \alpha_1, & \text{ako je } \quad \alpha_2 \geq -\alpha_1, \\ -\alpha_2 - \alpha_1, & \text{ako je } \quad \alpha_2 < -\alpha_1. \end{cases}$$

Dokazaćemo sada da je $\xi \leq 2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)$. Imamo

$$\xi - 2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2) = \alpha_1^2 \frac{-\alpha_1(\alpha_2+\alpha_3) - 2(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_1)}{(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_1)} +$$

$$+ \alpha_2^2 \frac{\alpha_2(\alpha_1+\alpha_3) - 2(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)}{(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_1)} +$$

$$+ \alpha_3^2 \frac{\alpha_3\psi - 2(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)}{(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)},$$

Kako je

$$-\alpha_1(\alpha_2+\alpha_3) - 2(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_1) = \alpha_1(\alpha_2 + \alpha_3 - 2\alpha_1) - 2\alpha_2\alpha_3 < 0,$$

$$\alpha_2(\alpha_1+\alpha_3) - 2(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2) = -\alpha_2(\alpha_3 - 2\alpha_2 - \alpha_1) + 2\alpha_1\alpha_3 < 0,$$

to da bi dokazali da je $\xi \leq 2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)$ treba dokazati da je $\alpha_3\psi - 2(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2) \leq 0$.

Ako je $\psi = \alpha_1 + \alpha_2 (\geq 0)$ imamo

$$\alpha_3\psi - 2(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2) = \alpha_3(3(\alpha_1+\alpha_2) - 2\alpha_3) - 2\alpha_1\alpha_2$$

$$\leq 2\alpha_2(3\alpha_2 - 4\alpha_2) - 2\alpha_1\alpha_2 =$$

$$= - 2\alpha_2(\alpha_1 + \alpha_2) \leq 0.$$

Za $\psi = - \alpha_1 - \alpha_2 (\geq 0)$ dobijamo

$$\alpha_3\psi - 2(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2) = \alpha_3(\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3) - 2\alpha_1\alpha_2$$

$$\leq 2\alpha_2(2\alpha_3-\alpha_2) < 0.$$

Prema tome, dokazama je relacija (7.2).

Za aproksimaciju prvog izvoda $x'(t)$ u tački $t \in I_h$ diferencnom formulom (3.4) imamo

$$R_{1,2}(t) = \frac{h^2}{6}\frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_2-\alpha_1}(\alpha_2 x^{(3)}(t + \alpha_2\theta_2 h) -$$

$$- \alpha_1 x^{(3)}(t + \alpha_1\theta_1 h)), \qquad |\theta_j| \leq 1 \quad (j = 1,2).$$

Otuda je, sa $M_3 = \max \{|x^{(3)}(t)| : t \in I\}$,

$$|R_{1,2}(t)| \leq \frac{h}{6} M_3 \left| \alpha_1\alpha_2 \frac{\alpha_2+\alpha_1}{\alpha_2-\alpha_1} \right|.$$

Kako aproksimacije prvog izvoda pomoću diferencne formule (3.4) koristićemo samo u tačkama t_0, $t_n \in I_h$, to za njih imamo

$$(7.3)\qquad |R_{12}(t)| \le h^2 M_3 \begin{cases} \dfrac{\alpha_2^2}{4}, & \text{ako je } t = t_0, \\ \alpha_1^2, & \text{ako je } t = t_n. \end{cases}$$

Zaista, za $t = t_0$ je $\alpha_2 \ge 2\alpha_1 > 0$ i

$$\left|\alpha_1\alpha_2 \frac{\alpha_2+\alpha_1}{\alpha_2-\alpha_1}\right| \le \alpha_1\alpha_2 \frac{\frac{3}{2}\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{3}{2}\alpha_2^2 .$$

Za $t = t_n$ je $\alpha_2 = 2\alpha_1 < 0$ te je

$$\left|\alpha_1\alpha_2 \frac{\alpha_2+\alpha_1}{\alpha_2-\alpha_1}\right| = 2\alpha_1^2 \frac{3\alpha_1}{\alpha_1} = 6\alpha_1^2 .$$

Iz poslednje dve relacije neposredno sledi (7.3).

U svim shemama je $|\alpha_1(i)| \le \alpha_3(i) \le 2k_0$ $\alpha_2(i) \le k_0$ $(i = 1,2,\ldots,n-1)$, te zbog (7.1) imamo za $t_i \in I_h$ $(i = 1,2,\ldots$ $\ldots,n-1)$

$$(7.4)\qquad |R_{2,3}(t_i)| \le C h^2 .$$

Takodje, za $R_{1,2}(t)$ u tačkama $t = t_0$ i $t = t_n$ važi

$$(7.5)\qquad |R_{1,3}(t)| \le C_1 h^2 ,$$

Konstante C i C_1 iz (7.4), odnosno (7.5) ne zavise od n i h.

Označimo sa $\bar{\lambda}$ najmanju pozitivnu sopstvenu vrednost problema

$$- x'' = \lambda x \text{ na } I, \quad R_i x = 0 \quad (i = 0,1),$$

a sa λ_h najmanju sopstvenu vrednost za $A_h x = \lambda B_h x$. Ako $n \to \infty$ važi $\lambda_h \to \bar{\lambda}$, te možemo dokazati sledeću teoremu.

Teorema 7.1. Neka važi (6.1) i

$$\mu < \bar{\lambda}. \tag{7.5}$$

Tada je za dovoljno veliko n $\|(A_h - \mu B_h)^{-1}\|_\delta$ uniformno ograničeno i važi nejednačina stabilnosti

$$\|x - y\|_\delta \leq \sigma \|T_h x - T_h y\| \quad \text{za } x,y \in \mathbb{R}^{I_h}$$

gde je $T_h = A_h - B_h F_h$ i $\sigma \geq 0$.

