

UNIVERZITET U BEOGRADU
ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET

Nikola Basta

**Efikasno računanje Zomerfeldovih integrala u
slučaju električki velikih struktura u blizini
razdvojne površi dve sredine**

doktorska disertacija

Beograd, 2020.

UNIVERSITY OF BELGRADE
SCHOOL OF ELECTRICAL ENGINEERING

Nikola Basta

**Efficient Computation of Sommerfeld
Integrals in Case of Electrically Large
Structures in Half-space Problems**

Doctoral Dissertation

Belgrade, 2020.

Mentor:

dr Branko Kolundžija, redovni profesor
Univerzitet u Beogradu – Elektrotehnički fakultet

Članovi komisije:

dr Branko Kolundžija, redovni profesor
Univerzitet u Beogradu – Elektrotehnički fakultet

dr Nebojša Dončov, redovni profesor
Univerzitet u Nišu – Elektronski fakultet

dr Dragan Olćan, vanredni profesor
Univerzitet u Beogradu – Elektrotehnički fakultet

dr Nataša Ćirović, vanredni profesor
Univerzitet u Beogradu – Elektrotehnički fakultet

dr Miodrag Tasić, docent
Univerzitet u Beogradu – Elektrotehnički fakultet

Datum odbrane: _____

Zahvalnica

Želim da se zahvalim svom mentoru, prof. dr Branku Kolundžiji, na pruženoj podršci, znanju i stručnim savetima tokom izrade disertacije.

Zahvaljujem se članovima komisije na izdvojenom vremenu i trudu za pregled disertacije.

Zahvaljujem se svojim profesorima i kolegama sa Elektrotehničkog fakulteta u Beogradu prof. dr Draganu Olćanu, prof. dr Milanu Iliću, prof. dr Dejanu Tošiću, prof. dr Milki Potrebić, prof. dr Mariji Nikolić Stevanović, prof. dr Antoniju Đorđeviću, prof. dr Nenadu Cakiću, dr Milošu Đuriću, prof. dr Miljku Eriću, doc. dr Slobodanu Saviću, as. ms Jeleni Dinkić, as. ms Jovani Petrović i as. ms Darku Ninkoviću na stručnoj i moralnoj podršci koju su mi pružili tokom pet godina rada u istraživanju, nastavi i na doktorskim studijama.

Posebno se zahvaljujem doc. dr Miodragu Tasiću i doc. dr Aleksandri Krneti na nesebičnoj pomoći u svim aspektima života i rada na Elektrotehničkom fakultetu i prijatnoj radnoj atmosferi u laboratoriji 63.

Autor

Ani i Nori

Naslov: Efikasno računanje Zomerfeldovih integrala u slučaju električki velikih struktura u blizini razdvojne površi dve sredine

Rezime

U ovom radu predstavljena je nova metoda za efikasno računanje Zomerfeldovih integrala, koji su rezultat dekomponovanja Grinove funkcije potencijala na sumu elementarnih ravnih talasa. Ovakva integralna predstava Grinove funkcije značajna je za rešavanje veoma važne klase elektromagnetskih problema – analiza izvora zračenja u okolini razdvojne površi dve linearne sredine. Iako istraživanje ovog problema traje više od jednog veka, današnji industrijski i tehnološki napredak postavlja nove izazove u numeričkoj elektromagnetskoj analizi problema, naročito sa aspekta tačnosti i efikasnosti u korišćenju računarskih resursa.

Cilj ovog rada jeste razvijanje jednostavne metode za računanje komponenti Grinove funkcije potencijala, polazeći od njihovog egzaktnog integralnog oblika i usvajajući realnu putanju integracije. Zomerfeldov integral koji odgovara skalarnoj Grinovoj funkciji u slobodnom prostoru korišćen je kao referentni rezultat, s obzirom na njegovo poznato analitičko rešenje. Singularitet, u vidu tačke grananja, poništen je primenom korene smene promenljivih, a domen integracije je podeljen na tri karakteristična poddomena. Kvalitativna i kvantitativna analiza podintegralne funkcije, kao i analiza egzaktno izračunate relativne greške omogućavaju razvoj empirijskih formula za procenu potrebnog broja integracionih tačaka za postizanje željene tačnosti integracije.

U slučaju dve sredine, posebno su razmatrani materijali sa malim gubicima, čije prisustvo unosi dodatne tačke grananja u blizini putanje integracije. Uticaj ovog kompleksnog singulariteta potisnut je primenom korene smene u kompleksnom domenu, uz odgovarajuću parametризaciju. Aproksimativnom putanjom integracije u domenu nove promenljive, kao i adaptivnim skraćivanjem intervala integracije dodatno je ubrzana konvergencija. Pomenute tehnike takođe su testirane u kombinaciji sa ekstrakcijom pola podintegralne funkcije u slučaju metamaterijala sa negativnom permitivnošću. Na osnovu sličnosti jezgra integrala za slobodan prostor i onih za rasejani i transmitovani potencijal, primenljivost predikcionih formula je jednostavnim modifikacijama proširena na scenario sa dve linearne sredine.

Predložena metoda je verifikovana numeričkim primerima na širokom opsegu koordinata rastojanja između izvora polja i tačke posmatranja, kao i poređenjem sa drugim metodama.

Ključne reči: numerička analiza, Zomerfeldovi integrali, poništavanje singulariteta, smena promenljivih

Naučna oblast: Elektrotehnika i računarstvo

Uža naučna oblast: Elektromagnetika, antene i mikrotalasi

UDK broj: 621.3

Title: Efficient Computation of Sommerfeld Integrals in Case of Electrically Large Structures in Half-space Problems

Abstract

This work presents a novel method for efficient computation of Sommerfeld integrals that result from plane-wave decomposition of Green's function for potential. Such integral form of Green's function is essential for consideration of an important class of problems in electromagnetics – analysis of radiation source that lies close to the boundary of two linear media. Although this problem has been studied for over a century, today's industrial and technological advancement imposes new demands in its numerical electromagnetic analysis, particularly in terms of accuracy and efficient usage of computer resources.

The aim of this work is development of a simple method for computation of the components of Green's function for potential, starting from their exact integral form and adopting a real integration path. The Sommerfeld integral that is associated with the scalar Green's function in free space is used as a reference, due to availability of its closed-form solution. The branch-point singularity is canceled by means of a square-root change of variables and the integration domain is divided into three distinguished subdomains. The qualitative and quantitative analysis of the integrand, as well as the analysis of the exact relative error enable derivation of empirical formulas that estimate the required number of integration points in order to achieve desired accuracy.

In the treatment of the half-space problem, particular attention is dedicated to low-loss media, the presence of which involves additional branch points in the vicinity of the integration path. The impact of this complex singularity is suppressed by means of change of variables in complex domain, followed by appropriate parameterization. With the aid of approximate integration path in the domain of the new variable and with adaptive truncation of the integration interval, additional acceleration of convergence is achieved. The procedure is also tested along with pole-extraction technique in the case of a metamaterial with negative permittivity.

The presented method is verified through numerical examples for a wide range of source-observation point distances, as well as by comparison to other methods.

Keywords: numerical analysis, Sommerfeld integrals, singularity cancellation, change of variables

Scientific area: Electrical and Computer Engineering

Scientific subarea: Electromagnetics, Antennas and Microwaves

UDC number: 621.3

Sadržaj

1	Uvod	1
1.1	Predmet i značaj istraživanja	1
1.2	Cilj istraživanja	2
1.3	Polazne hipoteze	2
1.4	Očekivani naučni doprinosi	3
1.5	Pregled sadržaja disertacije po poglavljima	3
2	Teorija Zomerfeldovih integrala	4
2.1	Uvod	4
2.2	Integralni oblik Grinove funkcije za rasejani i transmitovani magnetski vektor-potencijal	7
2.2.1	Vertikalni Hercov dipol	7
2.2.2	Horizontalni Hercov dipol	10
2.3	Izrazi za vektore jačine električnog i magnetskog polja	14
3	Zomerfeldov integral za slučaj slobodnog prostora	17
3.1	Uvod	17
3.2	Tehnike za računanje konačnog dela Zomerfeldovog integrala za slobodan prostor	22
3.2.1	Poništavanje singulariteta podintegralne funkcije	22
3.2.2	Određivanje optimalnog intervala drugog poddomena integrala	24
3.2.3	Određivanje praga računanja i gornje granice integrala	25
3.3	Računanje <i>repa</i> integrala	25
3.4	Analiza pojedinačnih poddomena integrala	27
3.4.1	Prvi poddomen konačnog dela integrala	28
3.4.2	Drugi poddomen konačnog dela integrala	33
3.4.3	<i>Rep</i> integrala	36
3.4.4	Minimalna relativna greška	38
3.5	Primeri računanja ukupnog Zomerfeldovog integrala za slobodan prostor	38
3.6	Poređenje rezultata sa drugim metodama	41
3.7	Zaključak	43
4	Zomerfeldovi integrali za slučaj razdvojne površi dve sredine	45
4.1	Uvod	45
4.2	Tehnike za računanje konačnog dela Zomerfeldovog integrala za slučaj razdvojne površi dve sredine	50
4.2.1	Potiskivanje singulariteta podintegralne funkcije	51
4.2.2	Relativna greška	55
4.2.3	Aproksimativna putanja integracije	56
4.2.4	Određivanje praga računanja i granica domena integrala	58
4.3	Analiza pojedinačnih poddomena integrala	58

4.3.1	Predikcione formule	64
4.4	Primeri računanja ukupnog konačnog dela Zomerfeldovog integrala za slučaj razdvojne površi dve sredine	65
4.5	Poređenje sa metodama sa zakrivljenom putanjom integracije	67
4.6	Osvrt na polove i materijale sa negativnom permitivnošću	70
4.7	Zaključak	74
5	Zaključak	76
	Dodatak A Izvođenje integralnog oblika Zomerfeldovog integrala	78
	Dodatak B Polovi podintegralne funkcije Zomerfeldovog integrala	85
	Literatura	89
	Biografija autora	94

1 Uvod

1.1 Predmet i značaj istraživanja

Konstantni razvoj informacionih i komunikacionih tehnologija podstiče nove primene elektromagnetske analize u oblastima kao što su radio komunikacije, radarska tehnika, medicina, daljinsko osmatranje Zemlje itd. Samo mali broj jednostavnih problema se može rešiti analitički, dok se za sve ostale probleme nameće numerički pristup. Pri tome se najčešće polazi od jednačina EM polja i nepoznata veličina se određuje primenom neke od metoda standardno korišćenih u numeričkoj elektromagnetici, kao što su metoda momenata (MoM), metoda konačnih elemenata (FEM), metode konačnih razlika (FD) itd.

Fenomen prostiranja EM talasa duž Zemljine površi je počeo intenzivno da se izučava pronalaskom radija. Važna prekretnica u razumevanju tog fenomena jesu teorijski radovi s početka dvadesetog veka koji su se bavili analitičkim određivanjem polja Hercovog dipola u okolini razdvojne površi vazduha i realnog zemljišta [1–3]. Takođe, u mnogim savremenim primenama (npr. antikolizionni radar na drumskom vozilu na 24 GHz [4], radar za detekciju santi leda na morskoj površi [5] itd.) se susreće problem određivanja polja struja i naelektrisanja koja se nalaze u blizini razdvojne površi dve proizvoljne homogene izotropne i linearne sredine (eng. *half-space problem*). U osnovi ovog problema leži rešavanje tzv. Zomerfeldovih integrala (ZI). Iako se ovi integrali proučavaju već čitav vek, razvoj i unapređenje metoda za njihovo tačno i efikasno računanje je i danas veoma aktuelno, naročito zbog stalno rastućih potreba za: (a) sve većim opsezima radnih frekvencija, (b) rešavanjem električki sve većih problema i (c) povećanjem tačnosti analize [5–8].

Podintegralne funkcije u ZI su singularne i oscilatorne, a sami integrali su nesvojstveni zbog čega je njihovo računanje izuzetno zahtevno. Kako bi se izbegli singulariteti, tj. polovi i tačke grananja podintegralne funkcije, koji mogu biti blizu realne ose, integracija se može vršiti preko deformisane putanje u kompleksnoj ravni. U postojećoj literaturi se tada, umesto direktne integracije duž realne ose [9, 10], najčešće pribegava zakrivljenju početnog konačnog dela putanje integracije u prvi kvadrant kompleksne ravni [11–14]. Pokazuje se da za velika radijalna rastojanja ovakav pristup dovodi do značajne numeričke greške integracije, koja se javlja usled jako velikih vrednosti Beselove funkcije prve vrste za kompleksne argumente [14, 15]. Pored zakrivljenja putanje, u literaturi može pronaći i pristup u kojem se najpre Beselova funkcija u jezgru integrala izrazi preko Henkelove funkcije, a potom integracija vrši preko zatvorene putanje u kompleksnoj ravni. Međutim, ovakav pristup, iako pogodan za određivanje približnih analitičkih rešenja, može dovesti do numeričkih nestabilnosti i za mala radijalna rastojanja [14].

Polovi i tačke grananja u blizini realne ose prouzrokuju velike greške u numeričkom računanju ZI. Problem određivanja polova, kao i efikasnog uračunavanja njihovog uticaja je već analiziran u postojećoj literaturi [9, 11, 13]. Međutim, same tačke grananja nisu dovoljno detaljno proučene [10, 16–19], naročito sa numeričkog aspekta, iako mogu značajno usporiti konvergenciju integracije u mnogim slučajevima od interesa. Posebno treba istaći da u literaturi nije detaljno razmatran slučaj sredina sa malim gubicima, gde su tačke grananja kompleksne i nalaze se jako blizu realne ose, tj. usvojene putanje integracije.

U objavljenim istraživanjima malo pažnje je posvećeno razvijanju posebnih predikcionih formula koje bi za dati tip ZI odredili približan minimalan broj integracionih tačaka koji je potreban da bi se dostigla data tačnost [10]. S obzirom na složenost ZI, takve formule su od izuzetnog značaja za njihovo efikasno računanje, naročito kod metoda integracije koje nisu adaptivnog tipa.

Pored potiskivanja uticaja singulariteta u prvom, konačnom, delu ZI, potrebno je razmotriti i računanje ostatka tzv. repa integrala (eng. *tail*), čiji domen integracije je, analitički gledano, polubeskonačan. Za računanje *repa* razvijeno je više metoda, koje podrazumevaju deo-po-deo integraciju nekom od kvadrature formula, a zatim sumiranje u vidu beskonačnog brojnog niza. Međutim, tek treba ispitati koja od ovih tehnika je najefikasnija za velika aksijalna i/ili radijalna rastojanja. Sem toga, za određivanje granica domena repa integrala u literaturi ne postoje jasne smernice. Pravilna podela domena integracije bi mogla doprineti značajnoj uštedi intergacionih tačaka u slučaju ZI.

1.2 Cilj istraživanja

Glavni cilj ovog rada jeste razvoj jednostavne i robusne numeričke metode za efikasno izračunavanje Zomerfeldovih integrala za slučaj izvora EM polja u prisustvu razdvojne površi dve homogene, linearne i izotropne sredine, sa visokom i kontrolabilnom tačnošću za širok opseg električkog rastojanja od izvora polja do tačke posmatranja. Razvoj ove metode podrazumeva:

- (1) razvoj tehnika za potiskivanje singulariteta usled tačaka grananja podintegralne funkcije ZI, korišćenjem pogodnih smena promenljivih;
- (2) izbor optimalne metode za računanje *repa* integrala i njena primena na velika električka rastojanja;
- (3) određivanje kriterijuma za optimalnu podelu domena integracije, koja minimizira utrošak računarskih resursa (integracionih tačaka);
- (4) razvoj formula za određivanje minimalnog broja integracionih tačaka potrebnog za dostizanje zadate tačnosti.

Ova metoda treba da omogući računanje ZI sa kontrolabilnom tačnošću (do blizu mašinske preciznosti) za aksijalna i radijalna rastojanja od 0 do 1000λ . Time bi se za probleme koji zahtevaju korišćenje Zomerfeldovih integrala omogućilo ne samo značajno efikasnije rešavanje za zadata tačnost, već i za red veličine povećanje maksimalne dimenzije rešivih problema.

1.3 Polazne hipoteze

Ova disertacija je rezultat istraživanja koje se zasniva na sledećim hipotezama:

- (1) singulariteti koji potiču od tačaka grananja prouzrokuju jako velike vrednosti podintegralne funkcije i/ili njenih izvoda i u opštem slučaju se ne mogu izbeći prostim zakrivljenjem putanje integracije;
- (2) singularni uticaj tačaka grananja se može potisnuti korišćenjem pogodnih smena promenljive;

- (3) nakon potiskivanja uticaja singulariteta integracija se može efikasno izvršiti po realnoj osi korišćenjem Gaus-Ležandrove kvadrature formule;
- (4) značajna ušteda računarskih resursa u računanju ZI se može postići izborom optimalne metode za računanje repa, kao i adekvatnom podelom domena integracije koja proizilazi iz numeričkih osobina podintegralnih funkcija;
- (5) zajednički činioci podintegralnih funkcija impliciraju slično ponašanje ZI u smislu konvergencije, iz čega se mogu odrediti generalne predikcione formule, koje približno računaju minimalan potreban broj integracionih tačaka za postizanje zadate tačnosti.

1.4 Očekivani naučni doprinosi

Očekivani naučni doprinosi u ovoj disertaciji su:

- (1) razvoj jednostavne i robusne metode za efikasno numeričko izračunavanje Zomerfeldovih integrala za slučaj izvora u blizini razdvojne površi dve sredine, korišćenjem realne putanje integracije;
- (2) razvoj nove tehnike za poništavanje singularnog uticaja tačke grananja podintegralne funkcije primenom pogodnih smena promenljivih;
- (3) određivanje kriterijuma za optimalnu podelu domena integracije na poddomene, u cilju povećanja efikasnosti integracije;
- (4) konstruisanje formula za proračun minimalnog potrebnog broja integracionih tačaka za zadatau tačnost.

1.5 Pregled sadržaja disertacije po poglavljima

Pregled Zomerfeldove teorije, kao i izvođenja analitičkih izraza, neophodnih za pripremu numeričkog računanja ZI, prikazani su u drugom poglavlju ovog rada

U trećem poglavlju, posebna pažnja je posvećena ZI koji odgovara skalarnoj Grinovoj funkciji potencijala u slobodnom prostoru. Na tom primeru analizirane su kvantitativne i kvalitativne osobine podintegralne funkcije ZI. Definisane su osnove pristupa za njegovu numeričku integraciju i prikazani su numerički rezultati.

U četvrtom poglavlju analizirane su specifičnosti ZI za slučaj izvora u blizini razdvojne površi dve linearne sredine. Razvijanjem posebnih tehnika, formiran je nov pristup rešavanju ZI za širok opseg električkih rastojanja.

U zaključku su istaknute najvažnije osobine, kao i ograničenja predloženog pristupa za numeričko računanje Zomerfeldovih integrala.

2 Teorija Zomerfeldovih integrala

2.1 Uvod

U ovom poglavlju biće izvedene jednačine neophodne za razmatranje problema elementarnog strujnog dipola u blizini razdvojne površi dve linearne sredine. Naime, videćemo da izrazi za rešenje ovog problema nisu u zatvorenom obliku, već su dati kao skup nesvojstvenih integrala koji nemaju analitičko rešenje. S obzirom da je naš pristup numerički i zasnovan na egzaktnom integralnom izrazu [1], u ovom poglavlju ćemo takođe istaći izazove u numeričkom računanju pomenutih integrala.

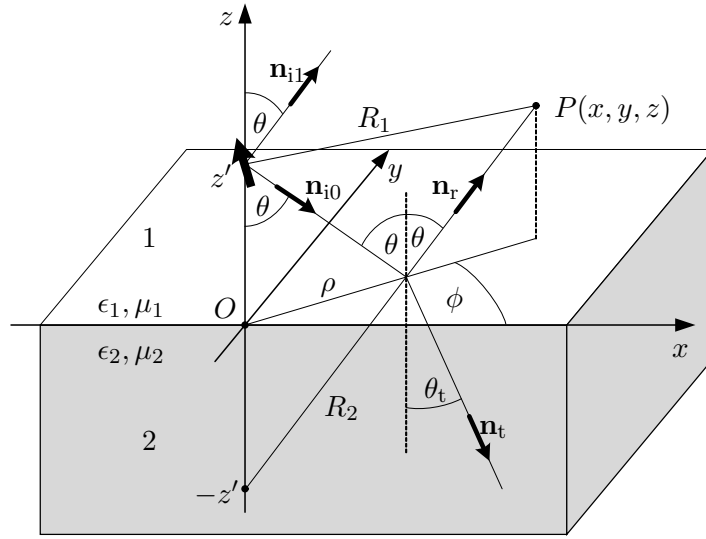
Pionirski rad Zomerfelda [1] bavio se određivanjem elektromagnetskog polja vertikalnog Hercovog dipola smeštenog na površi realnog zemljišta. U tom radu realno zemljište je modelovano kao homogeni poluprostor sačinjen od nesavršenog dielektrika, stoga je razdvojna površ ravan na kojoj je potrebno zadovoljiti granične uslove za tangencijalne komponente vektora jačine električnog i magnetskog polja. Zomerfeldov pristup počiva na pretpostavci da se incidentni sferni talas Hercovog dipola može predstaviti pomoću superpozicije ravnih uniformnih transverzalnih elektromagnetskih (TEM) talasa. Ravni uniformni TEM talasi se pokazuju kao pogodna predstava incidentnog polja, jer omogućavaju lako zadovoljavanje graničnih uslova, što predstavlja glavni izazov u familiji problema izvora zračenja u blizini beskonačne razdvojne površi.

Posmatrajmo proizvoljno orijentisan Hercov dipol dužine Δl , efektivne vrednosti prostoperiodične struje I i učestanosti ω , koji se nalazi u homogenom linearnom pouprostoru (sredina 1) permitivnosti ϵ_1 i permeabilnosti μ_1 , kao na slici 2.1. Dipol se nalazi na z -osi u tački $\mathbf{r}' = (0, 0, z')$, iznad razdvojne površi sa sredinom 2, čija permitivnost i permeabilnost iznose ϵ_2 i μ_2 , respektivno. Neka je naša tačka posmatranja (tačka u kojoj posmatramo polje) data proizvoljnim koordinatama $\mathbf{r} = (x, y, z)$. Potrebno je analitički odrediti izraze za vektore jačine električnog i magnetskog polja u tački $P(x, y, z)$. Problemu pristupamo prateći postupak dat u [6] gde se incidentni sferni talas predstavlja kao superpozicija beskonačno mnogo ravnih talasa, a elektromagnetsko polje se određuje posredstvom magnetskog vektor-potencijala \mathbf{A} . S obzirom na prostoperiodičnu prirodu elementarnih izvora zračenja, problem ćemo analizirati u kompleksnom domenu.

Izraz za incidentni magnetski vektor-potencijal proizvoljno orijentisanog Hercovog dipola glasi

$$\mathbf{A}_i = \frac{\mu_1}{4\pi} I \Delta l g_i, \quad g_i = \frac{e^{-jk_1 R_1}}{R_1}, \quad (2.1)$$

gde je $I \Delta l$ vektor strujnog elementa, $k_1 = \omega \sqrt{\epsilon_1 \mu_1}$ talasni broj u sredini 1, $R_1 = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - z')^2}$, a g_i je Grinova funkcija za potencijal u slobodnom prostoru. Incidentno polje Hercovog dipola će indukovati u sredini 2 sekundarne izvore zračenja (struje i naelektrisanja) koji će za uzvrat prouzrokovati rasejano, tj. reflektovano polje.



Slika 2.1: Proizvoljno orijentisan dipol iznad razdvojne površine dve linearne sredine.

Grinova funkcija za slobodan prostor (2.1) se takođe može predstaviti dvostrukim integralom [2, 6] (videti dodatak A)

$$g_i = -\frac{jk_1}{2\pi} \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}+j\infty} \int_{\phi=-\pi}^{\pi} e^{-jk_1(x \sin \theta \cos \phi + y \sin \theta \sin \phi + |z-z'| \cos \theta)} \sin \theta d\theta d\phi. \quad (2.2)$$

gde su θ i ϕ ugaoone koordinate (slika 2.1). Zbir u zagradi u u izrazu (2.2) možemo zapisati i kao skalarni proizvod $\mathbf{R}_1 \cdot \mathbf{n}$, gde je $\mathbf{R}_1 = x\mathbf{i}_x + y\mathbf{i}_y + (z - z')\mathbf{i}_z$,

$$\mathbf{n} = \begin{cases} \mathbf{n}_{i0} = \sin \theta \cos \phi \mathbf{i}_x + \sin \theta \sin \phi \mathbf{i}_y - \cos \theta \mathbf{i}_z, & z \leq z' \\ \mathbf{n}_{i1} = \sin \theta \cos \phi \mathbf{i}_x + \sin \theta \sin \phi \mathbf{i}_y + \cos \theta \mathbf{i}_z, & z \geq z' \end{cases}, \quad (2.3)$$

Iz ovakvog eksponencijalnog oblika sledi da se dati integral može formalno posmatrati kao beskonačna suma ravnih skalarnih talasa, koji se prostiru duž pravca i smera vektora \mathbf{n} . Primetimo da se integracija po θ vrši u kompleksnoj ravni i da za kompleksno θ rezultujući ravni talasi nisu transverzalni. Putanja integracije po θ se obično deli na dva pravolinijska segmenta: realni, od 0 do $\pi/2$, i kompleksni, od $(\frac{\pi}{2} + j0)$ do $(\frac{\pi}{2} + j\infty)$. Dalje, integracijom po uglu ϕ dobijamo integralni oblik Grinove funkcije za incidentni potencijal (videti dodatak A)

$$g_i = -jk_1 \int_0^{\frac{\pi}{2}+j\infty} J_0(\rho k_\rho) e^{-k_1|z-z'| \cos \theta} \sin \theta d\theta, \quad (2.4)$$

gde je ρ radijalna koordinata u cilindričnom koordinatnom sistemu

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (2.5)$$

Uvođenjem smene

$$k_\rho = k_1 \sin \theta, \quad (2.6)$$

dobija se Zomerfeldov identitet

$$g_i = \frac{e^{-jk_1 R_1}}{R_1} = \int_0^\infty J_0(\rho k_\rho) e^{-|z-z'|\sqrt{k_\rho^2 - k_1^2}} \frac{k_\rho dk_\rho}{\sqrt{k_\rho^2 - k_1^2}}, \quad (2.7)$$

pri čemu kompleksna korena funkcija u (2.7) uzima vrednosti iz glavne grane. Drugim rečima, ako je $w \in \mathbb{C}$ proizvoljan kompleksni broj, onda se za broj $u = \sqrt{w}$ može napisati

$$\operatorname{Re}\{u\} \geq 0, \quad \arg\{u\} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad (2.8)$$

odakle sledi da je $\sqrt{-1} = +j$. Odabir ove grane, čiji zasek je definisan polupravom u kompleksnoj ravni $(-\infty, 0]$, nije slučajan. Naime, tako definisana korena funkcija nam omogućava da promenljivu k_ρ uvedenu u smeni (2.6) interpretiramo kao algebarsku vrednost horizontalne projekcije talasnog vektora $\mathbf{k}_1 = k_1 \mathbf{n}$, koji odgovara smeru i pravcu fazne brzine ravnog talasa u sredini 1. Sa druge strane, ako korenu funkciju iz izraza (2.7) napišemo kao

$$\gamma_{z1} = \sqrt{k_\rho^2 - k_1^2} = j\sqrt{k_1^2 - k_\rho^2} = jk_{z1}, \quad (2.9)$$

možemo $k_{z1} = k_1 \cos \theta$ interpretirati kao algebarsku vrednost vertikalne projekcije talasnog vektora \mathbf{k}_1 .

Interakcija incidentnog sfernog talasa sa razdvojnjom površi se sada, posredstvom Zomerfeldovog identiteta, može razmatrati pomoću incidentnih, reflektovanih i transmitovanih ravnih talasa. Na toj površi, tj. u ravni određenoj sa $z = 0$, potrebno je zadovoljiti granične uslove za resultantno električno i magnetsko polje. Vektore jačine električnog i magnetskog polja možemo izraziti preko magnetskog vektor-potencijala. Ukupno električno polje jednako je zbiru indukovano i električnog polja usled viška naelektrisanja

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_{\text{ind}} + \mathbf{E}_Q \\ &= -j\omega \mathbf{A} - \operatorname{grad} V, \end{aligned} \quad (2.10)$$

gde je V električni skalar-potencijal. Koristeći Lorencov uslov $\operatorname{div} \mathbf{A} = -j\omega \epsilon \mu V$ i vezu magnet-skog vektor-potencijala i vektora magnetske indukcije $\operatorname{rot} \mathbf{A} = \mathbf{B}$, za linearnu sredinu dobijamo izraze za vektore električnog i magnetskog polja

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -j\omega \left[\mathbf{A} + \frac{1}{k^2} \operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{A}) \right], \\ \mathbf{H} &= \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{A}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

gde je $k = \omega \sqrt{\epsilon \mu}$, a ϵ i μ su permitivnost i permeabilnost proizvoljne homogene linearne sredine.

2.2 Integralni oblik Grinove funkcije za rasejani i transmitovani magnetski vektor-potencijal

Rezultantni potencijal u sredini 1 jednak je zbiru incidentnog i rasejanog potencijala, a u sredini 2 transmitovanom potencijalu:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_1 &= \mathbf{A}_i + \mathbf{A}_r, \\ \mathbf{A}_2 &= \mathbf{A}_t.\end{aligned}\tag{2.12}$$

Za određivanje Grinove funkcije rasejanog, odnosno transmitovanog potencijala, potrebno je rešiti sistem diferencijalnih jednačina koje slede iz graničnih uslova za tangencijalne komponente vektora jačine električnog i magnetskog polja datih izrazima (2.11). Rešavanjem sistema jednačina i pretpostavljanjem pogodnih integralnih oblika rasejanog i transmitovanog potencijala određuju se nepoznati koeficijenti refleksije i transmisije, koji se direktno mogu primeniti na Grinovu funkciju predstavljenu sumom elementarnih ravnih talasa. Problem određivanja potencijala proizvoljno orijentisanog Hercovog dipola se svodi na određivanje potencijala dve ortogonalne komponente Hercovog dipola. Bez umanjenja opštosti, problem se može dekomponovati na komponentu vertikalnog i horizontalnog Hercovog dipola.

2.2.1 Vertikalni Hercov dipol

Neka je Hercov dipol sa slike 2.1 vertikalno orijentisan i definisan strujnim elementom $I\Delta l = I\Delta l \mathbf{i}_z$. Tada je incidentni magnetski vektor-potencijal

$$\mathbf{A}_i = A_i \mathbf{i}_z = \frac{\mu_1}{4\pi} I\Delta l g_i \mathbf{i}_z.\tag{2.13}$$

Rasejani i transmitovani potencijal se mogu predstaviti kao

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_r &= \frac{\mu_1}{4\pi} I\Delta l g_{r,zz} \mathbf{i}_z, \\ \mathbf{A}_t &= \frac{\mu_2}{4\pi} I\Delta l g_{t,zz} \mathbf{i}_z,\end{aligned}\tag{2.14}$$

gde su $g_{r,zz}$ i $g_{t,zz}$ odgovarajuće Grinove funkcije. Na osnovu Snelovog zakona i Grinove funkcije za slobodan prostor koja je predstavljena pomoću sume elementarnih ravnih talasa (2.2), za rasejani i transmitovani potencijal može se pretpostaviti sličan integralni oblik Grinovih funkcija, koji ćemo sada razmotriti.

Elementarni reflektovani ravni talasi odbijaju se pod istim uglom θ kao i incidentni iz pod-integralne funkcije (2.2). Stoga je eksponencijalni faktor koji karakteriše propagaciju elementarnih reflektovanih talasa dat izrazom $e^{-jk_1 \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}_r}$, gde je

$$\mathbf{n}_r = \sin \theta \cos \phi \mathbf{i}_x + \sin \theta \sin \phi \mathbf{i}_y + \cos \theta \mathbf{i}_z\tag{2.15}$$

ort koji određuje pravac i smer prostiranja reflektovanih talasa. Konačno, u izrazu za reflektovani talas figuriše i faktor $R'_{zz}(k_\rho)$, koji predstavlja generalisani koeficijent refleksije za z -komponentu potencijala i smatraćemo ga, zasad, nepoznatom funkcijom. Sumiranjem (inte-

graljenjem) svih reflektovanih talasa dobijamo

$$g_{r,zz} = -\frac{jk_1}{2\pi} \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}+j\infty} \int_{\phi=-\pi}^{\pi} R'_{zz}(\theta) e^{-jk_1(x \sin \theta \cos \phi + y \sin \theta \sin \phi + z \cos \theta)} \sin \theta d\theta d\phi. \quad (2.16)$$

Kao i u postupku za incidentni potencijal, integraljenjem po ϕ i uvođenjem smene (2.6), dobija se Zomerfeldov oblik Grinove funkcije za rasejani potencijal vertikalnog Hercovog dipola

$$g_{r,zz} = \int_0^{\infty} R'_{zz}(k_\rho) J_0(\rho k_\rho) e^{-\gamma_{z1} z} \frac{k_\rho dk_\rho}{\gamma_{z1}}. \quad (2.17)$$

Ako uvedemo novu funkciju $R_{zz}(k_\rho) = R'_{zz}(k_\rho) e^{\gamma_{z1} z'}$, onda je

$$g_{r,zz} = \int_0^{\infty} R_{zz}(k_\rho) J_0(\rho k_\rho) e^{-\gamma_{z1}(z+z')} \frac{k_\rho dk_\rho}{\gamma_{z1}}. \quad (2.18)$$

Analogno prethodnom izvođenju, u izrazu za transmitovani potencijal sumiraju se elementarni transmitovani talasi. Transmitovani talasi se kreću u pravcu i smeru orta \mathbf{n}_t i to kroz sredinu 2, pa je eksponencijalni faktor koji karakteriše propagaciju $e^{-jk_2 \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}_t}$, gde je

$$\mathbf{n}_t = \sin \theta_t \cos \phi \mathbf{i}_x + \sin \theta_t \sin \phi \mathbf{i}_y - \cos \theta_t \mathbf{i}_z, \quad (2.19)$$

a ugao prelamanja θ_t sledi iz Snelovog zakona

$$k_2 \sin \theta_t = k_1 \sin \theta, \quad (2.20)$$

gde je $k_2 = \omega \sqrt{\epsilon_2 \mu_2}$ talasni broj u sredini 2. Sledi integralni oblik transmitovanog potencijala

$$g_{t,zz} = -\frac{jk_1}{2\pi} \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}+j\infty} \int_{\phi=-\pi}^{\pi} T'_{zz}(\theta) e^{-jk_2(x \sin \theta_t \cos \phi + y \sin \theta_t \sin \phi - z \cos \theta_t)} \sin \theta d\theta d\phi, \quad (2.21)$$

gde je $T'_{zz}(\theta)$ nepoznati generalisani koeficijent transmisije za z -komponentu potencijala. Korišćenjem smene (2.6), relacije (2.20) i integraljenjem po ϕ dobijamo Zomerfeldov oblik transmitovanog potencijala vertikalnog Hercovog dipola

$$g_{t,zz} = \int_0^{\infty} T'_{zz}(k_\rho) J_0(\rho k_\rho) e^{\gamma_{z2} z} \frac{k_\rho dk_\rho}{\gamma_{z1}}, \quad (2.22)$$

gde je

$$\gamma_{z2} = \sqrt{k_\rho^2 - k_2^2} = j\sqrt{k_2^2 - k_\rho^2} = jk_{z2}. \quad (2.23)$$

Uvođenjem pomoćne funkcije $T_{zz}(k_\rho) = T'_{zz}(k_\rho)e^{\gamma_{z1}z'}$ dobija se nešto jednostavniji izraz.

$$g_{t,zz} = \int_0^\infty T_{zz}(k_\rho) J_0(\rho k_\rho) e^{-\gamma_{z1}z' + \gamma_{z2}z} \frac{k_\rho dk_\rho}{\gamma_{z1}}. \quad (2.24)$$

Pomoću graničnih uslova možemo odrediti nepoznate funkcije $R_{zz}(k_\rho)$ i $T_{zz}(k_\rho)$. Tangencijalne komponente vektora jačine električnog i magnetskog polja na razdvojnoj površi su u cilindričnom koordinatnom sistemu date izrazima $\mathbf{E}_{\text{tan}} = E_\rho \mathbf{i}_\rho + E_\phi \mathbf{i}_\phi$ i $\mathbf{H}_{\text{tan}} = H_\rho \mathbf{i}_\rho + H_\phi \mathbf{i}_\phi$, respektivno. Pošto vertikalni Hercov dipol proizvodi magnetski vektor-potencijal koji ima samo z -komponentu, iz (2.11) određujemo algebarske vrednosti tangencijalnih komponenti polja

$$\begin{aligned} E_\rho &= -j\omega \frac{\mu}{4\pi} I \Delta l \left[\frac{1}{k^2} \frac{\partial^2 g(\rho, z)}{\partial \rho \partial z} \right], & E_\phi &= 0, \\ H_\phi &= \frac{I \Delta l}{4\pi} \left[-\frac{\partial g(\rho, z)}{\partial \rho} \right], & H_\rho &= 0, \end{aligned} \quad (2.25)$$

gde je prema (2.12)

$$g(\rho, z) = \begin{cases} g_1 = g_i + g_{r,zz}, & \text{u sredini 1} \\ g_2 = g_{t,zz}, & \text{u sredini 2} \end{cases}, \quad (2.26)$$

ukupna Grinova funkcija potencijala. Na razdvojnoj površi sredina 1 i 2, na kojoj nema kondukcionih struja, važi

$$\begin{aligned} E_{\text{tan1}} = E_{\text{tan2}} &\Rightarrow \frac{\mu_1}{k_1^2} \frac{\partial^2 (g_i + g_{r,zz})}{\partial \rho \partial z} = \frac{\mu_2}{k_2^2} \frac{\partial^2 g_{t,zz}}{\partial \rho \partial z}, \\ H_{\text{tan1}} = H_{\text{tan2}} &\Rightarrow \frac{\partial (g_i + g_{r,zz})}{\partial \rho} = \frac{\partial g_{t,zz}}{\partial \rho}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Ako izraz (2.27) integralimo u granicama od ρ do ∞ dobijamo

$$\begin{aligned} \mu_1 k_2^2 \frac{\partial g_1}{\partial z} &= \mu_2 k_1^2 \frac{\partial g_{t,zz}}{\partial z}, \\ g_1 &= g_{t,zz}, \end{aligned} \quad (2.28)$$

a uvrščivanjem (2.7), (2.18) i (2.24) dobijamo dve integralne jednačine

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \left[\mu_1 k_2^2 \gamma_{z1} (1 - R_{zz}(k_\rho)) - \mu_2 k_1^2 \gamma_{z2} T_{zz}(k_\rho) \right] J_0(\rho k_\rho) e^{-\gamma_{z1}z'} \frac{k_\rho dk_\rho}{\gamma_{z1}} &= 0, \\ \int_0^\infty \left[1 + R_{zz}(k_\rho) - T_{zz}(k_\rho) \right] J_0(\rho k_\rho) e^{-\gamma_{z1}z'} \frac{k_\rho dk_\rho}{\gamma_{z1}} &= 0. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Izjednačavanjem izraza u uglastim zagradama sa nulom, sledi sistem od dve algebarske jednačine

po $R_{zz}(k_\rho)$ i $T_{zz}(k_\rho)$, čije rešenje glasi

$$R_{zz}(k_\rho) = \frac{\mu_1 k_2^2 \gamma_{z1} - \mu_2 k_1^2 \gamma_{z2}}{\mu_1 k_2^2 \gamma_{z1} + \mu_2 k_1^2 \gamma_{z2}}, \quad (2.30)$$

$$T_{zz}(k_\rho) = \frac{2\mu_1 k_2^2 \gamma_{z1}}{\mu_1 k_2^2 \gamma_{z1} + \mu_2 k_1^2 \gamma_{z2}}.$$

Konačno, integralni oblik Grinovih funkcija rasejanog i transmitovanog potencijala glasi

$$g_{r,zz} = \int_0^\infty \frac{\mu_1 k_2^2 \gamma_{z1} - \mu_2 k_1^2 \gamma_{z2}}{\mu_1 k_2^2 \gamma_{z1} + \mu_2 k_1^2 \gamma_{z2}} J_0(\rho k_\rho) e^{-\gamma_{z1}(z+z')} \frac{k_\rho dk_\rho}{\gamma_{z1}}, \quad (2.31)$$

$$g_{t,zz} = \int_0^\infty \frac{2\mu_1 k_2^2 \gamma_{z1}}{\mu_1 k_2^2 \gamma_{z1} + \mu_2 k_1^2 \gamma_{z2}} J_0(\rho k_\rho) e^{-\gamma_{z1}z' + \gamma_{z2}z} \frac{k_\rho dk_\rho}{\gamma_{z1}}. \quad (2.32)$$

2.2.2 Horizontalni Hercov dipol

Pretpostavimo da je Hercov dipol sa slike (2.1) orijentisan horizontalno, tako da je paralelan x -osi. Tada je incidentni magnetski vektor-potencijal

$$\mathbf{A}_i = A_i \mathbf{i}_x = \frac{\mu_1}{4\pi} I \Delta l g_i \mathbf{i}_x, \quad (2.33)$$

gde g_i ima isti oblike kao u (2.7). Sledeći [6, 20], usvajamo pretpostavku da se granični uslovi mogu zadovoljiti potencijalom koji ima dve komponente, naime x i z . Uvođenjem novih Grinovih funkcija, rasejani i transmitovani potencijal izražavamo na sledeći način

$$\mathbf{A}_r = \frac{\mu_1}{4\pi} I \Delta l (g_{r,xx} \mathbf{i}_x + g_{r,zx} \mathbf{i}_z), \quad (2.34)$$

$$\mathbf{A}_t = \frac{\mu_2}{4\pi} I \Delta l (g_{t,xx} \mathbf{i}_x + g_{t,zx} \mathbf{i}_z). \quad (2.35)$$

Grinove funkcije $g_{r,xx}$, $g_{t,xx}$, $g_{r,zx}$ i $g_{t,zx}$ predstavljaju odzive odgovarajućih komponenti potencijala na x -orijentisani Hercov dipol.

