

ПРИМЉЕНО: 25 X 1999	
ОРГАНИЗ.ЈЕД.	Б Р О Ј
0603	94/14

I Z V E Š T A J  
o doktorskoj disertaciji "Mreža klonova ko-operacija"  
kandidata mr Dragana Mašulovića

Ko-algebre kao modele raznih vrsta sistema sa prelazima (engl. *transition systems*) su 1988. u teorijsko računarstvo uveli Aczel i Mendler. Time je teorijsko računarstvo dobilo elegantan i unificiran aparat za ispitivanje raznih računskih modela, ali i struktura podataka. Na primer, u radovima H. Reichela i B. Jacobsa je pokazano kako se ko-algebrama prirodno modeliraju elementi objektno-orijentisane paradigme programiranja, a pokazan je i ko-algebraski pristup formalnoj verifikaciji programa.

Više u duhu univerzalne algebre, K. Drbohlav je 1971. počeo sa istraživanjima u nešto drugačijem pravcu. To je pristup koji je usvojen u ovom radu. Klona ko-operacija shvaćenih na ovaj način uveo je 1985. B. Csákány. R. Pöschel i M. Röbiger su 1997. uveli pojam ko-relacije i klona ko-relacija i tako izgradili standardni aparat teorije klonova za ko-operacije, opštu teoriju Galois za ko-operacije i ko-relacije. Ovaj rad je direktan nastavak njihovih istraživanja.

Rad je napisan na 209 strana formata B5 i ima 8 glava i 50 referenci.

U Glavama 0, 1 i 2 dat je pregled osnovnih pojmova i poznatih rezultata teorije mreža, klonova operacija i klonova ko-operacija. Originalni rezultati su izloženi u Glavama 3–7.

Glava 3 sadrži osnovni rezultat rada. Pomoću kontravarijantnog liftinga ko-operacija uspostavlja se izomorfizam između klona svih ko-operacija skupa  $X$  s jedne strane i jednog posebnog klona operacija skupa  $\mathcal{P}(X)$  sa druge strane. Pokazuje se da je isto preslikavanje ujedno i potapanje algebre ko-operacija skupa  $X$  u algebru operacija skupa  $\mathcal{P}(X)$  koja je standardna u teoriji klonova. Takođe se pokazuje da je kontravarijantni lifting klonova ujedno i izomorfizam mreže klonova ko-operacija skupa  $X$  i jednog glavnog ideala u mreži klonova na  $\mathcal{P}(X)$ . Nakon ispitivanja lokalno ko-zatvorenih klonova ko-operacija pokazuje se u kakvom odnosu stoje reprezentacije klonova ko-operacija selektivnim operacijama s jedne strane, i operacijama na partitivnom skupu s druge strane. Reprezentacija operacijama na partitivnom skupu, mada izomorfna jednom specijalnom slučaju reprezentacije selektivnim operacijama, je značajna, zato što se njome klonovi ko-operacija smeštaju u poznati ambijent skupovnih Booleovih algebri. U pretposlednjem odeljku se razmatra odnos klonova ko-operacija i klonova operacija kroz proces liftinga, što je omogućeno činjenicom da i kontravarijantni lifting klona svih ko-operacija i kovarijantni lifting klona svih operacija skupa  $X$  odredjuju klon operacija skupa  $\mathcal{P}(X)$ . Na samom kraju se ispituju odnosi klonova ko-relacija i klonova relacija kroz prizmu monoida transformacija.

U Glavi 4 se izlažu neke osobine mreže klonova ko-operacija kao parcijalno uredjenog skupa. Opisani su intervali  $\text{Int}(M)$  za neke posebne monoide transformacija  $M$ . Pokazano je da u slučaju  $M = T_X$  u mreži klonova ko-operacija ne postoji "Burlova anomalija". Nakon toga je predložena jedna konstrukcija skupa nezavisnih ko-operacija na osnovu koje je dobijena donja granica za broj klonova ko-operacija na konačnom skupu i tačan broj klonova ko-operacija na beskonačnom skupu. Ispitivanja jednog posebnog glavnog filtera mreže klonova ko-operacija nam daju gornju granicu za visinu mreže.