Dokaz ove teorme zasniva se na dokazu osobina P7 iz [3]. Posmatrajmo (KP) za jedan od slučajeva I - IV ili VI. Neka je $e \in C^\infty(I)$ rešenje problema

$$- x'' - \mu x = 1 \text{ u } I, \quad R_0 x = 1, \quad R_1 x = \gamma_2 \tag{7.6}$$

sa $\gamma_2 = 0$ u slučaju IV i $\gamma_2 = 1$ u preostalim slučajevima. Ako su ispunjene pretpostavke pod kojima se (KP) diskretizuje u slučajevima I - IV, VI, imamo $e(t) > 0$ za $t \in I$ [2g], [3]. Označimo sa e_h restrikciju od e na I_h.

S obzirom na konzistenciju diferencnih formula koje se koriste za diskretizaciju (KP), imamo

$$\|A_h e_h - \mu B_h e_h - B_h \delta - r_h [R_0 e, R_1 e]\|_\delta \to 0 \text{ ako } n \to \infty.$$

Kako je $B_h \delta + r_h [R_0 e, R_1 e] \geq \delta$, sledi

$$(7.7) \qquad (A_h - \mu B_h)e_h \geq 0.5\delta \quad \text{za } n \geq n_0.$$

U tački 2, paragrafa 6. je pokazano da se za dovoljno veliko n može ispuniti uslov (6.3). Zbog $\lambda_h \to \bar{\lambda}$ kada $n \to \infty$ sada sledi da za dovoljno veliko n važi (6.2), (6.3) i (7.7). Na osnovu teoreme 6.1 i (7.7) imamo

$$(7.8) \qquad \|(A_h - \mu B_h)^{-1}\|_\delta \leq 2 \max\{e(t) : t \in I\}.$$

Time je prvi deo tvrdjenja teoreme dokazan. Nejednačina stabilnosti sledi neposredno iz tvrdjenja (a) teoreme 6.1.

U slučaju I ako važi

$$\alpha_3(i) \leq \sum_{j=1}^{i} k_j \qquad (i = 1,2,\ldots,n-2)$$

može se odrediti n tako da važi tvrdjenje teoreme 7.1. Naime, dovoljno je odrediti n tako da važi

$$(7.9) \qquad \mu < \lambda(2k_0 n^{-1}), \quad \frac{-3n^2}{2k_0^2(k_0^2 - 1)} < \min\left\{\mu, \frac{\lambda(2k_0 n^{-1}) + q)}{2}\right\}.$$

Tada su uslovi (6.2) i (6.3) ispunjeni, pa važi tvrdjenje teoreme 6.1 i tvrdjenje teoreme 7.1.

Ako se diskretizacija na osnovu sheme I izvodi sa $p_i = 0$ $(i = 1,2,\ldots,n-1)$, i ako je

$$\alpha_2(i) \leq \sum_{j=1}^{i} k_j \qquad (i = 1,2,\ldots,n-2),$$

onda su uslovi teoreme 5.2 ispunjeni (teorema 5.5), a uslov (7.9) se svodi na

$$(7.10) \qquad \mu < \lambda(k_0 n^{-1}), \quad \frac{-3n^2}{2k_0^2(k_0^2 - 1)} < \min\left\{\mu, \frac{\lambda(k_0 n^{-1}) + q}{2}\right\}.$$

2. Označimo sa $\bar{x}^h$ jedinstveno rešenje problema $T_h x = r_h$, a sa u rešenje konturnog problema (KP). Neka je $u_h \in \mathbb{R}^{I_h}$ restrikcija funkcije u na I_h.

Teorema 7.2. Neka su ispunjene pretpostavke teoreme 6.1. Tada za svaki diskretan analogon nastao primenom jedne od shema I - IV, VI.1, VI.2, važi

$$u \in C^4(I) \Rightarrow \|u_h - \bar{x}^h\|_\delta = O(h^2).$$

Dokaz. Neka je $c_h = |T_h u_h - r_h|$. Tada na osnovu teoreme 6.1 imamo

$$|\bar{x}^h - u_h| \leq (A_h - \mu B_h)^{-1} c_h.$$

Zbog (7.4) je $c_h \leq \text{const.}\cdot h^2$ za $u \in C^4(I)$. Kako je, prema teoremi 7.1 $(A_h - \mu B_h)^{-1}$ uniformno ograničeno, to je

$$(7.11) \qquad |\bar{x}^h - u_h| \leq \text{const.}\cdot h^2,$$

što je i trebalo dokazati.

Pod pretpostavkama koje su navedene na početku ovog paragrafa za k_i i $\alpha_1(i)$, $\alpha_2(i)$, $\alpha_3(i)$, na osnovu rezultata prethodne dve teoreme možemo zaključiti da

$$\|\bar{x}^h - u_h\|_\delta \to 0 \quad \text{kada} \quad n \to \infty.$$

Naime, ako su ispunjene pretpostavke teoreme 7.1 tada postoji n_0

takvo da za $n = n_0 + 1, n_0 + 2, \ldots,$ i $h_n = \left(\sum_{j=1}^{n} k_j \right)^{-1}$ važi

$$\|\bar{x}^h - u_h\| \leq \text{const.}\cdot h_n^2 .$$

Primedba. Ako je $p(t) \not\equiv 0$, tj. ako posmatramo sheme V i VII, analogno rasudjivanje važi. Potrebno je funkciju $e(t)$ iz dokaza teoreme 7.1 zameniti rešenjem problema

$$-x'' - p(t)x' - \mu x = 1, \quad \text{u } I, \quad R_0 x = 1, \; R_1 x = \gamma_2 \quad , [3].$$

3. U slučaju sheme I može se o nejednačini stabilnosti reći više nego u teoremi 7.1. Pre nego što formulišemo odgovarajuću teoremu definišimo normu [2a], [3]

$$\|x\|_e = \max\{ |x(t)| e(t)^{-1} : e(t) > 0, \; t \in I_h \}$$

na $\mathbb{R}_e^{I_h}$ i označimo sa δ^0 vektor

$$\delta^0 = (0,1,\ldots,1,0) \in \mathbb{R}^{I_h}.$$

Pritom je za $e \in \mathbb{R}^{I_h}$: $\tau(e) := \{t \in I_h : e(t) = 0\}$ i $\mathbb{R}_e^{I_h} := \{x \in \mathbb{R}^{I_h} : \tau(e) \subset \tau(x)\}$.