Na isti način kao u prethodnom odeljku uvodimo nepoznate generalisane koeficijente refleksije i transmisije i modifikujemo eksponencijalni faktor u odnosu na Grinovu funkciju za slobodan prostor. Za x -komponentu potencijala Zomerfeldov oblik funkcija $g_{r,xx}$ i $g_{t,xx}$ glasi

$$g_{r,xx} = \int_0^\infty R_{xx}(k_\rho) J_0(\rho k_\rho) e^{-\gamma_{z1}(z+z')} \frac{k_\rho dk_\rho}{\gamma_{z1}}, \quad (2.36)$$

$$g_{t,xx} = \int_0^\infty T_{xx}(k_\rho) J_0(\rho k_\rho) e^{-\gamma_{z1}z' + \gamma_{z2}z} \frac{k_\rho dk_\rho}{\gamma_{z1}}. \quad (2.37)$$

Za naš pretpostavljeni oblik potencijala, tangencijalne komponente električnog i magnetskog

polja za obe sredine slede iz (2.11)

$$\begin{aligned} E_x &= -j\omega \frac{\mu}{4\pi} I\Delta l \left[g_x + \frac{1}{k^2} \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} \mathbf{g} \right], & H_x &= \frac{I\Delta l}{4\pi} \frac{\partial g_z}{\partial y}, \\ E_y &= -j\omega \frac{\mu}{4\pi} I\Delta l \left[\frac{1}{k^2} \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{div} \mathbf{g} \right], & H_y &= \frac{I\Delta l}{4\pi} \left(\frac{\partial g_x}{\partial y} - \frac{\partial g_z}{\partial x} \right), \end{aligned} \quad (2.38)$$

gde je

$$\mathbf{g} = \begin{cases} \mathbf{g}_1 = (g_i + g_{r,xx})\mathbf{i}_x + g_{r,zx}\mathbf{i}_z, & \text{u sredini 1} \\ \mathbf{g}_2 = g_{t,xx}\mathbf{i}_x + g_{t,zx}\mathbf{i}_z, & \text{u sredini 2} \end{cases} \quad (2.39)$$

Iz graničnih uslova za vektor jačine električnog polja imamo sledeće jednakosti za Grinove funkcije potencijala:

$$\mu_1(g_i + g_{r,xx}) + \frac{\mu_1}{k_1^2} \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} \mathbf{g}_1 = \mu_2 g_{t,xx} + \frac{\mu_2}{k_2^2} \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} \mathbf{g}_2, \quad (2.40)$$

$$\frac{\mu_1}{k_1^2} \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{div} \mathbf{g}_1 = \frac{\mu_2}{k_2^2} \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{div} \mathbf{g}_2. \quad (2.41)$$

Kao u izvođenju za vertikalni Hercov dipol, integracijom izraza (2.41) po y dobijamo

$$\mu_1 k_2^2 \operatorname{div} \mathbf{g}_1 = \mu_2 k_1^2 \operatorname{div} \mathbf{g}_2, \quad (2.42)$$

čijom zamenom u (2.40) dobijamo

$$\mu_1(g_i + g_{r,xx}) = \mu_2 g_{t,xx}. \quad (2.43)$$

Posmatrajući granične uslove za vektor jačine magnetskog polja, imamo

$$\frac{\partial g_{r,zx}}{\partial y} = \frac{\partial g_{t,xx}}{\partial y} \quad (2.44)$$

$$\frac{\partial(g_i + g_{r,xx})}{\partial z} - \frac{\partial g_{r,zx}}{\partial x} = \frac{\partial g_{t,xx}}{\partial z} - \frac{\partial g_{t,zx}}{\partial x} \quad (2.45)$$

Integraljenjem po y dobijamo jednakost

$$g_{r,zx} = g_{t,zx}. \quad (2.46)$$

Ubacivanjem dobijene jednakosti u (2.45), dobija se

$$\frac{\partial(g_i + g_{r,xx})}{\partial z} = \frac{\partial g_{t,xx}}{\partial z}. \quad (2.47)$$

Jednačine (2.43) i (2.47) omogućavaju određivanje nepoznatih koeficijenata refleksije i transmisije za x -komponentu potencijala. Zamenom (2.7), (2.36) i (2.37) u (2.43) i (2.47) dobijamo sistem jednačina

$$\int_0^\infty \left[\mu_1 \gamma_{z1} (1 - R_{xx}(k_\rho)) - \mu_2 \gamma_{z2} T_{xx}(k_\rho) \right] J_0(\rho k_\rho) e^{-\gamma_{z1} z'} \frac{k_\rho dk_\rho}{\gamma_{z1}} = 0, \quad (2.48)$$

$$\int_0^\infty \left[1 + R_{xx}(k_\rho) - T_{xx}(k_\rho) \right] J_0(\rho k_\rho) e^{-\gamma_{z1} z'} \frac{k_\rho dk_\rho}{\gamma_{z1}} = 0.$$

Ako izraze u uglastim zagradama izjednačimo sa nulom i rešimo ih po $R_{xx}(k_\rho)$ i $T_{xx}(k_\rho)$, sledi

$$R_{xx}(k_\rho) = \frac{\mu_1 \gamma_{z1} - \mu_2 \gamma_{z2}}{\mu_1 \gamma_{z1} + \mu_2 \gamma_{z2}}, \quad (2.49)$$

$$T_{xx}(k_\rho) = \frac{2\mu_1 \gamma_{z1}}{\mu_1 \gamma_{z1} + \mu_2 \gamma_{z2}}. \quad (2.50)$$

Konačni izrazi za horizontalnu, tj. x -komponentu Grinovih funkcija reflektovanog i transmitsovanog potencijala, glase

$$g_{r,xx} = \int_0^\infty \frac{\mu_1 \gamma_{z1} - \mu_2 \gamma_{z2}}{\mu_1 \gamma_{z1} + \mu_2 \gamma_{z2}} J_0(\rho k_\rho) e^{-\gamma_{z1}(z+z')} \frac{k_\rho dk_\rho}{\gamma_{z1}}, \quad (2.51)$$

$$g_{t,xx} = \int_0^\infty \frac{2\mu_1 \gamma_{z1}}{\mu_1 \gamma_{z1} + \mu_2 \gamma_{z2}} J_0(\rho k_\rho) e^{-\gamma_{z1} z' + \gamma_{z2} z} \frac{k_\rho dk_\rho}{\gamma_{z1}}. \quad (2.52)$$

Preostalo je još da odredimo Grinove funkcije za z -komponentu potencijala, $g_{r,zx}$ i $g_{t,zx}$. Na osnovu (2.42) i $\frac{\partial}{\partial x} J_0(u) = -\frac{\partial u}{\partial x} J_1(u)$, možemo napisati

$$\begin{aligned} \mu_1 k_2^2 \frac{\partial g_{r,zx}}{\partial z} - \mu_2 k_1^2 \frac{\partial g_{t,zx}}{\partial z} &= \mu_2 k_1^2 \frac{\partial g_{t,xx}}{\partial x} - \mu_1 k_2^2 \frac{\partial (g_i + g_{r,xx})}{\partial x} \\ &= \cos \phi \left[\mu_2 k_1^2 T_{xx}(k_\rho) - \mu_1 k_2^2 (1 + R_{xx}(k_\rho)) \right] \left(-J_1(\rho k_\rho) \right) e^{-\gamma_{z1} z} \frac{k_\rho^2 dk_\rho}{\gamma_{z1}}, \end{aligned} \quad (2.53)$$

gde je $\cos \phi = x/\rho$ (slika 2.1). Zaključujemo da Grinove funkcije $g_{r,zx}$ i $g_{t,zx}$ treba potražiti u obliku sličnom izrazu (2.53). Stoga pretpostavljamo sledeće integralne oblike pomenutih Grinovih funkcija

$$g_{r,zx} = \cos \phi \int_0^\infty R_{zx}(k_\rho) J_1(\rho k_\rho) e^{-\gamma_{z1}(z+z')} \frac{k_\rho^2 dk_\rho}{\gamma_{z1}} \quad (2.54)$$

$$g_{t,zx} = \cos \phi \int_0^\infty T_{zx}(k_\rho) J_1(\rho k_\rho) e^{-\gamma_{z1} z' + \gamma_{z2} z} \frac{k_\rho^2 dk_\rho}{\gamma_{z1}} \quad (2.55)$$

Kombinujući izraze (2.46), (2.53), (2.54), (2.55) i jednakost $1 + R_{xx}(k_\rho) = T_{xx}(k_\rho)$ dobijamo

dve integralne jednačine,

$$\cos \phi \int_0^\infty \left[-\mu_1 k_2^2 \gamma_{z1} R_{zx}(k_\rho) - \mu_2 k_1^2 \gamma_{z2} T_{zx}(k_\rho) + (\mu_2 k_1^2 - \mu_1 k_2^2) T_{xx}(k_\rho) \right] J_1(\rho k_\rho) e^{-\gamma_{z1} z'} \frac{k_\rho^2 dk_\rho}{\gamma_{z1}} = 0, \quad (2.56)$$

$$\cos \phi \int_0^\infty \left[R_{zx}(k_\rho) - T_{zx}(k_\rho) \right] J_1(\rho k_\rho) e^{-\gamma_{z1}(z+z')} \frac{k_\rho^2 dk_\rho}{\gamma_{z1}} = 0.$$

Ponovo izjednačavamo izraze u uglastim zagradama sa nulom, kako bismo dobili sistem od dve algebarske jednačine. Njihovim rešavanjem dobijamo generalisane koeficijente refleksije i transmisije za vertikalnu komponentu potencijala usled delovanja horizontalnog Hercovog dipola,

$$T_{zx}(k_\rho) = R_{zx}(k_\rho) = \frac{\mu_2 k_1^2 - \mu_1 k_2^2}{\mu_1 k_2^2 \gamma_{z1} + \mu_2 k_1^2 \gamma_{z2}} T_{xx}(k_\rho) = \frac{\mu_2 k_1^2 - \mu_1 k_2^2}{\mu_1 k_2^2 \gamma_{z1} + \mu_2 k_1^2 \gamma_{z2}} \cdot \frac{2\mu_1 \gamma_{z1}}{\mu_1 \gamma_{z1} + \mu_2 \gamma_{z2}}. \quad (2.57)$$

Sada kompletni izrazi za z -komponentu Grinove funkcije rasejanog i transmitovanog potencijala glase

$$g_{r,zx} = \cos \phi \bar{g}_{r,zx} = \cos \phi \int_0^\infty \frac{\mu_2 k_1^2 - \mu_1 k_2^2}{\mu_1 k_2^2 \gamma_{z1} + \mu_2 k_1^2 \gamma_{z2}} \cdot \frac{2\mu_1 \gamma_{z1}}{\mu_1 \gamma_{z1} + \mu_2 \gamma_{z2}} J_1(\rho k_\rho) e^{-\gamma_{z1}(z+z')} \frac{k_\rho^2 dk_\rho}{\gamma_{z1}}, \quad (2.58)$$

$$g_{t,zx} = \cos \phi \bar{g}_{t,zx} = \cos \phi \int_0^\infty \frac{\mu_2 k_1^2 - \mu_1 k_2^2}{\mu_1 k_2^2 \gamma_{z1} + \mu_2 k_1^2 \gamma_{z2}} \cdot \frac{2\mu_1 \gamma_{z1}}{\mu_1 \gamma_{z1} + \mu_2 \gamma_{z2}} J_1(\rho k_\rho) e^{-\gamma_{z1} z' + \gamma_{z2} z} \frac{k_\rho^2 dk_\rho}{\gamma_{z1}}, \quad (2.59)$$

gde su veličine $\bar{g}_{r,zx}$ i $\bar{g}_{t,zx}$ normalizovane Grinove funkcije bez faktora projekcije $\cos \phi$.

2.3 Izrazi za vektore jačine električnog i magnetskog polja

U ovom odeljku ćemo izvesti izraze za vektore jačine električnog i magnetskog polja vertikalnog i horizontalnog Hercovog dipola. Zbog preglednosti, tabelarno ponovo navodimo izraze za incidentni, rasejani i transmitovani magnetski vektor-potencijal,

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{A}_i &= \frac{\mu_1}{4\pi} I \Delta l g_i \mathbf{i}_z, & \mathbf{A}_r &= \frac{\mu_1}{4\pi} I \Delta l g_{r,zz} \mathbf{i}_z, \\ \mathbf{A}_t &= \frac{\mu_2}{4\pi} I \Delta l g_{t,zz} \mathbf{i}_z, \end{aligned} \right\} \text{za vertikalni Hercov dipol,} \quad (2.60)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{A}_i &= \frac{\mu_1}{4\pi} I \Delta l g_i \mathbf{i}_x, & \mathbf{A}_r &= \frac{\mu_1}{4\pi} I \Delta l (g_{r,xx} \mathbf{i}_x + g_{r,zx} \mathbf{i}_z), \\ \mathbf{A}_t &= \frac{\mu_2}{4\pi} I \Delta l (g_{t,xx} \mathbf{i}_x + g_{t,zx} \mathbf{i}_z), \end{aligned} \right\} \text{za horizontalni Hercov dipol.} \quad (2.61)$$

Primenom (2.11) na (2.60) i (2.61), dobijamo konačne izraze za tri komponente polja: incidentno, rasejano i transmitovano.

Incidentno polje vertikalnog dipola je dato sa

$$\mathbf{E}_i = -j\omega \frac{\mu_1}{4\pi} I \Delta l \left\{ \frac{\partial^2 g_i}{\partial z \partial \rho} \mathbf{i}_\rho + \left[g_i + \frac{1}{k_1^2} \frac{\partial^2 g_i}{\partial z^2} \right] \mathbf{i}_z \right\}, \quad (2.62)$$

$$\mathbf{H}_i = \frac{I \Delta l}{4\pi} \left[-\frac{\partial g_i}{\partial \rho} \right] \mathbf{i}_\phi, \quad (2.63)$$

a rasejano i transmitovano polje sa

$$\mathbf{E}_{[r,t]} = -j\omega \frac{\mu_{[1,2]}}{4\pi} I \Delta l \left\{ \frac{\partial^2 g_{[r,t]zz}}{\partial z \partial \rho} \mathbf{i}_\rho + \left[g_{[r,t]zz} + \frac{1}{k_{[1,2]}^2} \frac{\partial^2 g_{[r,t]zz}}{\partial z^2} \right] \mathbf{i}_z \right\}, \quad (2.64)$$

$$\mathbf{H}_{[r,t]} = \frac{I \Delta l}{4\pi} \left[-\frac{\partial g_{[r,t]zz}}{\partial \rho} \right] \mathbf{i}_\phi, \quad (2.65)$$

gde indeksi r i t označavaju rasejano i transmitovano polje, respektivno, a indeksi 1 i 2 prvu, odnosno drugu sredinu.

Za horizontalni dipol, incidentno polje je opisano izrazima

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_i &= -j\omega \frac{\mu_1}{4\pi} I \Delta l \left\{ \cos \phi \left[g_i + \frac{1}{k_1^2} \frac{\partial^2 g_i}{\partial \rho^2} \right] \mathbf{i}_\rho \right. \\ &\quad - \sin \phi \left[g_i + \frac{1}{k_1^2 \rho} \frac{\partial g_i}{\partial \rho} \right] \mathbf{i}_\phi \\ &\quad \left. + \cos \phi \left[\frac{1}{k_1^2} \frac{\partial^2 g_i}{\partial \rho \partial z} \right] \mathbf{i}_z \right\}, \end{aligned} \quad (2.66)$$

$$\mathbf{H}_i = \frac{I\Delta l}{4\pi} \left\{ \sin \phi \left[\frac{\partial g_i}{\partial z} \right] \mathbf{i}_\rho + \cos \phi \left[\frac{\partial g_i}{\partial z} \right] \mathbf{i}_\phi + \left[\frac{\partial g_i}{\partial \rho} \right] \mathbf{i}_z \right\}, \quad (2.67)$$

a rasejano i transmitovano

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{[r,t]} = -j\omega \frac{\mu_{[1,2]}}{4\pi} I\Delta l \left\{ \cos \phi \left[g_{[r,t]xx} + \frac{1}{k_{[1,2]}^2} \left(\frac{\partial^2 g_{[r,t]xx}}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 \bar{g}_{[r,t]zx}}{\partial \rho \partial z} \right) \right] \mathbf{i}_\rho \right. \\ - \sin \phi \left[g_{[r,t]xx} + \frac{1}{k_{[1,2]}^2 \rho} \left(\frac{\partial g_{[r,t]xx}}{\partial \rho} + \frac{\partial \bar{g}_{[r,t]zx}}{\partial z} \right) \right] \mathbf{i}_\phi \\ \left. + \cos \phi \left[\bar{g}_{[r,t]zx} + \frac{1}{k_{[1,2]}^2} \left(\frac{\partial^2 g_{[r,t]xx}}{\partial \rho \partial z} + \frac{\partial^2 \bar{g}_{[r,t]zx}}{\partial z^2} \right) \right] \mathbf{i}_z \right\}, \end{aligned} \quad (2.68)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{[r,t]} = \frac{I\Delta l}{4\pi} \left\{ \sin \phi \left[\frac{\partial g_{[r,t]xx}}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \bar{g}_{[r,t]zx} \right] \mathbf{i}_\rho \right. \\ + \cos \phi \left[\frac{\partial g_{[r,t]xx}}{\partial z} - \frac{\partial \bar{g}_{[r,t]zx}}{\partial \rho} \right] \mathbf{i}_\phi \\ \left. + \left[\frac{\partial g_{[r,t]xx}}{\partial \rho} \right] \mathbf{i}_z \right\}. \end{aligned} \quad (2.69)$$

Napominjemo da je skalarna Grinova funkcija za incidentni potencijal poznata u analitičkom obliku i zajednička je za horizontalni i vertikalni Hercov dipol. Njeni izvodi se, stoga, dobijaju takođe analitički. Grinove funkcije za rasejani i transmitovani potencijal, $g_{t,zz}$, $g_{r,zz}$, $g_{r,xx}$, $g_{t,xx}$, $g_{r,zx}$ i $g_{t,zx}$, kao i njihovi jednostruki i dvostruki parcijalni izvodi, koji figurišu u izrazima za elektromagnetsko polje, odgovaraju različitim Zomerfeldovim integralima. S obzirom na njihovu sličnu strukturu, mogu se predstaviti u generalisanom obliku. Parcijalni izvodi po z koordinati svode se na izvod eksponencijalne funkcije i rezultuju množenjem podintegralne funkcije sa $(-\gamma_z \operatorname{sgn} z)$. Parcijalni izvodi po ρ -koordinati utiču samo na Beselov faktor u podintegralnoj funkciji, pa je tu potrebno koristiti poznate formule za izvode Beselove funkcije prve vrste,

$$\begin{aligned} J'_0(u) &= -J_1(u), \\ J'_1(u) &= J_0(u) - \frac{1}{u} J_1(u), \quad \left(\lim_{u \rightarrow 0} \frac{J_1(u)}{u} = \frac{1}{2} \right). \end{aligned} \quad (2.70)$$

Sada možemo generalisani oblik rasejanog i transmitovanog Zomerfeldovog integrala izraziti kao

$$S_{[r,t]uv}^{l,m,n}(\rho, z, z') = \int_0^\infty K(k_\rho) J_l(\rho k_\rho) e^{-\gamma_{z1}|z'| - \gamma_z|z|} (-\gamma_{z[1,2]} \operatorname{sgn} z)^m \frac{k_\rho^n dk_\rho}{\gamma_{z1}}, \quad (2.71)$$

gde je

$$\begin{aligned} K(k_\rho) &= R_{uv}(k_\rho), \quad \gamma_z = \gamma_{z1}, \quad \text{za rasejano polje,} \\ K(k_\rho) &= T_{uv}(k_\rho), \quad \gamma_z = \gamma_{z2}, \quad \text{za transmitovano polje,} \end{aligned} \quad (2.72)$$

$w \in \{zz, xx, zx\}$, $l \in \{0, 1\}$, $m \in \{0, 1, 2\}$ i $n \in \{1, 2, 3\}$. Konačno, pomoću generalisanog oblika ZI možemo zapisati sve Grinove funkcije i njihove parcijalne izvode koje se javljaju u izrazima (2.64), (2.65), (2.68) i (2.69). Integrali za vertikalni Hercov dipol su

$$g_{[r,t]zz} = S_{[r,t]zz}^{0,0,1}, \quad (2.73)$$

$$\frac{\partial g_{[r,t]zz}}{\partial \rho} = -S_{[r,t]zz}^{1,0,2}, \quad (2.74)$$

$$\frac{\partial^2 g_{[r,t]zz}}{\partial \rho \partial z} = -S_{[r,t]zz}^{1,1,2}, \quad (2.75)$$

$$\frac{\partial^2 g_{[r,t]zz}}{\partial z^2} = S_{[r,t]zz}^{0,2,1}, \quad (2.76)$$

a za horizontalni,

$$g_{[r,t]xx} = S_{[r,t]xx}^{0,0,1}, \quad (2.77)$$

$$\frac{\partial g_{[r,t]xx}}{\partial \rho} = -S_{[r,t]xx}^{1,0,2}, \quad (2.78)$$

$$\frac{\partial^2 g_{[r,t]xx}}{\partial \rho^2} = \frac{1}{\rho} S_{[r,t]xx}^{1,0,2} - S_{[r,t]xx}^{0,0,3}, \quad (2.79)$$

$$\frac{\partial^2 g_{[r,t]xx}}{\partial \rho \partial z} = -S_{[r,t]xx}^{1,1,2}, \quad (2.80)$$

$$\frac{\partial g_{[r,t]xx}}{\partial z} = S_{[r,t]xx}^{0,1,1}, \quad (2.81)$$

$$\bar{g}_{[r,t]zx} = S_{[r,t]zx}^{1,0,2}, \quad (2.82)$$

$$\frac{\partial \bar{g}_{[r,t]zx}}{\partial \rho} = S_{[r,t]zx}^{0,0,3} - \frac{1}{\rho} S_{[r,t]zx}^{1,0,2}, \quad (2.83)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{g}_{[r,t]zx}}{\partial \rho \partial z} = S_{[r,t]zx}^{0,1,3} - \frac{1}{\rho} S_{[r,t]zx}^{1,1,2}, \quad (2.84)$$

$$\frac{\partial \bar{g}_{[r,t]zx}}{\partial z} = S_{[r,t]zx}^{1,1,2}, \quad (2.85)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{g}_{[r,t]zx}}{\partial z^2} = S_{[r,t]zx}^{1,2,2}. \quad (2.86)$$

3 Zomerfeldov integral za slučaj slobodnog prostora

3.1 Uvod

U ovom poglavlju razmotrićemo Zomerfeldov integral koji odgovara Grinovoj funkciji magnetskog vektor-potencijala u slobodnom prostoru, tj. incidentnoj Grinovoj funkciji. Ovaj najjednostavniji primer pogodan je za sagledavanje osnovnih osobina ZI sa aspekta numeričke integracije, mada je njegovo rešenje u analitičkom obliku poznato. Upravo to analitičko rešenje biće iskorišćeno za egzaktno određivanje relativne greške u numeričkom izračunavanju integrala. Egzaktno određena relativna greška nam omogućava pouzdanu empirijsku procenu tačnosti, efikasnosti i robusnosti primenjenog pristupa.

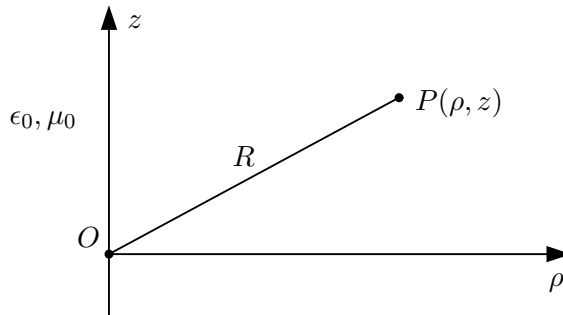
Bez umanjenja opštosti, posmatrajmo slučaj skalarnog sfernog talasa koji se prostire kroz vakuum, a čiji izvor je smešten u koordinatni početak cilindričnog koordinatnog sistema, kao što je prikazano na slici 3.1. Analitički oblik odgovarajuće Grinove funkcije je

$$g_0(\rho, z) = \frac{e^{-jk_0 R}}{R} = \frac{e^{-jk_0 \sqrt{\rho^2 + z^2}}}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}, \quad (3.1)$$

gde je $k_0 = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ talasni broj u vakuumu. Iz Zomerfeldovog identiteta (2.7) sledi integralni oblik,

$$g_0(\rho, z) = \int_0^\infty J_0(\rho k_\rho) e^{-|z| \sqrt{k_\rho^2 - k_0^2}} \frac{k_\rho dk_\rho}{\sqrt{k_\rho^2 - k_0^2}}. \quad (3.2)$$

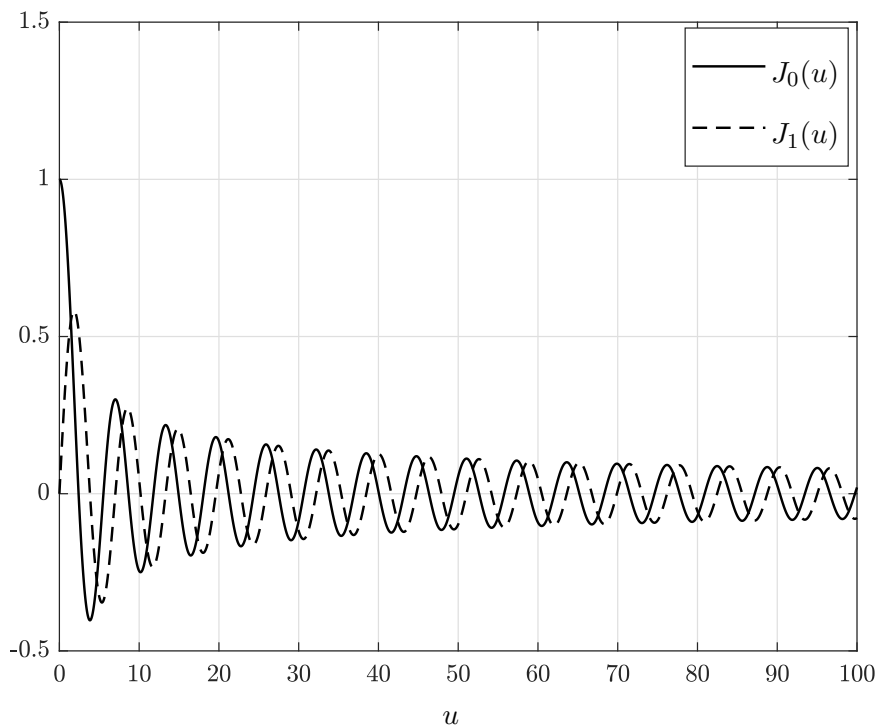
Numeričko izračunavanje integrala (3.2) je izuzetno zahtevno. Radi boljeg razumevanja složenosti problema, analiziraćemo njegovu podintegralnu funkciju. Podintegralna funkcija se sastoji od tri osnovna faktora: Beselove funkcije prve vrste i nultog reda, eksponencijalnog faktora i iracionalnog faktora.



Slika 3.1: Scenario u vakuumu sa skalarnim talasom čiji je izvor u koordinatnom početku.

Beselove funkcije prve vrste imaju oscilatornu prirodu, a njihova anvelopa opada sa povećanjem realnog argumenta (slučaj kompleksnog argumenta Beselove funkcije će biti razmatran u odeljcima 3.6, 4.5 i 4.6). Na slici 3.2 prikazani su grafici Beselovih funkcija prve vrste, nultog i prvog reda. Uočavamo da se brzina opadanja nivoa anvelope smanjuje sa porastom u . Kako su ZI nesvojstveni, tj. gornja granica integracije je beskonačna, korisno je poznavati ponašanje Beselove funkcije prve vrste za velike vrednosti realnog argumenta. Približna asimptotska formula u tom slučaju glasi [21]

$$J_\nu(u) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi u}} \cos\left(u - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \quad u \rightarrow \infty, \quad \nu = 0, 1. \quad (3.3)$$



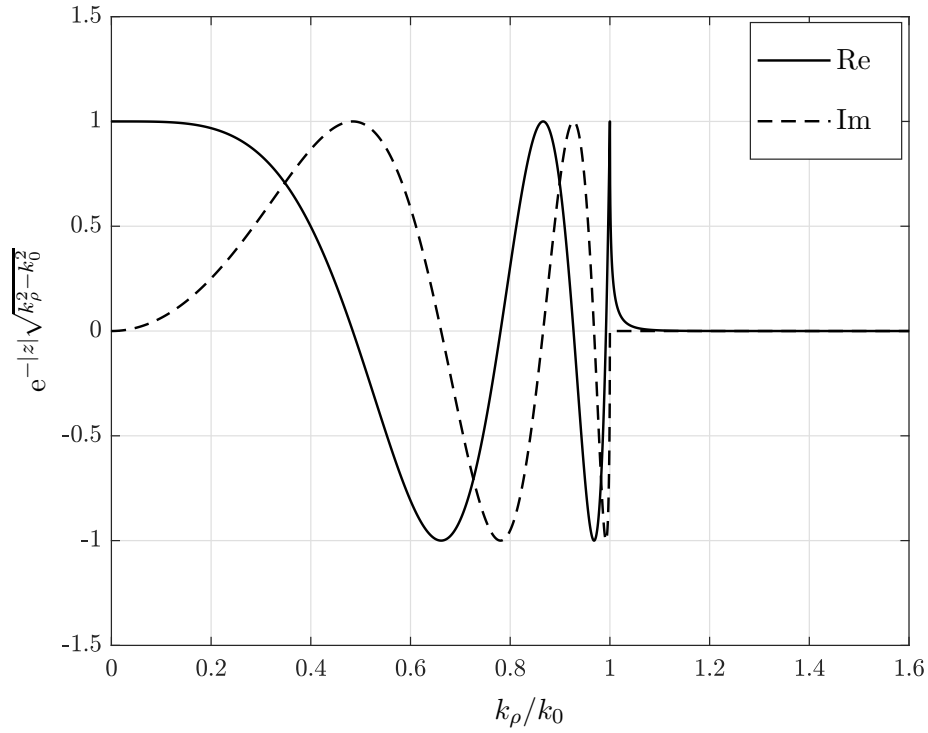
Slika 3.2: Beselove funkcije $J_0(u)$ i $J_1(u)$.

Eksponecijalni faktor u izrazu (3.2) je kompozitna funkcija, a za argument ima korenu funkciju $\sqrt{k_\rho^2 - k_0^2}$. Grafik eksponencijalnog faktora je prikazan na slici 3.3 za $k_\rho \in \mathbb{R}$, $z = 2\lambda_0$, gde je $\lambda_0 = 2\pi/k_0$. Vidimo da je za $k_\rho < k_0$ eksponent čisto imaginaran, pa ovaj faktor ima oscilacije konstantne anvelope, koje se zgušnjavaju porastom argumenta. Ako je $k_\rho \geq k_0$, eksponencijalni faktor postaje realna opadajuća eksponencijalna funkcija. Korena funkcija ima tačke grananja ili algebarski kritički singularitet [22, 23] u $k_\rho = \pm k_0$, pa u njima izvod nije definisan. Ako razmotrimo samo jednu granu korene funkcije, njeni izvodi su beskonačni u datim tačkama. Ovo singularno ponašanje evidentno je na slici 3.3 imajući u vidu oštar ekstremum za $k_\rho = k_0$. Kao što ćemo videti, brze promene funkcije u okolini k_0 zahtevaće mnogo integracionih tačka za dobijanje prihvatljivih vrednosti relativne greške.

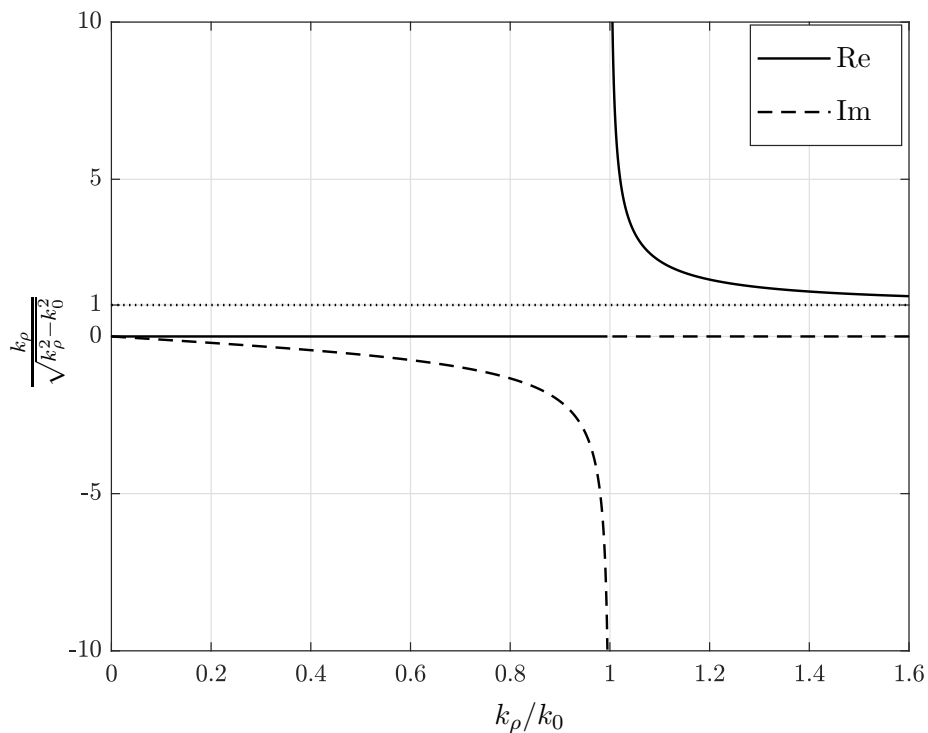
Treći faktor integranda u (3.2) je iracionalna kompleksna funkcija, čiji grafik je prikazan na slici 3.4. U ovom faktoru se ponovo javlja ista korena funkcija $\sqrt{k_\rho^2 - k_0^2}$, ovog puta u imeniocu. Ako argument teži tački grananja, $k_\rho \rightarrow k_0$, integrand teži beskonačnosti. Ovaj singularitet dodatno otežava numeričku integraciju. Pored osobina prekidnosti i singularnosti, ističemo i

graničnu vrednost iracionalnog faktora za veliko k_ρ ,

$$\lim_{k_\rho \rightarrow \infty} \frac{k_\rho}{\sqrt{k_\rho^2 - k_0^2}} = 1. \quad (3.4)$$

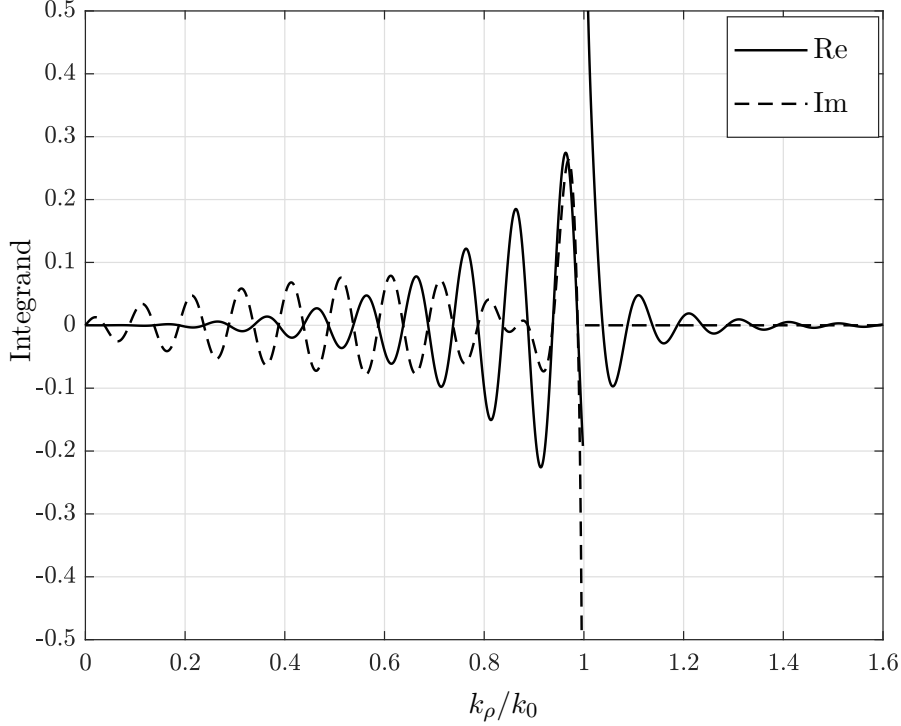


Slika 3.3: Eksponecijalni faktor podintegralne funkcije integrala g_0 za $z = 2\lambda_0$.



Slika 3.4: Iracionalni faktor podintegralne funkcije integrala g_0 .

Posmatrajmo sada združen efekat datih faktora unutar kompletnog integranda. Na slici 3.5 prikazan je primer integranda za $\rho = 10\lambda_0$ i $z = 0,5\lambda_0$. Vidimo da anvelopa integranda raste za $k_\rho \in [0, k_0)$, što ukazuje na jak uticaj iracionalnog faktora, čiji moduo takođe raste u datom intervalu. Možemo primetiti da u istom intervalu postoje oscilacije i kod realnog i kod imaginarnog dela integranda, što je rezultat delovanja Beselove funkcije i eksponencijalne funkcije imaginarnog argumenta. Na intervalu desno od singulariteta, $k_\rho \in (k_0, \infty)$, dominira uticaj eksponencijalne funkcije realnog argumenta, zbog čega anvelopa integranda opada relativno brzo ka nuli.



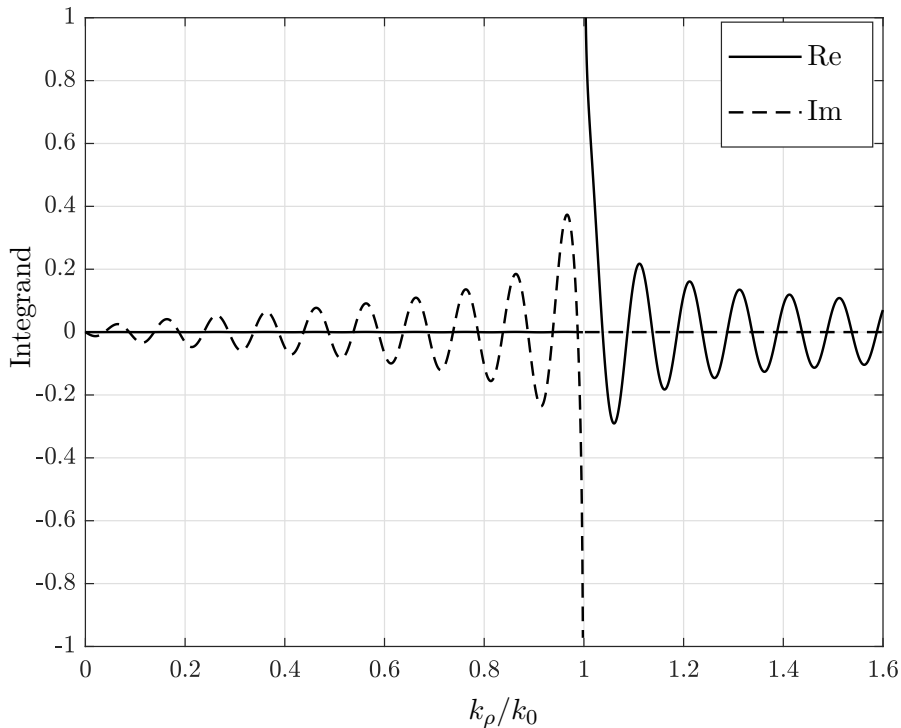
Slika 3.5: Ukupna podintegralna funkcija integrala g_0 za $\rho = 10\lambda_0$ i $z = 0,5\lambda_0$.

U praksi, od posebnog je interesa scenario gde su tačka posmatranja i izvora, u električkom smislu, blizu razdvojne površi, ali daleko jedna od druge, tj. kada je $\rho \gg \lambda_0$ i $|z| \ll \lambda_0$. Tada je uticaj eksponencijalnog faktora praktično zanemarljiv, što rezultuje veoma sporom opadanju nivoa anvelope *repa* integrala, tj. u intervalu $k_\rho \in (0, \infty)$. Primer takvog integranda za $\rho = 10\lambda_0$ i $z = 10^{-3}\lambda_0$, prikazan je na slici 3.6.

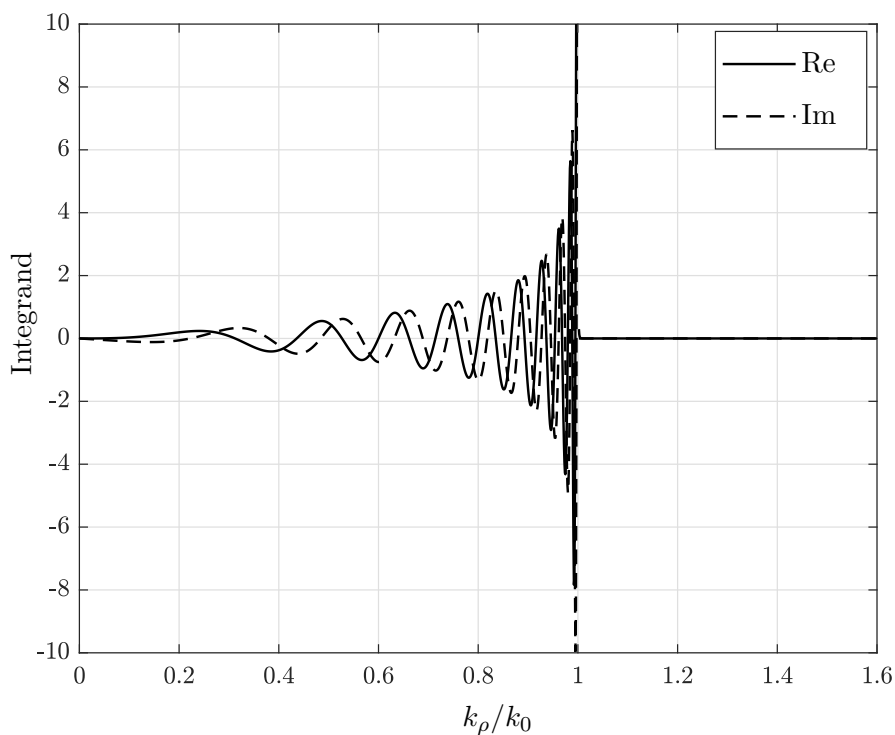
Interesantan je i suprotan slučaj, kada je $\rho \ll |z|$. Na slici 3.7 prikazan je primer integranda za $\rho = 10^{-3}\lambda_0$ i $z = 10\lambda_0$. U ovom slučaju imamo potiskivanje uticaja Beselove funkcije i njena vrednost je praktično jednaka jedinici u posmatranom intervalu. Dominantno z sa jedne strane stvara jake oscilacije koje se zgušnjavaju u okolini singulariteta, a sa druge, prouzrokuje naglo opadanje eksponencijalnog faktora, a time i nivoa anvelope za $k_\rho > k_0$. Tako brza promena funkcije iziskuje veliki broj tzv. integracionih tačaka (čvorova) u kvadraturnim integracionim formulama [24].

Na osnovu prikazane analize, možemo sumirati osnovne izazove u računanju datog Zomerefeldovog integrala po realnoj osi, tj. na intervalu $k_\rho \in [0, \infty)$. Na prvom mestu tu je dualna oscilatorna priroda integranda koja potiče od Beselove i eksponencijalne funkcije. Za veliko električko rastojanje tačke posmatranja, $(\rho \gg \lambda_0) \vee (|z| \gg \lambda_0)$, pojavljuje se veliki broj gustih oscilacija u intervalu $k_\rho \in [0, k_0)$, što iziskuje mnogo integracionih tačaka, odnosno računarskih resursa. Drugi problem jeste singularitet u $k_\rho = k_0$, u čijoj okolini se takođe mora predvideti veliki broj integracionih tačaka. Na tom mestu podintegralna funkcija se izuzetno brzo menja, naročito za $|z| \gg \lambda_0$, kada eksponencijalni faktor u okolini k_0^+ prouzrokuje jaku strminu (ve-

liki prvi izvod). Konačno, *rep* integrala ima teorijski beskonačnu gornju granicu, zbog čega se mora odabrati mesto *odsecanja*, tj. skraćivanja domena (eng. *truncation*). Za dostizanje željene tačnosti računanja integrala u okviru zadatih računarskih i vremenskih resursa, odsecanje je veoma važno za slučaj malog z , kada anvelopa *repa* sporo opada.



Slika 3.6: Ukupna podintegralna funkcija integrala g_0 za $\rho = 10\lambda_0$ i $z = 10^{-3}\lambda_0$.



Slika 3.7: Ukupna podintegralna funkcija integrala g_0 za $\rho = 10^{-3}\lambda_0$ i $z = 10\lambda_0$.

3.2 Tehnike za računanje konačnog dela Zomerfeldovog integrala za slobodan prostor

Kako bismo savladali sve pomenute izazove numeričkog računanja ZI za slobodan prostor, a kasnije i ostalih ZI, razmotrićemo tehnike koje, u skladu sa ciljevima iz uvoda, formiraju jednostavnu, robusnu i efikasnu metodu numeričke integracije date funkcije. Na ovom mestu navodimo polazne parametre analize integrala (3.2), na osnovu koje ćemo razviti pomenute tehnike.

S obzirom na osetljivost kompleksnih putanja integracije u odnosu na električko rastojanje tačke posmatranja od izvora [12–14], a naš interes jeste širok opseg koordinata ρ i z , realna putanja integracije predstavlja logičan izbor i polaznu pretpostavku problema. Za razliku od kompleksnih putanja koje mogu biti posledica složenih transformacija podintegralne funkcije [14, 25–27], realna putanja ne modifikuje jezgro, a time ni suštinsku prirodu polaznog ZI, zbog čega ovaj izbor doprinosi jednostavnosti usvojenog pristupa.

Zbog svoje pouzdanosti i efikasnosti u računanju integrala [28–30], u ovom radu se oslanjamo na Gaus-Ležandrovu (GL) kvadraturnu formulu (eng. *Gauss-Legendre quadrature*) [24, 31, 32] kao metodu numeričke integracije. Kako je GL metoda u osnovi predviđena za integrale konačnih granica, izvršićemo podelu polubeskonačnog domena integracije ZI na konačne podomene. Uvođenjem pomoćnih oznaka, možemo definisati integral sličan (3.2), samo parametrizovanih granica

$$I(k_{\rho 1}, k_{\rho 2}) = \int_{k_{\rho 1}}^{k_{\rho 2}} J_0(\rho k_{\rho}) e^{-\gamma_{z0}|z|} \frac{k_{\rho} dk_{\rho}}{\gamma_{z0}}, \quad (3.5)$$

gde je $\gamma_{z0} = \sqrt{k_{\rho}^2 - k_0^2} = j\sqrt{k_0^2 - k_{\rho}^2} = jk_{z0}$. U cilju kraćeg zapisa, podrazumevaćemo zavisnost integrala I od koordinata ρ i z , iako ona nije eksplicitno iskazana.

Efekat pomenutog singulariteta u tački grananja $k_{\rho} = k_0$ je značajan samo na prvom delu domena. Sa slika 3.5 i 3.6 vidimo da njegov uticaj relativno brzo opada za $k_{\rho} > k_0$. Stoga je pogodno prvu podelu uvesti baš na mestu singulariteta. Sa druge strane, polubeskonačni *rep* integrala ima drugačiju prirodu i zahteva drugačiji pristup od ostatka integrala. Iz tog razloga zgodno je računanje *repa* razmatrati odvojeno, pa dodatnu podelu uvodimo u tački $b > k_0$. Sledi da integral (3.2) možemo izraziti kao sumu tri integrala, $g_0 = I_1 + I_2 + T$, gde je

$$\begin{aligned} I_1 &= I(0, k_0), \\ I_2 &= I(k_0, b), \\ T &= I(b, \infty). \end{aligned} \quad (3.6)$$

3.2.1 Poništavanje singulariteta podintegralne funkcije

Domeni integrala I_1 i I_2 imaju zajedničku granicu, a to je singularna tačka grananja $k_{\rho} = k_0$. Za dobijanje efikasnog numeričkog rešenja ovih integrala, neophodno je poništiti uticaj singulariteta. U literaturi se pojavljuje nekoliko metoda za rešavanje problema tačke grananja, koje su zasnovane na realnoj ili skoro realnoj putanji integracije. U radu [16] primenjena je ekstrakcija singulariteta pomoću razvoja u Tejlrov red, ali predstavljeno rešenje je isuviše komplikovano i nije jasno na koji način zavisi od broja uračunatih članova reda, što nije u skladu sa ciljem dostizanja jednostavne metode integracije sa kontrolisanom tačnošću. Posebno popularna u problemima numeričke integracije jeste dvostruko eksponencijalna kvadraturna formula (eng.

double exponential quadrature formula) [33–37]. Jedna njena varijanta je primenjena u [10], međutim pokazaćemo da i ovaj pristup ima ograničenu primenu kada su u pitanju veliki opsezi električkih rastojanja. Smene promenljivih zasnovane na trigonometrijskim i hiperboličnim funkcijama primenjene su u [6, 17, 19], ali njihova efikasnost sa aspekta numeričke integracije nije detaljno ispitana [38].

U ovom radu, u cilju efikasne integracije koristićemo korenu smenu promenljivih

$$ds = \frac{k_\rho dk_\rho}{\sqrt{k_\rho^2 - k_0^2}}, \quad s = \sqrt{k_\rho^2 - k_0^2}, \quad (3.7)$$

iz čega sledi da je $k_\rho = \sqrt{s^2 + k_0^2}$. Ako smenu primenimo na (3.5), dobijamo

$$I(s_1, s_2) = \int_{s_1}^{s_2} J_0\left(\rho\sqrt{s^2 + k_0^2}\right) e^{-s|z|} ds. \quad (3.8)$$

gde je $s_{1,2} = \sqrt{k_{\rho 1,2}^2 - k_0^2}$. Primitimo da podintegralna funkcija u (3.8) nije singularna. Njeno integraljenje zahteva značajno manje integracionih tačaka nego u slučaju kada se integracija vrši direktno. Putanje integracije u odgovarajućim kompleksnim ravnima pre i posle primene smene su prikazane na slikama 3.8a i 3.8b, respektivno. Singularna tačka $k_\rho = k_0$ u kompleksnoj k_ρ -ravni se slika u nesingularnu tačku $s = 0$ u kompleksnoj s -ravni. Takođe, vidimo da se u s -ravni, prvi poddomen, koji odgovara integralu I_1 , slika u čisto imaginarnu putanju, dok se drugi i treći poddomen, koji odgovaraju integralima I_2 i T , slikaju u čisto realne putanje. Početak *repa* integrala b , se slika u takođe realnu tačku $\sqrt{b^2 - k_0^2}$, za $b > k_0$.