Glava 5 je posvećena ispitivanjima maksimalnih klonova ko-operacija na konačnom skupu. Maksimalni klonovi ko-operacija su opisani ranije kao skupovi operacija koji slabo čuvaju regularne familije skupova. Prvo se daje interpretacija ovog rezultata u terminima ko-relacija i pokazuje se da je ovakav opis najbolji mogući kada se u obzir uzme arnost dobijenih ko-relacija. Nakon toga se pokazuje da nijedan maksimalan klon nema Shefferovu ko-operaciju i daje se opis  $U_{n-1}$ -maksimalnih klonova ko-operacija. Pažnja se dalje prenosi na preseke maksimalnih klonova ko-operacija. Prvo

se razmatraju preseci nekih parova maksimalnih klonova i pokazuje se da to ne mora uvek biti maksimalni klon, a kasnije se konstruiše potapanje mreže  $c\mathcal{L}_{B_1} \times \dots \times c\mathcal{L}_{B_k}$  u mrežu  $c\mathcal{L}_X$ . Potom se pokazuje da je mreža  $c\mathcal{L}_X$  komplementirana, a na samom kraju se razmatraju kolapsirajući klonovi ko-operacija i monoidi.

Glava 6 je posvećena opisu minimalnih klonova ko-operacija i svih supminimalnih klonova ko-operacija koji nisu esencijalno unarni. Uvid u strukturu supminimalnih klonova omogućuje izvodenje donje granice za visinu mreže klonova ko-operacija.

U Glavi 7 se razmatraju enumerativne osobine mreže klonova ko-operacija na troelementnom skupu, kao i nekih njenih pratećih objekata. Osim utvrđivanja kardinalnosti mreže na skupu  $\{0, 1, 2\}$ , određena je njena visina, kao i svi submaksimalni klonovi. Poseban odeljak je posvećen enumeraciji baza klona svih ko-operacija i svih maksimalnih klonova, klasičnoj temi u teoriji klonova. U dodacima su navedene tabele kojima se sumiraju rezultati ove glave i dat je opis jednostavnog softverskog alata koji ima ulogu "računarskog atlasa" mreže  $c\mathcal{L}_3$ .

## Z A K L J U Č A K

Komisija smatra da je kandidat u okviru teze ostvario značajne rezultate u jednoj važnoj oblasti diskretne matematike. Komisija visoko ocenjuje postignute rezultate i predlaže Veću Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu da prihvati tezu i kandidatu omogući njenu odbranu.

1. Dr Rozália Sz. Madarász,  
vanredni profesor PMF u Novom Sadu

2. Dr Ratko Tošić,  
redovni profesor PMF u Novom Sadu

3. Dr Rade Doroslovački,  
vanredni profesor FTN u Novom Sadu



**Report**  
on the PhD thesis  
*The Lattice of Clones of Co-Operations*  
(D. Mašulović)

In his thesis D. Mašulović deals mainly with the lattice of clones of co-operations. He develops tools for handling co-operations and presents a lot of interesting results, among them the explicit description of many properties and parts of that lattice (e.g. maximal and minimal clones, embeddings, intervals, chains).

The author investigates also the connection between clones of co-operations and clones of operations and their description via invariant (co-)relations (among this he also found new insights into Csákány's selective operations).

D. Mašulović wanted to perform a research attack to clones of co-operations similar to the development for usual clones of operations. He completely succeeded in this respect. He had chosen the right questions and problems, found the right notions and tools and, finally, was able to answer the problems with brilliant results. In order to do such a huge systematic work it was necessary to restrict somehow: D. Mašulović restricted to such co-algebras which can be described by co-operations (as considered by Drbohlav) and excluded the much more general coalgebras in a general categorical setting.

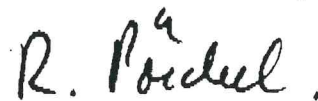
The thesis fulfills more than all requirements for a PhD-thesis. It shows that the author is able to do mathematical research on a high level. There are new and interesting results which are important for the further development. The thesis are written in a good mathematical style. However, one remark should be given: D. Mašulović has a tendency to be perfect, this has the disadvantage that he sometimes cannot stop to enter into more and more topics. Therefore the thesis got a very large size (in my opinion); deleting some parts (and to publish them elsewhere) would not have decreased the quality of the thesis.

The first sentence (of the English version which I do have) in the foreword is  
*This thesis is a modest contribution to the clone theory for co-operations.*

This sentence is a big understatement. The thesis is much more than a *modest* contribution, it contains the best contributions to the subject which are known to me. The theory was much influenced and definitely developed by the results presented by D. Mašulović.

During the last year I was a witness of the genesis of this thesis; more than once I was surprised and excited about the quick progress made by D. Mašulović. I do know several (of course not all) parts of the thesis in detail. Therefore I can say without hesitation: the result is really excellent.

I evaluate the thesis with the mark "very good" (this is the best German mark).



(Prof. Reinhard Pöschel)

Dresden, Oct. 14, 1999

Technische Universität Dresden  
Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften  
Fachrichtung Mathematik  
Institut für Algebra  
Prof. Dr. R. Pöschel  
01062 Dresden