Teorema 7.3. Neka važi (6.1) i

$$\text{(7.11)} \qquad \mu < \lambda_0 \quad , \quad -h^{-2}\bar{q} < \min\{\mu, 0.5(\lambda_0 + q)\},$$

gde je λ_0 odredjeno kao u teoremi 6.2. Neka je $\mu_0 \geq 0$. Definišimo $e(t) = \sin(\pi t)$ i $z(t) = (\lambda_0 - \mu)^{-1} e(t)$. Ako su e_h i z_h restrikcije za $e(t)$ i $z(t)$ na I_h respektivno, tada imamo

$$\|x - y\|_{z_h} \leq \|T_h x - T_h y\|_{e_h}$$

i otuda

$$\|x - y\|_{e_h} \leq (\lambda_0 - \mu)^{-1} \|T_h x - T_h y\|_{e_h}$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}^{I_h}$ za koje važi $x(t) = y(t)$ za $t = 0,1$. $T_h = A_h - B_h F_h$ odredjeno je za shemu I.

Dokaz. Vektor e_h jednak je vektoru e za $\varepsilon = 0$ iz teoreme 5.1. Očigledno je $e_h \geq 0$ i $z_h \geq 0$, a za e_h važi

$$A_h e_h \geq \lambda_0 B_h e_h,$$

što je dato u dokazu teoreme 6.2. Sada je

$$(A_h - \mu B_h) z_h \geq (\lambda_0 - \mu)^{-1} (\lambda_0 - \mu) e_h$$

odnosno

$$(A_h - \mu B_h) z_h \geq e_h.$$

Uslovi teoreme omogućavaju primenu teoreme 6.1, te imamo

$$z_h \geq (A_h - \mu B_h)^{-1} e_h.$$

Kako je T_h^{-1} $(A_h - \mu B_h)^{-1}$ – ograničeno (teorema 6.1), sledi

$$|x - y| \leq (A_h - \mu B_h)^{-1} |T_h x - T_h y| \quad \text{za } x, y \in \mathbb{R}^{I_h}.$$

Otuda za svako $x, y \in \mathbb{R}^{I_h}$ sa osobinom $T_h x - T_h y \in \mathbb{R}^{I_h}_{e_h}$, imamo

$$|x - y| \leq \|T_h x - T_h y\|_{e_h} z_h \tag{7.12}$$

ili

$$\|x - y\|_{z_h} \le \|T_h x - T_h y\|_{e_h}$$

Kako je $z_h \in \mathbb{R}^{I_h}_{e_h}$, to iz (7.12) sledi, [3],

$$\|x - y\|_{e_h} \le \|z_h\|_{e_h} \|T_h x - T_h y\|_{e_h} .$$

Iz $z_h = (\lambda_0 - \mu)^{-1} e_h$ dobijamo $\|z_h\|_{e_h} = (\lambda_0 - \mu)^{-1}$.
Time je tvrdjenje teoreme dokazano.

U slučaju kada je $\mu = 0$ važi sledća teorema.

Teorema 7.4. Neka važi (6.1), $\mu = 0$ i

$$- h^{-2}\bar{q} < \min\{0, 0.5(\lambda_0 + q)\}$$

gde je λ_0 odredjeno kao u teoremi 6.2. Definišimo $z(t) = 0.5t(1-t)$.
Ako z_h označava restrikciju za $z(t)$ na I_h, tada imamo nejednačinu stabilnosti

$$\|x - y\|_{z_h} \le \|T_h x - T_h y\|_{\delta^0}$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}^{I_h}$ za koje važi $x(t) = y(t)$ za $t = 0,1$, i otuda

$$\|x - y\|_{\delta^0} \le \frac{1}{8} \|T_h x - T_h y\|_{\delta^0}.$$

Dokaz. Prema konstrukciji je $z(t) \in C^2(I)$ i $z(0) = z(1) = 0$.
Dalje je

$$A_h z_h = (0,1,\dots,1,0) = \delta^0,$$

odnosno

$$(A_h - \mu B_h) z_h = \delta^0.$$

Istim postupkom kao u dokazu prethodne teoreme, sa δ^0 umesto e_h, dobijamo

$$\| x - y \|_{z_h} \leq \| T_h x - T_h y \|_{\delta^0}$$

i

$$\| x - y \|_{\delta^0} \leq \| z_h \|_{\delta^0} \; \| T_h x - T_h y \|_{\delta^0}.$$

Kako je $\| z_h \|_{\delta^0} = \max\{ z(t) : t \in (0,1)\}$, to je $\| z_h \|_{\delta^0} = \frac{1}{8}$. Time je teorema dokazana.

4. Neka je x^n n-ta aproksimacija rešenja $\bar{x}^h$ za $T_h x = r_h$ dobijena iteracijom paralelne sečice. Ako je $x^0(t) = \bar{x}^h(t)$ za $t = 0,1$, onda je $x^n(t) = \bar{x}^h(t)$ za $t = 0,1$ i $n \geq 1$. Na osnovu teorema 7.3 i 7.4 imamo sada

$$\| \bar{x}^h - x^n \|_{\delta^0} \leq \frac{1}{8} \| T_h x^n - r_h \|_{\delta} \quad \text{ako je } \mu = 0,$$

$$\| \bar{x}^h - x^n \|_{e_h} \leq (\lambda_0 - \mu)^{-1} \| T_h x^n - r_h \|_{e_h}, \quad \text{ako je } \mu \geq 0.$$

5. Ako je $\mu < \pi^2$, onda se, prema onome što je u ovom paragrafu dokazano, može odrediti n tako da se, za svaki izbor $k_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ koje zadovoljava (7.1), mogu primeniti teoreme 6.1, 7.3 i 7.4. To znači da iskaz "dovoljno veliko n" u slučaju sheme I ima sasvim odredjeno značenje, jer se zna tačno koliko n treba da bude veliko.