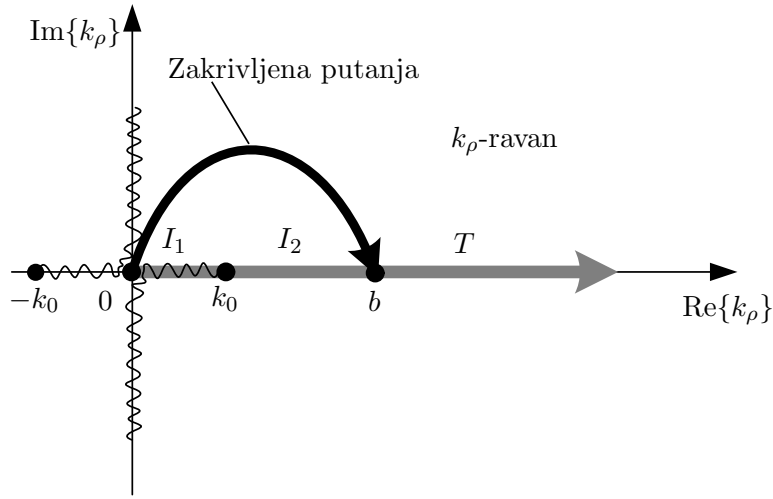
Na slici 3.8a, zaseci višeznačne kompleksne korene funkcije $\gamma_{z0}(k_\rho) = \sqrt{k_\rho^2 - k_0^2}$ su predstavljeni talasastim linijama i definisani su izrazom

$$\operatorname{Re}\{\gamma_{z0}\} = \operatorname{Im}\{k_{0z}\} = 0. \quad (3.9)$$

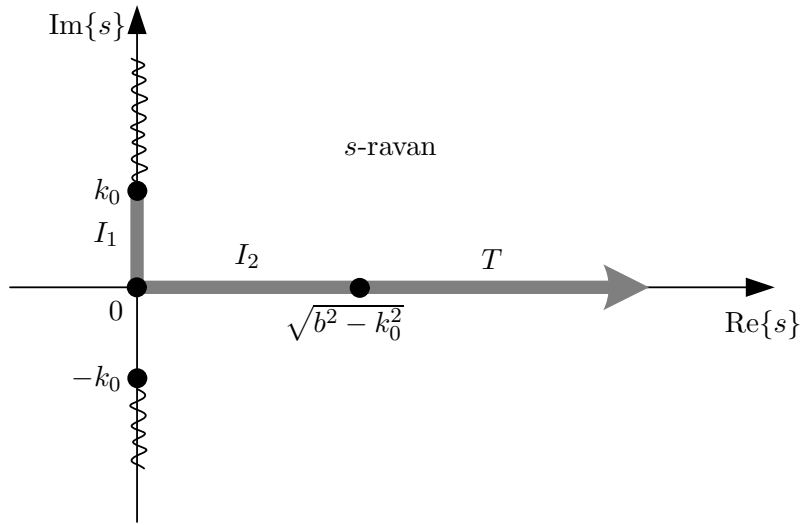
Prvi zasek se sastoji od segmenta na realnoj osi, $\operatorname{Re}\{k_\rho\} \in [0, k_0] \wedge \operatorname{Im}\{k_\rho\} = 0$, i segmenta na imaginarnoj osi, $\operatorname{Re}\{k_\rho\} = 0 \wedge \operatorname{Im}\{k_\rho\} \in (-\infty, 0]$. Drugi zasek se dobija rotacijom prvog za π u kompleksnoj ravni, tj. množenjem sa -1 . Ovakav izbor zaseka je u skladu sa fizičkom interpretacijom talasnog broja k_{0z} . Zaseci definišu granice između tzv. dozvoljenih i zabranjenih zona za k_{0z} , odnosno k_ρ [27, 39]. Naime, usled eksponencijalnog faktora, za $\operatorname{Im}\{k_{0z}\} > 0$, efektivna vrednost ravnih talasa koji figurišu u integralu (3.2) raste do beskonačnosti kada $|z| \rightarrow \infty$. Ova nejednakost definiše zabranjenu zonu (I i III kvadrant). Sa druge strane, ako je $\operatorname{Im}\{k_{0z}\} < 0$, efektivna vrednost ravnih talasa teži nuli sa porastom $|z|$, što definiše dozvoljenu zonu (II i IV kvadrant).

U kompleksnoj s -ravni na slici 3.8b zaseci za korenu funkciju $\sqrt{s^2 + k_0^2}$ su na imaginarnoj osi ($\operatorname{Re}\{s\} = 0$) i opisani su intervalima $\operatorname{Im}\{s\} \in (-\infty, -k_0]$, odnosno $\operatorname{Im}\{s\} \in [k_0, \infty)$. Iako se čini da smo smenom dobili novu korenu funkciju u (3.8), koja ima svoje algebarske kritičke singularitete za $s = \pm jk_0$, pokazaćemo da je prvi izvod novodobijene podintegralne funkcije konačan na preslikanoj putanji integracije u s -ravni. Kako je kritičan argument Beselove funkcije, razmotrićemo samo njen izvod u graničnom slučaju. Primenom izraza (2.70), dobijamo

$$\lim_{s \rightarrow \pm jk_0} \frac{\partial}{\partial s} J_0\left(\rho\sqrt{s^2 + k_0^2}\right) = \lim_{s \rightarrow \pm jk_0} -J_1\left(\rho\sqrt{s^2 + k_0^2}\right) \frac{\rho s}{\sqrt{s^2 + k_0^2}} = \mp jk_0 \frac{\rho^2}{2}. \quad (3.10)$$



(a)



(b)

Slika 3.8: Putanja integracije (siva linija) predstavljena u kompleksnoj ravni za (a) prvobitnu promenljivu k_ρ i (b) novu promenljivu s . Talasaste linije predstavljaju zaseke odgovarajućih korenih funkcija. Crna linija predstavlja zakrivljenu putanju u I kvadrantu.

3.2.2 Određivanje optimalnog intervala drugog poddomena integrala

Gornja granica poddomena nad kojim računamo integral I_2 je istovremeno i donja granica poddomena nad kojim računamo *rep* integrala. S obzirom na opisanu prirodu podintegralne funkcije, za širok opseg koordinati ρ i z , unutar poddomena $k_\rho \in (k_0, b]$ možemo imati pojave koje utiču na strategiju numeričkog računanja. Sa jedne strane, imamo veliki broj oscilacija usled Beselove funkcije, ako je $\rho \gg \lambda_0$, a $|z| \ll \lambda_0$. Sa druge strane, jako mala vrednost podintegralne funkcije za $|z| \gg \lambda_0$ dovodi do trošenja računarskih resursa na računanje funkcije u tačkama koje za zadatu tačnost mogu biti beznačajne u odnosu na konačnu vrednost integrala. Radi veće efikasnosti integracije, neophodno je dati smernice za određivanje granice b .

Jedan od ciljeva ovog rada jeste razvoj metode integracije sa kontrolisanom tačnošću. Sa tim u vezi, poželjno je da imamo što pouzdaniju procenu potrebnog broja integracionih tačaka na svakom od poddomena. Gornju granicu drugog poddomena b možemo definisati tako da broj integracionih tačaka za I_2 što manje zavisi od prostornih koordinati. Na taj način bi naš zadatak procenjivanja potrebnog broja tačaka bio olakšan.

Posmatrajmo slučaj kada je $|z| \ll \lambda_0$. Tada na potreban broj integracionih tačaka direktno utiče broj oscilacija podintegralne funkcije, koji zavisi od koordinate ρ . Da bismo potisnuli tu

zavisnost postavimo b u *prvi ekstremum iza druge nule* Beselove funkcije za $k_\rho > k_0$ [38]. U poddomenu $k_\rho \in (k_0, b]$ očekujemo jednu ili nešto više od jedne pune oscilacije. Sledi da će za zadata tačnost, broj integracionih tačaka za integral I_2 biti relativno mali i praktično nezavistan od ρ . U numeričkim primerima pokazaćemo da je ovako definisano b dovoljno daleko od singulariteta da računanje *repa* integrala ne potpada pod njegov uticaj. Ekstremumi Beselove funkcije mogu se odrediti približno na različite načine – npr. kao srednju vrednost dve susedne nule ili Njutn-Rapsonovom metodom. U ovom radu, za približno određivanje ekstremuma koristili smo aproksimativni izraz Beselove funkcije za veliki realni argument (3.3). Granicu b onda možemo definisati kao

$$b = \left[\left(\left\lfloor \frac{\rho k_0}{2\pi} \right\rfloor + 2 \right) \pi + \frac{\pi}{4} \right] \frac{1}{\rho}, \quad (3.11)$$

gde $\lfloor \cdot \rfloor$ označava zaokruživanje na prvu manju celobrojnu vrednost.

3.2.3 Određivanje praga računanja i gornje granice integrala

U slučaju kada je koordinata z porediva ili veća od λ_0 , usled dejstva eksponencijalnog faktora, za neko $k_\rho > k_{\rho,th}$ vrednost podintegralne funkcije postaje izuzetno mala, a njen doprinos numeričkoj proceni integrala zanemarljiv. S obzirom da faktore integranda čine jednostavne i analitički poznate funkcije, možemo kvantitativno proceniti nivo anvelope integranda u željenom opsegu koordinata rastojanja. Za zadati minimalni prag vrednosti anvelope, može se odrediti i apsolutna gornja granica argumenta $k_{\rho,th}$, do koje vredi numerički računati integral. Skraćivanje domena integrala omogućava odbacivanje nepotrebnog dela *repa*. Međutim, potiskivanje usled dejstva eksponencijalnog faktora može biti toliko veliko, da se skraćivanje desi i pre samog *repa*, tj. u drugom poddomenu, što odgovara slučaju $k_{\rho,th} < b$. Tada kompletno odbacujemo *rep* i deo drugog poddomena $[k_{\rho,th}, b]$, a ukupni integral se svodi na sumu samo dva integrala,

$$g_0 \approx I_1 + I_2 = I(0, k_0) + I(k_0, k_{\rho,th}). \quad (3.12)$$

Za potrebe analize ZI za potencijal u slobodnom prostoru, postavimo fiksni prag vrednosti anvelope na 10^{-30} , koji obezbeđuje dovoljno visoku tačnost. Ekstremumi Beselove funkcije prve vrste i nultog reda manji su od 1 i opadaju sporo ka nuli. Takođe, iracionalni faktor relativno brzo teži jedinici (slika 3.4). Iz priloženog sledi da anvelopu integranda diktira prevashodno eksponencijalni faktor, pa je za zadati prag

$$k_{\rho,th} = \sqrt{k_0^2 + \left(\frac{-30}{|z| \log_{10} e} \right)^2}. \quad (3.13)$$

Iako fiksni prag nije optimalan i ne garantuje maksimalnu uštedu integracionih tačaka, u analizi ovog jednostavnog ZI se pokazao kao prihvatljivo rešenje.

3.3 Računanje *repa* integrala

Kako smo usvojili početak *repa* dovoljno daleko od singulariteta, na poddomenu $[b, \infty)$ nije potrebno primeniti smenu promenljivih, pa *rep* razmatramo isključivo u izvornom integralnom

obliku (3.5). Među metodama za numeričku integraciju *repa*, izdvajamo dva osnovna pristupa. Prema prvom pristupu integracija se vrši na celom poddomenu $[b, \infty)$, koristeći posebnu kvadraturnu formulu [9, 10], što implicitno podrazumeva smenu promenljivih. Smena promenljivih ima zadatak da poništi eventualne singularne tačke i da ubrza sporo opadanje anvelope podintegralne funkcije.

Kod drugog pristupa koriste se kvadraturene formule za konačne domene, zbog čega se polubeskonačni domen deli na konačne segmente. Integrali nad segmentima predstavljaju brojni niz, a njihova suma predstavlja red, koji odgovara vrednosti integrala [40, 41],

$$T = \sum_{k=1}^{\infty} t_k. \quad (3.14)$$

Ovakav pristup se naziva i *integrali-i-sumiraj* (eng. *integrate-and-sum*). Vrednost *repa* integrala T , tj. njemu odgovarajućeg reda se aproksimira parcijalnom sumom T_n ,

$$T \approx \hat{T} = T_n = \sum_{k=1}^n t_k, \quad (3.15)$$

$$t_k = I\left(b + (k-1)\Delta k_\rho, b + k\Delta k_\rho\right),$$

gde je Δk_ρ veličina segmenta, a n broj segmenata.

U dostupnoj literaturi, pristup računanju preko parcijalnih suma je favorizovan i demonstrira bolje performanse od direktne integracije pomoću posebno skrojenih kvadraturenih formula [13, 15]. Stoga ćemo se i u ovom radu fokusirati na metode koje počivaju na parcijalnim sumama, a elemente niza t_k računaćemo primenom GL formule.

Osnovni problem u ovakvom pristupu jeste odrediti pogodan broj sabiraka n , za koji parcijalna suma T_n dovoljno dobro aproksimira integral T . Ponašanje parcijalne sume T_n zavisi od prirode opšteg člana niza t_k , koji nije direktno definisan celobrojnim vrednostima k , kao što je to slučaj kod tipičnih numeričkih ili funkcionalnih redova [42]. Kod *repa* ZI za slobodan prostor, za fiksnu veličinu segmenta $\Delta k_\rho \geq \pi/\rho$ i $\rho > 0$, priroda integranda čini da članovi kompleksnog niza t_k monotono opadaju po modulu i naizmenično menjaju znak, tj. $t_k t_{k+1} < 0$. U tom slučaju T predstavlja alternativni red, kako se najčešće i razmatra. Za drugačiji odabir dužine segmenta Δk_ρ , moguće je dobiti i tzv. red sa proizvoljnim članovima, ali oni nisu pogodni za efikasno numeričko računanje.

Sa aspekta efikasnosti, od interesa je da se pri računanju *repa* koristi što manje segmenata, tj. da se računa što manje *delimičnih* integrala t_k . Konvergencija reda može biti brža ili sporija u zavisnosti od odabira veličine segmenta Δk_ρ . Dalje, konvergencija alternativnih (ali i ostalih) redova je podložna ubrzavanju, koje se postiže transformacijom članova niza, odnosno niza parcijalnih suma. Od brojnih metoda za ubrzavanje konvergencije izdvajamo Etkinovu Δ^2 -proceduru [21], odnosno Šenksovu transformaciju [43], Čezarov metod [19, 44, 45], kao i metod ponderisane aritmetičke sredine (eng. *weighted averages algorithm* – WA) [9, 41, 46]. Na osnovu analize dostupne literature [15, 40, 47] i numeričkih eksperimenata može se zaključiti da (a) integracija nad segmentima dužine jedne poluperiode (pod periodom se podrazumeva kvazi-perioda Beselove funkcije), (b) odabir susednih ekstremuma za granice segmenata i (c) ubrzanje konvergencije pomoću metode WA omogućavaju jednostavno i efikasno računanje *repa* integrala za širok opseg koordinati ρ i $|z|$, zbog čega u ovom radu usvajamo pristup koji počiva na tim zaključcima.

Pored velikog ubrzanja konvergencije koje metoda WA pruža, ističemo i jednostavnost njene

implementacije usled rekurzivne definicije i linearne transformacije na kojoj se zasniva. Ovde ćemo kratko izložiti osnovne veličine korišćenog WA algoritma. Sledeći [40], usvajamo početak poddomena datog jednačinom (3.11) i dužinu segmenta $\Delta k_\rho = \pi/\rho$. Transformacija niza parcijalnih suma je data sa

$$T_n^{(l)} = \frac{T_n^{(l-1)} + \eta_n^{(l-1)} T_{n+1}^{(l-1)}}{1 + \eta_n^{(l-1)}}, \quad \begin{array}{l} 1 \leq n \leq N \\ 1 \leq l \leq n-1 \end{array}, \quad (3.16)$$

gde je l nivo transformacije, N maksimalni broj uračunatih poluperioda koji zavisi od nekog kriterijuma tačnosti, a težinski koeficijent $\eta_n^{(l)}$ je

$$\eta_n^{(l)} = e^{\frac{|z|\pi}{\rho}} \left(1 + \frac{2l}{\frac{b\rho}{\pi} + n} \right). \quad (3.17)$$

Transformisani niz parcijalnih suma $T_n^{(l)}$ brže konvergira od niza $T_n^{(l-1)}$. Sukcesivnom primenom transformacije $N-1$ puta dobija se najbolja procena *repa* integrala,

$$\hat{T} = T_1^{(N-1)}. \quad (3.18)$$

U težinskom koeficijentu u (3.17) figuriše eksponencijalna funkcija koja za veliki količnik $|z|/\rho$ može imati praktično proizvoljno velike vrednosti. Ekstremno veliki brojevi prouzrokuju veliki dinamički opseg, a njihovo sabiranje umanjuje tačnost računanja. U cilju bolje kontrole tačnosti, u ovom radu ograničićemo težinski koeficijent tako da $\eta_n^{(l)}$ ne prelazi vrednosti 10^{10} .

3.4 Analiza pojedinačnih poddomena integrala

U ovom odeljku kvantitativno i kvalitativno su analizirana tri dela ZI sa aspekta relativne greške. Posebno za konačne delove integrala, I_1 i I_2 , posmatran je učinak GL formule u kombinaciji sa smenom promenljivih, koja poništava singularitet u tački grananja, ali ne i oscilatornu prirodu integranda. Pomoću ovakve analize stiče se uvid u kompleksnost i zahtevnost procedure numeričkog računanja ZI sa aspekta resursa potrebnih za postizanje željene tačnosti.

Ako procenu integrala označimo sa X , onda relativnu grešku u odnosu na neku relativnu vrednost X_{ref} možemo izraziti kao

$$\delta = \frac{|X - X_{\text{ref}}|}{|X_{\text{ref}}|}. \quad (3.19)$$

Dodatno definišemo broj tačnih cifara kao

$$\chi = -10 \log_{10} \delta. \quad (3.20)$$

Radi preciznije procene ponašanja relativne greške za različite parametre proračuna, u ovom poglavlju za referentnu vrednost uzimamo egzaktnu vrednost analitičke funkcije ukupnog po-

tencijala [38],

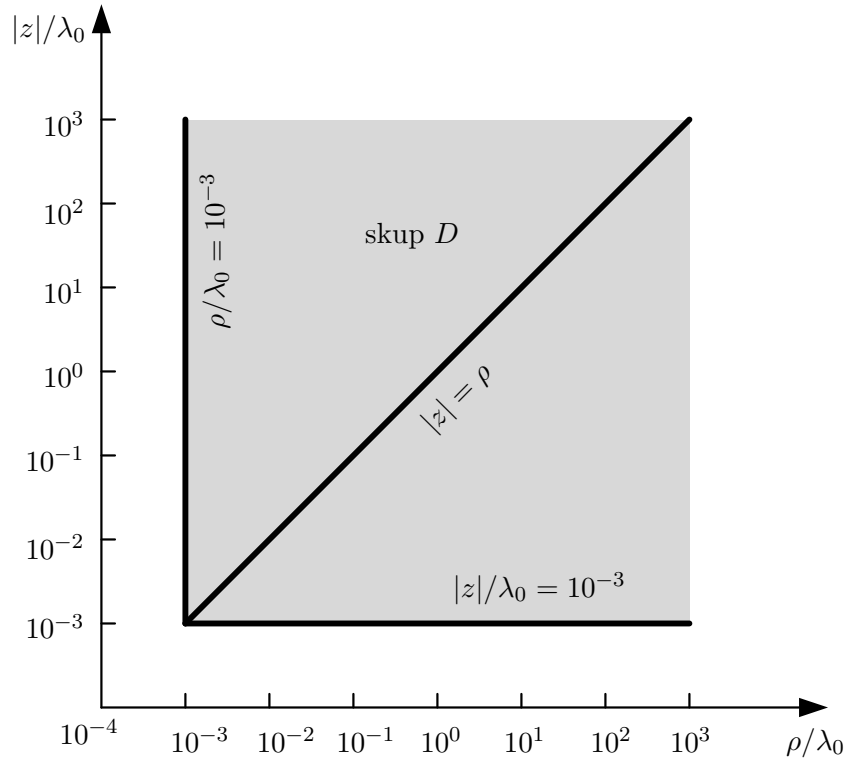
$$X_{\text{ref}} = g_0(\rho, z), \quad (3.21)$$

nezavisno od razmatranog poddomena. Na taj način možemo videti stvarni uticaj pojedinačnih poddomena na ukupnu grešku. Ovo je posebno važno u analizi greške pri proračunu *repa*. Segmenti repa mogu se, zbog dužine od samo jedne poluperiode, lako integraliti sa visokom tačnošću. Međutim, veliki broj segmenata može se odbaciti zbog njihovog zanemarljivog doprinosa u odnosu na g_0 .

Opseg koordinata rastojanja od interesa je dvodimenzionalni skup

$$\left(\frac{\rho}{\lambda_0}, \frac{|z|}{\lambda_0} \right) \in D = [10^{-3}, 10^3] \times [10^{-3}, 10^3], \quad (3.22)$$

čime se obuhvata *dinamika* dimenzija problema od $\sim 10^6$. Posmatraćemo relativnu grešku za različit broj upotrebljenih integracionih tačaka, odnosno segmenata, na tri podskupa skupa D . Podskupovi su određeni dužima $\rho = 10^{-3}\lambda_0$, $\rho = |z|$ i $|z| = 10^{-3}\lambda_0$, kao na što je prikazano na slici 3.9. Ovakav izbor parametara rastojanja omogućiće detaljan uvid u numerička svojstva posmatranog ZI.



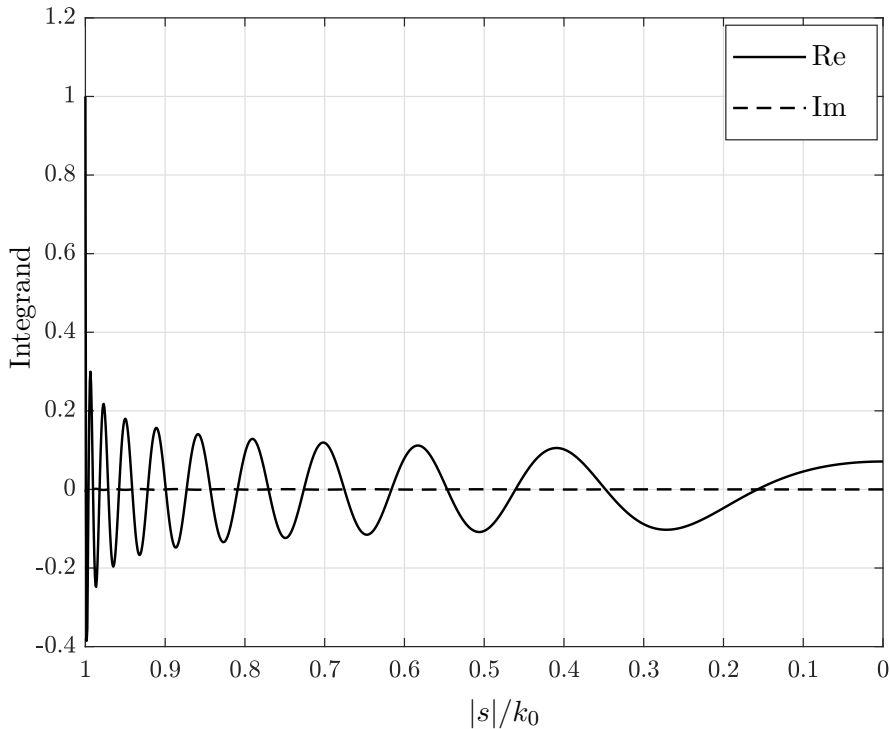
Slika 3.9: Prikaz dvodimenzionalnog skupa D koji predstavlja posmatran opseg koordinati ρ i $|z|$.

3.4.1 Prvi poddomen konačnog dela integrala

U prvom poddomenu izvorna promenljiva se nalazi u intervalu $k_\rho \in [0, k_0]$. Nakon smene promenljivih (3.7), preslikani poddomen je $s \in [jk_0, j0]$, pa integral na prvom poddomenu glasi

$$I_1 = \int_{jk_0}^{j0} J_0\left(\rho\sqrt{s^2 + k_0^2}\right) e^{-s|z|} ds. \quad (3.23)$$

Na slikama 3.10–3.12 prikazani su grafici integranda za različite parametre rastojanja u funkciji normalizovane promenljive s . S obzirom da promenljiva s na datom intervalu ima čisto imaginarnu vrednost koja opada sa porastom k_ρ , tj. duž kompleksne putanje integracije (slika 3.8b), apscisa je prikazana u obrnutom smeru. Dualna oscilatorna priroda integranda je lako uočljiva. Na slici 3.10, gde je prikazan slučaj kada je dominantna Beselova funkcija ($\rho \gg |z|$), oscilacije se zgušnjavaju kako se približavamo početku poddomena, $s = jk_0$. Ako je pak $\rho \ll |z|$, dominira eksponencijalni faktor, i integrand je praktično kompleksna sinusoida (slika 3.12). Sledi da i ρ i $|z|$ doprinose ukupnom broju oscilacija na prvom poddomenu i time direktno utiču na potreban broj integracionih tačaka, odnosno red kvadraturene formule GL.



Slika 3.10: Podintegralna funkcija integrala I_1 nakon smene promenljivih za $\rho = 10\lambda_0$ i $z = 10^{-3}\lambda_0$.

Pošto je GL kvadratura formula definisana za funkcije realnog argumenta, za numerički proračun potrebno je na taj način predstaviti i podintegralnu funkciju. Budući da je naša nova promenljiva s na datom domenu čisto imaginarna, integral se može računati i preko realne promenljive s_{im} , gde je $s = js_{\text{im}}$, pa integral možemo izraziti kao

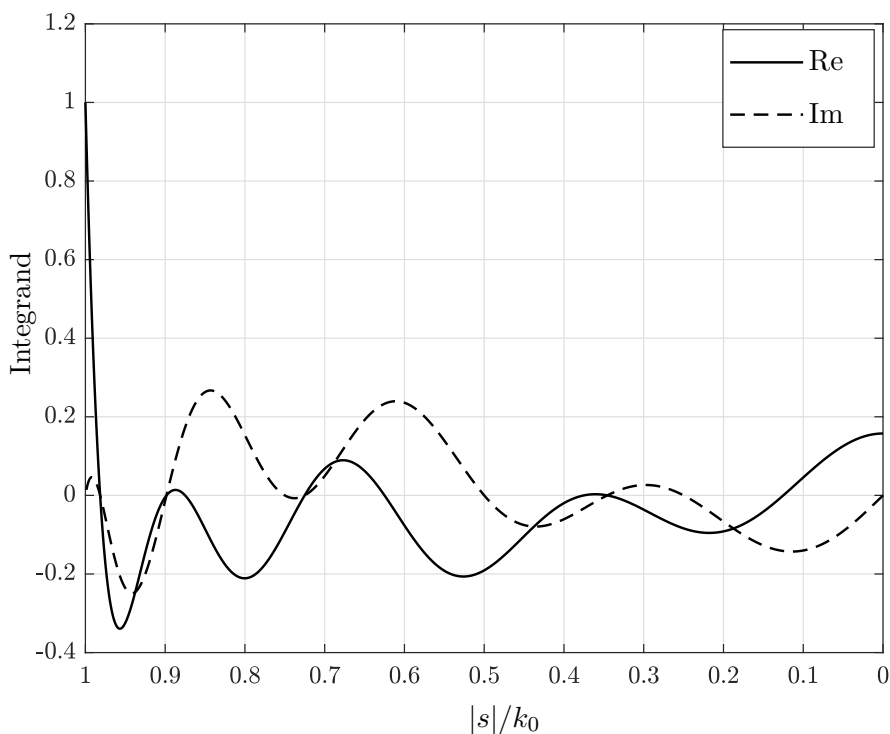
$$I_1 = \int_{k_0}^0 J_0\left(\rho\sqrt{k_0^2 - s_{\text{im}}^2}\right) e^{-js_{\text{im}}|z|} ds_{\text{im}}. \quad (3.24)$$

Na osnovu definicija u (3.19) i (3.21), relativna greška je određena posmatranom veličinom

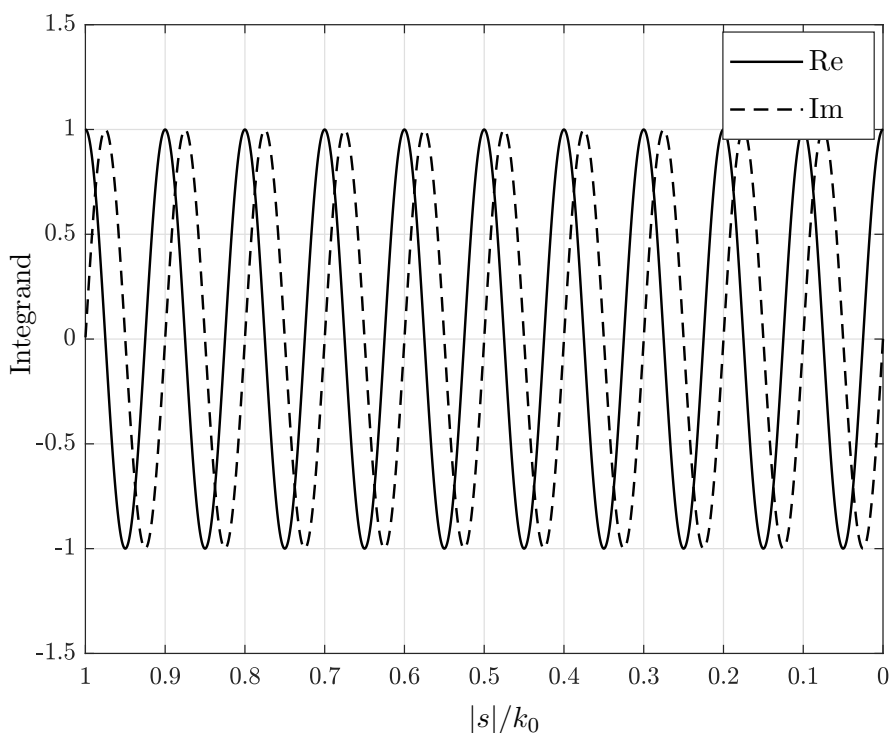
$$X = \hat{g}_0 = \hat{I}_1(n_g) + \tilde{I}_2 + \tilde{T}, \quad (3.25)$$

gde je $\hat{I}_1(n_g)$ integral nad prvim poddomenom izračunat pomoću n_g integracionih tačaka, \tilde{I}_2 i \tilde{T} su integrali nad drugim poddomenom i *rep* integrala, respektivno, izračunati sa maksimalnom mogućom tačnošću, koristeći dovoljno veliki broj integracionih tačaka, odnosno poluperioda.

Relativna greška za opseg koordinata od interesa prikazana je na slikama 3.13–3.15. Na svim graficima mogu se razlikovati tri karakteristična dela krive: (a) početni deo gde je rela-



Slika 3.11: Podintegralna funkcija integrala I_1 nakon smene promenljivih za $\rho = z = 2\lambda_0$.

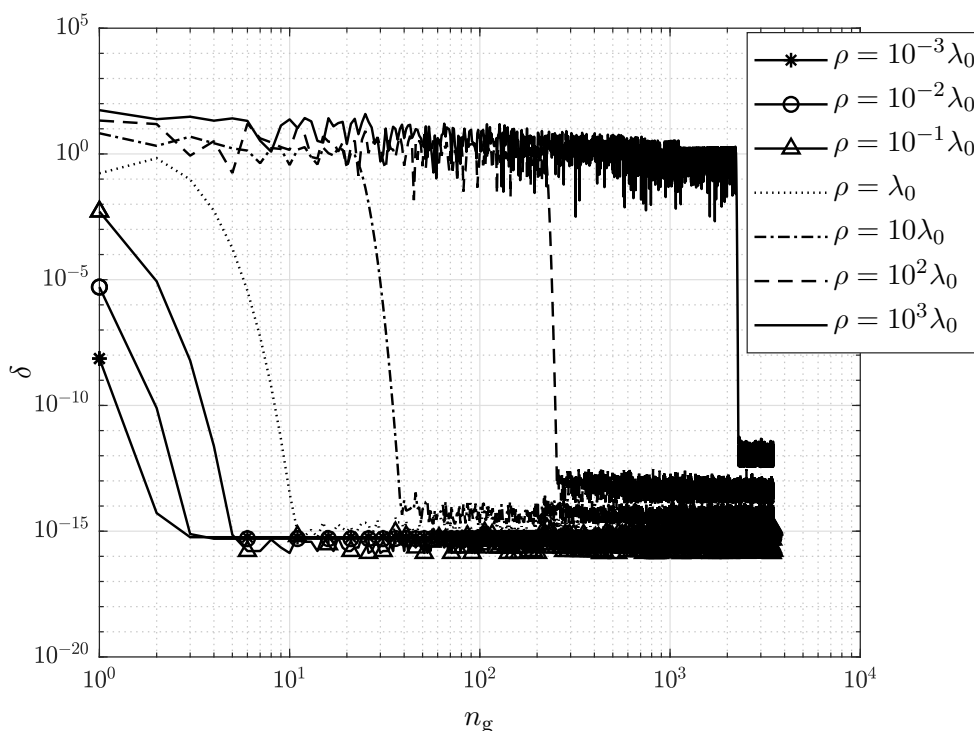


Slika 3.12: Podintegralna funkcija integrala I_1 nakon smene promenljivih za $\rho = 10^{-3}\lambda_0$ i $z = 10\lambda_0$.

ativna greška velika, (b) opadajući deo, gde se relativna greška naglo smanjuje i (c) deo *zasićenja*, gde je dostignuta minimalna vrednost relativne greške, $\delta \sim 10^{-16} \div 10^{-10}$. Jedan od osnovnih izazova na koje želimo da odgovorimo u ovom radu jeste predikcija broja integracionih tačaka potrebnog za dostizanje zadate tačnosti računanja ZI metodom GL. Pomenuti delovi krive relativne greške se mogu aproksimirati pravama, čije strmine i mesto preseka sa osama

treba povezati sa vrednostima koordinata rastojanja ρ i z . Dok se strmina opadajućeg dela relativno blago menja sa promenom rastojanja, početak opadajućeg dela, koji predstavlja minimalni potreban broj integracionih tačaka, je znatno osetljiviji na izbor koordinata. Broj tačaka za datu relativnu grešku direktno zavisi od broja oscilacija na intervalu, a broj oscilacija se može predvideti poznavajući prirodu integranda. Kako se u datom intervalu eksponencijalni i, približno, Beselov faktor ponašaju kao sinusoidalne funkcije, minimalni potrebni broj tačaka procenjujemo kao $\hat{n}_{g,1} \sim \rho/\lambda_0$ za $\rho \gg |z|$, odnosno $\hat{n}_{g,1} \sim |z|/\lambda_0$ za $\rho \ll |z|$. Kombinovanjem ove dve procene, u prvoj aproksimaciji, broj broj tačaka za integraciju nad prvim poddomenom je

$$n_{g,1} \sim \frac{R}{\lambda_0} = \frac{\sqrt{\rho^2 + z^2}}{\lambda_0}. \quad (3.26)$$

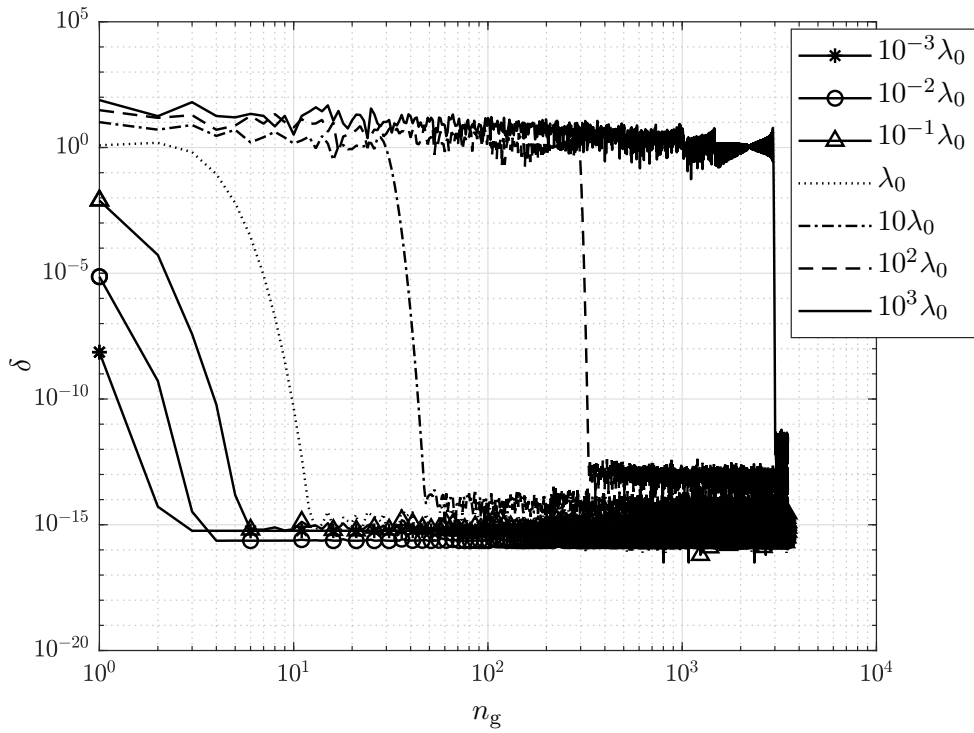


Slika 3.13: Relativna greška integrala I_1 u funkciji broja integracionih tačaka za $z = 10^{-3}\lambda_0$.

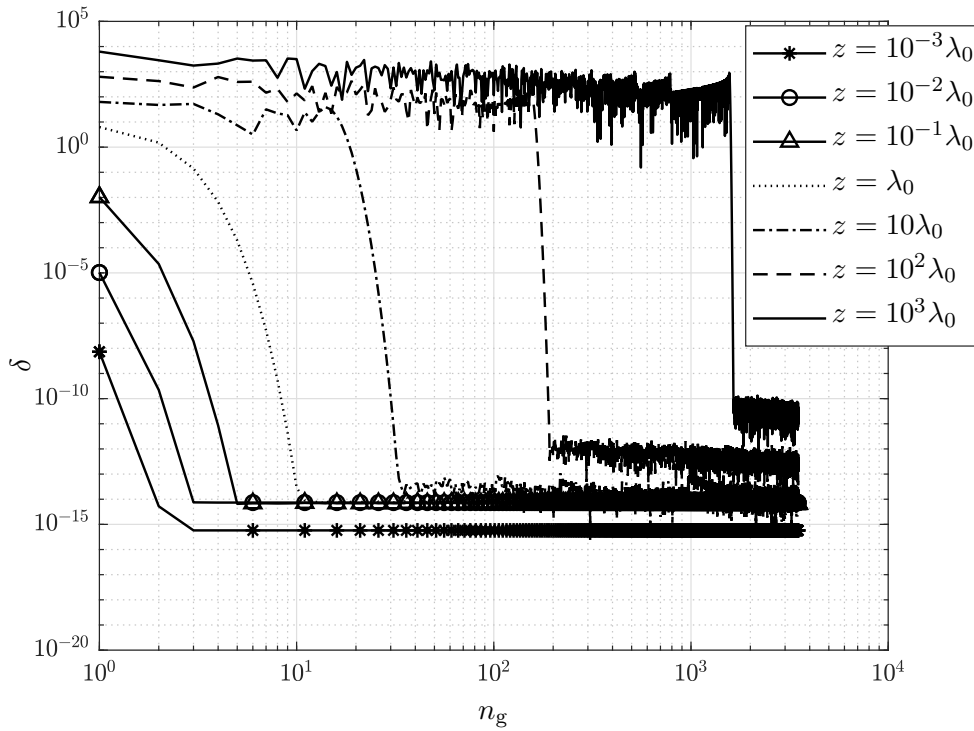
Sa slika 3.13 i 3.15 vidi se da je za početak opadajućeg dela odgovarajuće krive potrebno nešto više tačaka u slučaju dominantnog ρ nego u slučaju dominantnog z . Za slučaj kada je $\rho = z$, mora se uzeti doprinos obe koordinate u obzir. Analizirajući detaljno ponašanje krive relativne greške na opsegu od interesa D , dolazimo do empirijskog izraza za procenu potrebnog broja tačaka za zadatu tačnost

$$\hat{n}_{g,1} = 6 + \left[R_e + \frac{\chi_{\text{des}}}{3} R_e^{0,5} \right], \quad R_e = \sqrt{\left(2,4 \frac{\rho}{\lambda_0} \right)^2 + \left(1,8 \frac{|z|}{\lambda_0} \right)^2} + 0,4 \frac{\rho|z|}{\lambda_0^2}, \quad (3.27)$$

gde je R_e ekvivalentno električno rastojanje od izvora do tačke posmatranja, χ_{des} željeni broj tačnih cifara, a $[\cdot]$ označava zaokruživanje na prvu veću celobrojnu vrednost. U narednom poglavlju pokazaćemo da uz male modifikacije ovde izvedenih empirijskih izraza možemo dobiti validne procene potrebnog broja integracionih tačaka i za druge tipove ZI.



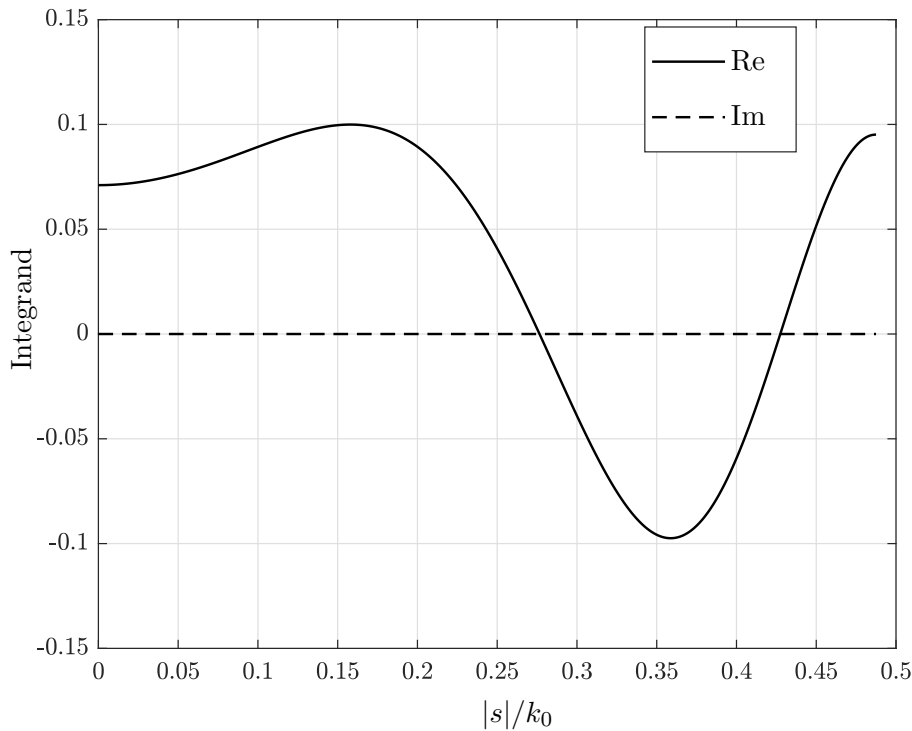
Slika 3.14: Relativna greška integrala I_1 u funkciji broja integracionih tačaka za $\rho = z$.



Slika 3.15: Relativna greška integrala I_1 u funkciji broja integracionih tačaka za $\rho = 10^{-3}\lambda_0$.

3.4.2 Drugi poddomen konačnog dela integrala

Drugi poddomen konačnog dela integrala definisan je intervalom $k_\rho \in [k_0, b]$. Primenom smene promenljivih, novodobijeni poddomen integracije je $s = s_{re} \in [0, \sqrt{b^2 - k_0^2}]$. Na slikama 3.16–3.18 prikazani su grafici podintegralne funkcije na drugom poddomenu u funkciji normalizovane promenljive s . Za razliku od prvog poddomena, u drugom se podintegralna funkcija ovde blago menja bilo da je posmatramo u domenu prvobitne promenljive, k_ρ , ili nove, s . Koordinata ρ diktira granicu b , što utiče na na veličinu intervala. Međutim, obuhvaćeni broj oscilacija ostaje ograničen zahvaljujući fleksibilnoj definiciji granice (3.11). Sa druge strane, koordinata z određuje jačinu *prigušivanja* podintegralne funkcije.

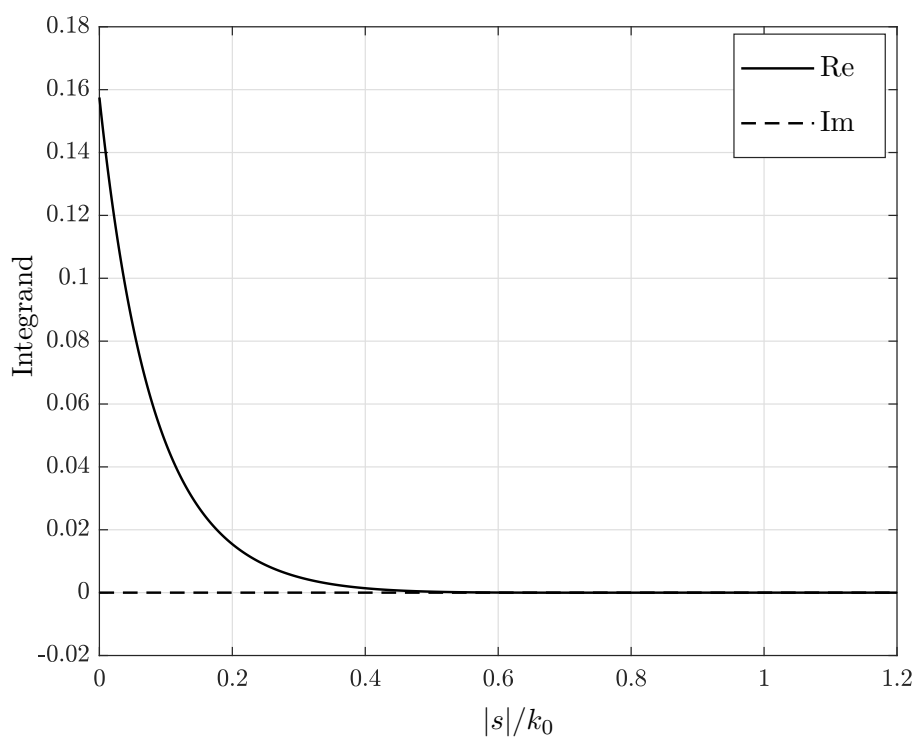


Slika 3.16: Podintegralna funkcija integrala I_2 nakon smene promenljivih za $\rho = 10\lambda_0$ i $z = 10^{-3}\lambda_0$.