§8. Numerički primeri

U ovom paragrafu posmatraju se numerička rešenja sledećih konturnih problema:

(8.1) $$- x'' = 4\lambda^2(1-x) \text{ u } I, \quad x(0) = x(1) = 0,$$

(8.2) $$- x'' - \lambda x' = 0 \text{ u } I, \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 1,$$

(8.3) $$- x'' = \lambda(x^2 - 1 - t) \text{ u } I, \quad x(0) = x(1) = 0.$$

Rešenja problema (8.1) i (8.3) u intervalima $[0,a]$ i $[1-a,1]$, $0 < a \ll 1$, (a zavisi od λ) brzo se menjaju, a u intervalu $[a,1-a]$ su skoro jednaka konstanti.

Rešenje problema (8.2) brzo se menja u $[0,a]$, $0 < a \ll 1$, (a zavisi od λ), a u $[a,1]$ skoro je jednako konstanti.

Broj m tačaka mreže I_h koja pripada intervalu $[0,a]$ posebno će se posmatrati i koristiće se za uporedjivanje različitih diskretizacija, bilo ekvidistantnih ili neekvidistantnih. Pored toga interesantna je greška

(8.4) $$\varepsilon := \|x^h(t_i) - x_h(t_i)\|_\delta$$

gde je x(t) tačno rešenje konturnog problema, x_h njegova restrikcija na I_h, a x^h je rešenje diskretnog analogona konturnog problema.

Sa n+1 je označen broj tačaka mreže I_h, a sa k vektor

$(k_1, k_2, \ldots, k_n) \in \mathbb{R}^n$.

1. Konturni problem (8.1) ima rešenje

$$x(t) = 1 - \frac{e^{\lambda(2t-1)} + e^{\lambda(1-2t)}}{e^{\lambda} + e^{-\lambda}}$$

Kako važi $x(0.5 + t) = x(0.5 - t)$, $t \in [0,0.5]$, to ćemo posmatrati x^h i x_h samo u intervalu $[0,0.5]$. Diskretni analogon za (8.1) dobijen je pomoću sheme I. Pritom je korišćena osobina $x(0.5 + t) = x(0.5 - t)$, $t \in [0,0.5]$ na način opisan u primedbi posle sheme I, str. 25.

Rešenje $x(t)$ konturnog problema (8.1) za $\lambda = 100$ ima osobinu $x(t) \in (0.999\ 999\ 99, 1]$ ako je $t \in [0.1, 0.5]$.

U tabeli I je navedeno 14 vektora k_j pomoću kojih je formirana shema I. U tabeli II su za svaki od vektora k_j prikazani broj n_j tačaka skupa $I_h \cap [0,0.5]$ broj m_j tačaka skupa $I_h \cap [0,0.5]$ (izražen i procentualno u odnosu na n_j) i ε_j definisano prema (8.4).

Iz tabele II vidimo da birajući vektore k_j možemo dobiti veliki broj m_j tačaka koje pripadaju skupu $I_h \cap [0,0.1]$, a istovremeno i malu grešku ε_j. U ekvidistantnom slučaju ($j = 1$) sa 11 tačaka skupa $I_h \cap [0,0.5]$ dobijamo samo 3 tačke te mreže koje pripadaju intervalu $[0,0.1]$. Za $j = 5$ imamo takodje 11 tačaka u skupu $I_h \cap [0,0.5]$, ali čak 9 tačaka (81.82%) pripada intervalu $[0,0.1]$. Pored toga je $\varepsilon_5 < \varepsilon_1$.

Povećavajući broj tačaka skupa $I_h \cap [0,0.5]$ na 21 u ekvidistantnom slučaju ($j = 6$) dobijamo samo 5 tačaka mreže koje leže u intervalu $[0,0.1]$. Dakle, manje nego za $j = 5$, kada je skup $I_h \cap [0,0.5]$ imao samo 11 tačaka. Uz to je i $\varepsilon_6 \approx 8.14\varepsilon_5$.

Za $j = 13,14$ imamo ekvidistantne slučajeve. Uporedjujući m_{13}, m_{14} sa m_{12} kao i ε_{13}, ε_{14} sa ε_{12}, vidimo da je sa 51 tačkom neekvidistantne mreže I_h (iz $[0,0.5]$) moguće dobiti bolje rezultate nego sa 101, odnosno 201 tačkom ekvidistantnih

TABELA I

n	j	k_j
10	1	$(1,\ldots,1)$
	2	$(\underbrace{1,\ldots,1}_{6},2,2,5,5)$
	3	$(\underbrace{1,\ldots,1}_{6},4,4,6,20)$
	4	$(1,1,2,3,6,13,26,52,104,192)$
	5	$(1,1,1,2,4,8,16,32,105,210)$
20	6	$(1,\ldots,1)$
	7	$(\underbrace{1,\ldots,1}_{10},2,2,2,6,10,10,10,12,18,18)$
	8	$(\underbrace{1,\ldots,1}_{12},2,2,4,4,8,16,24,28)$
	9	$(\underbrace{1,\ldots,1}_{8},2,5,5,5,5,15,30,50,105,210,260,300)$
50	10	$(1,1.5,2.5,4.5,8.5,15,27,40,70,120,210,300,500,700,800,$ $1000,\ldots,1000)$
	11	$(1,1.9,3.6,6.8,12.8,24,24.9,25,46,54,98,102,150,250,300,$ $400,500,600,600,800,1200,\ldots,1200)$
	12	$(\underbrace{1,\ldots,1}_{20},1.9,3.3,5.5,8.9,14,21.4,25,25,35.40,58,82,115,$ $145,190,250,260,300,350,450,560,\ldots,560)$
100	13	$(1,\ldots,1)$
200	14	$(1,\ldots,1)$

mreža. Da se pri rešavanju konturnog problema (8.1) neekvidistantnom diskretizacijom mogu dobiti bolje informacije o rešenju nego ekvidistantnom, možemo se uveriti i posmatranjem tabele III,

TABELA II

j	nj	m_j(%)	ε_j
1	11	3 (27.27)	$9.760\cdot10^{-3}$
2	11	5 (45.45)	$3.036\cdot10^{-2}$
3	11	7 (63.64)	$4.097\cdot10^{-2}$
4	11	8 (72.73)	$3.724\cdot10^{-2}$
5	11	9 (81.82)	$3.728\cdot10^{-3}$
6	21	5 (23.81)	$3.036\cdot10^{-2}$
7	21	14 (66.67)	$1.409\cdot10^{-2}$
8	21	16 (76.19)	$1.409\cdot10^{-2}$
9	21	17 (80.95)	$1.277\cdot10^{-3}$
10	51	21 (41.18)	$2.477\cdot10^{-3}$
11	51	24 (47.06)	$1.638\cdot10^{-3}$
12	51	39 (76.47)	$9.525\cdot10^{-4}$
13	101	21 (20.79)	$1.409\cdot10^{-2}$
14	201	41 (20.40)	$3.748\cdot10^{-3}$

TABELA III

j	n_j	s_j	v_j	m_j	ε_j
1	11	7	31	8 (72.73)	$1.409\cdot10^{-2}$
2	11	8	46	9 (81.82)	$1.409\cdot10^{-2}$
3	11	9	91	10 (90.91)	$1.409\cdot10^{-2}$
4	21	16	21	17 (80.95)	$1.409\cdot10^{-2}$
5	21	18	41	19 (90.48)	$1.409\cdot10^{-2}$
6	21	19	81	20 (95.24)	$1.409\cdot10^{-2}$
7	41	38	81	39 (95.12)	$3.747\cdot10^{-3}$
8	41	39	161	40 (97.56)	$3.747\cdot10^{-3}$
9	81	78	161	79 (97.53)	$9.528\cdot10^{-4}$
10	81	79	321	80 (98.77)	$9.528\cdot10^{-4}$
11	161	150	200	152 (94.41)	$9.296\cdot10^{-4}$
12	161	156	161	157 (97.52)	$2.404\cdot10^{-4}$
13	161	159	641	160 (99.38)	$2.404\cdot10^{-4}$

u kojoj su vektori k_j jednostavniji nego u tabeli I. U tabeli III prvih s_j komponenti vektora k_j jednako je jedinici, a sa v_j su označene vrednosti preostalih $n_j - 1 - s_j$ komponenata vektora k_j.

Kao što se vidi iz tabele II sa samo 41 tačkom neekvidistantne mreže (j = 7,8) dobijaju se rezultati kao sa 201 tačkom ekvidistantne mreže (tabela II, j = 14).

Tabela IV formirana je istim postupkom kao i tabela III uz sledeće izmene. Posmatran je problem (8.1) za $\lambda = 200$, i m_j je broj tačaka iz skupa $I_h \cap [0,0.05]$. Za tešenje x(t) jednačine (8.1) važi $x(t) \in [0.999\ 999\ 979,\ 1]$ za $t \in [0,0.05]$.

TABELA IV

j	n_j	s_j	v_j	$m_j(\%)$	ε_j
1	11	10	-	2 (18.18)	$2.488 \cdot 10^{-3}$
2	11	9	91	10 (90.91)	$3.624 \cdot 10^{-2}$
3	21	20	-	3 (14.29)	$9.760 \cdot 10^{-3}$
4	21	10	11	11 (52.38)	$3.050 \cdot 10^{-2}$
5	41	40	-	5 (12.20)	$3.035 \cdot 10^{-2}$
6	41	18	20	20 (48.78)	$2.847 \cdot 10^{-3}$
7	41	30	33	31 (75.61)	$4.580 \cdot 10^{-3}$
8	81	80	-	9 (11.11)	$4.097 \cdot 10^{-2}$
9	81	75	100	58 (71.60)	$1.833 \cdot 10^{-3}$
10	81	60	65	62 (76.54)	$3.324 \cdot 10^{-4}$
11	161	160	-	17 (10.56)	$2.069 \cdot 10^{-2}$
12	161	136	32	91 (56.52)	$7.446 \cdot 10^{-4}$
13	161	150	200	151 (93.79)	$1.359 \cdot 10^{-4}$
14	161	155	1000	156 (96.27)	$2.441 \cdot 10^{-4}$
15	201	200	-	21 (10.45)	$1.409 \cdot 10^{-2}$
16	251	250	-	26 (10.36)	$9.045 \cdot 10^{-3}$

U ovom slučaju vidimo da neekvidistantna diskretizacija pruža još više podataka o rešenju x(t) u odnosu na ekvidistantnu, nego što je to bio slučaj za $\lambda = 100$.

Diskretizacije sa vektorima k_j, $j = 1,3,5,8,11,15,16$ su ekvidistantne.

U sledećeoj tabeli su prikazane veličine ε_j za različite vektore k_j koji ispunjavaju uslov $(k_j)_{n_j-1} \leq k_o = 200$, pri čemu je $\lambda = 100$. Vidimo da povećanjem broja tačaka n_j mreže I_h vrednosti ε_j postaju sve manje. Medjutim, opadanje vrednosti ε_j ne mora biti monotono, već zavisi od vektora k_j.

TABELA V

j	n_j	s_j	v_j	ε_j
1	11	7	31	$1.409 \cdot 10^{-2}$
2	21	19	81	$1.409 \cdot 10^{-2}$
3	41	39	161	$3.747 \cdot 10^{-3}$
4	81	78	161	$9.528 \cdot 10^{-4}$
5	161	150	200	$9.296 \cdot 10^{-4}$
6	161	156	161	$2.404 \cdot 10^{-4}$

Numeričko rešenje problema (8.1) za $\lambda = 100$, dobijamo pomoću diskretizacije $j = 3$ iz tabele III, prikazani su za $t_h \in [0,0.5]$ u tabeli VI.