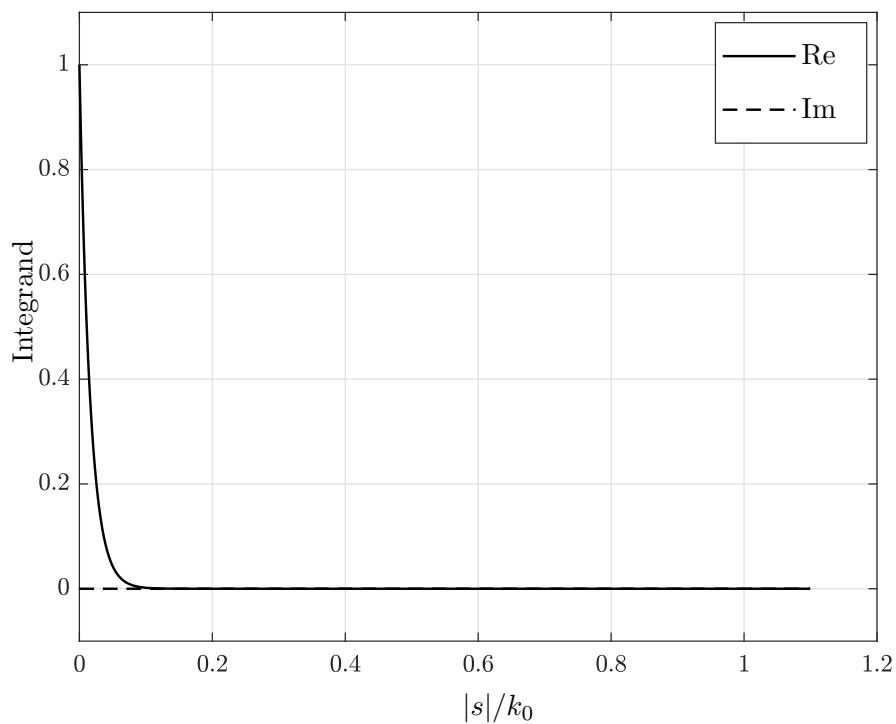
Analiziraćemo relativnu grešku za drugi poddomen na isti način kao za prvi. Posmatrana promenljiva je procena integrala

$$X = \hat{g}_0 = \tilde{I}_1 + \hat{I}_2(n_g) + \tilde{T}, \quad (3.28)$$

gde je $\hat{I}_2(n_g)$ integral nad drugim poddomenom izračunat pomoću n_g integracionih tačaka, a \tilde{I}_1 i \tilde{T} su integrali nad prvim poddomenom i *rep* integrala, respektivno, izračunati sa maksimalnom mogućom tačnošću. Relativna greška za drugi poddomen je prikazana na slikama 3.19–3.21. Primetno je da je kriva relativne greške kanonična, te se i ona može modelovati deo-po-deo linearnim funkcijama. Praktično pomoću samo dve prave mogu se aproksimirati dva karakteristična dela: prvi, opadajući, i drugi, ravan deo (zasićenje), gde se dostiže maksimalna tačnost. Dalje, nagib opadajućeg dela je relativno ograničen, što se može objasniti slabom zavisnošću od koordinata u datom opsegu. Konkretno, opsegu od minimalne do maksimalne tačnosti odgovara približno opseg od 5 do 25 integracionih tačaka.



Slika 3.17: Podintegralna funkcija integrala I_2 nakon smene promenljivih za $\rho = z = 2\lambda_0$.

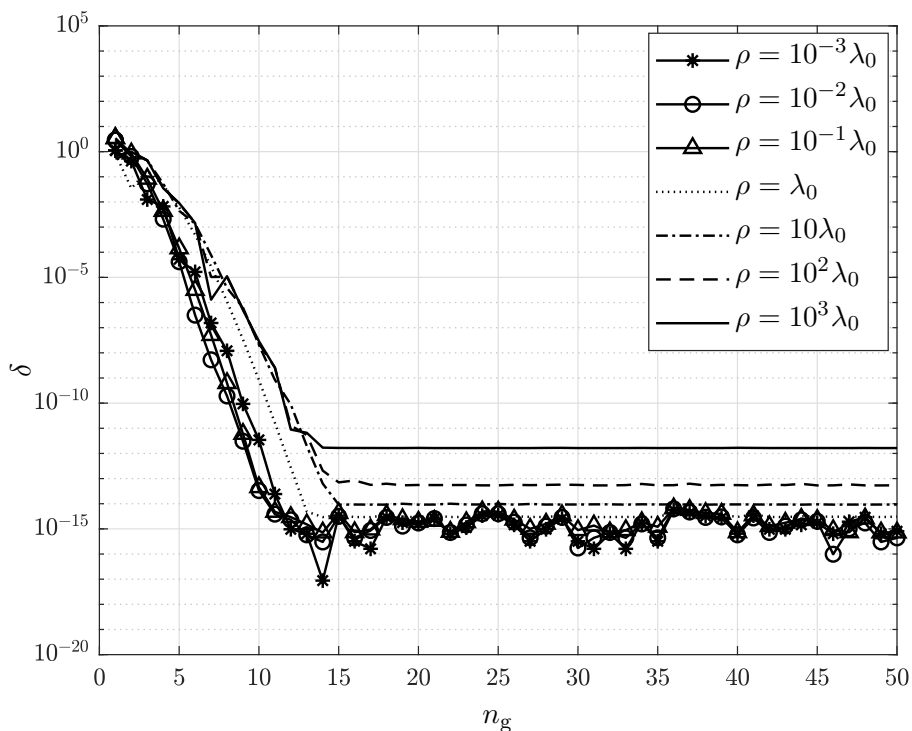


Slika 3.18: Podintegralna funkcija integrala I_2 nakon smene promenljivih za $\rho = 10^{-3}\lambda_0$ i $z = 10\lambda_0$.

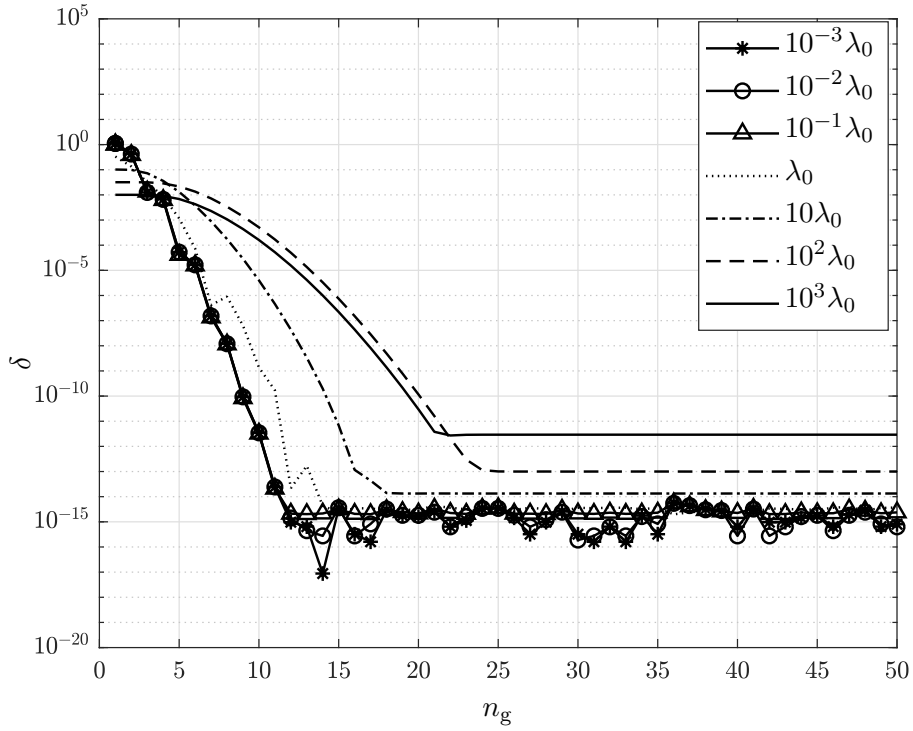
Prikazane numeričke osobine integrala nad drugim poddomenom, kao i njegova detaljna analiza za različit izbor parametara iz skupa koordinati D omogućavaju nam formiranje približnih izraza za broj integracionih tačaka potrebnih za dostizanje željene tačnosti,

$$\hat{n}_{g,2} = \begin{cases} N_1, & \log_{10}\left(\frac{|z|}{\rho}\right) < B, \\ N_2, & \log_{10}\left(\frac{|z|}{\rho}\right) > C, \\ N_1 + \left[(N_2 - N_1) \left[\log_{10}\left(\frac{|z|}{\rho}\right) - B \right] \right], & \text{inače,} \end{cases} \quad (3.29)$$

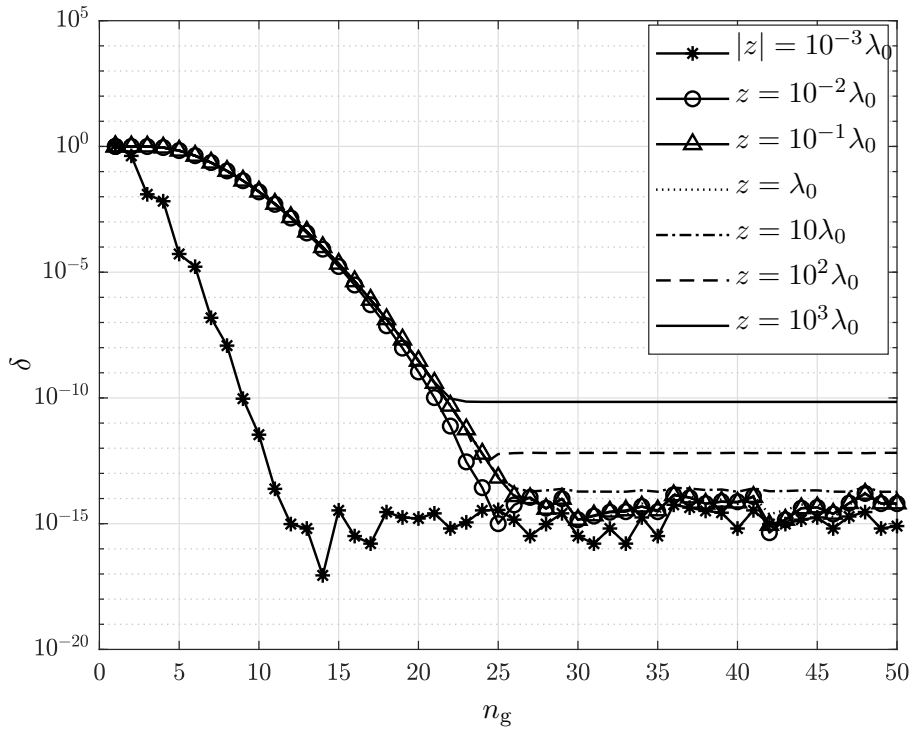
gde je $N_1 = \chi_{\text{des}} + 3$, $N_2 = N_1 + 10$, $B = -1,2$ i $C = 0,2$. Vrednosti N_1 i N_2 odgovaraju najmanjem i najvećem nagibu krivih na slikama 3.19–3.21.



Slika 3.19: Relativna greška integrala I_2 u funkciji broja integracionih tačaka za $z = 10^{-3}\lambda_0$.



Slika 3.20: Relativna greška integrala I_2 u funkciji broja integracionih tačaka za $\rho = z$.



Slika 3.21: Relativna greška integrala I_2 u funkciji broja integracionih tačaka za $\rho = 10^{-3}\lambda_0$.

3.4.3 *Repa* integrala

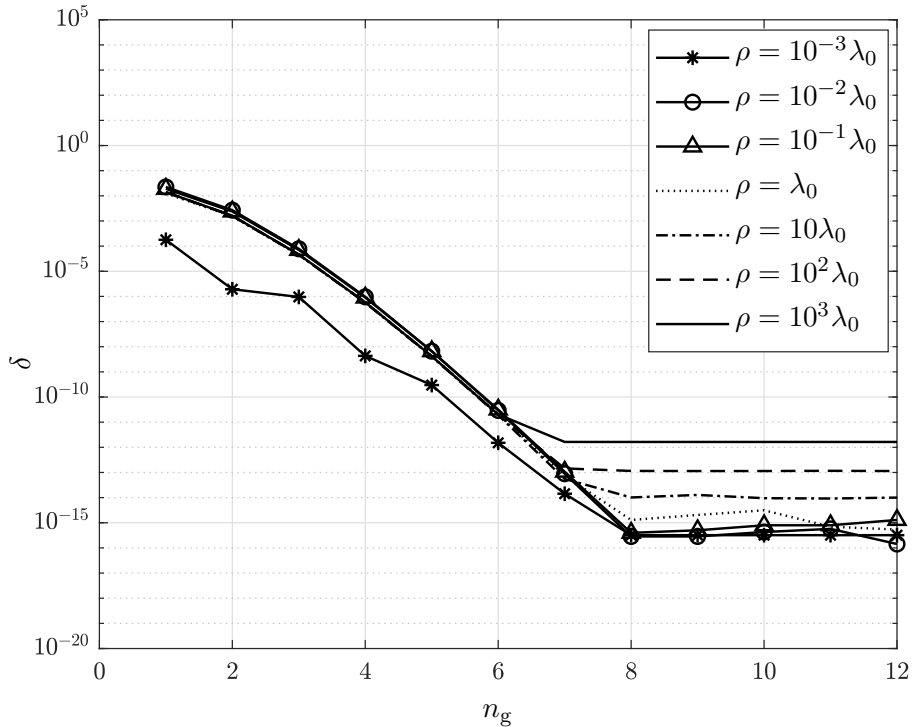
U poddomenu *repa* integrala, kao i u drugom poddomenu, podintegralna funkcija je realna i oscilatorna, a njena anvelopa je monotono opadajuća. Opadanje anvelope diktiraju i Beselov i eksponencijalni faktor, tj. obe koordinate rastojanja, dok frekvencija oscilacija zavisi samo

od ρ . Kao što je rečeno, za računanje *repa* integrala nije potrebna smena promenljivih, već se oslanjamo konvergentna svojstva brojnog niza kojim se on predstavlja. Numerička procena *repa* integrala se dobija sumiranjem integrala nad segmentima u dužini od jedne poluperiode. Sledi da se procena *repa* svodi na procenu limesa niza parcijalnih suma integrala nad segmentima, koristeći neku od metoda za ubrzavanje konvergenције [40]. Za razliku od ostalih delova integrala, ponašanje ukupne relativne greške *repa* ZI nije lako predvideti. Eventualne predikcije resursa za jedan ZI je još teže generalizovati na ostale ZI, zbog različitih konvergentnih svojstava njihovih jezgara (eng. *kernel*).

Međutim, analiza doprinosa integrala nad segmentom je jednostavna. Unutar jednog segmenta zastupljena je samo jedna polovina pune oscilacije. Sledi da se podintegralna funkcija kvalitativno ne menja od segmenta do segmenta, te se može očekivati da vrednost integrala na tako kratkom intervalu, $\rho\Delta k_\rho \approx \pi$, praktično ne zavisi od koordinata rastojanja. Za analizu greške nad jednim segmentom posmatraćemo veličinu

$$X = \hat{g}_0 = \tilde{I}_1 + \tilde{I}_2 + \hat{T}(n_g), \quad (3.30)$$

gde je $\hat{T}(n_g)$ *rep* integrala izračunat pomoću n_g integracionih tačaka po segmentu, a \tilde{I}_1 i \tilde{I}_2 su integrali nad prvim i drugom poddomenom, respektivno, izračunati sa maksimalnom mogućom tačnošću. Kao i u prethodnim slučajevima, i ovde je uračunat dovoljno velik broj segmenata za *rep*, tako da njegova tačnost zavisi samo od n_g . Kao najrelevantniji, za analizu je odabran slučaj $z = 10^{-3}\lambda_0$, zbog velikog broja obuhvaćenih oscilacija i sporo opadajuće anvelope. U ostalim slučajevima, naročito ako je $|z| \gtrsim \lambda_0$, prigušenje oscilacija postaje jako primetno i veliki deo *repa* se odbacuje, zbog čega analiza integrala nad segmentom gubi smisao. Relativna greška u zavisnosti od broja tačaka po segmentu je prikazana na slici 3.22. Sa slike se zaključuje da je samo 8 tačaka dovoljno za dostizanje maksimalne tačnosti GL metodom.



Slika 3.22: Relativna greška integrala T u funkciji broja integracionih tačaka za $z = 10^{-3}\lambda_0$.

Veoma male varijacije krive greške potvrđuju slabu zavisnost od koordinate ρ i omogućavaju jednostavno modelovanje i formiranje predikcione formule. Za dostizanje χ_{des} tačnih cifara,

potreban broj integracionih tačaka po segmentu je približno

$$\hat{n}_{g, hp} = \left\lceil \frac{\chi_{des}}{2} \right\rceil + 2, \quad (3.31)$$

Kada su pojedinačni segmenti izračunati sa željenom tačnošću, odnosno relativnom greškom, potrebno je odrediti koliko segmenata je dovoljno uračunati, kako bi procena ukupnog *repa* pouzdano dostigla istu tu relativnu grešku. U računarskoj implementaciji metode, skraćivanje poddomena *repa* postiže se *while* petljom i uslovom za izlazak iz petlje u vidu zadate relativne greške, pod kojom se podrazumeva normalizovana razlika susednih članova niza parcijalnih suma T_n . Ako se pritom primeni WA metoda ubrzavanja konvergencije, relativna greška se definiše u odnosu na prethodnu iteraciju WA transformacije,

$$\delta_T = \frac{|T_1^{(n)} - T_1^{(n-1)}|}{|T_1^{(n-1)}|} \quad (3.32)$$

gde je n uračunat broj segmenata prema (3.15) i (3.16). Postepenim povećavanjem broja n ispituje se uslov tačnosti i ako je on ispunjen za $n = N$, onda se ukupan potreban broj tačaka za *rep* procenjuje kao

$$\hat{n}_{g, T} = N \hat{n}_{g, hp}. \quad (3.33)$$

3.4.4 Minimalna relativna greška

U odeljcima 3.4.1–3.4.3 videli smo da za sva tri dela integrala minimalni nivo relativne greške (nivo zasićenja) raste sa porastom ρ i $|z|$. Kako za velika rastojanja podintegralna funkcija postaje jako oscilatorna na prvom poddomenu, ona se sve teže može aproksimirati Ležandrovim polinomima, te se numerička procena integrala I_1 svodi na sumiranje vrlo dugačkog alternativnog niza brojeva. Gubitak tačnosti, dakle, proističe iz ograničenja same GL metode. Pošto su relativna greška i posmatrana promenljiva definisane tako da se tačnost pojedinačnih poddomena računa u odnosu na analitičku vrednost ukupnog integrala g_0 , efekat porasta minimalne relativne greške primetan je i u procenama integrala I_2 i T . Na osnovu prikazane analize, pokazuje se da za dovoljno integracionih tačaka i poluperioda minimalna relativna greška ne prelazi vrednost 10^{-10} na celoj oblasti D .

3.5 Primeri računanja ukupnog Zomerfeldovog integrala za slobodan prostor

Pojedinačna analiza integrala na poddomenima pruža samo delimičnu sliku o numeričkim svojstvima ukupnog integrala (3.2). Radi sticanja kompletnog uvida u njegovo ponašanje sa aspekta efikasnosti i tačnosti na skupu parametara D , nužno je posmatrati združen doprinos integrala I_1 , I_2 i T . Na osnovu simulacija i analize izvršene u odeljku 3.4, formirani su empirijski izrazi pomoću kojih se može približno odrediti potreban broj integracionih tačaka na dva konačna poddomena i poluperiodnim segmentima *repa* za dostizanje željene relativne greške $\delta_{des} = 10^{-\chi_{des}}$, dok se broj potrebnih segmenata *repa* određuje automatski.

U cilju provere predložene metode u celosti, posmatramo ukupnu relativnu grešku gde su

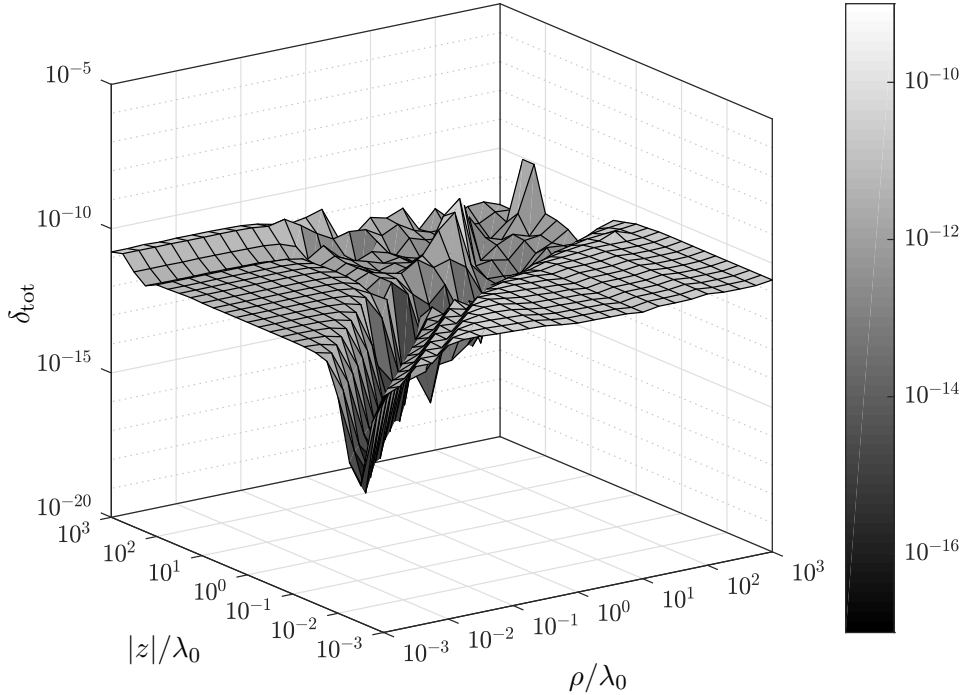
pojedinačni integrali izračunati na osnovu procenjenog broja integracionih tačaka,

$$\delta_{\text{tot}} = \frac{|\hat{g}_0 - g_0|}{|g_0|} = \frac{|\hat{I}_1(\hat{n}_{g,1}) + \hat{I}_2(\hat{n}_{g,2}) + \hat{T}(\hat{n}_{g,\text{hp}}) - g_0|}{|g_0|}, \quad (3.34)$$

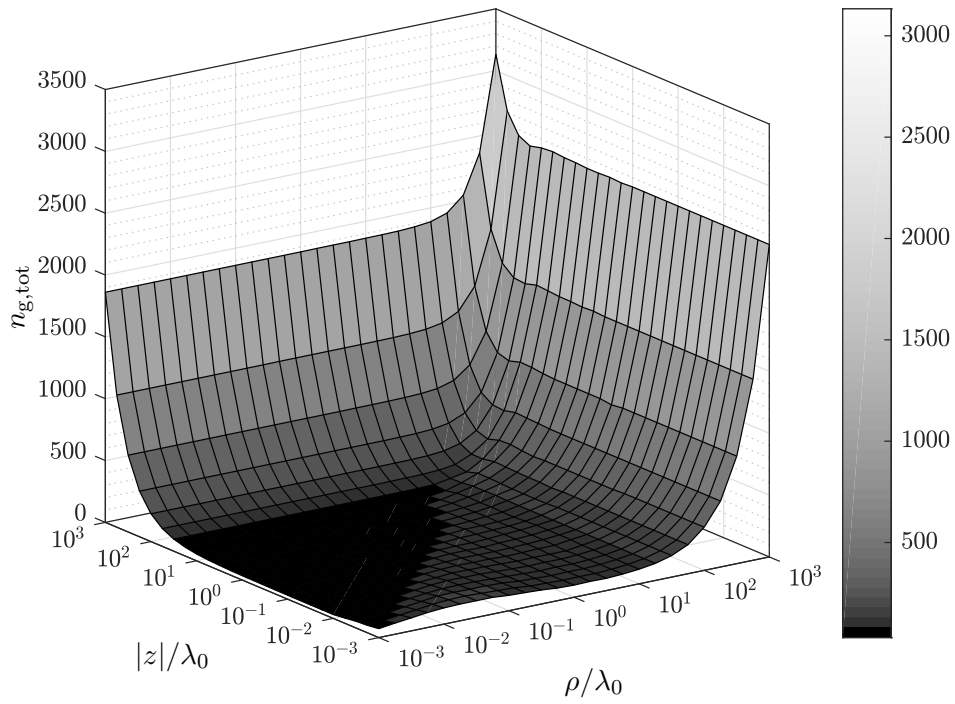
gde su $\hat{n}_{g,1}$, $\hat{n}_{g,2}$ i $\hat{n}_{g,\text{hp}}$ određeni formulama (3.27), (3.29) i (3.31), respektivno. Na slici 3.23 prikazana je dostignuta relativna greška na celom skupu koordinati D za zadatu relativnu grešku $\delta_{\text{des}} = 10^{-10}$. Vidi se da je dostignuta greška neposredno ispod željene granice. Na delu oblasti D oko *dijagonale*, ($\rho \approx |z|$), za mala električka rastojanja, relativna greška je značajno manja od zadate. Na slici 3.24 prikazan je procenjen ukupan broj tačaka $\hat{n}_{g,\text{tot}} = \hat{n}_{g,1} + \hat{n}_{g,2} + N\hat{n}_{g,\text{hp}}$ u funkciji koordinata rastojanja. Još bolji uvid u performanse predikcionih formula se stiže na slici 3.25, gde je prikazana relativna greška u proceni potrebnog broja tačaka δ_{n_g} u odnosu na egzaktni broj tačaka ($n_{g,\text{tot}}$) za koji se dostiže željena tačnost,

$$\delta_{n_g} = \frac{\hat{n}_{g,\text{tot}} - n_{g,\text{tot}}}{n_{g,\text{tot}}} \gtrless 0. \quad (3.35)$$

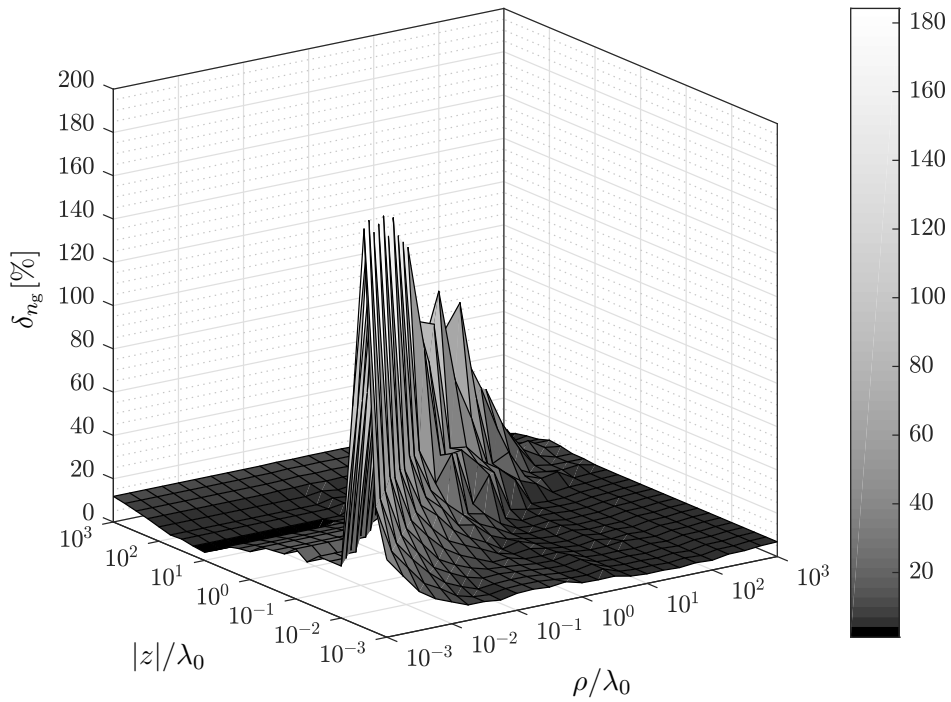
Evidentno je da kod procene broja tačaka na skoro celom skupu D postoji blagi premašaj, koji ne prelazi 10%. Kao što je očekivano, najveća greška u proceni je u uskoj oblasti za male i približno jednake vrednosti koordinata. Međutim, kako je za male vrednosti koordinata broj integracionih tačaka veoma mali, ova greška nije kritična. Možemo zaključiti da predložene empirijske formule pružaju zadovoljavajuću predikciju potrebnog broja tačaka za računanje ZI za slobodan prostor.



Slika 3.23: Relativna greška računanja kompletnog ZI za slobodan prostor g_0 u funkciji normalizovanih koordinati ρ i $|z|$ za zadatu tačnost $\delta_{\text{des}} = 10^{-10}$.



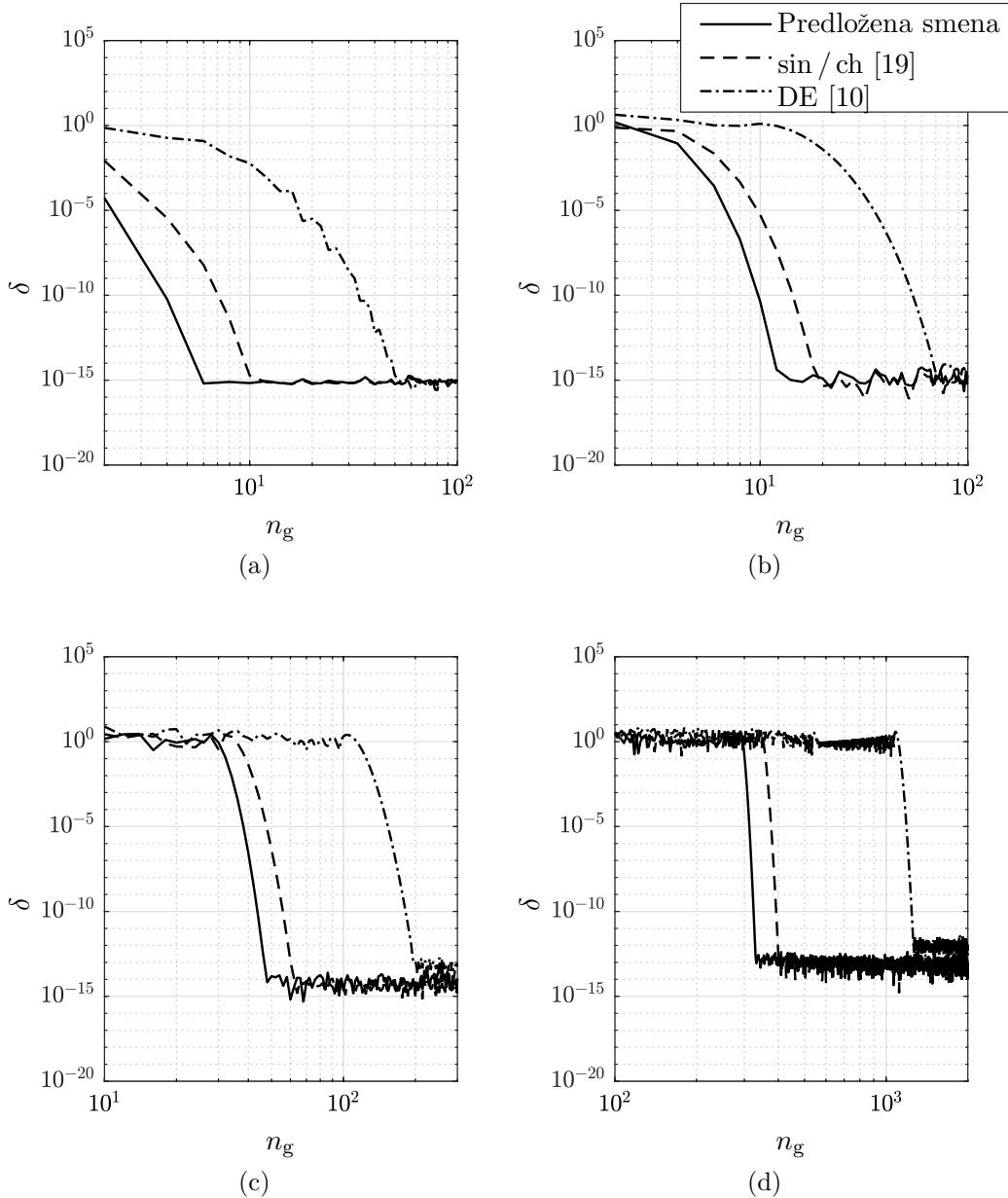
Slika 3.24: Ukupan procenjen broj integracionih tačaka potrebnih za računanje integrala g_0 sa tačnošću $\delta_{\text{des}} = 10^{-10}$.



Slika 3.25: Relativna greška procene broja tačaka potrebnih za računanje integrala g_0 sa tačnošću $\delta_{\text{des}} = 10^{-10}$.

3.6 Poređenje rezultata sa drugim metodama

Dalja verifikacija predložene metode integracije podrazumeva poređenje sa metodama iz literature. Poređenje obavljam poseбно za svaki poddomen. Kao referentan za računanje integrala nad konačnim poddomenom, razmatran je pristup preko trigonometrijske/hiperbolične smene promenljivih i GL kvadrature formule primenjene na integraciju po realnoj osi [19]. Takođe, u obzir je uzet i pristup preko dvostruko eksponencijalne (DE) kvadrature formule [10, 36] sa putanjom integracije delimično zakrivljenom ka I kvadrantu kompleksne ravni, čime se zaobilazi singularna tačka grananja (slika 3.8a).

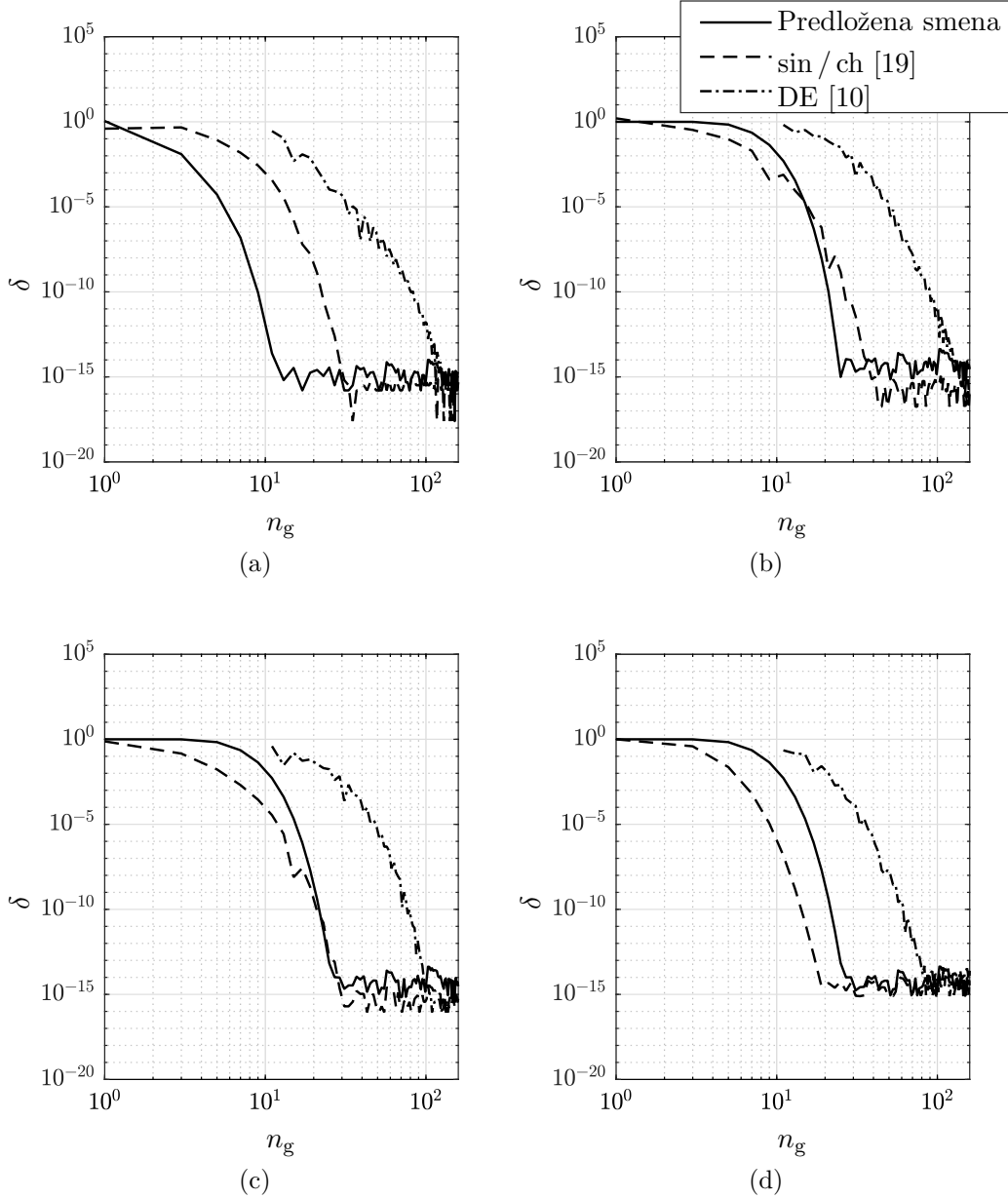


Slika 3.26: Poređenje relativne greške na prvom poddomenu za (a) $\rho = z = 0,1\lambda_0$, (b) $\rho = z = \lambda_0$, (c) $\rho = z = 10\lambda_0$, (d) $\rho = z = 100\lambda_0$.

Na slici 3.26 vidimo relativnu grešku za prvi poddomen za različite parametre rastojanja, kao što je urađeno u odeljku 3.4.1. Primeri su odabrani iz podskupa $\rho = |z|$, tj. na *dijagonali* skupa D , budući da je to najzahtevniji slučaj prema analizi u odeljku 3.4.1. Predložena metoda koja uključuje korenu smenu promenljivih, potpuno poništava singularitet u tački grananja i uspešno savladava oscilatornu prirodu integranda, ostvarujući pritom najbržu konvergenciju u

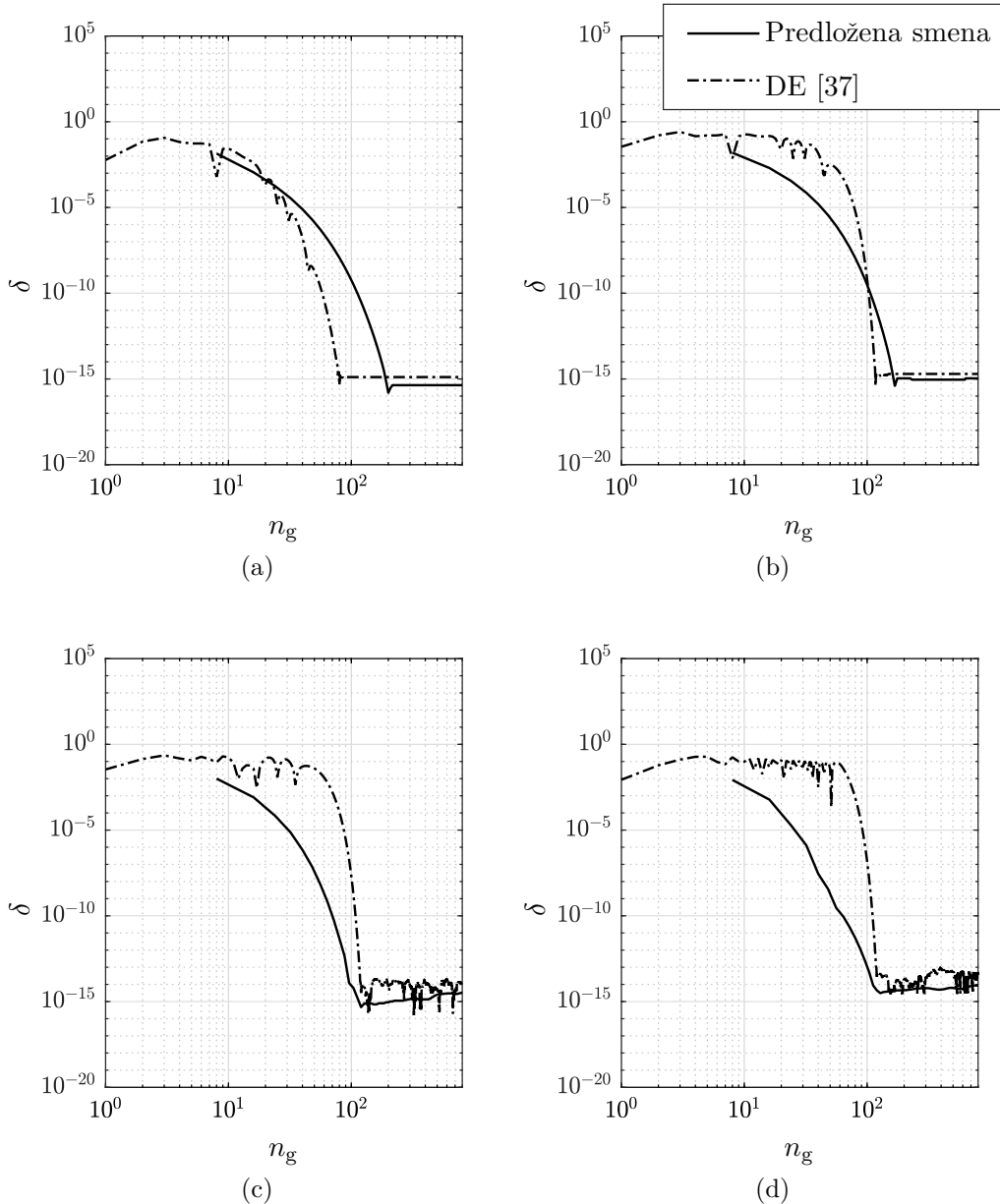
datim slučajevima od interesa.

Iz analize u odeljku 3.4.2 videlo se da je prosečna konvergencija integracije nad drugim poddomenom najsporija za slučaj kada je $\rho = 10^{-3}\lambda_0$. Stoga se ovde fokusiramo na skup primera gde je ρ malo i fiksirano, a z variramo u opsegu $10^{-3}\lambda_0$ do λ_0 . Poređenje relativne greške za drugi poddomen prikazano je na slici 3.27. Uočavamo da predložena metoda daje rezultate uporedive sa ostale dve metode.



Slika 3.27: Poređenje relativne greške na drugom poddomenu za $\rho = 0,001\lambda_0$. (a) $z = 0,001\lambda_0$, (b) $z = 0,01\lambda_0$, (c) $z = 0,1\lambda_0$, (d) $z = \lambda_0$.

Za *rep* integrala usvojena je WA metoda (odeljak 3.3), uključujući i tehnike iz odeljaka 3.2.2, 3.2.3 i 3.4.3. Ilustracije radi, poredimo ovaj pristup sa pristupom datim u [37], gde je za integraciju upotrebljena DE kvadratura formula, posebno krojena za *rep* integrala. Primeri, prikazani na slici 3.28, odabrani su tako da je fiksirano $z = 10^{-3}\lambda_0$, budući da je, zbog slabog prigušenja oscilacija, to najzahtevniji slučaj prema analizi izvedenoj u odeljku 3.4.3.



Slika 3.28: Poređenje relativne greške za *rep* za $z = 0,001\lambda_0$. (a) $\rho = 0,01\lambda_0$, (b) $\rho = 0,1\lambda_0$, (c) $\rho = \lambda_0$, (d) $\rho = 10\lambda_0$.

3.7 Zaključak

U ovom poglavlju predložen je pristup računanju Zomerfeldovog integrala koji odgovara magnetskom vektor-potencijalu za slobodan prostor i to u širokom opsegu parametara rastojanja između izvora i tačke posmatranja. Integral je podeljen na tri poddomena. Jedna podela se dešava na mestu tačke grananja podintegralne funkcije, a druga na početku *repa* integrala. Singularitet u tački grananja je poništen korišćenjem korene smene promenljivih, pri čemu je broj GL integracionih tačaka, potrebnih za zadatu tačnost, minimizovan. Početak *repa* je realan broj, definisan kao prvi ekstremum iza druge nule nakon tačke grananja podintegralne funkcije. Takvom definicijom integracija *repa* nije pod uticajem singulariteta i kompleksnost podintegralne funkcije na drugom poddomenu ostaje mala i nezavisna od koordinati rastojanja. Integracija *repa* počiva na WA metodi za ubrzavanje konvergencije, koji se pokazao kao nejefikasniji u datom scenariju. Elementi brojnog niza na koji je primenjena WA metoda su parcijalne sume integrala nad segmentima dužine jedne poluperiode podintegralne funkcije. Uvođenje pra-

gova računanja i adekvatno definisanje gornje granice ukupnog integrala obezbeđuje dodatnu robusnost, tačnost i uštedu integracionih tačaka.

Na osnovu detaljnih analiza kvalitativnih i kvantitativnih numeričkih osobina integrala nad tri poddomena, formirane su empirijske formule za predikciju potrebnog broja integracionih tačaka za koji bi se dostigla željena tačnost. Pomoću ovih formula, postignuta je vrlo efikasna procena ZI za slobodan prostor u opsegu rastojanja od približno 0 do čak 1000 talasnih dužina u slobodnom prostoru. Predloženi pristup je testiran brojnim numeričkim primerima i poređenjem sa drugim metodama

Iako smo smo u dosadašnjoj analizi razmatrali ZI u slobodnom prostoru, pokazaćemo da se primena predloženih tehnika može proširiti i na složenije slučajeve. Konkretno, u poglavlju 4 ispitaćemo primenljivost datih tehnika na slučaj izvora i tačke posmatranja u prisustvu razdvojne površi dve sredine.

4 Zomerfeldovi integrali za slučaj razdvojne površi dve sredine

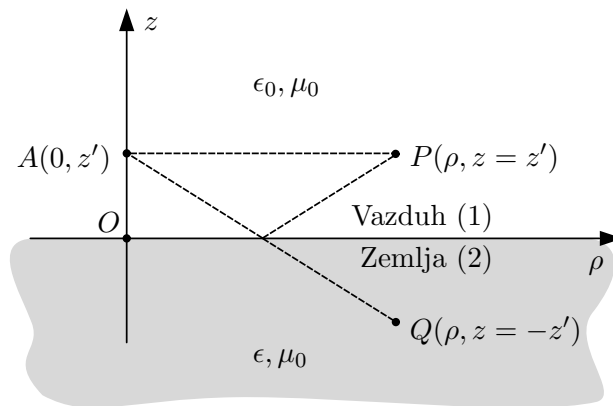
4.1 Uvod

U ovom poglavlju upoznaćemo se sa osobinama Zomerfeldovih integrala koji odgovaraju Grinovim funkcijama magnetskog vektor-potencijala u blizini razdvojne površi dve sredine. Analiziraćemo samo neke od tipičnih predstavnika pomenutih ZI, fokusirajući se isključivo na njihov konačan deo, s obzirom da *rep* zadržava svoje osobine, nezavisno od izbora integrala. Analiza će nam, na sličan način kao u slučaju slobodnog prostora, omogućiti da dođemo do metode za efikasno i robusno računanje ZI u slučaju dve sredine, kao i do procene broja integracionih tačaka potrebnih za dostizanje željene tačnosti.