TABELA VI

i	t_i	$x^h(t_i)$	$x_h(t_i)$	$\|x^h(t_i)-x_h(t_i)\|$
1	.00000	.000000000000	.000000000000	.00000000000000D 01
2	.00500	.828427314758З	.8646647930145	.36237478256230D-01
3	.01000	.9705629348755	.9816844463348	.11121511459350D-01
4	.01500	.9949491024017	.9975211620331	.25720596313460D-02
5	.02000	.9991333484650	.9996645450592	.53119659423830D-03
6	.02500	.9998514652252	.9999547004700	.10323524475100D-03
7	.03000	.9999747276306	.9999938011169	.19073486328130D-04
8	.03500	.9999961853027	.9999992847443	.30994415283200D-05
9	.04000	.1,0000019073349	.9999997615814	.21457672119140D-05
10	.04500	.1,0000128746603	.9999997615814	.13113021850590D-04
11	.50000	1.000000000000	1.000000000000	.00000000000000D 01

2. Za rešenje konturnog problema (8.2)

$$x(t) = \frac{1 - e^{-\lambda t}}{1 - e^{-\lambda}}$$

važi

$$\lambda = 50,\ t \in [0.25,1] \Rightarrow x(t) \in (0.999\ 999\ 69,\ 1],$$

$$\lambda = 100,\ t \in [0.15,1] \Rightarrow x(t) \in (0.999\ 996,\ 1].$$

Pri numeričkom rešavanju problema (8.2), mreža I_h je formirana tako da je ispunjen uslov (a) teoreme 5.9

$$\lambda \le \frac{2h^{-1}}{k_n}\ .$$

Matrica A_h za $\lambda = 50$ obrazovana je sa $p_i = 1$ $(i = 1,2,\dots,n-2)$ i $p_{n-1} = 0$, a za $\lambda = 100$ sa $p_i = 0$ $(i = 1,2,\dots,n-1)$.

U tabeli VII i VIII je sa n_j označen broj tačaka mreže I_h, a sa m_j broj tačaka skupa $I_h \cap [0,0.25]$, odnosno $I_h \cap [0,0.15]$.

TABELA VII ($\lambda = 50$)

j	n_j	s_j	v_j	$m_j(\%)$	ε_j
1	41	40	-	10 (24.39)	$5.574 \cdot 10^{-2}$
2	41	16	2	17 (41.46)	$1.964 \cdot 10^{-2}$
3	41	18	5	21 (51.22)	$4.990 \cdot 10^{-3}$
4	81	80	-	20 (24.69)	$1.211 \cdot 10^{-2}$
5	81	54	20	59 (72.84)	$3.110 \cdot 10^{-3}$
6	81	58	12	60 (74.07)	$7.692 \cdot 10^{-4}$
7	161	160	-	40 (24.84)	$3.001 \cdot 10^{-3}$
8	161	138	32	141 (87.58)	$1.872 \cdot 10^{-4}$
9	161	150	50	151 (93.79)	$2.096 \cdot 10^{-4}$
10	201	200	-	50 (24.88)	$1.865 \cdot 10^{-3}$

TABELA VIII ($\lambda = 100$)

j	n_j	s_j	v_j	$m_j(\%)$	ε_j
1	41	40	-	7 (17.07)	$1.932\ 10^{-1}$
2	41	12	9	16 (39.02)	$1.655\ 10^{-2}$
3	41	18	5	19 (46.34)	$1.964\ 10^{-2}$
4	81	80	-	13 (16.05)	$5.574\ 10^{-2}$
5	81	58	12	49 (60.49)	$2.985\ 10^{-3}$
6	81	54	20	56 (69.14)	$1.007\ 10^{-3}$
7	161	160	-	25 (15.53)	$1.208\ 10^{-2}$
8	161	100	100	92 (57.14)	$4.751\ 10^{-2}$
9	161	138	32	127 (78.88)	$4.080\ 10^{-4}$
10	201	200	-	31 (15.42)	$7.799\ 10^{-3}$

U tabelama VII i VIII za j = 1,4,7,10 imamo ekvidistantne diskretizacije.

Uporedjujući m_j i ε_j u navedenim tabelama, vidimo da neekvidistantne diskretizacije imaju više tačaka u posmatranim podintervalima $[0,0.25]$, odnosno $[0,0.15]$ od ekvidistantnih diskretizacija sa većim brojem tačaka mreže I_h.

Ako se vektor k izabere na neki drugi način, moguće je dobiti i bolje rezultate. To pokazuje sledeća tabela u kojoj je

$$k_1 = (1,1.1,1.25,1.35,1.7,1.85,2.25,3,4,5.5,8,13,21,35,200,200),$$

$$k_2 = (1,1.1,1.21,1.35,1.65,1.83,2.23,3.05,4.04,5.30,8.08,13,17,19,20,30,70,100,150),$$

$$k_3 = (1,\dots,1).$$

TABELA IX

			$\lambda = 50$		$\lambda = 100$	
j	n_j	k_j	$m_j(\%)$	ε_j	$m_j(\%)$	ε_j
1	17	k_1	15 (88.24)	$1.993\cdot10^{-2}$	14 (82.35)	$1.283\cdot10^{-2}$
2	21	k_2	16 (76.19)	$3.340\cdot10^{-2}$	14 (66.67)	$2.179\cdot10^{-2}$
3	21	k_3	5 (23.81)	$1.932\cdot10^{-1}$	5 (23.81)	$4.354\cdot10^{-1}$

Iz tabela VIII i IX vidimo da se već sa 17 tačaka neekvidistantne diskretizacije može dobiti više tačaka u $[0,0.15]$ nego sa 81 tačkom ekvidistantne diskretizacije.

Za $\lambda = 50$ (tabela VI) neekvidistantne diskretizacije za k_1 i k_2 ($n_1 = 17$, $n_2 = 21$) daju više tačaka u $[0,0.25]$ od ekvidistantne diskretizacije sa 41 tačkom.

Numeričko rešenje problema (8.2) za $\lambda = 50$ dobijeno pomoću diskretizacije $j = 3$ iz tabele VII prikazano je u sledećoj tabeli za $t_i \in [0,0.25]$.

TABELA X

i	t_i	$x^h(t_i)$	$x_h(t_i)$	$\lvert x^h(t_i)-x^h(t_i)\rvert$
1	.000000E 01	.0000000000000	.0000000000000	.0000000000000D 01
2	.781250E-02	.3269368675690	.3233659267426	.3572940826416D-02
3	.156250E-01	.5470349788666	.5421664714813	.4868507385254D-02
4	.234375E-01	.6952042579651	.6902146339417	.4989624023438D-02
5	.312500E-01	.7940521541595	.7903868225555	.4563331604004D-02
6	.390625E-01	.8621029853821	.8581697940826	.3933191299438D-02
7	.468750E-01	.9073092937469	.9040329456329	.3276348114014D-02
8	.546875E-01	.9377424716949	.9350655078888	.2676963806152D-02
9	.625000E-01	.9582300186157	.9560630321503	.2166986465454D-02
10	.703125E-01	.9720222949982	.9702708721161	.1751422882080D-02
11	.781250E-01	.9813072681427	.9798841476440	.1423120498657D-02
12	.859375E-01	.9875583648682	.9863889217377	.1169443130493D-02
13	.937500E-01	.9917564527893	.9907903671265	.9760856628418D-03
14	.101563E 00	.9945995807648	.9937684535980	.8311271667480D-03
15	.109375E 00	.9965069293976	.9957835674286	.7233619689941D-03
16	.117188E 00	.9977908134460	.9971470832825	.6437301635742D-03
17	.125000E 00	.9986553192139	.9980695247650	.5857944488525D-03
18	.132813E 00	.9992372989655	.9986937046051	.5435943603516D-03
19	.140625E 00	.9996290206909	.9991161823273	.5128383636475D-03
20	.179688E 00	.9999959468842	.9998745918274	.1213550567627D-03
21	.218750E 00	1.0000000000000	.9999821186066	.1788139343262D-04

3. Problem (8.3) rešavan je numerički za $\lambda = 10^{12}$, kao i u [14b]. Na Fig. 2 u [14b] prikazano je jedno približno rešenje x(t) problema (8.3). Za $t > 0.5\cdot 10^{-5}$ x(t) je praktično jednako - 1. Zbog toga ćemo posmatrati interval $[0, 0.5\cdot 10^{-5}]$ u kojem x(t) uzima vrednosti od 0 do -1.

Da bi se ekvidistantnom diskretizacijom dobila bar jedna tačka koja pripada intervalu $(0, 0.5\cdot 10^{-5}]$ potrebno je da mreža I_h ima $2\cdot 10^5$ tačaka, odnosno da sistem nelinearnih jednačina oblika (DKP) ima $2\cdot 10^5$ jednačina sa isto toliko nepoznatih. Koristeći se neekvidistantnom diskretizacijom, moguće je pogodnim izborom vektora $k = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$ već sa relativno malim brojem n dobiti veliki procenat tačaka mreže I_h koja pripada intervalu $[0, 0.5\ 10^{-5}]$.

Pri numeričkom rešavanju problema (8.3) primenjena je shema I, a vektori k su formirani na sledeća dva načina:

I $\quad k_i = 1\ (i = 1,2,\ldots,m),\ k_{m+i} = (m+2)\ 2^{i-1}$

$(i = m+1,\ldots,n-1)$

$k_n = k_{n-1},\ m \in \mathbb{N}.$

II $\quad k_i = 1\ (i = 1,2,\ldots,m),\ k_{m+i} = k_{m+i-1} + k_{m+i-2}$

$(i = m+1,\ldots,n-1)$

$k_n = k_{n-1},\ m \in \mathbb{N}.$

U prvom slučaju parametri $\alpha_1(i)$ $(i = 1,2,\ldots,n-2)$ formirani su sa $p_i = i-1$, a $\alpha_1(n-1)$ sa $p_{n-1} = 0$. U drugom slučaju $\alpha_1(i)$ $(i = 1,2,\ldots,n-2)$ računati su sa $p_i = 1$, a $\alpha_1(n-1)$ sa $p_{n-1} = 0$.

Diskretni analogon problema (8.3) obrazovan je za interval $I = [0, 0.5]$ i rešavan je metodom paralelne sečice (6.4) sa $D_h = \mathrm{diag}(-2\cdot 10^{12}, \ldots, -2\cdot 10^{12})$ i $x^0 = (0,-1,-1,\ldots,-1)$

Za približno rešenje diskretnog analogona problema (8.3) uzimano je x^k (prema (6.4)), za koje važi

$$\|x^k - x^{k-1}\|_\delta < 10^{-6}.$$

U sledećim tabelama sa n_j je označen broj tačaka mreže $I_h \subset [0,0.5]$, sa m_j broj tačaka skupa $I_h \cap [0,0.5\ 10^{-5}]$, a m je broj iz I, odnosno II.

TABELA XI (slučaj I)

j	m	n_j	m_j(%)
1	2	21	4 (19.05)
2	5	41	24 (58.54)
3	25	51	25 (49.02)
4	55	81	64 (79.01)
5	140	161	144 (89.44)
6	175	201	184 (91.54)

TABELA XII (slučaj II)

j	m	n_j	m_j(%)
1	2	21	1 (4.76)
2	2	41	17 (41.46)
3	25	51	6 (11.76)
4	5	81	52 (64.20)
5	50	161	84 (72.17)
6	10	161	128 (79.50)

Iz tabela XI i XII vidi se da neekvidistantna diskretizacija daje približne vrednosti rešenja problema (8.3) za tačke skupa $I_h \cap [0,0.5\cdot10^{-5}]$ i onda kada broj tačaka mreže nije veliki. U sledećoj tabeli date su one komponente aproksimacije x^{10} rešenja diskretnog analogona za (8.3) koje pripadaju intervalu $[0, 0.5 \cdot 10^{-5}]$. Diskretni analogon je obrazovan sa n = 41 i m = 5 prema I.