Posmatrajmo izvor polja u pojednostavljenoj predstavi u cilindričnom koordinatnom sistemu, kao na slici 4.1. Izvor se nalazi na visini $z' > 0$ iznad razdvojne površi dve sredine, u tački $A(0, z')$. Neka se jedna tačka posmatranja, P , nalazi na istoj visini i na udaljenosti ρ . Tačka $P(\rho, z')$ je, dakle, u zoni dejstva rasejanog potencijala. Neka se druga tačka posmatranja, Q , nalazi takođe na udaljenosti ρ , ali u sredini 2, simetrično u odnosu na tačku P . Tačka $Q(\rho, -z')$ se nalazi u zoni dejstva transmitovanog potencijala. Bez umanjenja opštosti, neka je gornja sredina (1) vazduh, a donja (2), linearna anizotropna sredina, permitivnosti $\epsilon_2 = \epsilon$. Takođe, pretpostavićemo da je sredina 2 nemagnetska ($\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$). Tada je

$$\begin{aligned} k_1 &= k_0 = \omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}, \\ k_2 &= k = \omega\sqrt{\epsilon_e\mu_0} = k_0\sqrt{\epsilon_{er}}, \end{aligned} \tag{4.1}$$

gde je ϵ_e ekvivalentna permitivnost, a $\epsilon_{er} = \epsilon_e/\epsilon_0$ ekvivalentna relativna permitivnost sredine 2. Posmatrajmo dva primera integrala iz (2.73) i (2.79)



Slika 4.1: Scenario sa razdvojnou površi vazduha i linearnog dielektrika.

$$g_{r,zz} = S_{r,zz}^{0,0,1} = \int_0^\infty R_{zz}(k_\rho) J_0(\rho k_\rho) e^{-\gamma_{z1}(|z|+|z'|)} \frac{k_\rho dk_\rho}{\gamma_{z1}}, \quad (4.2)$$

$$S_{t,xx}^{1,0,2} = \int_0^\infty T_{xx}(k_\rho) J_1(\rho k_\rho) e^{-\gamma_{z1}|z'| - \gamma_{z2}|z|} \frac{k_\rho^2 dk_\rho}{\gamma_{z1}}, \quad (4.3)$$

u kojem figurišu generalisani koeficijenti refleksije i transmisije za vertikalni i horizontalni Her-cov dipol. Radi preglednosti, ovde ih navodimo u eksplicitnom obliku, uzimajući u obzir uvedene pretpostavke o dve sredine, $\gamma_{z1} = \gamma_{z0} = \sqrt{k_\rho^2 - k_0^2}$ i $\gamma_{z2} = \sqrt{k_\rho^2 - k^2}$,

$$R_{zz}(k_\rho) = \frac{\epsilon_{er} \sqrt{k_\rho^2 - k_0^2} - \sqrt{k_\rho^2 - k^2}}{\epsilon_{er} \sqrt{k_\rho^2 - k_0^2} + \sqrt{k_\rho^2 - k^2}}, \quad (4.4)$$

$$T_{xx}(k_\rho) = \frac{2\sqrt{k_\rho^2 - k_0^2}}{\sqrt{k_\rho^2 - k_0^2} + \sqrt{k_\rho^2 - k^2}}. \quad (4.5)$$

U izrazima (4.2) i (4.3) talasni broj k figuriše u koeficijentu refleksije u prvom integralu, odnosno u koeficijentu transmisije i eksponencijalnom faktoru u drugom integralu. Pošto se talasni broj druge sredine takođe pojavljuje pod korenom funkcijom, u odnosu na slučaj slobodnog prostora, ovde imamo dodatnu tačku grananja, tj. dodatni singularitet u $k_\rho = k$. Ako $\text{Im}\{k\} = 0$, onda se singularitet nalazi tačno na putanji integracije i na tom mestu je prvi izvod integranda beskonačan. Ako je pak $\text{Im}\{k\} \neq 0$, onda uticaj singulariteta zavisi od *numeričke udaljenosti* putanje integracije od njega. U slučaju da putanja prolazi blizu singulariteta, integrand neće imati beskonačan izvod, ali će se njegova vrednost veoma brzo menjati, što će značajno uticati na tačnost računanja.

Za slučaj sve sredine imamo četrnaest različitih ZI (2.73)–(2.86) i osam različitih tipova jezgara. Na pomenutim primerima ZI razmotrićemo one faktore koje nismo imali kod ZI za slobodan prostor.

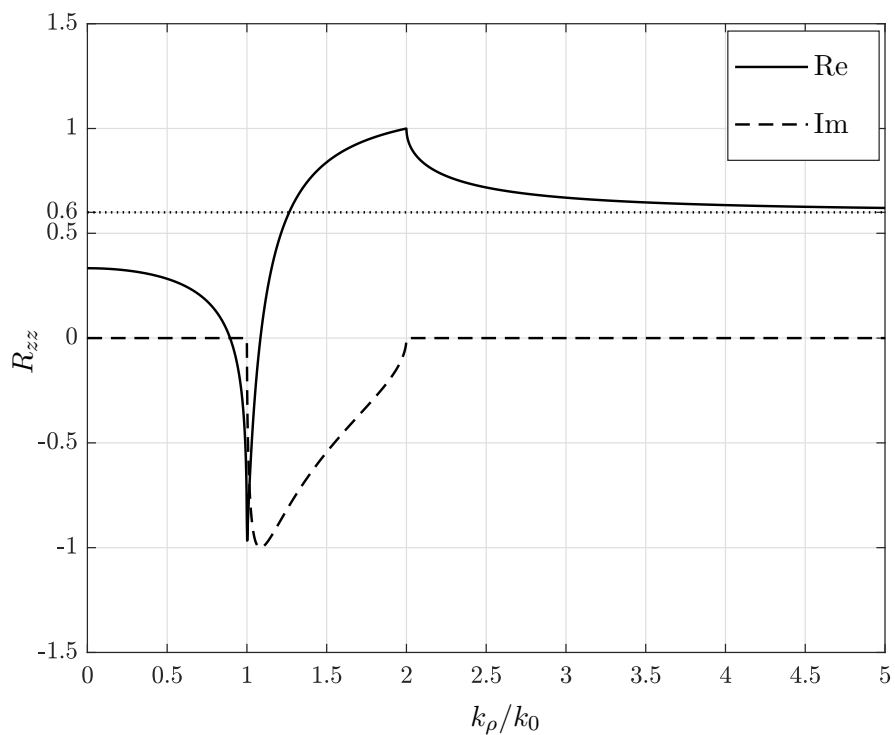
Posmatrajmo najpre koeficijente refleksije i transmisije pomenutih integrala, koji su prikazani na slikama 4.2 i 4.3, respektivno, za $\epsilon_{er} = 4$. Uočavamo da funkcije u tačkama $k_\rho = k_0$ i $k_\rho = k$ nisu glatke, tj. imaju prekid barem prvog izvoda. Dalje, uočavamo konstantne asimptotske vrednosti,

$$\lim_{k_\rho \rightarrow \infty} R_{zz}(k_\rho) = \frac{15}{25} = 0,6, \quad (4.6)$$

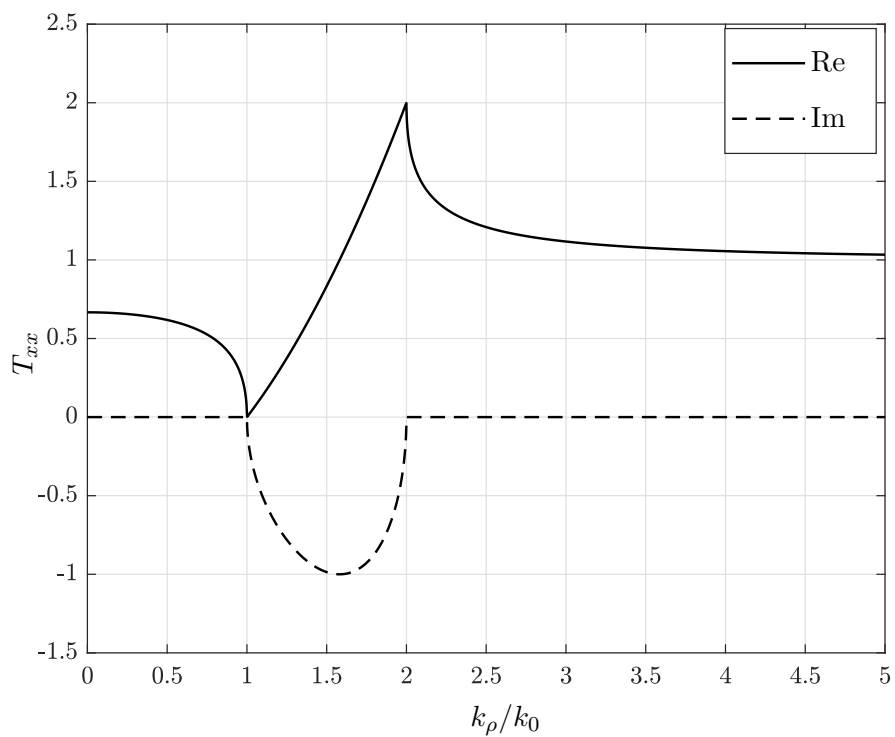
$$\lim_{k_\rho \rightarrow \infty} T_{xx}(k_\rho) = 1, \quad (4.7)$$

te ovi faktori ne doprinose promeni dinamike integranda za veliki argument k_ρ .

U opštem slučaju, za dve linearne sredine važi $k_1, k_2 \in \mathbb{C}$, a koeficijenti refleksije i transmisije mogu imati polove, tj. nule imenioca u kompleksnoj k_ρ -ravni. Ako su polovi blizu putanje integracije, integral postaje izrazito nepovoljan za računanje. Zasad, u našim primerima razmatramo pasivne i prirodne *desno orijentisane* materijale (RH, eng. *right-handed*), kod kojih se eventualni polovi pojavljuju u zoni Rimanove površi u kojoj nemaju singularno dejstvo. Polove integranda razmotrićemo detaljnije u odeljku 4.6 (videti i dodatak B).



Slika 4.2: Generalisani koeficijent refleksije R_{zz} za $\epsilon_{er} = 4$.



Slika 4.3: Generalisani koeficijent transmisije T_{xx} za $\epsilon_{er} = 4$.

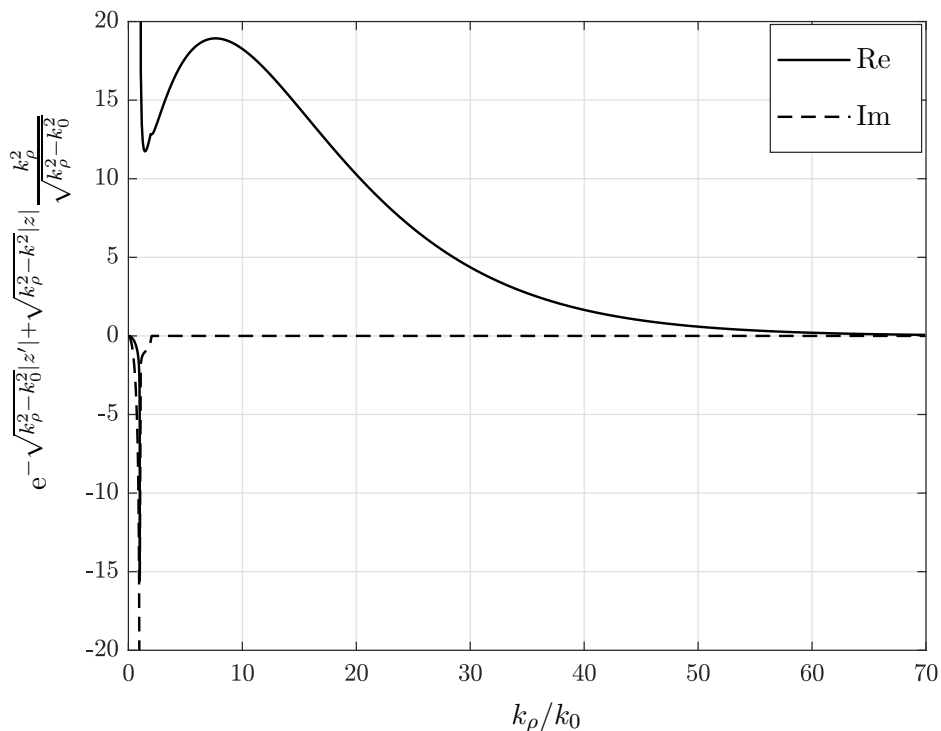
Za računanje *repa* integrala, od interesa je tzv. iracionalni faktor, koji sada značajno utiče na anvelopu podintegralne funkcije i varira od jednog do drugog ZI. Naime, u generalisanom obliku ZI (2.71), stepen nad k_ρ u brojiocu uzima vrednosti $1 \leq n \leq 3$. Iracionalni faktor je funkcija oblika $k_\rho^n / \sqrt{k_\rho^2 - k_0^2}$. Konkretno, za iracionalni faktor integrala $S_{t,xx}^{1,0,2}$, u graničnom procesu imamo

$$\lim_{k_\rho \rightarrow \infty} \frac{k_\rho^2}{\sqrt{k_\rho^2 - k_0^2}} = \infty. \quad (4.8)$$

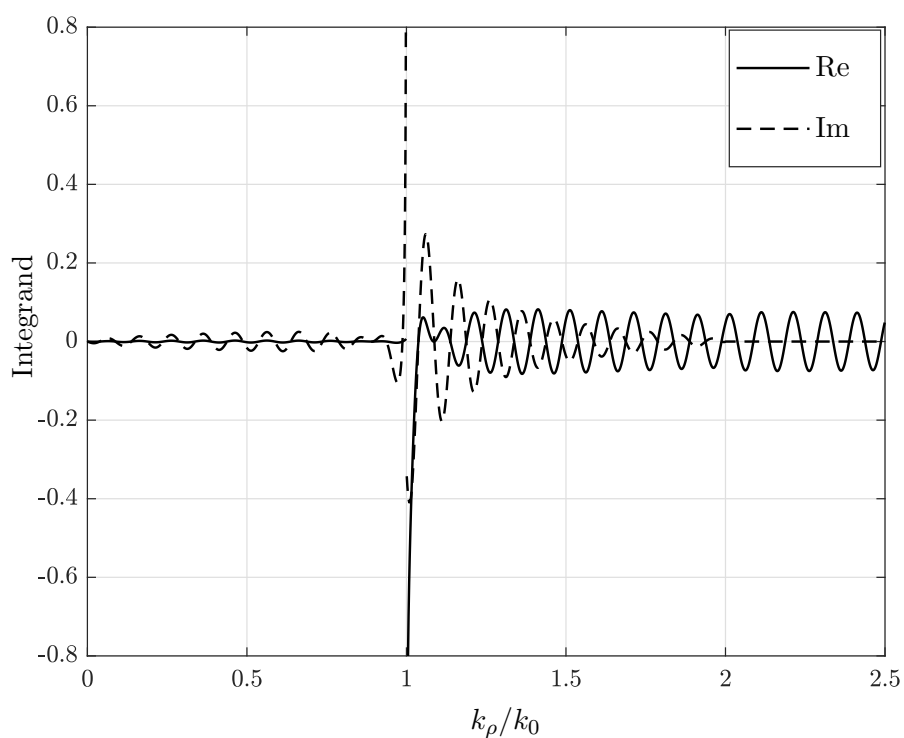
Međutim, eksponencijalni faktor, koji zavisi od z i z' , dominantan je u odnosu na ostale faktore za dovoljno veliko k_ρ , te integral ostaje konvergentan. Korisno je, dakle, posmatrati iracionalni i eksponencijalni faktor združeno. Njihov proizvod prikazan je na slici 4.4 za $k_\rho \in [0, 70k_0]$.

Konačno, ukupne podintegralne funkcije oba integrala za $\rho = 10\lambda_0$ i $z = z' = 0,01\lambda_0$ prikazane su na slikama 4.5 i 4.6. Na datom intervalu, zbog slabog prigušenja, anvelopa podintegralne funkcije jako sporo opada u slučaju *reflektovanog* integrala (slika 4.5). Šta više, u slučaju *transmitovanog* integrala (slika 4.6) na istom intervalu vidimo njegovu prividno rastuću anvelopu (slika 4.6). No, razlog tome jeste to što prigušenje eksponencijalne funkcije počinje da dobija na značaju tek za $k_\rho \gg k_0$.

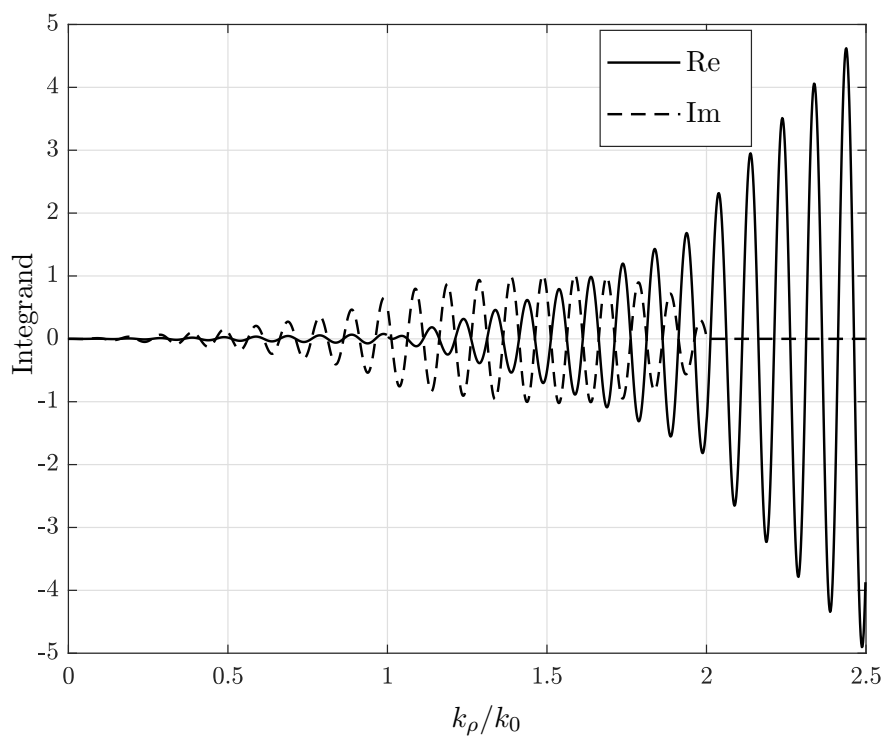
Izuzev koeficijenta refleksije i dodatne tačke grananja, integral $g_{r,zz}$ ima isto jezgro kao integral g_0 , a time i slične numeričke osobine. Očekujemo da teoriju razvijenu iz kvalitativne i kvantitativne analize integrala g_0 možemo lako primeniti na osnovni reflektovani integral $g_{r,zz}$. Isti zaključak možemo izvući i za integrale $g_{t,zz}$, $g_{r,xx}$, i $g_{t,xx}$. Proširenje ustanovljenih tehnika ka ostalim integralima, u kojim figurišu njihovi različiti izvodi, nije tako očigledno. Iz tog razloga ćemo u narednom odeljku pažljivo razmotriti tehnike računanja konačnog dela ZI u slučaju spoja dve sredine.



Slika 4.4: Ukupna podintegralna funkcija integrala $S_{r,zz}^{0,0,1}$ za $\rho = 10\lambda_0$ i $z = z' = 0,01\lambda_0$.



Slika 4.5: Ukupna podintegralna funkcija integrala $S_{r,zz}^{0,0,1}$ za $\rho = 10\lambda_0$ i $z = z' = 0,01\lambda_0$.



Slika 4.6: Ukupna podintegralna funkcija integrala $S_{t,xx}^{1,0,2}$ za $\rho = 10\lambda_0$ i $z = z' = 0,01\lambda_0$.

4.2 Tehnike za računanje konačnog dela Zomerfeldovog integrala za slučaj razdvojne površi dve sredine

U odnosu na ZI za slobodan prostor, dodatni faktori, kao i novi singularitet, koji se pojavljuju u slučaju ZI za dve linearne sredine, mogu uticati nepovoljno na numeričku integraciju. U ovom odeljku razvićemo tehnike za prevazilaženje datih numeričkih izazova, kao i za formiranje predikcionih formula koje bi u novom scenariju takođe omogućile efikasno računanje konačnog dela ZI.

U okviru predloženih tehnika, zadržavamo osnovni okvir pristupa iz prethodnog poglavlja, a to su GL kvadraturna formula i realna putanja integracije. Konačne delove dva primera ZI pišemo u eksplicitnom obliku s parametrizovanim granicama,

$$I_{r,zz}(k_{\rho 1}, k_{\rho 2}) = \int_{k_{\rho 1}}^{k_{\rho 2}} \frac{\epsilon_{er} \sqrt{k_{\rho}^2 - k_0^2} - \sqrt{k_{\rho}^2 - k^2}}{\epsilon_{er} \sqrt{k_{\rho}^2 - k_0^2} + \sqrt{k_{\rho}^2 - k^2}} J_0(\rho k_{\rho}) e^{-\sqrt{k_{\rho}^2 - k_0^2}(|z| + |z'|)} \frac{k_{\rho} dk_{\rho}}{\sqrt{k_{\rho}^2 - k_0^2}}, \quad (4.9)$$

$$I_{t,xx}(k_{\rho 1}, k_{\rho 2}) = \int_{k_{\rho 1}}^{k_{\rho 2}} \frac{2}{\sqrt{k_{\rho}^2 - k_0^2} + \sqrt{k_{\rho}^2 - k^2}} J_1(\rho k_{\rho}) e^{-\sqrt{k_{\rho}^2 - k_0^2}|z'| - \sqrt{k_{\rho}^2 - k^2}|z|} k_{\rho}^2 dk_{\rho}, \quad (4.10)$$

gde je u drugom integralu skraćen koreni faktor iz brojioca koeficijenta transmisije i imenioca iracionalnog faktora. Time se objašnjava odsustvo prekida podintegralne funkcije u $k_{\rho} = k_0$, prikazane na slici 4.6.

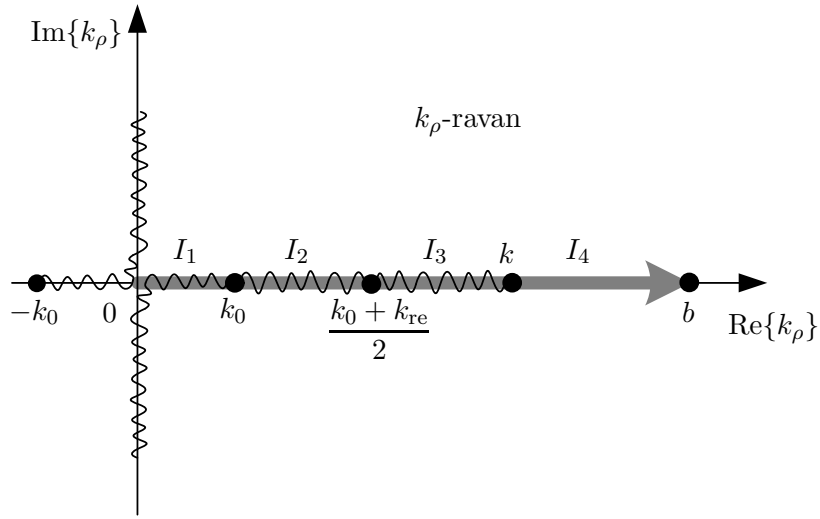
U analitičkoj pripremi integracije nad konačnim domenom $[0, b]$ izvršićemo dodatnu poddelu na mestu $k_{\rho} = \text{Re}\{k\} = k_{re}$. Ovo odgovara tačnoj vrednosti singulariteta za $\text{Im}\{k\} = k_{im} = 0$, odnosno projekciji singulariteta na realnu osu za $k_{im} \neq 0$ (kvazisingularitet). Takođe, treću poddelu uvodimo na mestu $k_0 < k_{\rho} < k_{re}$, zbog različitog tretiranja singulariteta u prva dva i u druga dva intervala. Sledi da ZI nad konačnim intervalom možemo izraziti kao $I(0, b) = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$, gde je

$$\begin{aligned} I_1 &= I(0, k_0), \\ I_2 &= I\left(k_0, \frac{k_0 + k_{re}}{2}\right), \\ I_3 &= I\left(\frac{k_0 + k_{re}}{2}, k_{re}\right), \\ I_4 &= I(k_{re}, b), \end{aligned} \quad (4.11)$$

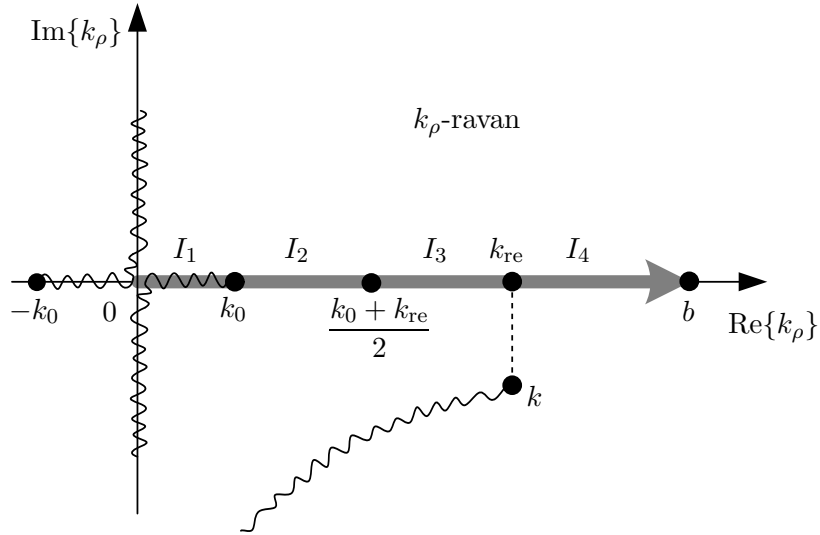
Radi boljeg poređenja sa postojećim metodama, u analizi konačnog dela ZI usvajamo nešto drugačiju gornju granicu od one u 3.11,

$$b = k_0 \sqrt{\text{Re}\{\epsilon_{er}\} + 1}, \quad (4.12)$$

prema definiciji datoj u [13]. Putanja integracije, zaseci i tačke grananja prikazani su na slici 4.7.



(a)



(b)

Slika 4.7: Putanje integracije (siva linija) predstavljene u kompleksnoj k_ρ -ravni u za (a) $k_{\text{im}} = 0$ i (b) $k_{\text{im}} < 0$. Talasaste linije predstavljaju zaseke odgovarajućih korenih funkcija.

4.2.1 Potiskivanje singulariteta podintegralne funkcije

U skladu sa usvojenim polaznim hipotezama, za efikasno računanje ZI u slučaju dve sredine kada se tačke grananja nalaze na ili blizu putanje integracije, razmatramo ponovo korenu smenu i metodu GL. Međutim, sada je neophodno definisati različite smene za različite poddomene [48]. Konkretno,

$$s = \sqrt{k_\rho^2 - k_0^2}, \quad \text{za prvi i drugi poddomen (integrali } I_1 \text{ i } I_2), \quad (4.13)$$

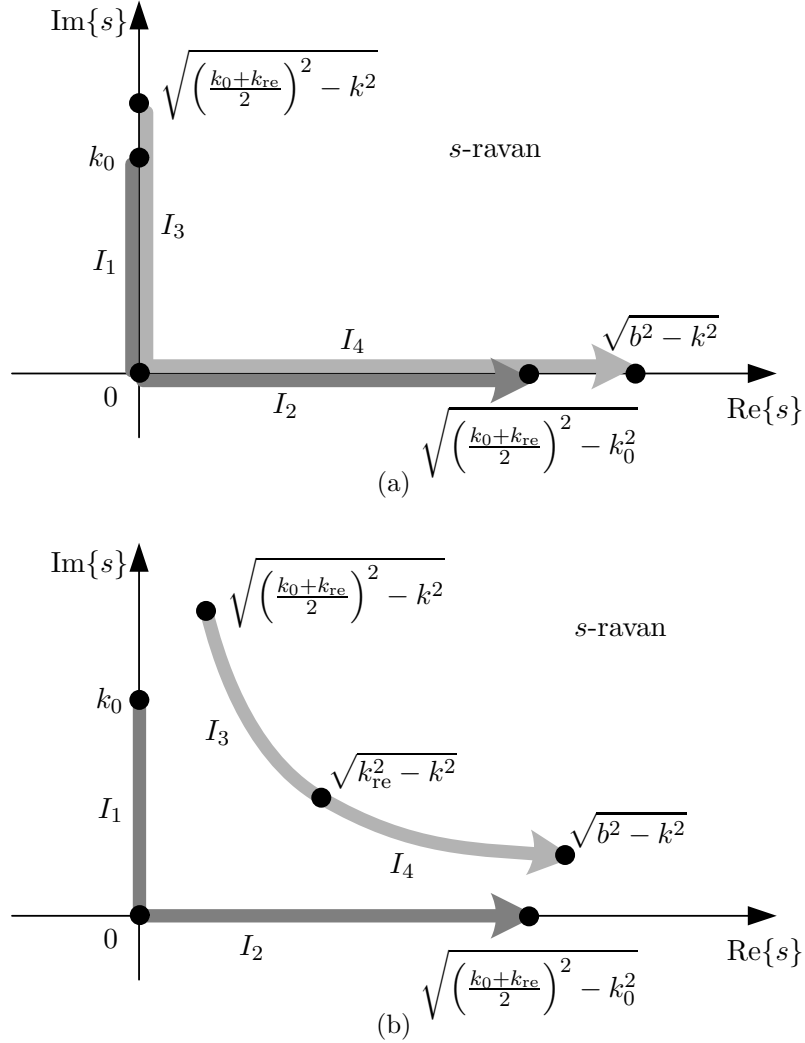
$$s = \sqrt{k_\rho^2 - k^2}, \quad \text{za treći i četvrti poddomen (integrali } I_3 \text{ i } I_4). \quad (4.14)$$

Putanje integracije nakon smene prikazane su u kompleksnoj s -ravni na slici 4.8a za $k_{\text{im}} = 0$, odnosno na slici 4.8b za $k_{\text{im}} < 0$. Kao i u slučaju ZI za slobodan prostor, singularna tačka grananja $k_\rho = k_0$ preslikana je u nesingularnu tačku $s = 0$, dok je putanja koja odgovara integralu I_1 , odnosno I_2 , čisto imaginarna, odnosno čisto realna. Ako je $k_{\text{im}} < 0$, onda je tačka

$k_\rho = k_{\text{re}}$ za integral po realnoj putanji kvazisingularitet, koji se slika u nesingularnu tačku $k_\rho = \sqrt{k_{\text{im}}^2 - k^2}$. Putanje koje odgovaraju integralima I_3 i I_4 u s -ravni su kompleksne određene su smenom $s = \sqrt{k_\rho^2 - k^2}$ i usvojenom realnom putanjom, $\text{Im}\{k_\rho\} = 0$. Odatle sledi relacija

$$s_{\text{re}}s_{\text{im}} = -k_{\text{re}}k_{\text{im}} > 0, \quad (4.15)$$

koja definiše hiperbolu u I kvadrantu s -ravni [48].



Slika 4.8: Putanje integracije (sive linije) predstavljene u kompleksnoj s -ravni za (a) $k_{\text{im}} = 0$ i (b) $k_{\text{im}} < 0$.

Ako prvu smenu primenimo na integrale (4.9) i (4.10), za prvi i drugi poddomen dobijamo

$$I_{r,zz}(s_1, s_2) = \int_{s_1}^{s_2} \frac{\epsilon_{\text{er}}s - \sqrt{s^2 + k_0^2 - k^2}}{\epsilon_{\text{er}}s + \sqrt{s^2 + k_0^2 - k^2}} J_0\left(\rho\sqrt{s^2 + k_0^2}\right) e^{-s(|z|+|z'|)} ds, \quad (4.16)$$

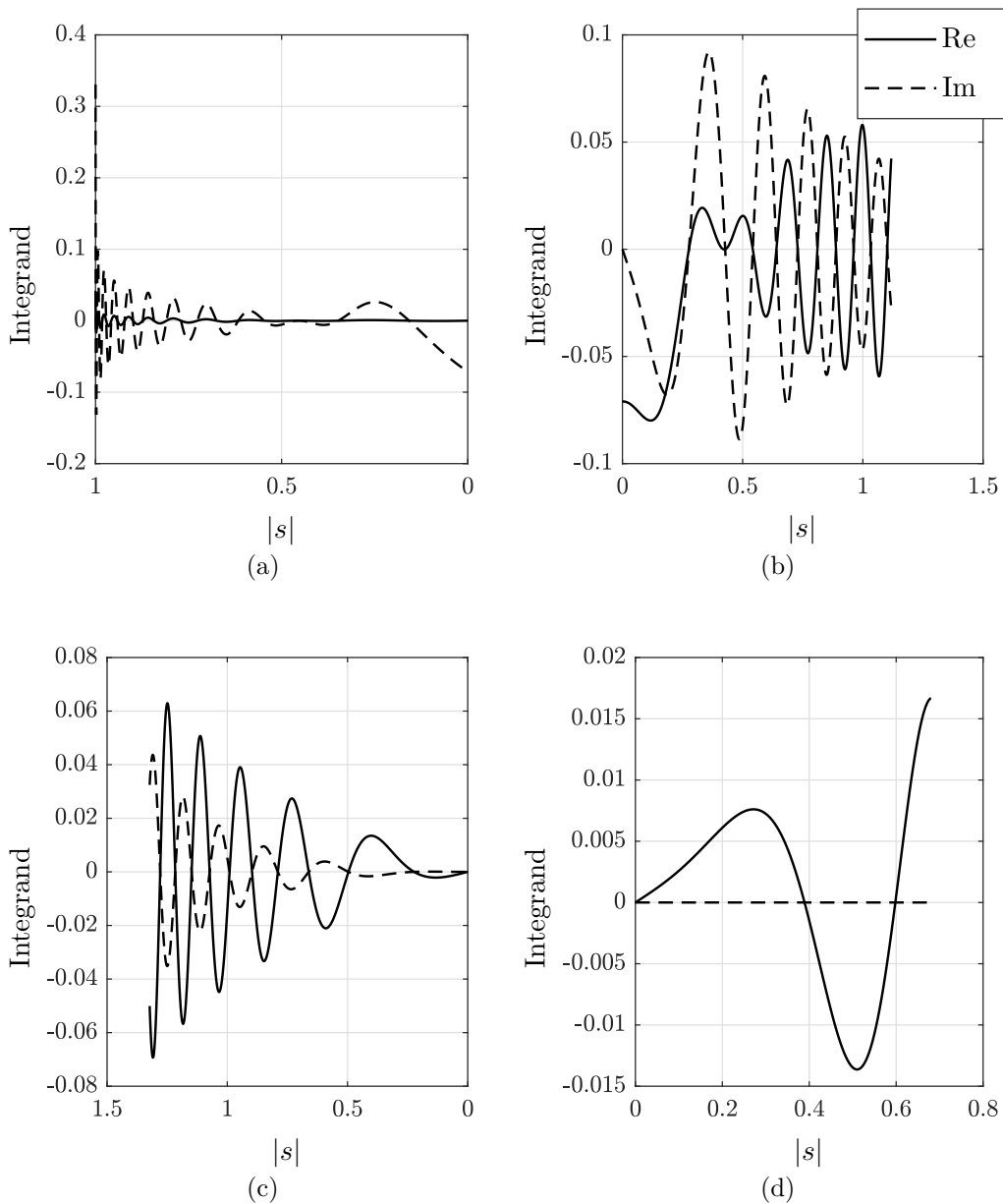
$$I_{t,xx}(s_1, s_2) = \int_{s_1}^{s_2} \frac{2}{s + \sqrt{s^2 + k_0^2 - k^2}} J_1\left(\rho\sqrt{s^2 + k_0^2}\right) e^{-s|z'| - \sqrt{s^2 + k_0^2 - k^2}|z|} \sqrt{s^2 + k_0^2} s ds. \quad (4.17)$$

Analogno, primenom druge smene, za treći i četvrti poddomen imamo

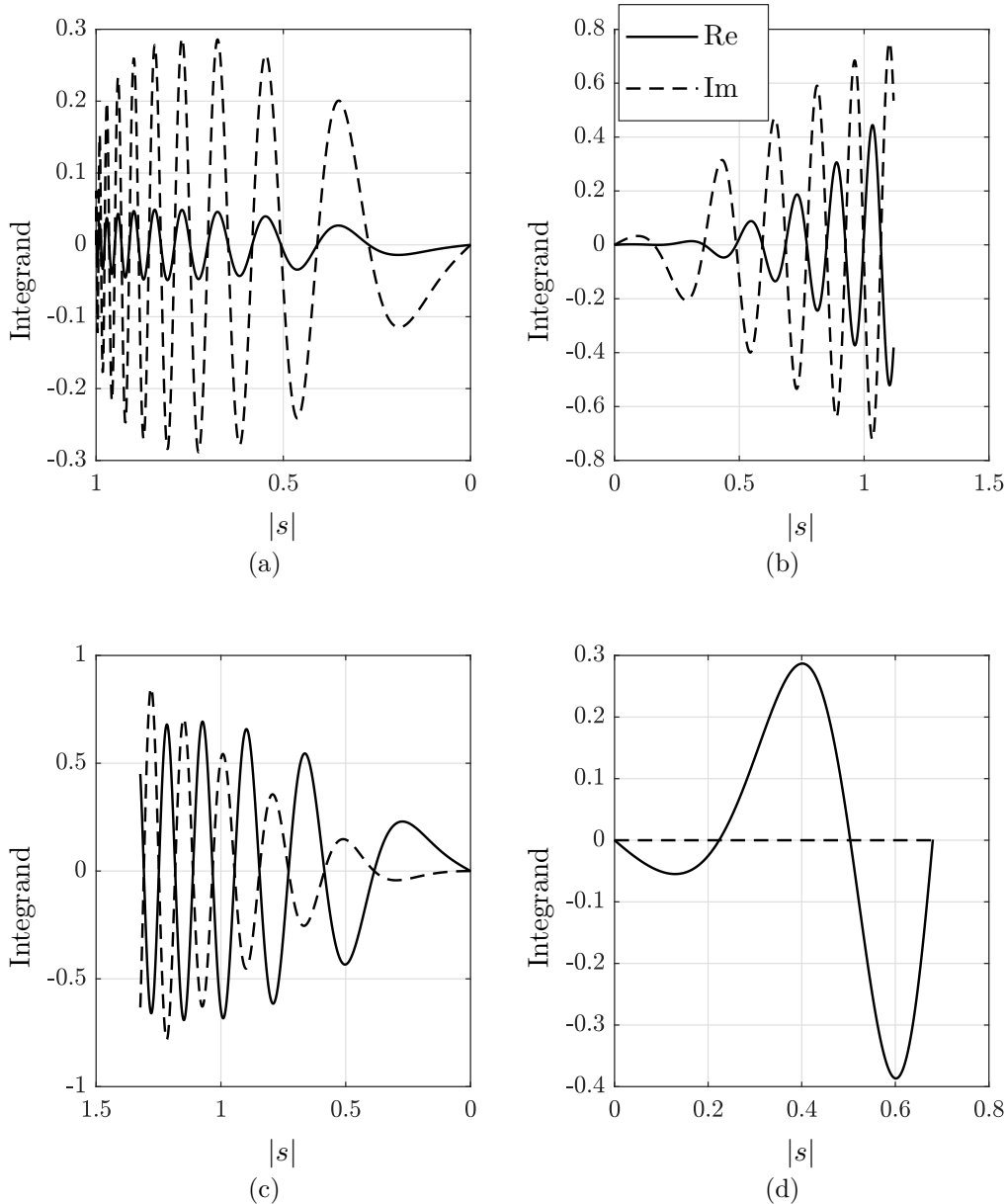
$$I_{r,zz}(s_1, s_2) = \int_{s_1}^{s_2} \frac{\epsilon_{er} \sqrt{s^2 + k^2 - k_0^2} - s}{\epsilon_{er} \sqrt{s^2 + k^2 - k_0^2} + s} J_0(\rho \sqrt{s^2 + k^2}) e^{-s(|z|+|z'|)} ds, \quad (4.18)$$

$$I_{t,xx}(s_1, s_2) = \int_{s_1}^{s_2} \frac{2}{\sqrt{s^2 + k^2 - k_0^2} + s} J_1(\rho \sqrt{s^2 + k^2}) e^{-\sqrt{s^2 + k^2 - k_0^2}|z'| - s|z|} \sqrt{s^2 + k^2} s ds. \quad (4.19)$$

Primeri podintegralnih funkcija integrala (4.16)–(4.19) su prikazani na odgovarajućim poddomenima na slikama 4.9 i 4.10 za $\rho = 10\lambda_0$, $z = z' = 0,01\lambda_0$ i $\epsilon_{er} = 4 - j10^{-5}$ (slučaj malih gubitaka). Nakon primene smene, singulariteti su potisnuti, te prekidi funkcija i izvoda nisu приметni. Kao i u slučaju slobodnog prostora, talasnost podintegralnih funkcija ZI za slučaj dve sredine nije uklonjena, pa za ekstremne vrednosti koordinati rastojanja i dalje nameće izvesno ograničenje u tačnosti koju je moguće dostići numeričkom integracijom.



Slika 4.9: Podintegralna funkcija integrala $I_{r,zz}$ nad četiri poddomena za $\rho = 10\lambda_0$, $z = z' = 0,01\lambda_0$ i $\epsilon_{er} = 4 - j10^{-5}$. (a) $I_{r,zz1}$, (b) $I_{r,zz2}$, (c) $I_{r,zz3}$, (d) $I_{r,zz4}$.



Slika 4.10: Podintegralna funkcija integrala $I_{t,xx}$ nad četiri poddomena za $\rho = 10\lambda_0$, $z = z' = 0,01\lambda_0$ i $\epsilon_{er} = 4 - j10^{-5}$. (a) $I_{t,xx1}$, (b) $I_{t,xx2}$, (c) $I_{t,xx3}$, (d) $I_{t,xx4}$.

Hiperbolu dobijenu u (4.15) potrebno je parametrizovati, kako bi se GL kvadraturna formula mogla primeniti na funkciju realnog argumenta. Očigledno i s_{re} i s_{im} predstavljaju legitimne kandidate za promenljivu po kojoj bi se vršila integracija. Na poddomenu integrala I_3 dominantan je imaginarni deo promenljive s , dok je na poddomenu integrala I_4 dominantan njen realni deo. Pored toga što je posmatrana sredina 2 u našem razmatranju nemagnetski materijal sa gubicima, od praktičnog interesa jeste slučaj kada su ti gubici mali, tj. kada je

$$|\operatorname{Im}\{\epsilon_e\}| \ll \operatorname{Re}\{\epsilon_e\} \quad \Rightarrow \quad |k_{im}| \ll k_{re},$$

$$\epsilon_e = \epsilon' \left(1 - j \frac{\sigma + \omega \epsilon''}{\omega \epsilon'} \right) \quad (4.20)$$

gde je $\epsilon' = \operatorname{Re}\{\epsilon\}$, $\epsilon'' = -\operatorname{Im}\{\epsilon\}$, a σ specifična provodnost sredine 2. Kod malih gubitaka je proizvod $-k_{re}k_{im}$ mali, pa se i kraci hiperbole jako brzo asimptomatski približavaju realnoj i

imaginarnoj osi kompleksne s -ravni. Dominantnost imaginarnog dela promenljive s u trećem, i realnog dela u četvrtom poddomenu je stoga još izraženija. Ako bi se kojim slučajem integracija vršila preko nedominantnih komponenti promenljive s , tj. ako bi se integral I_3 računao preko s_{re} ili integral I_4 preko s_{im} , korena funkcija bi u argumentu Beselovog i eksponencijalnog faktora izazvala jako veliki broj oscilacija u okolini granice poddomena $s = \sqrt{k_{\text{re}}^2 - k^2}$, što nepovoljno utiče na konvergenciju integracije. Iz navedenih razloga, integral I_3 računaćemo preko promenljive s_{im} , a integral I_4 preko s_{re} . Jakobijani, koji se onda moraju multiplikativno pridodati polaznim integrandima, slede iz (4.15),

$$\frac{ds}{ds_{\text{re}}} = 1 + j \frac{k_{\text{re}} k_{\text{im}}}{s_{\text{re}}^2}, \quad \frac{ds}{ds_{\text{im}}} = \frac{k_{\text{re}} k_{\text{im}}}{s_{\text{im}}^2} + j. \quad (4.21)$$

Predloženi postupak moguće je primeniti i na trigonometrijske i hiperbolične smene promenljivih. Radi poređenja, tri relevantne smene su prikazane u tabeli 4.1. Iako numerički eksperimenti pokazuju da su njihove performanse relativno slične sa aspekta tačnosti i konvergencije, korena smena se ističe zbog svoje jednostavnosti i lakše računarske implementacije u odnosu na ostale smene. Interesantno je da je korena smena do sada već pominjana u literaturi, gde je korišćena pre svega u cilju pojednostavljenja notacije, kao i za određivanje približnog analitičkog rešenja ZI [1, 18, 49], ali nije razmatrana za potiskivanje singularnog uticaja kompleksnih tačaka grananja u numeričkoj integraciji.

Tabela 4.1: Tabela smena promenljivih.

s	k_{ρ}	$s_{\text{im}}(s_{\text{re}})$
$s = \arccos\left(\frac{k_{\rho}}{k}\right)$	$k_{\rho} = k \cos s$	$s_{\text{im}} = \text{arth}\left[\frac{k_{\text{im}}}{k_{\text{re}}} \text{ctg}(s_{\text{re}})\right]$
$s = \text{arch}\left(\frac{k_{\rho}}{k}\right)$	$k_{\rho} = k \text{ch } s$	$s_{\text{im}} = \text{arctg}\left[-\frac{k_{\text{im}}}{k_{\text{re}}} \text{cth}(s_{\text{re}})\right]$
$s = \sqrt{k_{\rho}^2 - k^2}$	$k_{\rho} = \sqrt{s^2 + k^2}$	$s_{\text{im}} = -\frac{k_{\text{im}} k_{\text{re}}}{s_{\text{re}}}$

4.2.2 Relativna greška

Za potrebe bližeg objašnjenja narednih tehnika, na ovom mestu definišemo relativnu grešku računanja konačnih delova ZI za slučaj dve sredine. Naime, razmatraćemo grešku u odnosu na ukupnu vrednost konačnog dela ZI.

$$\delta_i = \frac{|\hat{I}_i(n_g) - \tilde{I}_i|}{|\tilde{I}|}, \quad (4.22)$$

gde je $\hat{I}_i(n_g)$ procena integrala na i -tom poddomenu dobijena pomoću n_g integracionih tačaka, a \tilde{I}_i i \tilde{I} su vrednosti integrala na i -tom poddomenu i ukupnog konačnog dela integrala $I(0, b)$, respektivno, izračunate sa maksimalnom mogućom tačnošću, korišćenjem dovoljno velikog broja

integracionih tačaka. Ovakva definicija je pogodna zbog odbacivanja integrala nad onim poddomenima čiji doprinosi su zanemarljivi u odnosu na ukupan konačan deo ZI.

4.2.3 Aproksimativna putanja integracije

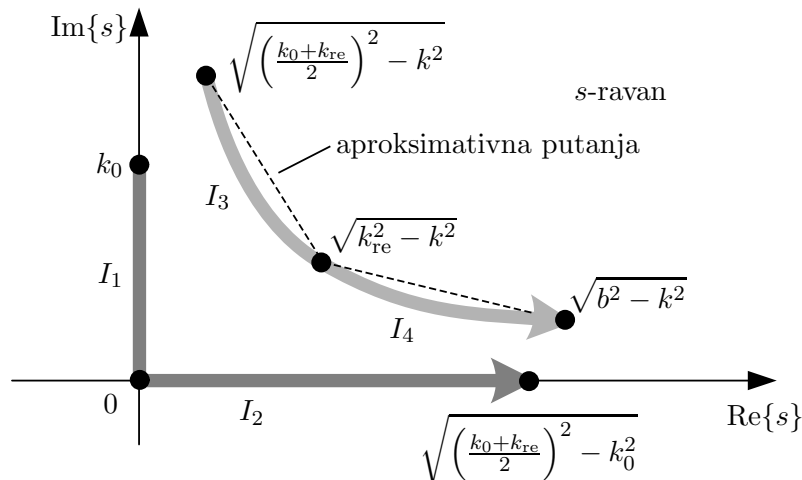
U većini primena ZI u slučaju dve sredine nailazimo na male gubitke $|k_{\text{im}}| \ll k_{\text{re}}$. U našem primeru, granice četvrtog poddomena, tj. integrala I_4 , mogu se približno izraziti kao

$$s_{\text{re}}(k_{\rho} = k_{\text{re}}) \approx \sqrt{k_{\text{re}}|k_{\text{im}}|}, \quad s_{\text{re}}(k_{\rho} = b) \approx k_0. \quad (4.23)$$

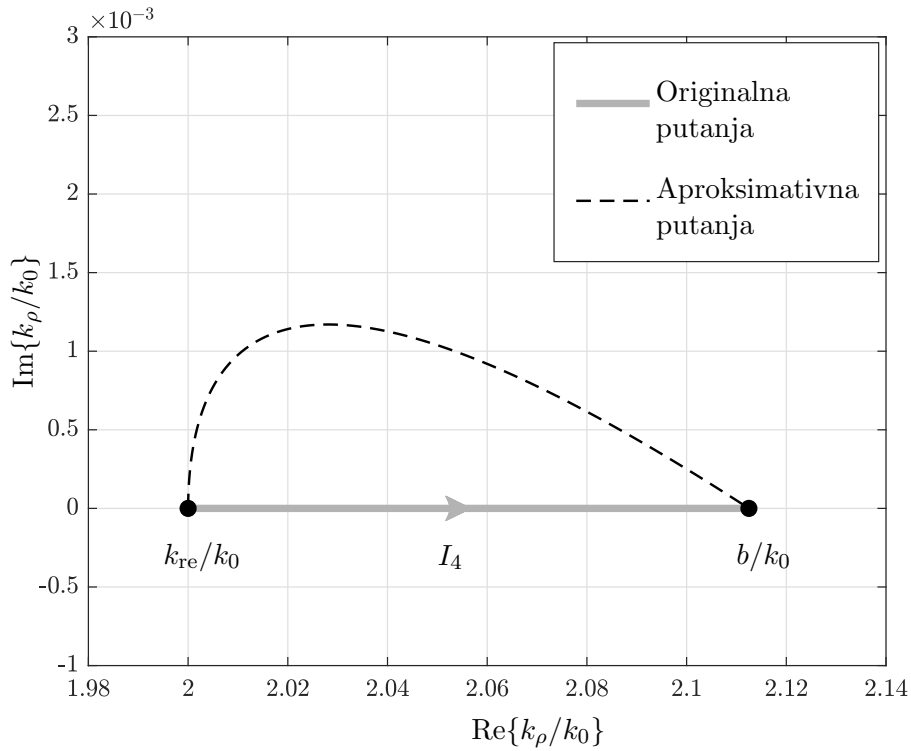
Na datom intervalu funkcija $1/s_{\text{re}}^2$, koja se pojavljuje u (4.21), ima veliki dinamički opseg. Drugim rečima, odnos njene maksimalne i minimalne vrednosti u apsolutnom smislu iznosi približno $k_{\text{re}}/|\epsilon_{\text{er}}k_{\text{im}}| \gg 1$, što doprinosi uspoređenju konvergencije. Sličan zaključak se može izvesti i za interval koji odgovara integralu I_3 i promenljivu s_{im} . Ovo ograničenje je svojstveno ne samo korenoj, već i trigonometrijskim i hiperboličnim smenama primenjenim na sredine sa malim gubicima.

Za prevazilaženje ovog ograničenja, hiperbola, koja je posledica korene smene i recipročne relacije (4.15), može se aproksimirati polinomom, koji omogućava *pitomiju* funkciju parametrizacije, a time i manje dinamičan Jakobijan. Mali gubici čine da su kraci hiperbole približno poluprave koje leže blizu osa s -ravni, pa je polinom prvog reda, tj. linearna funkcija, najjednostavnija i adekvatna aproksimacija. Dva dela hiperbole, možemo aproksimirati deo-po-deo linearnom funkcijom [48], kao na slici 4.11.

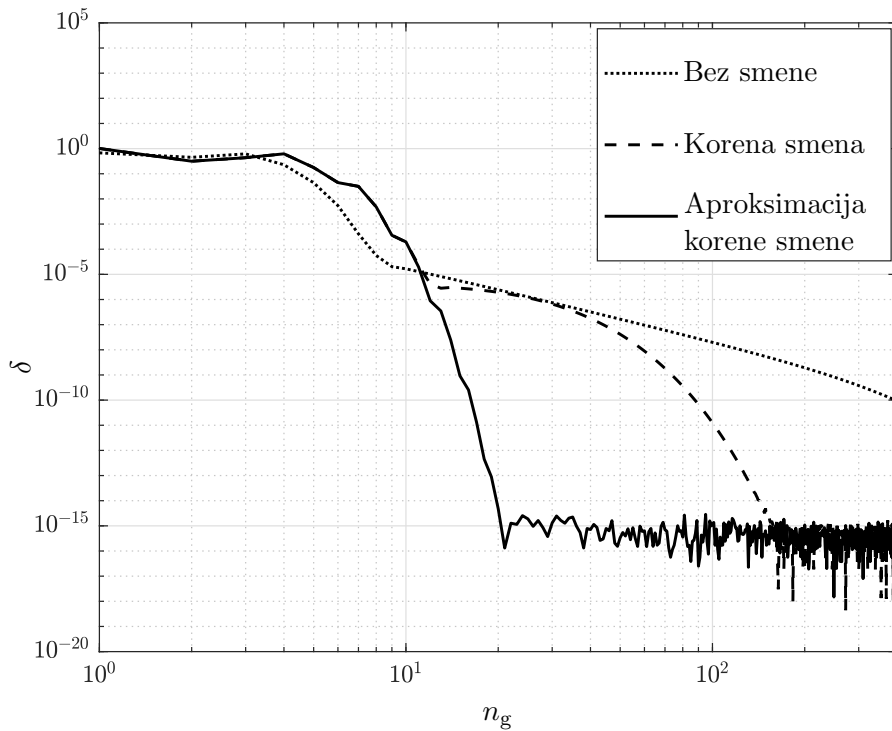
Rezultujuća blaga deformacija putanje integracije u s -ravni ne menja nominalnu vrednost integrala (koju nije moguće izračunati analitički), ali može uticati na numeričku procenu vrednosti integrala. Ova aproksimacija takođe implicira promenu putanje u polaznoj, k_{ρ} -ravni, koju dobijamo primenom inverzne funkcije smene, $k_{\rho} = \sqrt{s^2 + k^2}$. Na slici 4.12 je u k_{ρ} -ravni dat primer aproksimativne putanje integracije nad četvrtim poddomenom integrala $I_{r,zz}$ za $\rho = 10\lambda_0$, $z = z' = 0,01\lambda_0$ i $\epsilon_{\text{er}} = 4 - j10^{-5}$. Imajući u vidu skalu u kojoj je prikazana imaginarna osa, zaključujemo da je odstupanje od originalne, realne putanje malo. Naime, odnos maksimalnog vertikalnog odstupanja (imaginarnih vrednosti) i dužine intervala (opsega realnih vrednosti), iznosi $\sim 10^{-3}$. Ovakvu putanju nazivaćemo *kvazirealnom* putanjom.



Slika 4.11: Aproksimativna linearna putanja integracije (isprekidane linije) i polazna putanja integracije (sive linije) predstavljene u kompleksnoj s -ravni u slučaju $k_{\text{im}} < 0$.



Slika 4.12: Grafik aproksimativne (isprekidana linija) i polazne putanje integracije (siva linija) predstavljene u kompleksnoj k_ρ -ravni za integral $I_{r,zz4}$, za $\rho = 10\lambda_0$, $z = z' = 0,01\lambda_0$ i $\epsilon_{er} = 4 - j10^{-5}$.



Slika 4.13: Poređenje relativne greške računanja integrala $I_{r,zz4}$ za $\rho = 10\lambda_0$, $z = z' = 0,01\lambda_0$ i $\epsilon_{er} = 4 - j10^{-5}$ u slučajevima bez primene smene, sa korenom smenom i sa linearnom aproksimacijom korene smene promenljivih.

Na slici 4.13 je prikazano poređenje relativne greške integracije računane prema (4.22). Za grešku veću od 10^{-5} , krive su relativno slične. Vidimo da je kovergencija vrednosti integrala

bez primene smene najsporiya, naročito za veće tačnosti. Korena smena dovodi do određenog ubrzanja, ali ono postaje značajno tek za grešku koja je manja od 10^{-5} , tj. nakon kolena funkcije greške. Korenom smenom, maksimalna tačnost postiže se sa približno 130 integracionih tačaka. Primenom linearne putanje integracije u s -ravni, odnosno kvazirealne putanje u k_ρ -ravni, funkcija relativne greške nema koleno, a integral već sa 20 tačaka dostiže maksimalnu tačnost.

Koleno u funkciji relativne greške može se objasniti i time da prosta korena smena u slučaju sredine bez gubitaka nikad zaista ne poništi singularitet, s obzirom da se on nalazi van putanje integracije. Njegov uticaj je uistinu ublažen, ali ne i uklonjen. Sa druge strane, uvedena aproksimativna putanja, u k_ρ -ravni rezultuje parametrizovanom krivom, koja ima strm nagib u okolini $k_\rho = k_{re}$, kao što se vidi na slici 4.12. Takva funkcija zgušnjava integracione tačke oko kvazisingulariteta i omogućava povoljniju i ravnomerniju integraciju metodom GL.

4.2.4 Određivanje praga računanja i granica domena integrala

Eksponecijalni faktor koji je prisutan u svim ZI, varira snažno sa promenom vertikalnih koordinati z i z' , čime dramatično menja brzinu opadanja anvelope podintegralne funkcije za $k_\rho > k_0$. Za integrale I_2 , I_3 i I_4 , eksponecijalni faktor $e^{-\sqrt{k_\rho^2 - k_0^2}|z|}$ je realan i za srednje i velike vrednosti z i z' ima dominantan uticaj na anvelopu u odnosu na ostale faktore. Problem snažno opadajuće anvelope najviše pogađa drugi poddomen, tj. integral I_2 , gde se može desiti da se previše integracionih tačaka upotrebi za ravan deo anvelope integranda ($k_\rho \gg k_0$), a premalo za njen strmi deo ($k_\rho \gtrsim k_0$). Sledi da čak i u slučaju konačnog dela ZI, uvođenjem pragova i skraćivanjem domena, računanje može postati efikasnije.

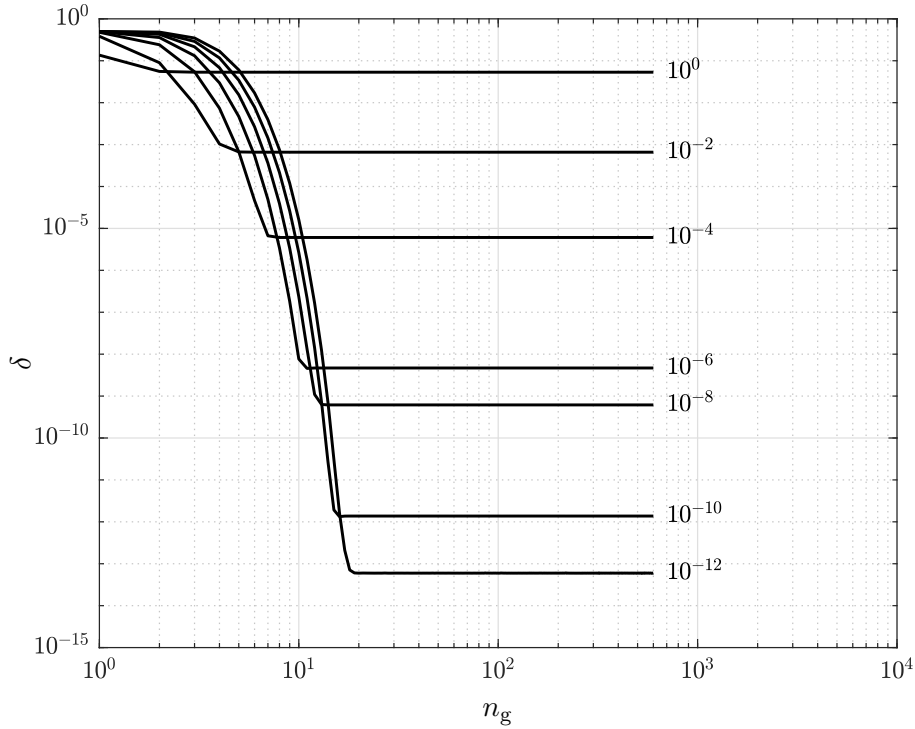
Kako bi se fluktuacija relativne greške u zavisnosti od vertikalnih koordinati z i z' potisnula, potrebno je definisati prag računanja, odnosno granicu domena koja je funkcija željene tačnosti. Na osnovu determinističkog i dominantnog eksponecijalnog faktora, kao i definicije relativne greške (4.22) pogodna gornja granica konačnog dela ZI se može približno izračunati kao

$$k_{\rho,th} = \sqrt{\left[\frac{\chi_{des} + 1}{(|z| + |z'|) \log_{10} e} \right]^2 + k_0^2}, \quad (4.24)$$

gde je χ_{des} željena tačnost. Na slici 4.14 prikazana je relativna greška za integral $I_{r,zz}$ nad kritičnim, drugim poddomenom za slučaj $\rho = 10\lambda_0$ i $z = z' = 5\lambda_0$, za različite gornje granice intervala integracije, izračunate pomoću (4.24). Predložena formula obezbeđuje tačnost koja je nešto veća od željene.

4.3 Analiza pojedinačnih poddomena integrala

Iako u osnovi slične prirode kao ZI za slučaj slobodnog prostora, ZI za slučaj dve sredine zahteva posebnu analizu. Jedna od ključnih razlika je što postoji više poddomena koji su na različit način pogođeni faktorima podintegralne funkcije. Na prvom poddomenu očekuje se slično ponašanje integrala kao u slučaju slobodnog prostora. Podintegralnu funkciju na tom intervalu definiše prevashodno koordinata ρ , koja utiče na ukupan broj oscilacija posredstvom Beselove funkcije. Kod drugog, trećeg i četvrtog poddomena uočava se kombinovano dejstvo Beselove i eksponecijalne funkcije. Kao što smo videli, na intervalu $k_\rho > k_0$ primetno je prigušenje eksponecijalnog faktora, koje je diktirano od strane vertikalnih koordinati z i z' . U ovom odeljku prikazano je nekoliko karakterističnih primera računanja $I_{r,zz}$ i $I_{t,xx}$, pomoću kojih

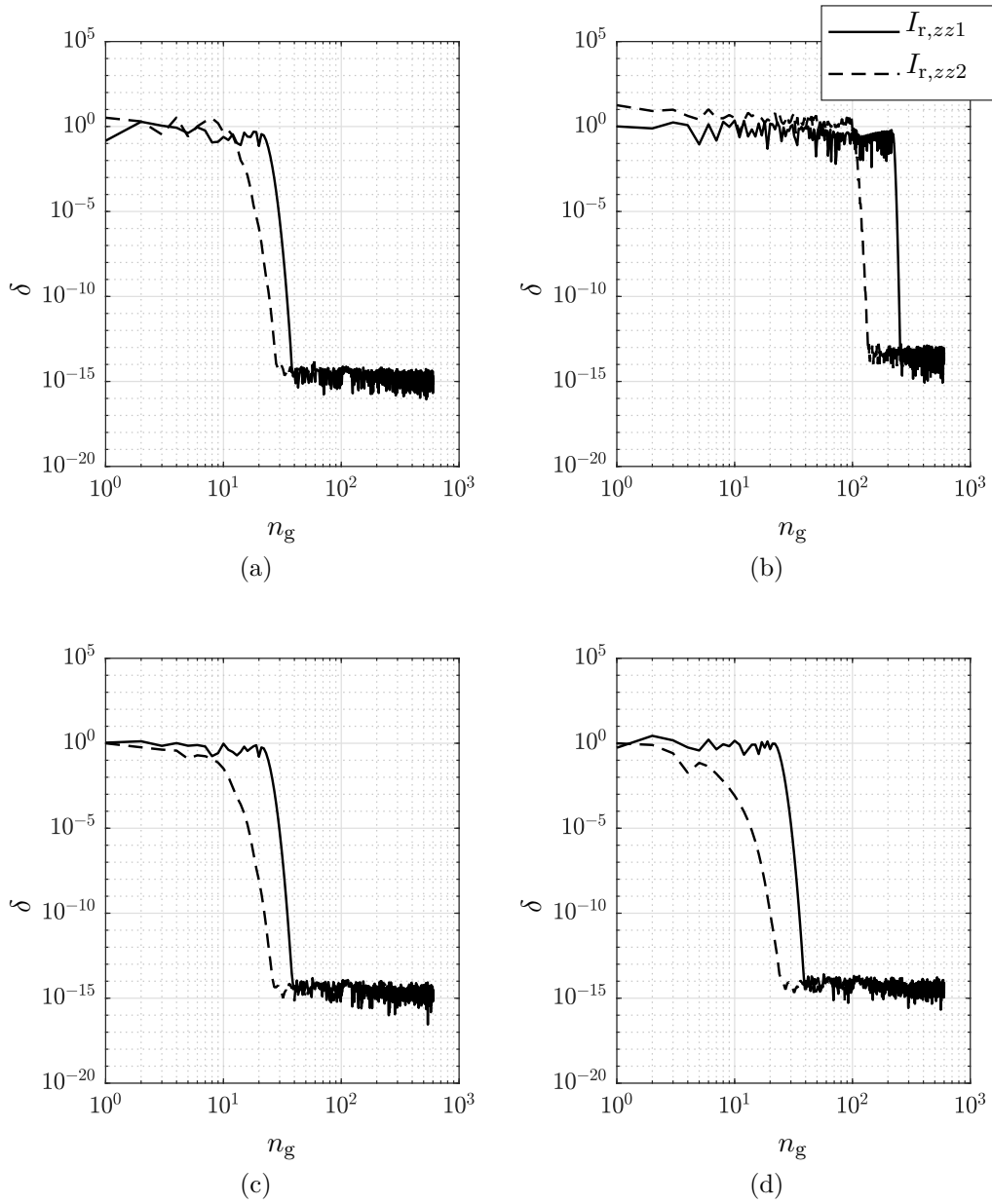


Slika 4.14: Relativna greška integrala $I_{r,zzz}$ za $\rho = 10\lambda_0$, $z = z' = 5\lambda_0$ i $\epsilon_{er} = 4 - j10^{-5}$ i različite pragove računanja. Brojevi desno od krivih predstavljaju željeni nivo greške.

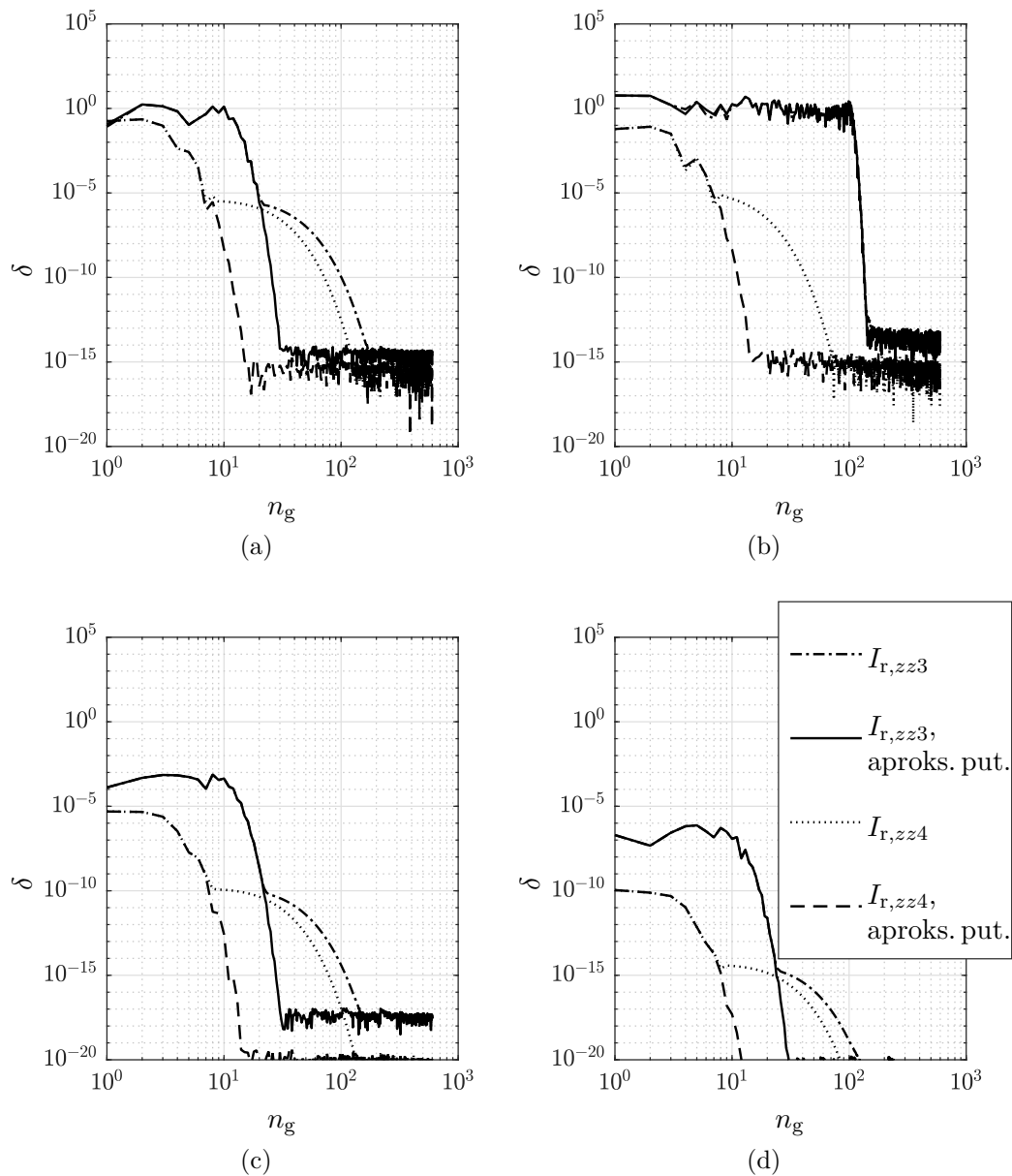
ističemo ključne sličnosti i razlike u odnosu na ZI za slobodan prostor. Dodatno, upoređeni su rezultati računanja integrala nad poddomenima sa i bez korišćenja predložene aproksimativne putanje integracije.

Na slikama 4.15 i 4.16 prikazana je relativna greška integrala $I_{r,zz}$ nad poddomenima 1 i 2, odnosno 3 i 4, respektivno, za različite vrednosti koordinata ($\rho, z, z' = z$). Ovakav prikaz u parovima omogućava jednostavan pregled relativne greške nad poddomenima sličnih karakteristika. Uticaj horizontalnog električkog rastojanja možemo analizirati na slikama 4.15a i 4.15b, gde su vertikalne koordinate z i z' električki male, a ρ uzima vrednosti $10\lambda_0$ i $100\lambda_0$. Pravilnost ponašanja krive greške sa povećanjem ρ se poklapa sa rezultatom za slobodan prostor. Stoga, možemo zaključiti da i ovde, pored vrednosti ρ , na broj integracionih tačaka utiče i dužina intervala integracije. Sličan efekat može se videti i za treći poddomen na slikama 4.16a i 4.16b, dok je za četvrti domen efekat manje izražen. Uticaj vertikalnog rastojanja na prvi i drugi poddomen prikazan je na slikama 4.15c i 4.15d, gde $\rho = 10\lambda_0$, a z i z' uzimaju umerene vrednosti $0,5\lambda_0$ i λ_0 . Promene krive greške za prvi i drugi poddomen su relativno male. Kada su u pitanju treći i četvrti poddomen, čak i relativno mala vertikalna rastojanja prouzrokuju приметно opadanje anvelope podintegralne funkcije, što smanjuje vrednost integrala, a time i nivo relativne greške u odnosu na ukupan konačan deo ZI. Na slikama 4.16c i 4.16d uočavamo pad maksimalne relativne greške usled povećanja z i z' .

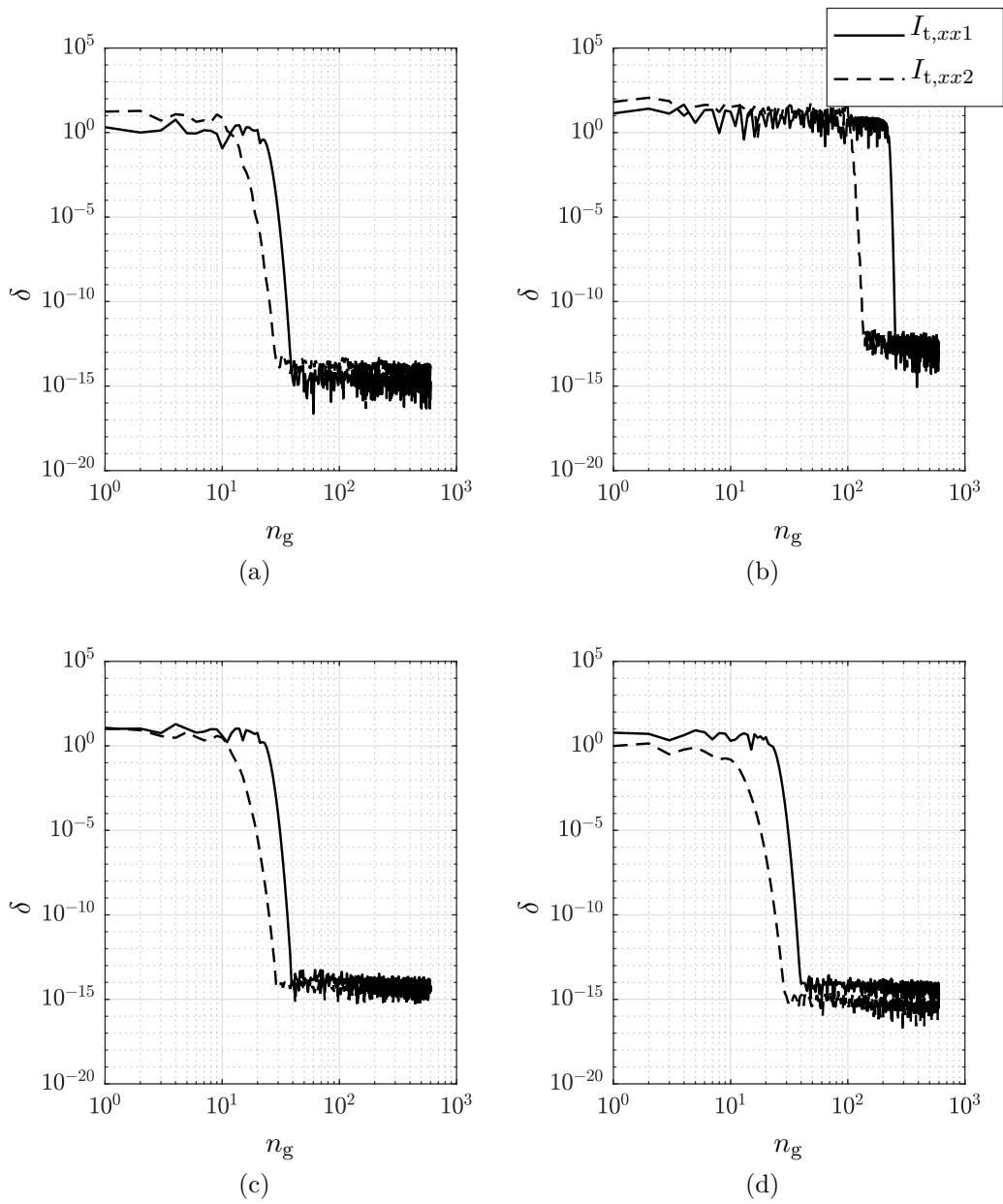
Analiza, istovetna gorenavedenoj, može se sprovesti i za integral $I_{t,xx}$. Usled nešto drugačijeg eksponencijalnog faktora, potiskivanje vrednosti integrala nad trećim i četvrtim poddomenom, a time i odgovarajućih relativnih grešaka, je slabije nego kod integrala $I_{r,zz}$, kao što se vidi na slikama 4.18c i 4.18d. To se može objasniti time što kod ZI za transmitovano polje anvelopu podintegralne funkcije u početku (za $k_0 < k_\rho < k_{re}$) diktira prevashodno vertikalna koordinata izvora z' , koja se javlja u eksponentu. Kada je $k_\rho > k_{re}$, počinje uticaj i vertikalne koordinate tačke posmatranja, z . Kod ZI za rasejano polje, kao što je $I_{r,zz}$, na celom intervalu $k_0 < k_\rho < b$ koordinate z i z' združeno doprinose eksponencijalnom opadanju podintegralne funkcije.



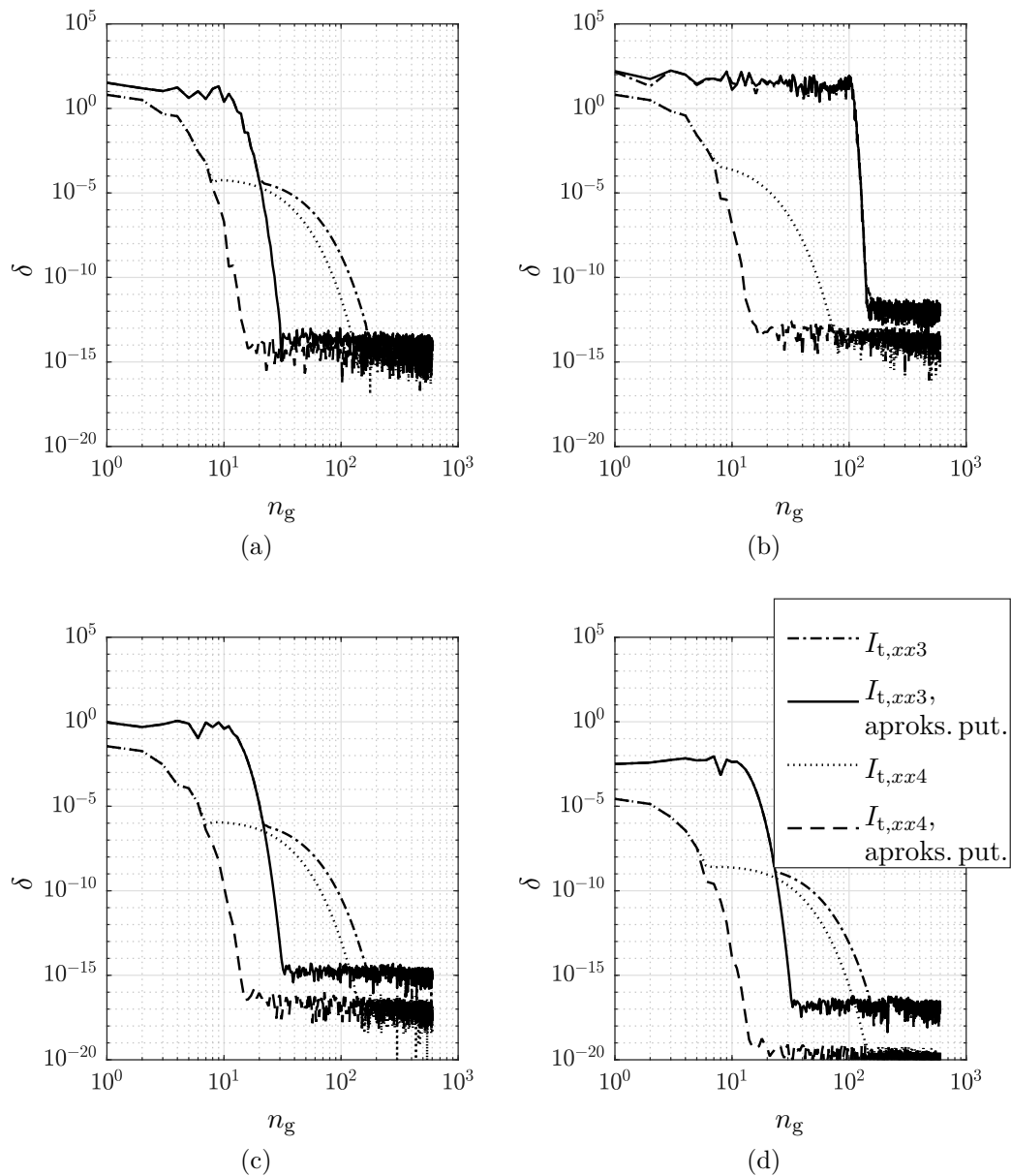
Slika 4.15: Relativna greška integrala $I_{r,zz}$ na prvom i drugom poddomenu za (a) $\rho = 10\lambda_0, z = z' = 0,01\lambda_0$, (b) $\rho = 100\lambda_0, z = z' = 0,01\lambda_0$, (c) $\rho = 10\lambda_0, z = z' = 0,5\lambda_0$, (d) $\rho = 10\lambda_0, z = z' = \lambda_0$.



Slika 4.16: Relativna greška integrala $I_{r,zz}$ na trećem i četvrtom poddomenu sa i bez aproksimativne putanje integracije za (a) $\rho = 10\lambda_0, z = z' = 0,01\lambda_0$, (b) $\rho = 100\lambda_0, z = z' = 0,01\lambda_0$, (c) $\rho = 10\lambda_0, z = z' = 0,5\lambda_0$, (d) $\rho = 10\lambda_0, z = z' = \lambda_0$.



Slika 4.17: Relativna greška integrala $I_{t,xx}$ na prvom i drugom poddomenu za (a) $\rho = 10\lambda_0$, $z = z' = 0,01\lambda_0$, (b) $\rho = 100\lambda_0$, $z = z' = 0,01\lambda_0$, (c) $\rho = 10\lambda_0$, $z = z' = 0,5\lambda_0$, (d) $\rho = 10\lambda_0$, $z = z' = \lambda_0$.



Slika 4.18: Relativna greška integrala $I_{t,xx}$ na trećem i četvrtom poddomenu sa i bez aproksimativne putanje integracije za (a) $\rho = 10\lambda_0, z = z' = 0,01\lambda_0$, (b) $\rho = 100\lambda_0, z = z' = 0,01\lambda_0$, (c) $\rho = 10\lambda_0, z = z' = 0,5\lambda_0$, (d) $\rho = 10\lambda_0, z = z' = \lambda_0$.

4.3.1 Predikcione formule

Zbog oscilatornosti podintegralnih funkcija ZI i promenljive brzine opadanja njihove anvelope, sama podela na poddomene i primena pomenutih tehnika umnogome doprinose efikasnosti računanja. Međutim, od posebnog značaja su empirijski izrazi za približno određivanje potrebnog broja integracionih tačaka, koji omogućavaju kontrolisanu tačnost numeričke integracije. U ovom odeljku predstavljeni su takvi izrazi, proizašli iz numeričkih eksperimenata za različite vrednosti koordinata rastojanja iz oblasti D .

U slučaju ZI za dve sredine, postoje četiri poddomena različite veličine. U tom smislu, slično kao za ZI u slobodnom prostoru (3.27), formule baziramo na ekvivalentnom električnom rastojanju. Ono se za rasejano polje računa pomoću izraza

$$R_{e,i} = \begin{cases} \frac{\Delta k_{\rho,i}}{2\pi} \sqrt{(2,4\rho)^2 + [1,8(|z| + |z'|)]^2 + [0,4\rho(|z| + |z'|)]^2}, & i = 1 \\ 2,4 \frac{\rho \Delta k_{\rho,i}}{2\pi}, & i = 2, 3, 4 \end{cases} \quad (4.25)$$

gde je $\Delta k_{\rho,i}$ dužina i -tog intervala integracije. Za transmitovano polje, ekvivalentno električko rastojanje se računa kao

$$R_{e,i} = \begin{cases} \frac{\Delta k_{\rho,i}}{2\pi} \sqrt{(2,4\rho)^2 + [1,8(0,5|z| + |z'|)]^2 + [0,4\rho(0,5|z| + |z'|)]^2}, & i = 1 \\ \frac{\Delta k_{\rho,i}}{2\pi} \sqrt{(2,4\rho)^2 + (1,8|z|)^2 + (0,4\rho|z|)^2}, & i = 2 \\ 2,4 \frac{\rho \Delta k_{\rho,i}}{2\pi}, & i = 3, 4 \end{cases} \quad (4.26)$$

Za prvi i drugi poddomen približan broj potrebnih integracionih tačaka za željni broj tačnih cifara, χ_{des} , iznosi

$$\hat{n}_{g,i} = \begin{cases} 6 + R_{e,i} + \frac{\chi_{des}}{3} \max\{R_{e,i}, 5\}^{0,3}, & i = 1, \\ 6 + R_{e,i} + \frac{\chi_{des}}{3} \max\{R_{e,i}, 20\}^{0,3}, & i = 2. \end{cases} \quad (4.27)$$

Usled uticaja eksponencijalnog faktora na podintegralnu funkciju na trećem i četvrtom poddomenu, potiskivanje vrednosti integrala i odgovarajuće variranje relativne greške uzeti su u obzir. Rezultujući empirijski izraz za broj integracionih tačaka na trećem i četvrtom poddomenu glasi

$$\hat{n}_{g,i} = \begin{cases} 0, & \chi_{des} < \chi_{min} \\ 6 + R_{e,i} + \frac{\chi_{des} - \chi_{min}}{3} \max\{R_{e,i}, 20\}^{0,3}, & \chi_{des} \geq \chi_{min} \end{cases}, \quad i = 3, 4, \quad (4.28)$$

gde je za rasejano polje

$$\chi_{min} = \begin{cases} -\log_{10} e^{-\sqrt{\left(\frac{k_0 + k_{re}}{2}\right)^2 - k_0^2} (|z| + |z'|)}, & i = 3, \\ -\log_{10} e^{-\sqrt{k_{re}^2 - k_0^2} (|z| + |z'|)}, & i = 4. \end{cases} \quad (4.29)$$

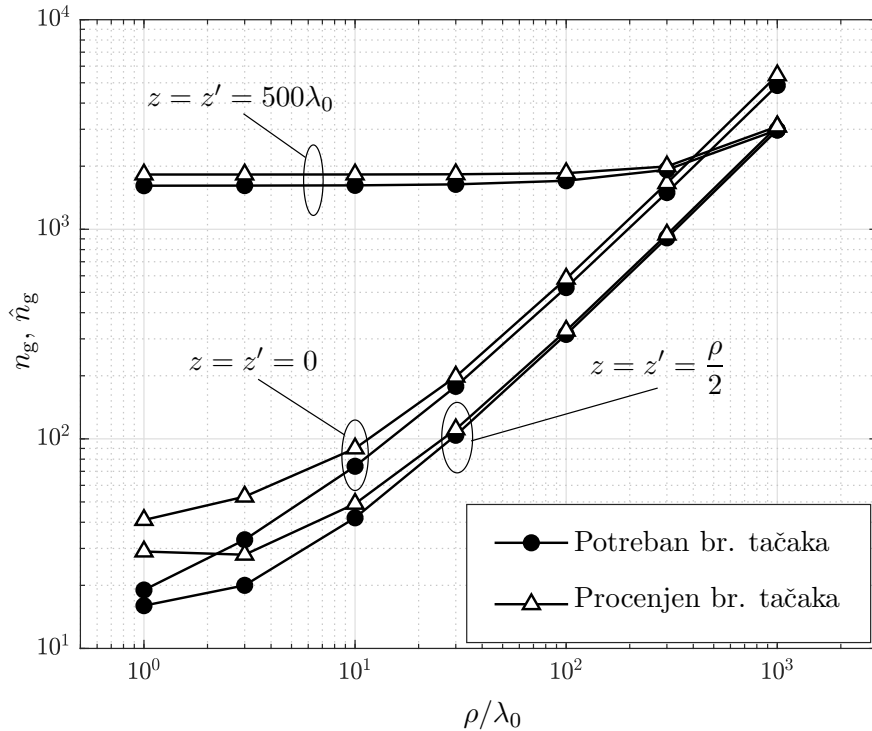
a za transmitovano,

$$\chi_{\min} = \begin{cases} -\log_{10} e^{-\sqrt{\left(\frac{k_0+k_{re}}{2}\right)^2 - k_0^2} |z|}, & i = 3, \\ -\log_{10} e^{-\sqrt{k_{re}^2 - k_0^2} |z'|}, & i = 4. \end{cases} \quad (4.30)$$

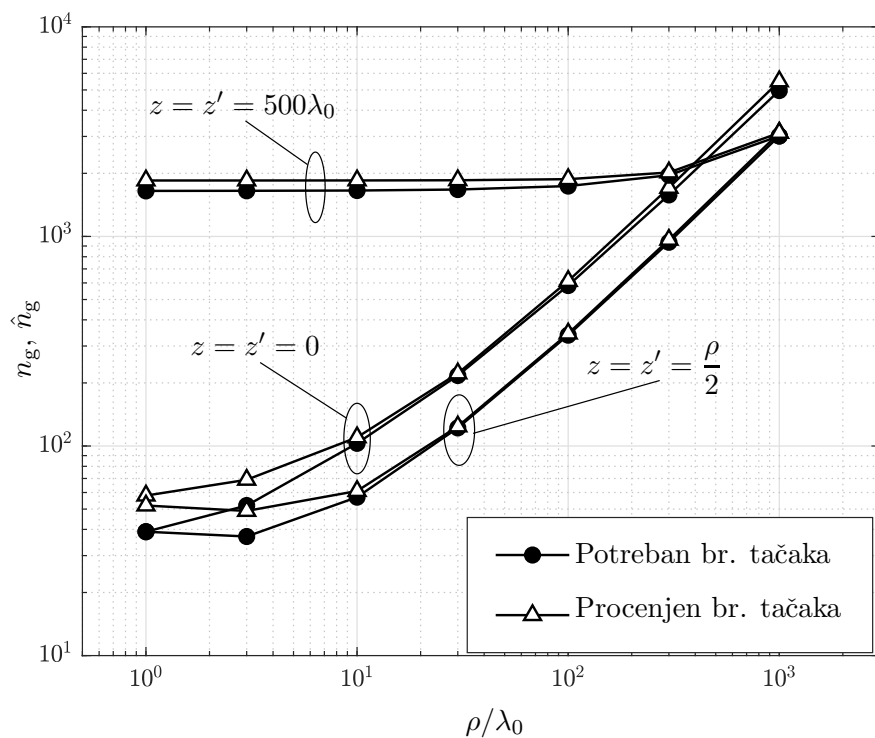
U izrazu 4.28, kada je željeni broj tačnih cifara manji od minimalnog, χ_{\min} , jednakost $\hat{n}_{g,i} = 0$ podrazumeva da je integral nad tim poddomenom dovoljno mali da se može zanemariti. Predstavljene formule testirane su u narednom odeljku.

4.4 Primeri računanja ukupnog konačnog dela Zomerfeldovog integrala za slučaj razdvojne površi dve sredine

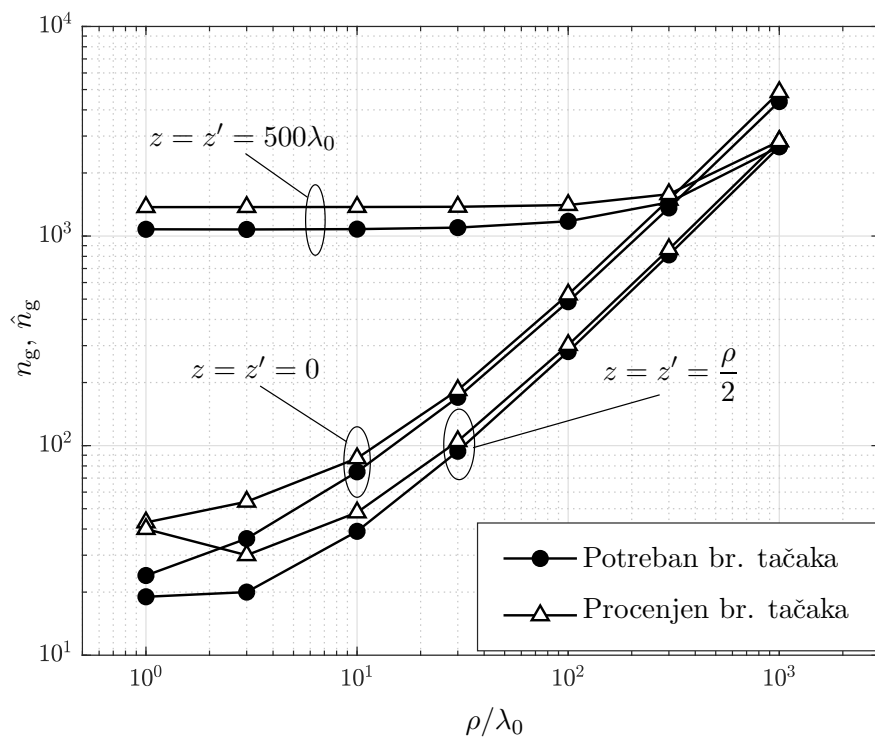
Verifikaciju izvedenih empirijskih izraza za procenu potrebnog broja integracionih tačaka za zadatu tačnost, kao i dodatnu proveru predloženih tehnika, potrebno je izvršiti na primerima računanja ukupnog konačnog dela ZI. U tom cilju, odabran je podskup oblasti parametara D koji je od interesa: horizontalna koordinata varira u intervalu $\rho/\lambda_0 \in [1, 1000]$, dok vertikalne koordinate uzimaju vrednosti iz skupa $(|z| + |z'|) \in \{0, \rho, 1000\lambda_0\}$. Za svaki od poddomena izračunati su minimalno potrebni i procenjeni brojevi integracionih tačaka za dostizanje nivoa relativne greške $\delta_{des} = 10^{-3}$ i $\delta_{des} = 10^{-9}$, a ukupan broj je $\hat{n}_g = \sum_{i=1}^4 \hat{n}_{g,i}$. Rezultati za integral $I_{r,zz}$ dati su na slikama 4.19 i 4.20, a za integral $I_{t,xx}$ na slikama 4.21 i 4.22.