TABELA XIII

i	t_i	$x^h(t_i)$	i	t_i	$x^h(t_i)$
1	.000000E 01	.0000000E 01	13	.165849E-08	-.1975406E-05
2	.207884E-11	-.2160797E-11	14	.372113E-08	-.7915885E-05
3	.415769E-11	-.3241196E-11	15	.744642E-08	-.3169209E-04
4	.623654E-11	-.3781395E-11	16	.148970E-07	-.1268254E-03
5	.831538E-11	-.4051495E-11	17	.297982E-07	-.5074159E-03
6	.103942E-10	-.7078149E-10	18	.596005E-07	-.2029866E-02
7	.249451E-10	-.3799036E-09	19	.119205E-06	-.8119557E-02
8	.540500E-10	-.1721326E-08	20	.238414E-06	-.3245088E-01
9	.112258E-09	-.7306821E-08	21	.476833E-06	-.1280469E 00
10	.228673E-09	-.3009346E-07	22	.953670E-06	-.4333659E 00
11	.461504E-09	-.1221321E-06	23	.190734E-05	-.8181369E 00
12	.927165E-09	-.4920723E-06	24	.381469E-05	-.9613039E 00

LITERATURA

[1a] Beyn, W. - J., *Theorie und Anwendung eines iterativen Verfahrens zur Lösung von Operatorgleichungen Hammersteinschen Typs. Dissertation, Münster (1975).*

[1b] Beyn, W.-J., *Das Parallelverfahren für Operator-gleichungen und seine Anwendung auf nichtlineare Randwertaufgaben. ISNM 31, 9 - 33, Birkhäuser - Verlag (1976).*

[2a] Bohl, E., *Monotonie: Lösbarkeit und Numerik bei Operatorgleichungen. Springer Tracts in Natural Philosophy, Bd. 25, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1974).*

[2b] Bohl, E., *Über eine Zeilesummenbedinung bei L-Matrizen, Lecture Notes in Mathematics 395, 247 - 262 (1974).*

[2c] Bohl, E., *Stabilitätsungleichungen für diskrete Analoga nichtlinearer Randwertaufgaben. ISNM 27, 9 - 28, Birkhäuser - Verlag, Basel und Stuttgart (1975).*

[2d] Bohl, E., *On finite difference methods as applied to boundary value problems. Instituto per le Applicazioni del Calcolo (IAC), Publicazioni Serie III - N. 100 (1975).*

[2e] Bohl, E., *Iterative procedures in the study of discrete analoques for nonlinear boundary value problems. Instituto per le Applicazioni del Calcolo "Mauro Picone" (IAC), Pubb, S. III - N.107 (1975).*

[2f] Bohl, E., *Zur Anwendung von Differenschemen mit symmetrischen Formeln bei Randwertaufgaben. ISNM 32, 25 - 47, Birkhäuser - Verlag, Basel und Stutgart (1976).*

[2g] Bohl, E., *On a Stability Inequality for Nonlinear Operators. SIAM J. Num. Anal., 242 - 252 (1977).*

[2h] Bohl, E., *P-boundedness of Inverses of Nonlinear Operators. ZAMM, 58, 277 - 287 (1978).*

[2i] Bohl, E., *Inverse Monotonicity in the Study of Continuous and Discrete Singular Perturbation Problems. To appear in Procedings*

of the Conference on the Numerical Analysis of Singular Perturbation Problems, May 30. - June 2., 1978. Academic Press (1978).

[3] Bohl, E., J. Lorenz, *Inverse Monotonicity and Difference Shemes of Higher Order. A Summary for Two Point Boundary Value Problems* Aequ. Math., 19, 1 - 36 (1979).

[4] Bramble, J. H., Hubbard, B. E., *New Monoton Type Approximations for Elliptic Problems*, Math. Comput. 18, 349 - 367, (1964).

[5] Collatz, L., *The Numerical treatment of differential equations*. Springer - Verlag, Berlin - Heidelberg - New York (1964).

[6] Flaherty, J. E., R.E. O'Malley, Jr., *The Numerical Solution of Boundary Value Problems for Stiff Differential Equations*, Math. Comp., Vol. 31, No. 137, 66 - 93, (1977).

[7] Henrici, P., *Discrete variable methods in ordinary differential equations*, John Wiley, New York (1962).

[8] Herceg, D., *Das Differenzenverfahren mit irregulären Gittern*, Saopštenje na ICM 78, Helsinki, 1978.

[9] Isaacson, E., Keller, H. B., *Analysis of numerical methods*, John Wiley, New York (1966).

[10] Keller, H. B., *Numerical methods for two-point boundary value problems*, Blaisdell, Waltham, MA. (1968).

[11] Lees, M., *Discrete methods for non-linear two-point-boundary value problems*. Jn: Bramble, J.H., Numerical solution of partial differential equations, Academic Press (1966).

[12a] Lorenz, J., *Die Inversmonotonie von Matrizen und ihre Anwendung beim Stabilitätsnachweis von Differenzverfahren*. Dissertation, Münster (1975).

[12b] Lorenz, J., *Zur Inversmonotonie diskreter Probleme*. Numer. Math. 27, 227 - 238 (1977).

[12c] Lorenz, J., *Zur numerischen Lösung steifer Raundwertaufgaben*, Kurzvortrag auf der GAMM - Tagung in Brüssel 1978.

[12d] Lorenz, J., *Combinations of initial and boundary value methods for a class of singular perturbation problems*. To appear in Proceedings of the Conference on the numerical Analysis of Singular Perturbation Problems, May 30. - June 2, 1978. Academic Press 1978.

[13] Mušicki Dj., *Uvod u teorijsku fiziku I*, ICS, Beograd, (1975).

[14a] Pearson, C. E., *On a Numerical Method for Ordinary Differential Equations of Boundary Layer Type*, J. Math. Phys., 47, 134 - 154 (1968).

[14b] Pearson, C. E., *On Non-linear Ordinary Differential Equations of Boundary Layer Type*, J. Math. Phys. 47, 351 - 358, (1968).

[15a] Pflanz, E., *Über die Bildung finiter Ausdrücke für die Lösung linearer Differentialgleichungen*, Z. angew. Math. Mech., Bd. 17, Nr. 5, 296 - 300, (1937).

[15b] Pflanz, E., *Allgemeine Differenzenausdrücke für die Ableitungen einer Funktion y(x)*, Z. angew. Math. Mech., Bd. 20, Nr. 11/12, 379 - 381, (1949).

[16] Sokolov, A.A., J.M. Loskutov, I.M. Ternov, *Kvantna mehanika*, *Naučna knjiga*, Beograd, (1965).

[17] ŠIF, L.I., *Kvantna mehanika*, *Vuk Karadžić*, Beograd, (1971).

[18] Weber, C., E. Adams, *Mathematisches Modell und Lösung für die Schmirfilmdicke bei elastohydrodynamischem Kugelkontakt*, ZAMM 58, 177 - 188, (1978).