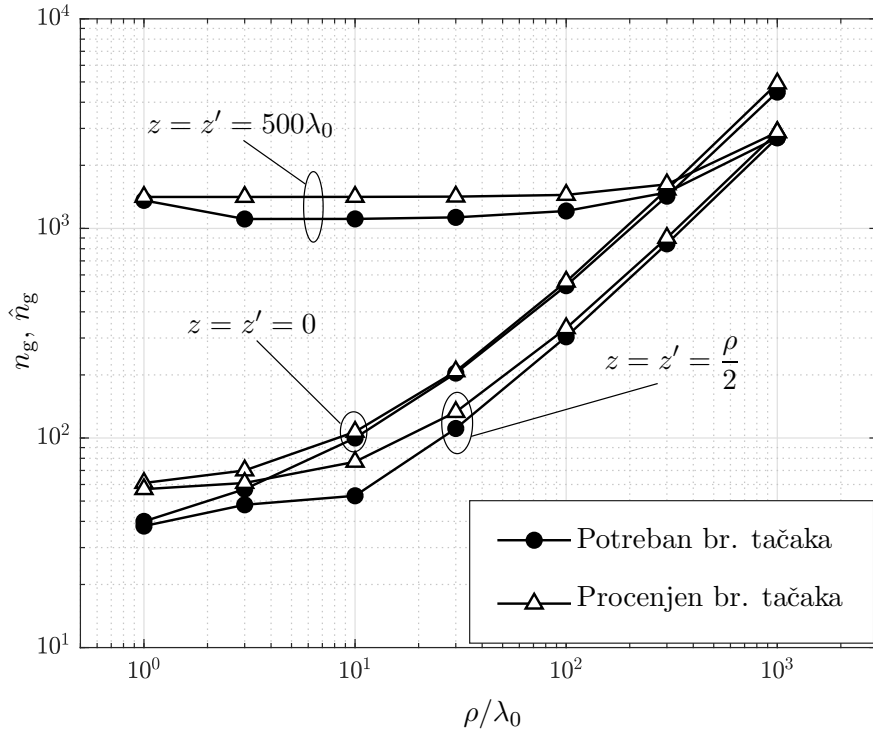
Slika 4.19: Poređenje potrebnog i procenjenog broja integracionih tačaka za računanje integrala $I_{r,zz}$ pri različitim vrednostima koordinati rastajanja i za zadatu relativnu grešku $\delta = 10^{-3}$.



Slika 4.20: Poređenje potrebnog i procenjenog broja integracionih tačaka za računanje integrala $I_{r,zz}$ pri različitim vrednostima koordinati rastajanja i za zadatu relativnu grešku $\delta = 10^{-9}$.



Slika 4.21: Poređenje potrebnog i procenjenog broja integracionih tačaka za računanje integrala $I_{t,xx}$ pri različitim vrednostima koordinati rastajanja i za zadatu relativnu grešku $\delta = 10^{-3}$.



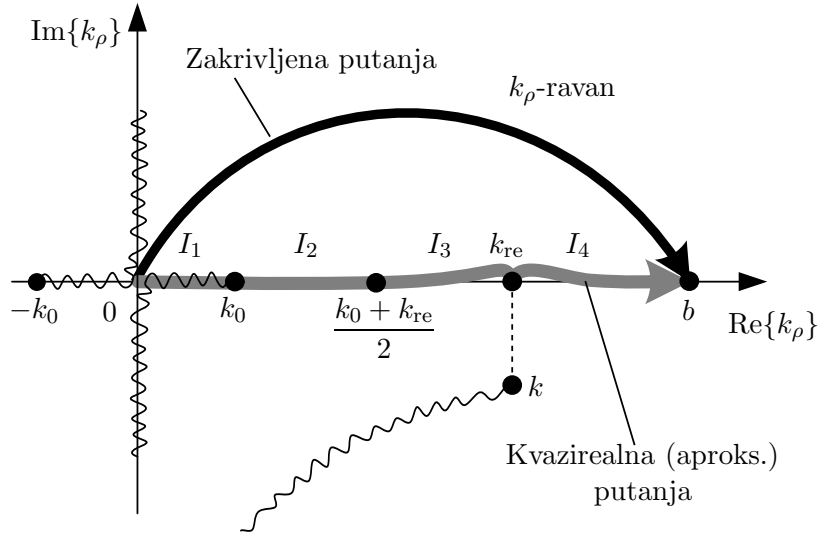
Slika 4.22: Poređenje potrebnog i procenjenog broja integracionih tačaka za računanje integrala $I_{t,xx}$ pri različitim vrednostima koordinati rastajanja i za zadatu relativnu grešku $\delta = 10^{-9}$.

Rezultati pokazuju poklapanje predikcije sa stvarno potrebnim brojem tačaka. Takođe, vidimo da su predloženi empirijski izrazi projektovani relativno pesimistički, zbog čega procenjen broj integracionih tačaka blago premašuje stvarno potreban broj tačaka za dostizanje zadatih nivoa greške. Diskrepanca je veća za manje vrednosti ρ i dostiže maksimalno 27%, dok za veće vrednosti koordinata rastojanja, gde je predikcija od posebnog značaja, relativni premašaj se značajno smanjuje i ne premašuje 6%.

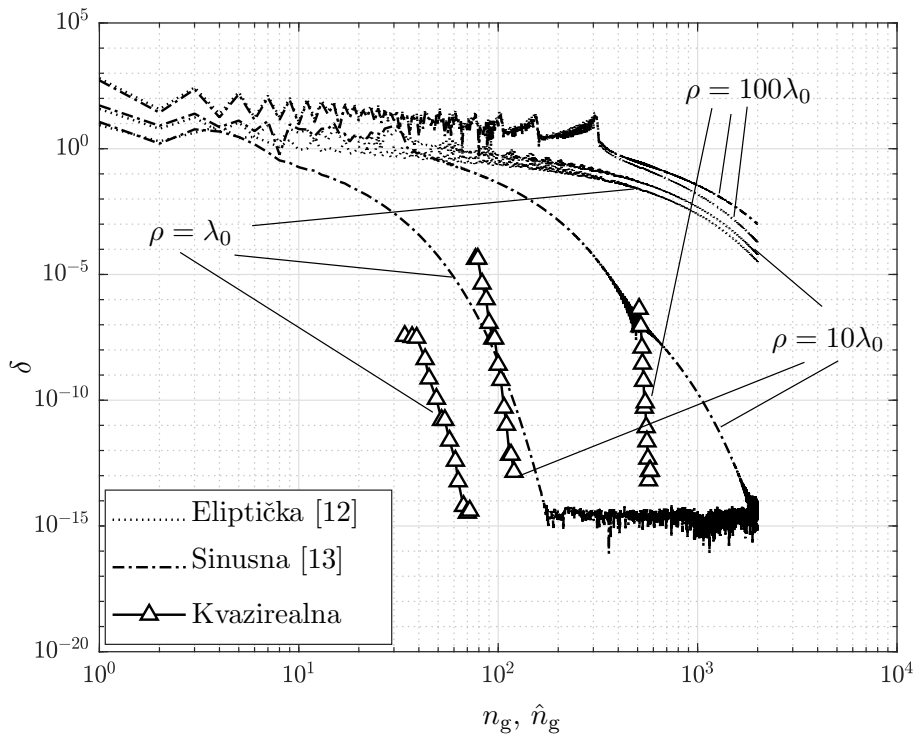
4.5 Poređenje sa metodama sa zakrivljenom putanjom integracije

Predloženi pristup, uz primenu procenjenog broja integracionih tačaka, upoređićemo i sa relevantnim metodama iz literature. Kako je ovaj rad orijentisan ka rešenjima koja počivaju na integraciji duž realne, odnosno kvazirealne putanje u kompleksnoj k_ρ -ravni, kao referentne biramo dve metode iz grupe rešenja u kojima se zastupa vrlo rasprostranjen pristup sa zakrivljenom putanjom u I kvadrant k_ρ -ravni, kao što je prikazano na slici 4.23. U prvoj metodi [12] koristi se eliptička putanja i fiksirana gornja granica integracije, b . Visina poluelipse, kojom se žele zaobići singularne tačke grananja, proporcionalna je dužini intervala i iznosi $b/1000$, te ne zavisi od koordinata rastojanja. U drugoj [13] se predlaže sinusna putanja, čija visina u odnosu na realnu osu je delimično adaptivna i određena je izrazom $\min\{k_0, 1/\rho\}$. Metode su poređene u dva podskupa oblasti D . U prvom slučaju je razmatran izvor na razdvojnoj površi, $z = z' = 0$, dok je horizontalna koordinata varirana, $\rho/\lambda_0 \in \{1, 10, 100\}$. Ovo predstavlja zahtevniji scenario, koji je često od interesa u praksi (npr. antena neposredno iznad zemlje). U drugom slučaju, fiksirano je $\rho = 10\lambda_0$, a varirana je vertikalna koordinata, $(|z| + |z'|)/\lambda_0 \in \{1, 10, 100\}$. Za računanje integrala predloženom metodom upotrebljen je procenjen broj tačaka, dobijen pomoću empirijskih formula u rasponu željene relativne greške od 10^0 do 10^{-13} . Na taj način

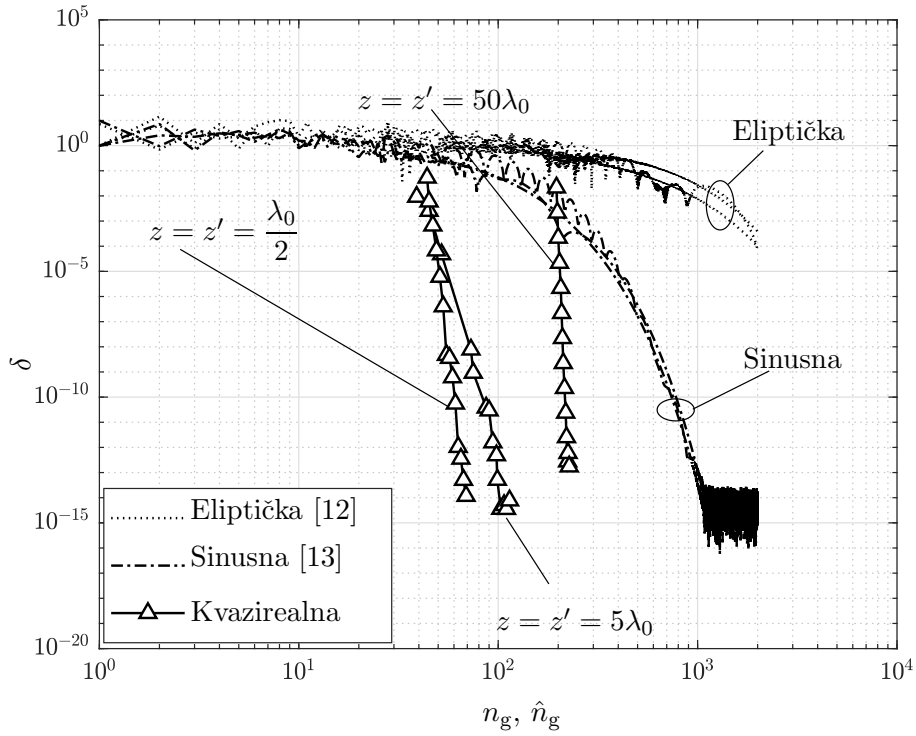
uračunat je i eventualni premašaj koji potiče od nesavršenosti predikcije. S obzirom da se zakrivljenom putanjom zaobilazi tačka grananja, u sva tri pristupa primenjena je GL kvadratura formula. Rezultati za integral $I_{r,zz}$ su dati na slikama 4.24 i 4.25, a za integral $I_{t,xx}$ na slikama 4.26 i 4.27.



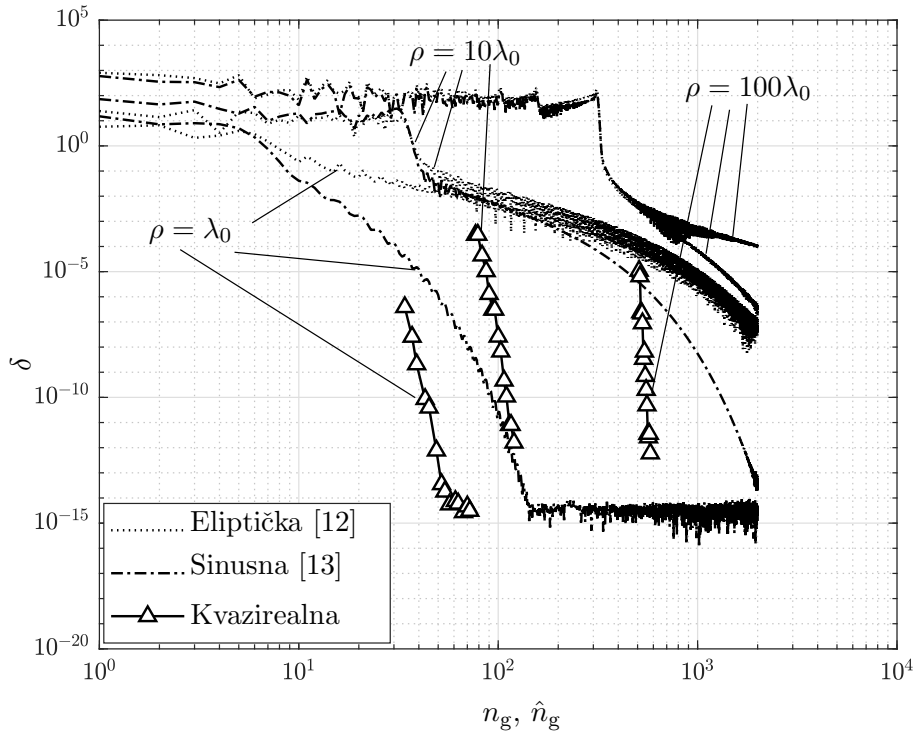
Slika 4.23: Prikaz kvazirealne (aproksimativna) putanje (siva linija) i zakrivljene putanje (crna linija) u kompleksnoj k_ρ -ravni za $k_{im} < 0$.



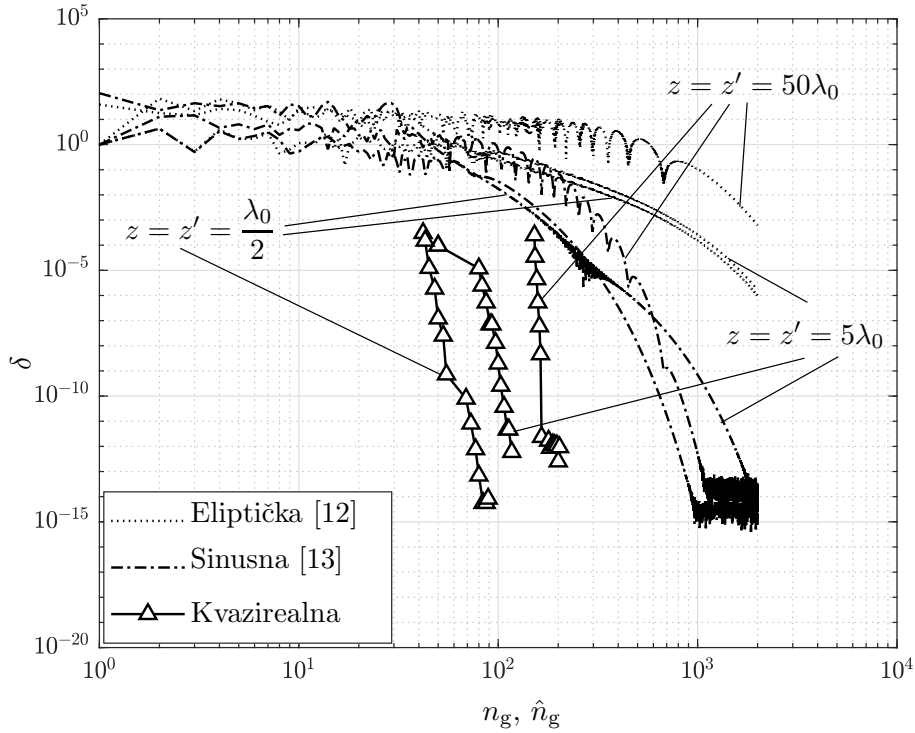
Slika 4.24: Poređenje relative greške računanja integrala $I_{r,zz}$ pomoću eliptičke [12], sinusne [13] i kvazirealne putanje za $\rho/\lambda_0 \in \{1, 10, 100\}$ i $z = z' = 0$.



Slika 4.25: Poređenje relative greške računanja integrala $I_{r,zz}$ pomoću eliptičke [12], sinusne [13] i kvazirealne putanje za $\rho = 10\lambda_0$ i $(|z| + |z'|)/\lambda_0 \in \{1, 10, 100\}$.



Slika 4.26: Poređenje relative greške računanja integrala $I_{t,xx}$ pomoću eliptičke [12], sinusne [13] i kvazirealne putanje za $\rho/\lambda_0 \in \{1, 10, 100\}$ i $z = z' = 0$.



Slika 4.27: Poređenje relativne greške računanja integrala $I_{t,xx}$ pomoću eliptičke [12], sinusne [13] i kvazirealne putanje za $\rho = 10\lambda_0$ i $(|z| + |z'|)/\lambda_0 \in \{1, 10, 100\}$.

U prikazanim rezultatima možemo videti da primenjena korena smena uspešno potiskuje singularitete u tačkama grananja. Takođe, predložena metoda omogućava konvergenciju računanja integrala čija brzina (nagib krive relativne greške) slabo zavisi od izbora koordinati rastojanja, dok je početak opadajućeg dela krive relativne greške određen ekvivalentnim električkim rastojanjima $R_{e,i}$. U slučajevima kada su horizontalna i vertikalna koordinata električki male, uočavamo da je konvergencija postignuta predloženom metodom donekle porediva sa konvergencijom ostvarenom metodama sa zakrivljenom putanjom. Međutim, za srednje i veliko horizontalno rastojanje ρ , konvergencija predložene metode je značajno brža u odnosu na konvergenciju referentnih metoda. Ova razlika je posebno primetna kada je vertikalno rastojanje malo (slika 4.24), odnosno jednako nuli (slika 4.26).

4.6 Osvrt na polove i materijale sa negativnom permitivnošću

Materijali koji se javljaju u tipičnim scenarijima od interesa, jesu tzv. desno orijentisani materijali, u kojima je $\text{Re}\{\epsilon_e\} > 0$ i $\text{Re}\{\mu_e\} > 0$. U posebnim primenama, kao što je interakcija plazme ili određenih metala sa elektromagnetskim poljem visoke učestanosti, može se desiti da realni deo ekvivalentne permitivnosti postane negativan [50, 51]. Sa druge strane, specijalni feritni materijali u kombinaciji sa metalnim strukturama ili stranim magnetskim poljem mogu se konstruisati tako da je njihova ekvivalentna permeabilnost negativna [52–54]. Ovi efekti su od velikog značaja za oblast fizike koja se bavi opto-elektronskim komponentama, bio-senzorima, sočivima, kao i formiranjem slike (eng. *imaging*) na nanoskali [55]. Iako su za željeni efekat radne učestanosti bliske optičkim, specijalnim periodičnim mikrostrukturama, izrađenim od odgovarajućeg metala, može se formirati veštački materijal kod kojeg je $\text{Re}\{\epsilon_e\} < 0$, čak i na učestanostima značajno nižim od optičkih, do nivoa teraherca i gigaherca [51, 55–59]. Takvi

materijali se zovu *metamaterijali* i poslednjih decenija posvećena im je velika pažnja, o čemu svedoči veliki broj publikacija [55]. U ovom odeljku, razmotrićemo metamaterijal sa negativnom permitivnošću (ENG – eng. *ε-negative*), kao jednu od dve linearne sredine u čijoj blizini se nalazi izvor zračenja. Ova saznanja se mogu koristiti i u razmatranju materijala sa negativnom permeabilnošću (eng. *μ-negative*) i tzv. dvostruko negativne materijale (eng. *double negative*), kod kojih je $\text{Re}\{\epsilon_e\} < 0$ i $\text{Re}\{\mu_e\} < 0$, gde je μ_e ekvivalentna permeabilnost.

Makroskopski gledano, postojeće modele koji opisuju zavisnost permitivnosti materijala od učestanosti (npr. Drudov ili Lorencov model [56, 60]) možemo direktno zameniti u Maksvelove jednačine i posmatrati scenario dve sredine od kojih je prva vazduh, a druga ENG metamaterijal, tj. metal u kojem je za datu učestanost $\text{Re}\{\epsilon_e\} < 0$. Na ovakvom spoju, može se javiti posebna vrsta talasa u vidu površinskog plazmon-polaritona (SPP - eng. *surface plasmon polariton*). Fenomen SPP nastaje usled sprege oscilatornog EM polja i slobodnih nosilaca u metalu. Uslov za njegovo pojavljivanje na razdvojnoj površi sredina 1 i 2 glasi [55]

$$\text{Re}\{\epsilon_{e1}\} \text{Re}\{\epsilon_{e2}\} < 0, \quad \text{Re}\{\epsilon_{e1}\} + \text{Re}\{\epsilon_{e2}\} < 0, \quad (4.31)$$

gde je u odnosu na [55] iskaz uslova uopšten i izražen preko realnih delova ekvivalentnih relativnih permitivnosti, kako bi se u račun uključili i gubici. Za slučaj malih gubitaka, koji je u ovom radu od interesa, ovakav SPP se naziva i Fanoov mod [27]. Pojava tzv. površinskog talasa je direktno povezana sa položajem polova podintegralne funkcije u kompleksnoj ravni (videti dodatak B). Posmatrajmo integral $I_{r,zz}$ u (4.9). Njegov imenilac glasi

$$D_{Rzz}(k_\rho) = \epsilon_{er} \sqrt{k_\rho^2 - k_0^2} + \sqrt{k_\rho^2 - k^2}. \quad (4.32)$$

Izjednačavanjem imenioca sa nulom i rešavanjem, dobija se $k_\rho = \pm k_{\rho,\text{pol}}$, gde je

$$k_{\rho,\text{pol}} = \sqrt{\frac{k_0^2 k^2}{k_0^2 + k^2}} = k_0 \sqrt{\frac{\epsilon_{er}}{1 + \epsilon_{er}}}. \quad (4.33)$$

Usvojimo za sredinu 2 materijal ENG tipa sa malim gubicima, $\epsilon_{er} = -4 - j0,01$. Ovaj broj se nalazi u III kvadrantu kompleksne ravni i njegov argument je u intervalu $(-\pi, -\pi/2]$. Tačka grananja $k = k_0 \sqrt{\epsilon_{er}} \approx k_0(0,0025 - j2,0000)$ se stoga nalazi u IV kvadrantu kompleksne ravni, blizu imaginarne ose. Primetimo, k je daleko od kvazirealne putanje, pa će singularni uticaj ove tačke grananja biti zanemarljiv u numeričkoj integraciji. Međutim, za ovako izabrano ϵ_{er} , rešenje jednačine $D_{Rzz} = 0$, dato izrazom (4.33), iznosi $k_{\rho,\text{pol}} \approx k_0(1,1547 - j0,0005)$. Ono se nalazi u IV kvadrantu kompleksne k_ρ -ravni (pozitivan predznak rešenja jednačine $D_{Rzz} = 0$), *desno* od tačke grananja k_0 , u neposrednoj blizini realne ose, odnosno kvazirealne putanje integracije (slika 4.28). Takav pol nepovoljno utiče na tačnost i konvergenciju numeričkog računanja integrala i povezuje se sa pojavom površinskog talasa SSP tipa.

Primenom smene, pol se u kompleksnoj s -ravni preslikava u $s_{\text{pol}} = \sqrt{k_{\rho,\text{pol}}^2 - k_1^2} \approx 3,628 - j0,006$, što je takođe u IV kvadrantu i blizu realne ose. Kako u s -ravni postoji deo putanje koji ide duž realne ose (slika 4.8), zaključujemo da i u domenu nove promenljive, preslikani pol ugrožava tačnost i konvergenciju integrala. Korišćenjem sada već standardne tehnike ekstrakcije singulariteta oduzimanjem i dodavanjem pogodnog singularnog izraza, čiji integral je analitički

rešiv [18, 61], integral $I_{r,zz}$ se nakon primenjene smene može izraziti u pogodnijem obliku

$$I_{r,zz} = \int_{s_1}^{s_2} f_{r,zz}(s) ds = \int_{s_1}^{s_2} \left(f_{r,zz}(s) - \frac{R_{\text{pol}}}{s - s_{\text{pol}}} \right) ds + I_{\text{Res}}, \quad (4.34)$$

gde je $f_{r,zz}(s)$ podintegralna funkcija integrala $I_{r,zz}$ nakon smene, a R_{pol} njen ostatak u tački $s = s_{\text{pol}}$,

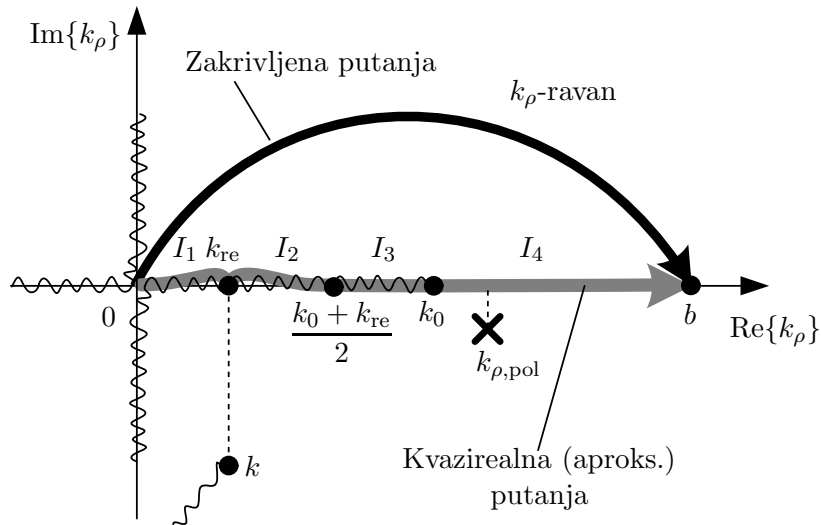
$$R_{\text{pol}} = \text{Res}_{s=s_{\text{pol}}} f_{r,zz}(s) = \lim_{s \rightarrow s_{\text{pol}}} (s - s_{\text{pol}}) f_{r,zz}(s). \quad (4.35)$$

Veličina I_{Res} se računa analitički integraljenjem oduzetog izraza

$$I_{\text{Res}} = \int_{s_1}^{s_2} \frac{R_{\text{pol}}}{s - s_{\text{pol}}} ds \quad (4.36)$$

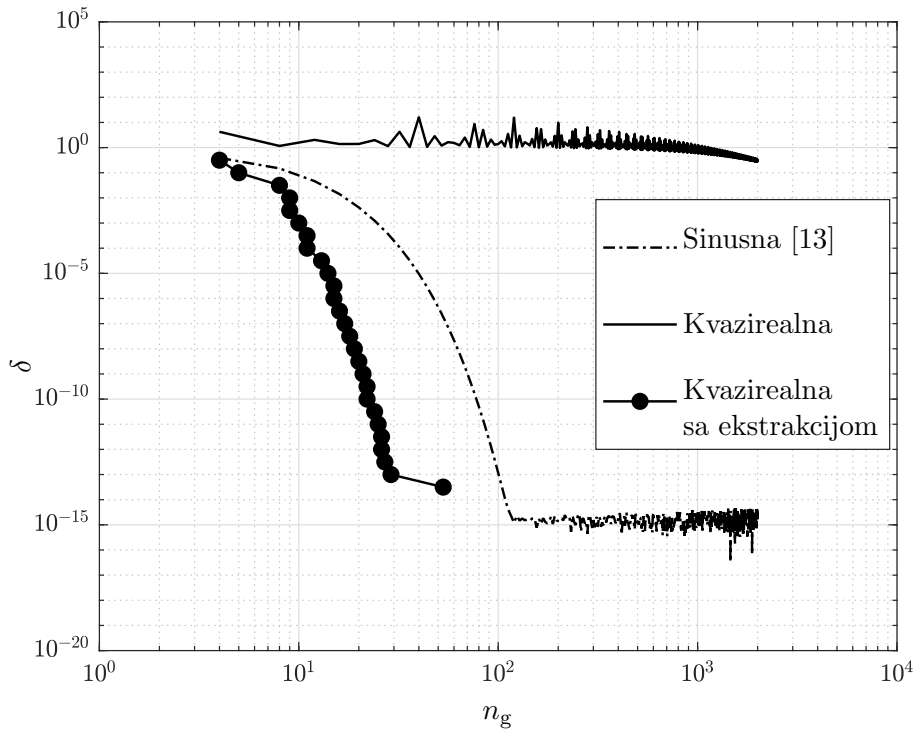
$$= R_{\text{pol}} \left[\ln \left| \frac{s_1 - s_{\text{pol}}}{s_2 - s_{\text{pol}}} \right| + j (\arg\{s_2 - s_{\text{pol}}\} - \arg\{s_1 - s_{\text{pol}}\}) \right]. \quad (4.37)$$

Ovakvom analitičkom pripremom, uticaj pola podintegralne funkcije je potisnut i možemo pristupiti numeričkoj integraciji.

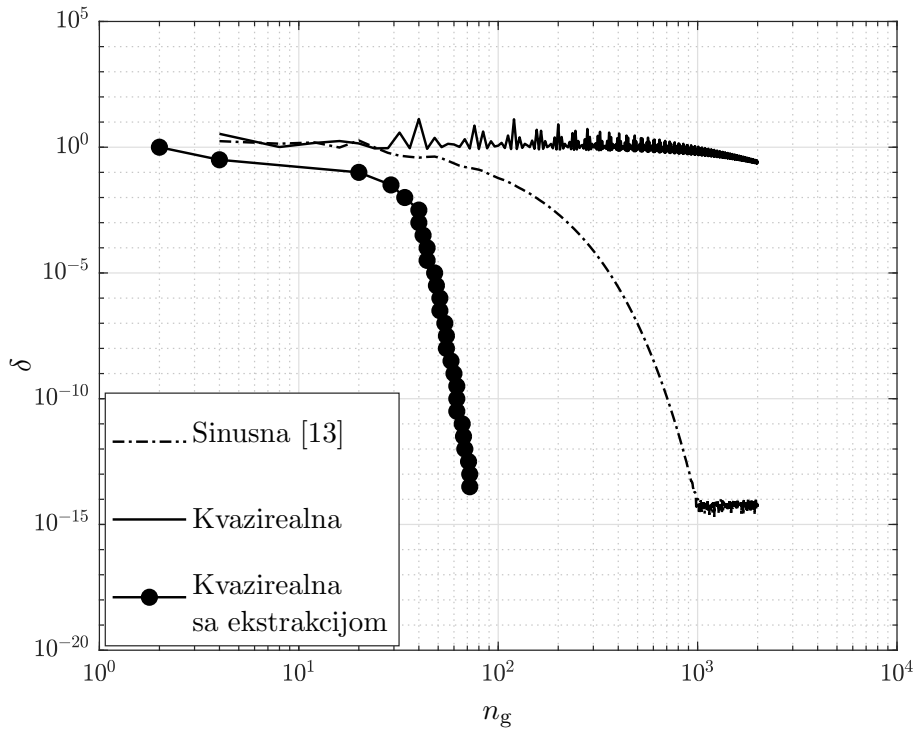


Slika 4.28: Prikaz kvazirealne (aproksimativna) putanje (siva linija) i zakrivljene putanje (crna linija) u kompleksnoj k_ρ -ravni za $\text{Re}\{\epsilon_{\text{er}}\} < 0$ i $\text{Im}\{\epsilon_{\text{er}}\} < 0$. Projekcije talasnih brojeva na realnu osu su sada zamenile mesta, tako da je $0 < k_{\text{re}} < k_0$, dok i dalje važi $k_{\text{im}} < 0$. Usled negativnog realnog dela permitivnosti pol se pojavljuje u blizini realne ose sa kritične desne strane u odnosu na k_0 .

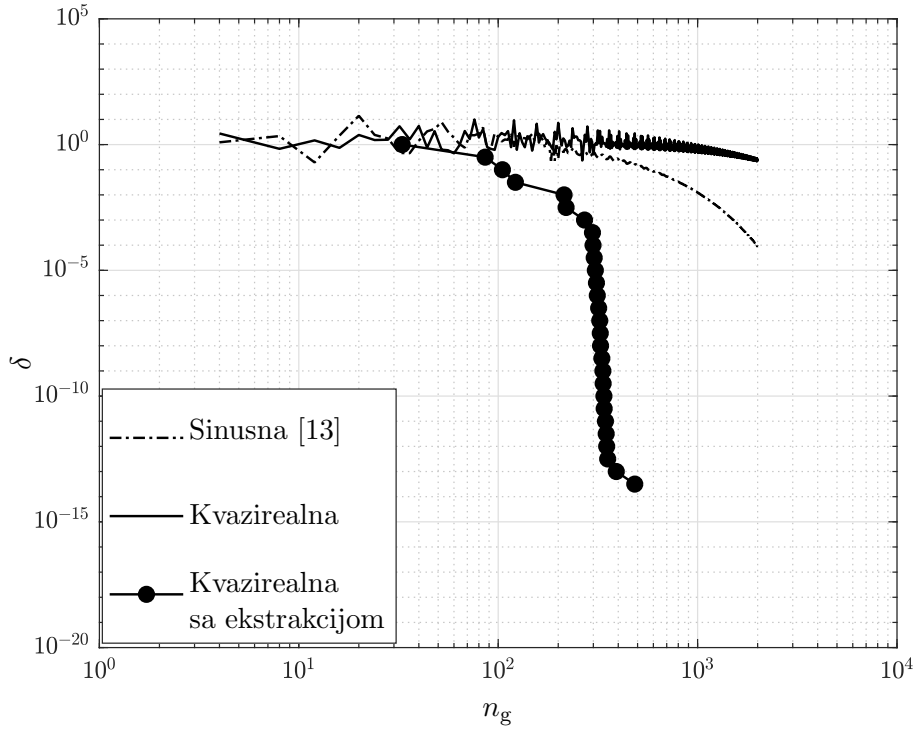
Radi provere efikasnosti smene promenljivih i ekstrakcije pola u sadejstvu, posmatran integral $I_{r,zz}$ je razmatran za $z = z' = 0$ i $\rho/\lambda_0 \in \{1, 10, 100\}$. Ovaj skup slučajeva je odabran jer se nultim vertikalnim rastojanjem ukida prigušenje anvelope usled eksponencijalnog faktora u podintegralnoj funkciji, te je otklonjena mogućnost da se dejstvo pola potre malim vrednostima funkcije prouzrokovanih prigušenjem. Za date slučajeve, relativna greška u funkciji potrebnog broja tačaka prikazana je na slikama 4.29–4.31. Integral je računat na tri načina - duž sinusne zakrivljene putanje [13] i duž kvazirealne putanje sa i bez ekstrakcije pola.



Slika 4.29: Poređenje relativne greške računanja integrala $I_{r,zz}$ pomoću sinusne putanje [13], kvazirealne putanje bez ekstrakcije pola i kvazirealne putanje sa ekstrakcijom pola za $\rho = \lambda_0$ i $z = z' = 0$.



Slika 4.30: Poređenje relativne greške računanja integrala $I_{r,zz}$ pomoću sinusne putanje [13], kvazirealne putanje bez ekstrakcije pola i kvazirealne putanje sa ekstrakcijom pola za $\rho = 10\lambda_0$ i $z = z' = 0$.



Slika 4.31: Poređenje relativne greške računanja integrala $I_{r,zz}$ pomoću sinusne putanje [13], kvazirealne putanje bez ekstrakcije pola i kvazirealne putanje sa ekstrakcijom pola za $\rho = 100\lambda_0$ i $z = z' = 0$.

Posmatrajući krivu greške za kvazirealnu putanju kada je primenjena samo smena promenljivih, vidimo da je pol dovoljno blizu putanje integracije, te prouzrokuje grešku reda veličine $\delta \sim 0,1 \div 10$. Smena promenljivih u kombinaciji sa ekstrakcijom uspešno potiskuje dejstva tačke grananja i pola, pa je dostignuta tačnost visoka. Integracija zakrivljenom sinusnom putanjom rezultuje nivoima greške koji su slični ranijim slučajevima kada nije bilo pola. Može se pretpostaviti da je sinusna putanja dovoljno zakrivljena i udaljena od pola. Međutim, dejstvo singularne tačke grananja $k_\rho = k_0$, a time i velikih vrednosti Beselove funkcije kompleksnog argumenta u I kvadrantu, je i dalje vidljivo. Osetljivost integracije duž zakrivljene putanje i ovde dolazi do izražaja, što se naročito vidi za veće ρ (slika 4.31). S obzirom na veću robusnost sa aspekta horizontalnog rastojanja i lakoću implementacije ekstrakcije pola, u datom scenariju se predložena metoda sa korenim smenom promenljivih i kvazirealnom putanjom pokazuje kao pogodniji pristup.

4.7 Zaključak

Pristup rešavanju Zomerfeldovog integrala za slobodan prostor proširen je u ovom poglavlju na slučaj dve linearne sredine. S obzirom na to da su numerička svojstva *repa* slična kao u slobodnom prostoru, pažnja je posvećena konačnom delu integrala, čiji (realni) interval integracije je podeljen na ukupno četiri poddomena. Dve podele su izvršene u tačkama grananja, odnosno njihovim projekcijama na realnu osu, dok je treća podela izvršena u tački koja odgovara aritmetičkoj sredini prve dve podele. Singularni uticaj tačaka grananja potisnut je odgovarajućim korenim smenama, a dodatno potiskivanje u slučajevima sredina sa malim gubicima postignuto je aproksimativnom, kvazirealnom putanjom integracije. Prekomerni utrošak računarskih operacija, tj. integracionih tačaka, na poddomenima gde podintegralna funkcija brzo opada, izbegnut je uvođenjem adekvatnih pragova, odnosno adaptivnog skraćivanja intervala integracije,

čija dužina zavisi od željene tačnosti.

Na osnovu analize datih primera integrala u širokom opsegu parametara rastojanja između izvora i tačke posmatranja, razvijene su empirijske formule za procenu potrebnog broja integracionih tačaka radi dostizanja željene tačnosti. Pomoću datih formula i predloženih tehnika, primeri integrala za rasejano i transmitovano polje izračunati su efikasno i sa visokom tačnošću. U poređenju sa relevantnim metodama iz literature, koje se baziraju na zakrivljenoj putanji integracije, pokazuju bržu konvergenciju u rasponu željene relativne greške od 10^0 do 10^{-13} .

Posebno je razmatran scenario kada je jedna od sredina metamaterijal sa negativnom permitivnošću, što prouzrokuje dodatan singularitet – pol u blizini kvazirealne putanje integracije. Za slučaj izvora i tačke posmatranja na razdvojnoj površi, potvrđena je robusnost predložene metode sa korenom smenom, modifikovane jednostavnom ekstrakcijom pola.

5 Zaključak

U ovom radu predstavljena je nova metoda za numeričko računanje Zomerfeldovih integrala, u cilju određivanja elektromagnetskog polja izvora zračenja koji se nalazi u blizini razdvojne površi dve linearne sredine. Metoda se zasniva na direktnoj integraciji duž realne, odnosno kvazirealne putanje u kompleksnoj ravni i na poništavanju singulariteta pomoću smene promenljivih, a sama numerička integracija je obavljena primenom Gaus-Ležandrove kvadrature formule.

U prvom koraku, analiziran je Zomerfeldov integral čije rešenje je analitički poznato – Grinova funkcija potencijala u slobodnom prostoru, odnosno funkcija skalarnog sfernog talasa. Singularitet, u vidu tačke grananja, koji se javlja na konačnom delu integrala, efektno je poništen korišćenjem korene smene promenljivih. Za integraciju polubeskonačnog repa integrala, koji je u ovom radu razmatran sa aspekta procene greške, korišćena je etablirana metoda ponderisane aritmetičke sredine. Uz pogodnu podelu domena integracije na tri poddomena, ovakvim pristupom omogućeno je računanje integrala sa veoma visokom tačnošću, $\sim 10^{-15} \div 10^{-10}$, na opsegu koordinata električkih rastojanja između izvora polja i tačke posmatranja od $0,001\lambda$ do 1000λ . U numeričkim primerima, na datom opsegu koordinati, korena smena pokazuje bržu konvergenciju integracije i lakšu računarsku implementaciju u poređenju sa drugim reprezentativnim metodama iz literature, kao što su metode zasnovane na trigonometrijskoj ili hiperboličnoj smeni, odnosno na dvostruko eksponencijalnoj kvadraturnoj formuli. Analizom relativne greške računanja integrala na pojedinačnim poddomenima u odnosu na egzaktnu vrednost ukupnog integrala, razvijene su empirijske formule koje procenjuju potreban broj integracionih tačaka za dostizanje zadate tačnosti u zavisnosti od parametara rastojanja. Premašaj u proceni potrebnog broja tačaka u najvećem delu opsega rastojanja od interesa nije veći od 10%.

Proširenjem metode predložene za slučaj slobodnog prostora, razvijene su tehnike koje omogućavaju efikasno računanje konačnog dela Zomerfeldovih integrala za slučaj dve linearne sredine. Najpre, dodatna tačka grananja uslovlila je podelu domena integracije na četiri poddomena. Zatim, kako bi mogla biti primenjena na računanje integrala za sredine sa gubicima, koja implicira kompleksnu tačku grananja, korena smena je adekvatno parametrizovana u kompleksnoj ravni nove integracione promenljive. U cilju suzbijanja velikog dinamičkog opsega u domenu nove promenljive, koji se javlja kod sredina sa malim gubicima, uvedena je aproksimativna putanja integracije. Realna putanja integracije u domenu polazne promenljive je stoga neznatno zakrivljena ka I kvadrantu kompleksne ravni i naziva se kvazirealna putanja. Integracija kvazirealnom putanjom čini korenu smenu efektnijom, dodatno potiskujući singularni uticaj tačke grananja koja je blizu realne ose. Time je uspešno eliminisano koleno u krivoj relativne greške, odnosno ubrzana je konvergencija. Takođe, ušteda integracionih tačaka postignuta je uvođenjem adaptivne gornje granice integrala, koja zavisi od brzine opadanja anvelope podintegralne funkcije, odnosno od željene tačnosti. Analiza podintegralnih funkcija integrala za slučaj dve sredine, pokazala je da one, u osnovi, imaju slične osobine kao podintegralna funkcija za slučaj slobodnog prostora, te je logika formiranja formula za predikciju potrebnog broja integracionih tačaka ostala nepromenjena. Predikcione formule se u najvećem delu datog opsega koordinati poklapaju sa stvarno potrebnim brojem tačaka, naročito za veća rastojanja,

gde premašaj u proceni ne prelazi 6%.

Osvrt na sredine za koje je karakterističan jak uticaj pola u podintegralnoj funkciji napravljen je na primeru metamaterijala sa negativnom permitivnošću. U cilju uklanjanja jakog uticaja novog singulariteta, koji numeričku integraciju čini praktično nemogućom, korena smena je kombinovana sa ekstrakcijom pola. Na taj način, uspostavljena je brza konvergencija integracije, a njena robusnost je očuvana.

Imajući u vidu prikazanu analizu i numeričke rezultate, prednosti predložene metode računanja Zomerfeldovih integrala za slučaj dve linearne sredine mogu se sumirati na sledeći način:

- Korena smena, koja je primenjena u metodi, uspešno otklanja singularni uticaj tačaka grananja i omogućava računanje integrala visoke tačnosti, $\sim 10^{-15} \div 10^{-10}$.
- Metoda je robusna u širokom opsegu horizontalne i vertikalne koordinate rastojanja, od praktično 0 do 1000 talasnih dužina u slobodnom prostoru. Takođe, metoda nema ograničenja u pogledu izbora elektromagnetskih osobina materijala.
- Integracija predloženom metodom, u najvećem delu opsega koordinata od interesa, omogućava bržu konvergenciju rezultata u odnosu na druge metode zasnovane na integraciji duž realne putanje.
- Razvijene predikcione formule za određivanje potrebnog broja integracionih tačaka čine metodu kontrolabilnom i efikasnom sa aspekta računarskih resursa.
- Predložena metoda može se integrisati u postojeće metode numeričke elektromagnetike koje su zasnovane na integralnim jednačinama, kao što su metoda momenata ili metoda konačnih elemenata.

Pored scenarija u kojem se izvor zračenja nalazi u blizini spoja dva linearne poluprostora, često se u praksi susreću problemi gde se izvor nalazi u višeslojnoj sredini, gde je broj slojeva veći od dva. Proširenje predložene metode na slučaj višeslojne sredine nije pravolinijski, s obzirom na brzinu usloznavanja podintegralnih funkcija i pojavu dodatnih singulariteta sa porastom broja slojeva. Jedan od glavnih zadataka u budućem razvoju, bio bi iskoristiti postojeće iskustvo iz dvoslojne sredine i generalizovati metodu za proizvoljan broj slojeva. Poseban izazov predstavljala bi automatizacija procedure podele domena integracije na poddomene i računanja smena promenljivih, odnosno integranda za svaki od poddomena.

Dodatak A:

Izvođenje integralnog oblika Zomerfeldovog integrala

Radi upotpunjenja izložene teorije, u ovom dodatku navodimo izvođenje integralnog oblika Zomerfeldovog integrala za Grinovu funkciju potencijala u slobodnom prostoru, sledeći [62] i [6]. Polazimo od Helmholtcove jednačine [63],

$$\Delta g + k^2 g = -4\pi\delta(\mathbf{r}) \quad (\text{A.1})$$

koju zadovoljava Grinova funkcija potencijala

$$g(r) = \frac{e^{-jkr}}{r}. \quad (\text{A.2})$$

U cilju jednostavnosti, pretpostavimo da se izvor polja nalazi u koordinatnom početku, a $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ je radijalna komponenta u sfernom koordinatnom sistemu. Data Grinova funkcija predstavlja jednačinu skalarnog sfernog talasa. Prvi korak ka njenom integralnom obliku jeste primena Furijeovog integrala, odnosno Furijeove transformacije na diferencijalnu jednačinu (A.1). Definišimo najpre Furijeovu transformaciju (FT) primenjenu na prostornu koordinatu¹ kao

$$F(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{jux} dx, \quad (\text{A.3})$$

a njoj inverznu transformaciju kao

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(u)e^{-jux} du. \quad (\text{A.4})$$

¹Primetimo da je u definiciji transformacije predznak eksponenta pozitivan, a u njenoj inverziji negativan. Ovo se može objasniti konvencijom u elektrotehnici gde se kompleksni predstavnici talasnih fenomena u prostoperiodičnom režimu proporcionalni izrazu $e^{j(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}$, gde je propagacija talasa u pravcu i smeru talasnog vektora \mathbf{k} . Doprinos fazi signala usled položaja tačke posmatranja polja je negativan, pa je FT nad funkcijom prostornih koordinata definisana sa suprotnim predznakom u odnosu na FT nad funkcijom vremenske promenljive. Za razliku od literature iz elektrotehničkih nauka, u literaturi iz fizike zastupljena je konvencija sa obrnutim znakovima eksponenta [64], te su talasni fenomeni opisani faktorom $e^{j(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$, što direktno utiče i na *fizičarsku* definiciju FT.

Za datu Grinovu funkciju koja zavisi od tri promenljive $g(r) = g(x, y, z)$, primenjujemo generalisani oblik FT koji se dobija sukcesivnom primenom (A.3). Transformacija i njena inverzija za funkciju $g(r)$ glase

$$G(u, v, w) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} g(x, y, z) e^{j(ux+vy+wz)} dx dy dz, \quad (\text{A.5})$$

$$g(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{-\infty}^{+\infty} G(u, v, w) e^{-j(ux+vy+wz)} du dv dw. \quad (\text{A.6})$$

Furijeovom transformacijom diferencijalne jednačine (A.1), dobija se

$$\iiint_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} \right) e^{j(ux+vy+wz)} dx dy dz + k^2 G(u, v, w) = -4\pi. \quad (\text{A.7})$$

Trostruki integral u (A.7) možemo izraziti kao

$$\iiint_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} \right) e^{j(ux+vy+wz)} dx dy dz = I_x + I_y + I_z. \quad (\text{A.8})$$

S obzirom na simetriju izraza u odnosu na promenljive, analiziraćemo samo prvi sabirak, a rezultat generalisati na preostala dva. Integral I_x možemo izraziti na sledeći način:

$$I_x = \iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} e^{j(ux+vy+wz)} dx dy dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} I_{xx} e^{j(vy+wz)} dy dz, \quad (\text{A.9})$$

gde je

$$I_{xx} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} e^{jux} dx. \quad (\text{A.10})$$

Pod pretpostavkom da je $\text{Im}\{k\} \leq 0$ (što je uvek ispunjeno) i da je $u \in \mathbb{R}$, dvostrukom parcijalnom integracijom dobija se

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \overbrace{\frac{\partial g}{\partial x} e^{jux}}^{=0} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - ju \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial g}{\partial x} e^{jux} dx \\ &= -juge^{jux} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + (ju)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} g e^{jux} dx = -u^2 \int_{-\infty}^{+\infty} g e^{jux} dx. \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Sledi da je

$$I_x = -u^2 \iiint_{-\infty}^{+\infty} g e^{j(ux+vy+wz)} dx dy dz = -u^2 G(u, v, w). \quad (\text{A.12})$$

Analogno je

$$\begin{aligned} I_y &= -v^2 G(u, v, w), \\ I_z &= -w^2 G(u, v, w). \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Konačno, smenom u (A.7) diferencijalnu Helmholtcovu jednačinu svodimo na algebarsku,

$$(k^2 - u^2 - v^2 - w^2)G(u, v, w) = -4\pi, \quad (\text{A.14})$$

odakle se dobija Grinova funkcija u domenu prostorne FT, tj. njena *spektralna* predstava

$$G(u, v, w) = \frac{4\pi}{u^2 + v^2 + w^2 - k^2}. \quad (\text{A.15})$$

Smenom u (A.6) dobijamo

$$g(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{4\pi}{u^2 + v^2 + w^2 - k^2} e^{-j(ux+vy+wz)} du dv dw \quad (\text{A.16})$$

gde $u, v, w \in \mathbb{R}$. U dobijenom trostrukom integralu, izvršimo integraciju po w ,

$$I_w = \int_{-\infty}^{+\infty} f_w(w) dw = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-jwz}}{u^2 + v^2 + w^2 - k^2} dw = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-jwz}}{\gamma_z^2 + w^2} dw, \quad (\text{A.17})$$

gde je $\gamma_z = \sqrt{u^2 + v^2 - k^2}$, $\text{Re}\{\gamma_z\} \geq 0$. Ovaj nesvojtven integral rešavamo primenom računa ostataka.

Za $z \geq 0$ posmatrajmo integral iste funkcije ali duž zatvorene konture C_1 u kompleksnoj ravni, uzimajući da je $w \in \mathbb{C}$. Kontura C_1 prikazana je na slici A.1a i sastoji se od pravolinijskog dela koji leži na realnoj osi, $[-\xi, \xi]$, i polukružnog luka \widehat{QP} u III i IV kvadrantu kompleksne w -ravni, te konturni integral možemo izraziti pomoću dva sabirka

$$\oint_{C_1} f_w(w) dw = \int_{-\xi}^{\xi} f_w(w) dw + \int_{\widehat{QP}} f_w(w) dw, \quad (\text{A.18})$$

Za lučni deo integrala je

$$w = \xi e^{j\psi}, \quad \psi \in (-\pi, 0], \quad (\text{A.19})$$

pa je

$$\int_{\widehat{QP}} f_w(w)dw = \int_0^{-\pi} f_w(w(\psi)) \frac{\partial w}{\partial \psi} d\psi = \int_0^{-\pi} \frac{e^{-jz(\xi e^{j\psi})}}{\gamma_z^2 + \xi^2 e^{j2\psi}} j\xi e^{j\psi} d\psi. \quad (\text{A.20})$$

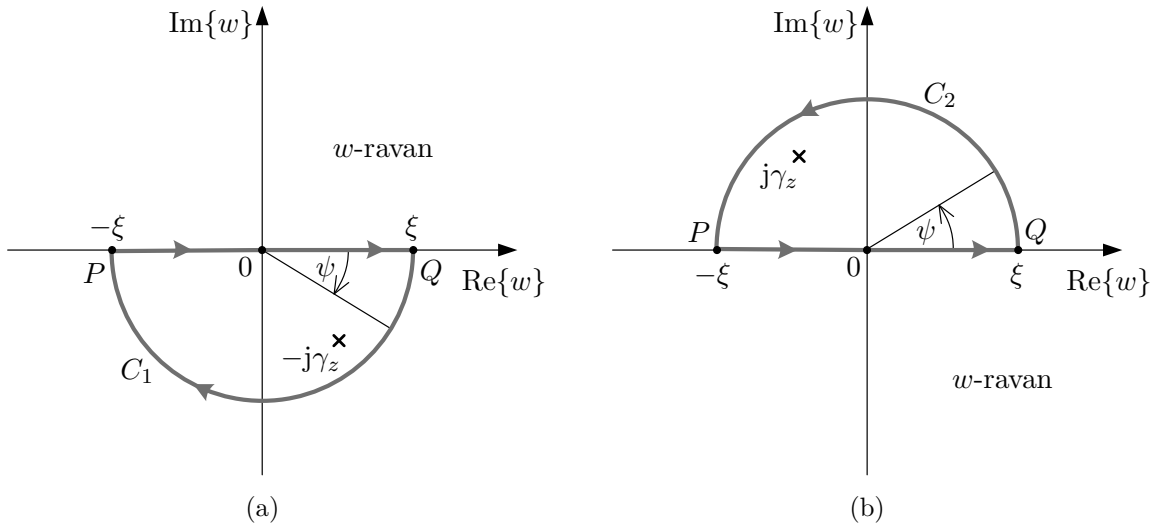
Uočavajući da je na datom opsegu $\sin \psi \leq 0$, za dovoljno veliko ξ možemo maksimizirati moduo podintegralne funkcije,

$$|f_w(w)| = \frac{\xi |e^{z\xi \sin \psi}|}{|\gamma_z^2 + \xi^2 e^{j2\psi}|} \leq \frac{\xi}{|\gamma_z^2 - \xi^2|}. \quad (\text{A.21})$$

Iz prethodnog izraza vidimo da kada $\xi \rightarrow \infty$, sledi $|f_w(w)| \rightarrow 0$, odnosno integral po luku težiće nuli. Primenom računa ostataka, vodeći računa o smeru konture C_1 , dobija se

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \oint_{C_1} f_w(w)dw = I_w = -2\pi j \operatorname{Res}_{w=-j\gamma_z} f_w(w) = \frac{\pi}{\gamma_z} e^{-\gamma_z z}, \quad (\text{A.22})$$

gde je $w = -j\gamma_z$ pol podintegralne funkcije iz (A.17) u IV kvadrantu.



Slika A.1: Putanja integracije u kompleksnoj w -ravni za (a) $z \geq 0$ i (b) $z < 0$.

Za slučaj kada je $z < 0$ posmatramo sličan integral duž konture C_2 , prikazane na slici A.1b, gde luk \widehat{QP} prolazi kroz I i II kvadrant,

$$\oint_{C_2} f_w(w)dw = \int_{-\xi}^{\xi} f_w(w)dw + \int_{\widehat{QP}} f_w(w)dw. \quad (\text{A.23})$$

Sada za lučni segment važi

$$w = \xi e^{j\psi}, \quad \psi \in [0, \pi], \quad (\text{A.24})$$

te istim rezonovanjem kao u prethodnom postupku dobijamo

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \oint_{C_2} f_w(w)dw = I_w = 2\pi j \operatorname{Res}_{w=j\gamma_z} f_w(w) = \frac{\pi}{\gamma_z} e^{\gamma_z z}, \quad (\text{A.25})$$

gde je $w = j\gamma_z$ pol podintegralne funkcije iz (A.17) u II kvadrantu. Kombinovanjem izraza (A.22) i (A.25), dobijamo

$$I_w = \frac{\pi}{\gamma_z} e^{-\gamma_z |z|}. \quad (\text{A.26})$$

Smenom u (A.16), dobijamo dvostruki integral

$$g(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\gamma_z} e^{-\gamma_z |z|} e^{-j(ux+yv)} du dv. \quad (\text{A.27})$$

Ovde je pogodno uvesti smenu promenljivih

$$u = k \sin \theta \cos \phi, \quad (\text{A.28})$$

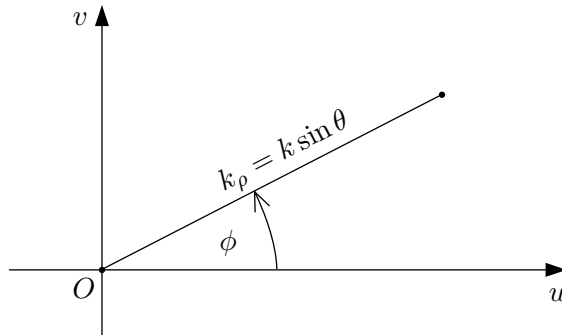
$$v = k \sin \theta \sin \phi. \quad (\text{A.29})$$

čiji Jakobijan glasi

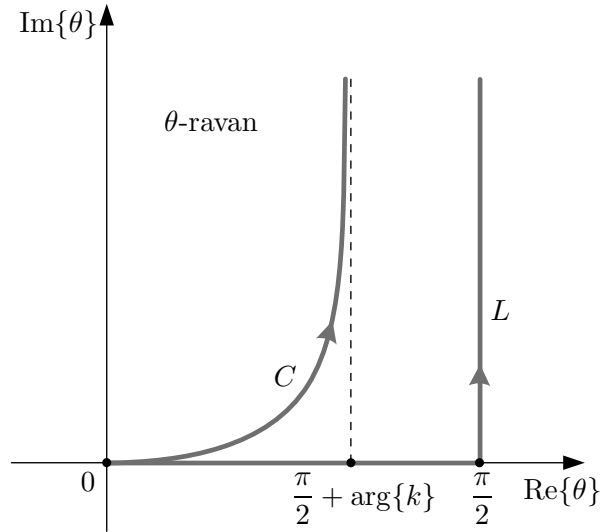
$$\frac{D(u, v)}{D(\theta, \phi)} = k^2 \sin \theta \cos \theta. \quad (\text{A.30})$$

Oblast integracije po novim promenljivim θ i ϕ može se dobiti iz geometrijske interpretacije, prikazane na slici A.2. Kako se promenljive u i v kreću od $-\infty$ do $+\infty$, sledi da je oblast integracije pre smene čitava uv -ravan. Na osnovu slike A.2, uvođenjem parametra $k_\rho = k \sin \phi$, zaključujemo da čitavu uv -ravan možemo obuhvatiti, ako $k_\rho \in [0, \infty)$ i $\phi \in (-\pi, \pi]$. Putanja integracije, odnosno domen promenljive θ , dobija se inverznom relacijom $\theta = \text{Arcsin}(k_\rho/k) \in \mathbb{C}$, pošto $k \in \mathbb{C}$ u opštem slučaju. Ova putanja prikazana je na slici A.3 konturom C . Kada $\text{Im}\{k\} \rightarrow 0$, putanja prelazi u konturu L , koja se sastoji iz dva pravolinijska segmenta. Konačno, iz navedenog postupka sledi Vajlov integralni oblik Grinove funkcije [2],

$$g(x, y, z) = -\frac{jk}{2\pi} \int_{C_\theta} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-jk(x \sin \theta \cos \phi + y \sin \theta \sin \phi + |z| \cos \theta)} \sin \theta d\theta d\phi. \quad (\text{A.31})$$



Slika A.2: Geometrijska interpretacija smene promenljivih (A.29).



Slika A.3: Putanje integracije u kompleksnoj θ -ravni za sredinu 2 sa (C) i bez (L) gubitaka.

Integracijom po ϕ , dvostruki integral u (A.31) može se svesti na jednostruki. Posmatrajmo integral

$$I_\phi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-jk \sin \theta (x \cos \phi + y \sin \phi)} d\phi. \quad (\text{A.32})$$

Uvođenjem smene

$$\Phi = \phi + \phi_0, \quad \text{tg } \phi_0 = \frac{x}{y}, \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (\text{A.33})$$

izraz u zagradi postaje

$$x \cos \phi + y \sin \phi = \rho \left(\frac{x}{\rho} \cos \phi + \frac{y}{\rho} \sin \phi \right) = \sin(\phi + \phi_0) = \rho \sin \Phi, \quad (\text{A.34})$$

pa je

$$I_\phi = \frac{1}{2\pi} \int_{\Phi-\pi}^{\Phi+\pi} e^{-j\rho k \sin \theta \sin \Phi} d\Phi. \quad (\text{A.35})$$

Podintegralna funkcija je periodična sa periodom 2π , pa se može napisati kao

$$\begin{aligned} I_\phi &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-j\rho k \sin \theta \sin \Phi} d\Phi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\rho k \sin \theta \sin \Phi) d\Phi - \frac{j}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(\rho k \sin \theta \sin \Phi) d\Phi \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

Iz definicije Beselove funkcije prve vrste,

$$J_\nu(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(u \sin \Phi - \nu \Phi) d\Phi, \quad (\text{A.37})$$

sledi da je

$$I_\phi = J_0(\rho k \sin \theta). \quad (\text{A.38})$$

Stoga, Grinova funkcija $g(r)$ može se predstaviti u obliku

$$g(r) = \frac{e^{-jk r}}{r} = -jk \int_{C_\theta} J_0(\rho k \sin \theta) e^{-jk|z| \cos \theta} \sin \theta d\theta. \quad (\text{A.39})$$

Iako izrazi (A.31) i (A.39) važe za slučaj izvora polja u koordinatnom početku, ovaj rezultat može se generalisati za proizvoljan položaj izvora polja, jednostavnom zamenom $(x, y, z) \rightarrow (x - x', y - y', z - z')$. Na taj način dobija se opštiji izraz Grinove funkcije

$$g(R) = \frac{e^{-jkR}}{R} = -\frac{jk}{2\pi} \int_{C_\theta} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-jk[(x-x') \sin \theta \cos \phi + (y-y') \sin \theta \sin \phi + |z-z'| \cos \theta]} \sin \theta d\theta d\phi \quad (\text{A.40})$$

$$= -jk \int_{C_\theta} J_0(\rho k \sin \theta) e^{-jk|z-z'| \cos \theta} \sin \theta d\theta, \quad (\text{A.41})$$

gde je

$$R = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}, \quad \rho = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}. \quad (\text{A.42})$$

Dodatak B:

Pol podintegralne funkcije Zomerfeldovog integrala

U zavisnosti od osobina dve linearne sredine, na njihovoj razdvojnoj površi može doći do pojave nekog od različitih oblika površinskog elektromagnetskog talasa, koji u manjoj ili većoj meri doprinosi ukupnom talasu. Pojava površinskog talasa je usko povezana sa polovima podintegralne funkcije Zomerfeldovog integrala pomoću kojeg izražavamo EM polje. U ovom dodatku, na primeru jednog tipičnog Zomerfeldovih integrala, analiziraćemo kratko uslov za postojanje polova i njihov singularni uticaj na numeričko računanje integrala.

Posmatrajmo generalisani koeficijent refleksije za vertikalni Hercov dipol na razdvojnoj površi dve linearne nemagnetske sredine, $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$,

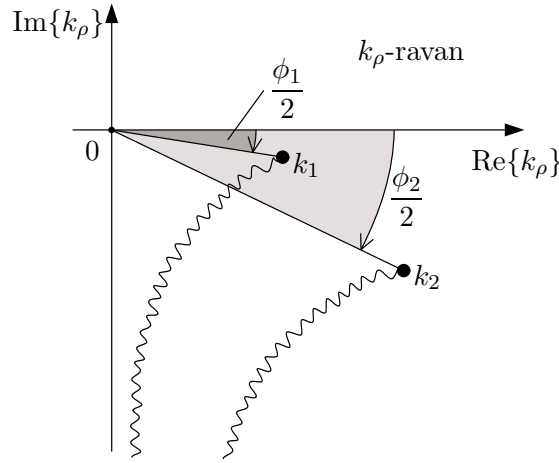
$$R_{zz}(k_\rho) = \frac{N_{Rzz}(k_\rho)}{D_{Rzz}(k_\rho)} = \frac{k_2^2 \sqrt{k_\rho^2 - k_1^2} - k_1^2 \sqrt{k_\rho^2 - k_2^2}}{k_2^2 \sqrt{k_\rho^2 - k_1^2} + k_1^2 \sqrt{k_\rho^2 - k_2^2}}, \quad (\text{B.1})$$

gde sa N_{Rzz} i D_{Rzz} označavamo brojilac i imenilac koeficijenta refleksije. Kada je imenilac jednak nuli, ispunjen je tzv. uslov rezonancije. Pravolinijskim rešavanjem jednačine $D_{Rzz} = 0$, prebacivanjem na drugu stranu jednakosti, kvadriranjem i određivanjem rešenja po k_ρ , dobijamo izraz za pol¹

$$k_\rho = \pm k_{\rho,\text{pol}}, \quad k_{\rho,\text{pol}} = \sqrt{\frac{k_1^2 k_2^2}{k_1^2 + k_2^2}}. \quad (\text{B.2})$$

Međutim, kako se kvadriranjem gubi informacija o izboru grana u korenim funkcijama, nije jasno pod kojim uslovima takvo rešenje jednačine zaista postoji i u kakvoj su svezi ti uslovi sa svojstvima dveju sredina. Da bismo to razjasnili, pomenutu jednačinu rešićemo postupno, sa osvrtom na izbor grana. Radi jednostavnosti, razmatraćemo slučaj kada su k_1 i k_2 u IV kvadrantu k_ρ -ravni, što odgovara tipičnim sredinama sa gubicima. Neka su argumenti kompleksnih veličina k_1^2 i k_2^2 dati uglovima ϕ_1 i ϕ_2 ($\phi_2 > \phi_1$), respektivno, i neka je $\arg\{k_1^2 + k_2^2\} = \phi$, kao na slici B.1. Zaseci su prikazani talasastim linijama, a njihov oblik odgovara hiperbolama, definisanim jednačinama $\text{Im}\{k_{z1,2}\} = 0$, gde je $k_{z1,2} = \sqrt{k_{1,2}^2 - k_\rho^2}$ talasni broj u pravcu z -ose. Ovakav odabir zaseka korišćen je u originalnom Zomerfeldovom radu [1].

¹Ovaj izraz jeste pol kada je $\text{Im}\{k_{z1}\} < 0$ i $\text{Im}\{k_{z2}\} < 0$, što odgovara prvoj, regularnoj grani funkcija k_{z1} i k_{z2} . Drugačijim odabirom grana, dati izraz postaje nula brojioca. Ovo se postiže u tzv. neregularnoj grani, odnosno neregularnom listu Rimanove površi (eng. *improper Riemann sheet*), i tada se dati izraz zove *Brusterova nula* [65, 66].



Slika B.1: Tačke grananja i zaseci podintegralne funkcije za slučaj dve sredine sa gubicima, čiji talasni brojevi su k_1 i k_2 , $\arg\{k_2\} > \arg\{k_1\}$. Talasaste linije predstavljaju zaseke odgovarajućih korenih funkcija.

Imenilac količnika (B.1) možemo izraziti kao

$$D_{Rzz}(k_{\rho,\text{pol}}) = k_2^2 \sqrt{k_{\rho,\text{pol}}^2 - k_1^2} + k_1^2 \sqrt{k_{\rho,\text{pol}}^2 - k_2^2} \quad (\text{B.3})$$

$$= k_2^2 \sqrt{\frac{-k_1^4}{k_1^2 + k_2^2}} + k_1^2 \sqrt{\frac{-k_2^4}{k_1^2 + k_2^2}} \quad (\text{B.4})$$

$$= |k_2|^2 e^{j\phi_2} \frac{|k_1|^2}{\sqrt{|k_1^2 + k_2^2|}} \sqrt{e^{j(\pi+2\phi_1-\phi)}} + |k_1|^2 e^{j\phi_1} \frac{|k_2|^2}{\sqrt{|k_1^2 + k_2^2|}} \sqrt{e^{j(\pi+2\phi_2-\phi)}}. \quad (\text{B.5})$$

Da bi izraz (B.5) bio jednak nuli, potrebno je da dva sabirka nakon korenovanja eksponencijalnih faktora dobiju suprotne predznake. To je moguće samo ako se fazorski predstavnici izraza $\sqrt{e^{j(\pi+2\phi_1-\phi)}}$ i $\sqrt{e^{j(\pi+2\phi_2-\phi)}}$ nađu sa suprotnih strana realne ose, odnosno ako je

$$(2\phi_1 - \phi)(2\phi_2 - \phi) < 0. \quad (\text{B.6})$$

Drugim rečima, opseg ugla ϕ je određen sa $2|\phi_1| < |\phi| < 2|\phi_2|$, odakle sledi potreban uslov za postojanje pola

$$|\phi_2| > 2|\phi_1|. \quad (\text{B.7})$$

Iako je ovaj uslov često ispunjen u praksi, samo postojanje pola ne znači nužno i da on utiče na numeričku integraciju. Pokazuje se da uticaj pola, pored njegove udaljenosti od putanje integracije, zavisi i od njegovog relativnog položaja u odnosu na tačke grananja, što ćemo ilustrovati primerom.

Rešenje za pol integranda možemo izraziti na sledeći način:

$$k_{\rho,\text{pol}} = k_1 \sqrt{\frac{\kappa}{1 + \kappa}}, \quad \kappa = \frac{k_2^2}{k_1^2}. \quad (\text{B.8})$$

Neka je, za svrhe našeg primera, sredina 1 bez gubitaka, $\text{Re}\{k_1\} > 0 \wedge \text{Im}\{k_1\} = 0$, a sredina

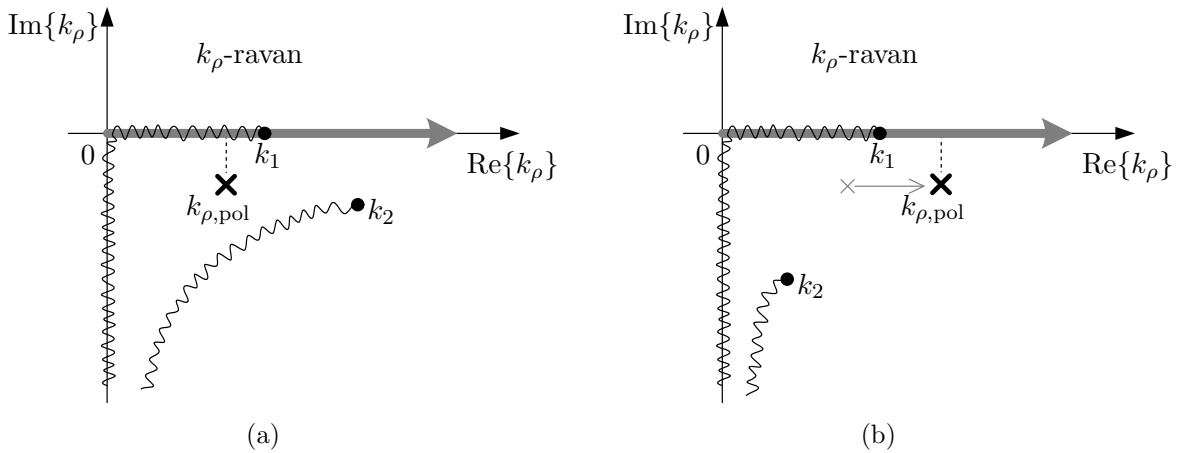
2 sa gubicima, $\text{Im}\{k_2\} < 0$. Tada se hiperbolični zasek koji odgovara tački grananja k_1 (slika B.1) deformiše u dva pravolinijska segmenta, kao na slici B.2. Ako definišemo uglove α i β

$$\begin{aligned}\kappa &= |\kappa|e^{j\alpha}, \quad -\pi < \alpha < 0, \\ 1 + \kappa &= |1 + \kappa|e^{j\beta}, \quad \alpha < \beta < 0,\end{aligned}\tag{B.9}$$

sledi da je [27, 39]

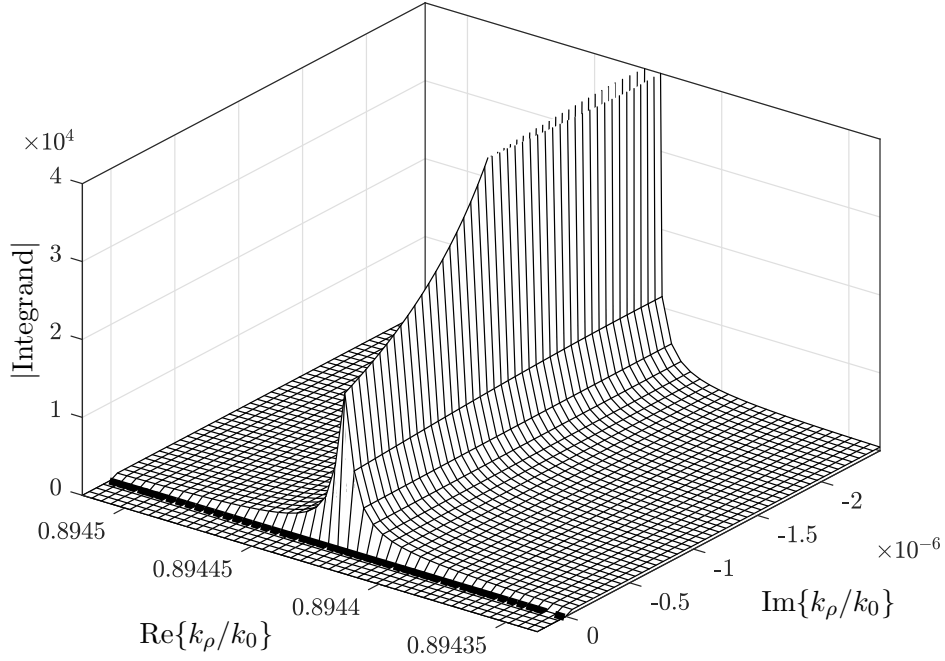
$$k_{\rho,\text{pol}} = k_1 \sqrt{\frac{|\kappa|}{|1 + \kappa|}} e^{j\frac{\alpha-\beta}{2}}.\tag{B.10}$$

Posmatrajmo najpre slučaj kada je $\text{Re}\{\kappa\} > 0$. Tada je $-\pi/2 < \alpha < 0$ i pol se nalazi u IV kvadrantu, *levo* od k_1 , tj. $\text{Re}\{k_{\rho,\text{pol}}\} < \text{Re}\{k_1\}$. Ukoliko usvojimo putanju integracije duž realne ose i pretpostavimo male gubitke u sredini 2, čini se da bi blizina pola putanji integracije mogla značajno umanjiti tačnost rezultata usled velikih vrednosti integranda (slika B.2a). Međutim, s obzirom da se realna putanja integracije nalazi u prvoj, regularnoj grani funkcije k_{z1} (eng. *proper Riemann sheet*), neposredno iznad zaseka, a da se pol nalazi ispod njega, izbegnut je njegov singularni efekat. To se objašnjava time da se putanja integracije i pol ne nalaze istovremeno u zoni gde je potiranje sabiraka imenioca (B.5) moguće. Ako je pak $\text{Re}\{\kappa\} < 0$, tj. $-\pi < \alpha < -\pi/2$ (npr. plazma, metamaterijali i plemeniti metali na visokim učestanostima), onda se pol nalazi *desno* od tačke grananja k_1 , i to u zoni gde svojom blizinom realnoj osi može prouzrokovati velike vrednosti integranda na putanji integracije, a time i umanjeње tačnosti numeričkog računanja integrala. Pojava pola desno od tačke grananja povezuje se sa pojavom jedne vrste površinskog talasa, kojeg nazivamo površinski plazmon-polariton (SPP - eng. *surface plasmon polariton*) [27, 39, 66].

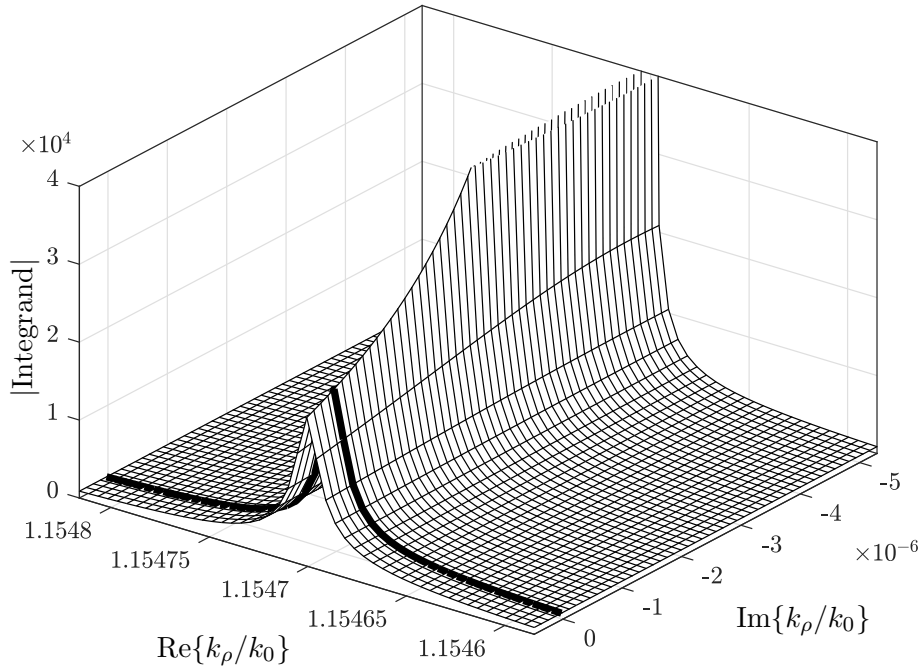


Slika B.2: Položaj pola kada je sredina 2 (a) dielektrik s gubicima i (b) metamaterijal sa $\text{Re}\{k_2\} < 0$.

Na slici B.3 prikazan je grafik modula integranda ZI za rasejani potencijal vertikalnog Hecovog dipola u funkciji k_ρ , kada je $\rho = 10\lambda_0$ i $z = z' = 0$. Crna linija predstavlja grafik modula integranda duž realne ose. U datom primeru je $k_1 = k_0$ i $k_2 = k_0\sqrt{\epsilon_{\text{er}}}$, odnosno $\kappa = \epsilon_{\text{er}}$. U prvom slučaju, prikazanom na slici B.2a, efektivna relativna permitivnost je $\epsilon_{\text{er}} = 4 + j0,00001$, dok je pol $k_{\rho,\text{pol}} \approx k_0(0,894427 - j0,000002)$. Kako je $\text{Re}\{\epsilon_{\text{er}}\} > 0$, pol je *zaklonjen* zasekom, te ne stvara ekstremne vrednosti, odnosno jake promene u podintegralnoj funkciji. U drugom slučaju je $\epsilon_{\text{er}} = -4 + j0,00001$, a pol, čija vrednosti sada iznosi $k_{\rho,\text{pol}} \approx k_0(1,154700 - j0,000005)$, nije više *zaklonjen*, te stvara jak ekstremum na putanji integracije.



(a)



(b)

Slika B.3: Prikaz modula integranda ZI za rasejani potencijal vertikalnog Hercovog dipola nad kompleksnom k_ρ -ravni, kada je $\rho = 10\lambda_0$ i $z = z' = 0$. Grafik je zasečen u okolini pola i ograničen na 10^4 , radi boljeg prikaza. Crna linija predstavlja grafik modula integranda duž realne putanje integracije. (a) $\epsilon_{er} = 4 - j0,0001$, pol je *zaklonjen* zasekom i ne utiče na integrand; (b) $\epsilon_{er} = -4 - j0,0001$, pol nije *zaklonjen* zasekom i stvara ekstremum;

Literatura

- [1] A. N. Sommerfeld, “Über die Ausbreitung der Wellen in der Drahtlosen Telegraphie,” *Ann. Physik*, vol. 28, pp. 665–736, 1909.
- [2] H. Weyl, “Ausbreitung elektromagnetischer Wellen über einem ebenen Leiter,” *Ann. Physik*, vol. 60, pp. 481–500, 1919.
- [3] B. Van der Pol and K. Niessen, “Über die Ausbreitung von Elektromagnetischer Wellen über eine ebene Erde,” *Ann. Physik*, vol. 398, pp. 273–294, 1930.
- [4] M. Slovic, B. Jokanovic, and B. Kolundzija, “High efficiency patch antenna for 24 ghz anticollision radar,” in *TELSIKS 2005 - 2005 uth International Conference on Telecommunication in ModernSatellite, Cable and Broadcasting Services*, vol. 1, pp. 20–23, 2005.
- [5] R. Trembinski and D. A. McNamara, “The engineering modelling of electromagnetic wave scattering from sea ice by surface-based radar,” in *Proc. 2018 IEEE Int. Symp. Ant. Prop. (APS/URSI)*, Boston, MA, July 2018.
- [6] V. Petrović, *Analiza žičanih antena u prisustvu realnog zemljišta metodom likova*. doktorska disertacija, Elektrotehnički fakultet Univerziteta u Beogradu, Beograd, 1993.
- [7] D. Đurđević, *Analiza žičanih antena u višeslojnom nesavršenom dielektriku*. doktorska disertacija, Elektrotehnički fakultet Univerziteta u Beogradu, Beograd, 1996.
- [8] B. M. Kolundžija, M. S. Tasić, D. I. Olćan, D. P. Zorić, and S. Stevanetić, “Advanced techniques for efficient modeling of electrically large structures on desktop PCs,” *Applied Computational Electromagnetics Society Journal, Special Issue on Computational Electromagnetics Workshop, CEM 11*, vol. 27, pp. 123–131, Feb. 2012.
- [9] J. R. Mosig and F. E. Gardiol, “A dynamical radiation model for microstrip structures,” in *Advances in Electronics and Electron Physics* (P. W. Hawkes, ed.), vol. 59, pp. 139–237, Academic Press, 1982.
- [10] I. D. Koufogiannis, A. G. Polimeridis, M. Mattes, and J. R. Mosig, “Real axis integration of Sommerfeld integrals with error estimation,” in *2012 6th European Conference on Antennas and Propagation (EUCAP)*, Prague, pp. 719–723, Mar. 2012.
- [11] P. Gay-Balmaz and J. R. Mosig, “Three-dimensional planar radiating structures in stratified media,” *International Journal of Microwave and Millimeter-Wave Computer-Aided Engineering*, vol. 7, no. 5, pp. 330–343, 1997.
- [12] E. Simsek, Q. H. Liu, and B. Wei, “Singularity subtraction for evaluation of Green’s functions for multilayer media,” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 54, pp. 216–225, Jan. 2006.

- [13] R. Golubovic, A. G. Polimeridis, and J. R. Mosig, “Efficient algorithms for computing Sommerfeld integral tails,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 60, pp. 2409–2417, May 2012.
- [14] A. A. Melcón, *Applications of the integral equation technique to the analysis and synthesis of multilayered printed shielded microwave circuits and cavity backed antennas*. PhD thesis, EPFL, Lausanne, Switzerland, 1998.
- [15] K. A. Michalski and J. R. Mosig, “Efficient computation of Sommerfeld integral tails – methods and algorithms,” *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, vol. 30, pp. 281–317, Mar. 2016.
- [16] V. Volskiy, G. A. E. Vandenbosch, R. G. Nićiforović, A. G. Polimeridis, and J. R. Mosig, “Kul and epfl cooperation on numerical integration of Sommerfeld integrals,” in *2012 6th European Conference on Antennas and Propagation (EUCAP)*, pp. 3215–3218, Mar. 2012.
- [17] W. A. Johnson and D. G. Dudley, “Real axis integration of Sommerfeld integrals: Source and observation points in air,” *Radio Science*, vol. 18, no. 2, pp. 175–186, 1983.
- [18] J. R. Mosig and T. K. Sarkar, “Comparison of quasi-static and exact electromagnetic fields from a horizontal electric dipole above a lossy dielectric backed by an imperfect ground plane,” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 34, pp. 379–387, Apr. 1986.
- [19] V. V. Petrović, A. J. Krneta, and B. M. Kolundžija, “Singularity extraction for reflected Sommerfeld integrals over a multilayered media,” in *2013 21st Telecommunications Forum (TELFOR)*, pp. 648–651, Nov. 2013.
- [20] A. N. Sommerfeld, *Partial Differential Equations in Physics*. New York: Academic Press, 1949.
- [21] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. New York: Dover, 1964.
- [22] W. R. LePage, *Complex Variables and the Laplace Transform for Engineers*. New York: McGraw-Hill, 1961.
- [23] D. S. Mitrinović, *Kompleksna analiza*. Beograd: Građevinska knjiga, 1977.
- [24] C. E. Fröberg, *Introduction to Numerical Analysis*. Reading: Addison-Wesley, 1969.
- [25] K. A. Michalski, “On the efficient evaluation of integral arising in the Sommerfeld halfspace problem,” *IEE Proceedings H - Microwaves, Antennas and Propagation*, vol. 132, no. 5, pp. 312–318, 1985.
- [26] J. R. Mosig and A. A. Melcón, “Green’s functions in lossy layered media: integration along the imaginary axis and asymptotic behavior,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 51, no. 12, pp. 3200–3208, 2003.
- [27] K. Michalski and J. Mosig, “The Sommerfeld half-space problem revisited: from radio frequencies and zenneck waves to visible light and fano modes,” *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, vol. 30, no. 1, pp. 1–42, 2016.
- [28] B. M. Kolundžija and A. R. Đorđević, *Electromagnetic Modeling of Composite Metallic and Dielectric Structures*. Boston: Artech House, 1969.

- [29] A. J. Krneta and B. M. Kolundžija, "Evaluation of potential and impedance integrals in analysis of axially symmetric metallic structures to prescribed accuracy up to machine precision," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 65, no. 5, pp. 2526–2539, 2017.
- [30] A. J. Krneta, *Funkcije bazisa ultra visokog reda i singularne funkcije bazisa u analizi aksijalno simetričnih metalnih struktura*. doktorska disertacija, Elektrotehnički fakultet Univerziteta u Beogradu, Beograd, 2018.
- [31] D. Đ. Tošić, *Uvod u numeričku analizu*. Beograd: Naučna knjiga, 1978.
- [32] G. Dahlquist and k. Björck, *Numerical Methods in Scientific Computing, Volume 1*. SIAM, 2008.
- [33] M. Mori, "Developments in the double exponential formulas for numerical integration," in *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, Kyoto, pp. 1585–1594, 1990.
- [34] M. Mori, "Discovery of the double exponential transformation and its developments," *Publ. RIMS*, vol. 41, pp. 897–935, 2005.
- [35] H. Takahashi, "Double exponential formulas for numerical integration," *Publ. RIMS*, vol. 9, pp. 721–741, 1974.
- [36] A. G. Polimeridis and J. R. Mosig, "Evaluation of weakly singular integrals via generalized cartesian product rules based on the double exponential formula," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 58, no. 6, pp. 1980–1988, 2010.
- [37] R. G. Nićiforović, A. G. Polimeridis, and J. R. Mosig, "Fast computation of Sommerfeld integral tails via direct integration based on double exponential-type quadrature formulas," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 59, pp. 694–699, Feb. 2011.
- [38] N. Basta and B. Kolundžija, "On efficient evaluation of pole-free Sommerfeld integrals," in *Proc. 2019 Int. Conf. on Electrical, Electronic and Computing Engineering (IcETRAN)*, Srebrno jezero, June 2019.
- [39] K. A. Michalski and J. R. Mosig, "On the surface fields excited by a hertzian dipole over a layered halfspace: From radio to optical wavelengths," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 63, no. 12, pp. 5741–5752, 2015.
- [40] K. A. Michalski, "Extrapolation methods for Sommerfeld integral tails," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 46, pp. 1405–1418, Oct. 1998.
- [41] J. Mosig, "The weighted averages algorithm revisited," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 60, pp. 2011–2018, Apr. 2012.
- [42] D. S. Mitrinović, *Predavanja o redovima*. Beograd: Građevinska knjiga, 1974.
- [43] D. Shanks, "Non-linear transformations of divergent and slowly convergent sequences," *Journal of Mathematics and Physics*, vol. 34, no. 1–4, pp. 1–42, 1955.
- [44] G. H. Hardy, *Divergent Series*. London: Oxford University Press, 1973.
- [45] E. J. Weniger, "Nonlinear sequence transformations for the acceleration of convergence and summation of divergent series," *Computer Physics Reports*, vol. 10, pp. 189–371, Dec. 1989.

- [46] J. R. Mosig and F. E. Gardiol, “Analytical and numerical techniques in the Green’s function treatment of microstrip antennas and scatterers,” *IEE Proceedings H - Microwaves, Optics and Antennas*, vol. 130, pp. 175–182, Mar. 1983.
- [47] S. K. Lucas and H. A. Stone, “Evaluating infinite integrals involving Bessel functions of arbitrary order,” *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 64, pp. 217–231, Dec. 1995.
- [48] N. Basta and B. Kolundžija, “Efficient evaluation of the finite part of pole-free Sommerfeld integrals in half-space problems with predefined accuracy,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 67, no. 7, pp. 4930–4935, 2019.
- [49] L. B. Felsen and N. Marcuvitz, “Fields in planestratified regions,” in *Radiation and Scattering of Waves*, pp. 442–629, John Wiley and Sons, 1994.
- [50] J. A. Bittencourt, *Fundamentals of Plasma Physics*. New York: Springer-Verlag, 2004.
- [51] W. Rotman, “Plasma simulation by artificial dielectrics and parallel-plate media,” *IRE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 10, no. 1, pp. 82–95, 1962.
- [52] G. Dewar, “A thin wire array and magnetic host structure with $n < 1$,” *Journal of Applied Physics*, vol. 97, no. 10, p. 10Q101, 2005.
- [53] F. J. Rachford, D. N. Armstead, V. G. Harris, and C. Vittoria, “Simulations of ferrite-dielectric-wire composite negative index materials,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 99, p. 057202, July 2007.
- [54] Y. Huang, G. Wen, Y. Yang, and K. Xie, “Simulations of ferrite-dielectric-wire composite negative index materials,” *Appl. Phys. A*, vol. 106, p. 79–86, 2012.
- [55] L. Solymar and E. Shamonina, *Waves in Metamaterials*. New York: Oxford University Press, 2009.
- [56] J. B. Pendry, A. J. Holden, W. J. Stewart, and I. Youngs, “Extremely low frequency plasmons in metallic mesostructures,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 76, pp. 4773–4776, Jun 1996.
- [57] J. B. Pendry, “Negative refraction makes a perfect lens,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 85, pp. 3966–3969, Oct. 2000.
- [58] D. Gérard and S. K. Gray, “Aluminium plasmonics,” *Journal of Physics D: Applied Physics*, vol. 48, p. 184001, dec 2014.
- [59] Y. Li, *Plasmonic Optics: Theory and Applications*. Bellingham: SPIE Press, 2017.
- [60] R. W. Ziolkowski and E. Heyman, “Wave propagation in media having negative permittivity and permeability,” *Physical Review E: Statistical, nonlinear, and soft matter physics*, vol. 64, p. 056625, Oct 2001.
- [61] J. R. Mosig, “Integral equation technique,” in *Numerical Techniques for Microwave and Millimeter-wave Passive Structures* (T. Itoh, ed.), New York: Wiley, 1989.
- [62] A. Baños, *Dipole Radiation in the Presence of a Conducting Half-space*. Oxford: Pergamon Press, 1966.
- [63] B. D. Popović, *Elektromagnetika*. Beograd: Građevinska knjiga, 1986.

- [64] F. Lenz and I. Cowley, “Plus or minus sign in the fourier transform,” in *Introduction to Electron Holography* (E. Völkl, L. F. Allard, and D. C. Joy, eds.), Boston: Springer, 1999.
- [65] A. Ishimaru, J. R. Thomas, and S. Jaruwatanadilok, “Electromagnetic waves over half-space metamaterials of arbitrary permittivity and permeability,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 53, no. 3, pp. 915–921, 2005.
- [66] A. Ishimaru, *Waves in Inhomogeneous and Layered Media*, ch. 3, pp. 7–34. John Wiley and Sons, 2017.

Biografija autora

Nikola Basta rođen je 27. aprila 1983. godine u Beogradu, gde je završio Osnovnu školu „Drinka Pavlović“ kao nosilac Vukove diplome i učenik generacije, i Prvu beogradsku gimnaziju kao nosilac Vukove diplome.

Elektrotehnički fakultet u Beogradu upisao je 2002. godine. U toku studija, Nikola Basta je 2006. kao praktikant proveo šest nedelja u kompaniji European Testing Services (ETS) u okviru istraživačkog centra Evropske svemirske agencije (ESTEC-ESA), Nordvijk, Holandija, radeći na različitim zadacima podrške mernim laboratorijama iz oblasti akustike, termodinamike i primenjene elektromagnetike. Naredne godine Nikola Basta je kao stipendista Fondacije „Zoran Đinđić“ pohađao stručnu praksu u trajanju od šest meseci u kompaniji T-Systems International GmbH u Štuttgartu, Nemačka, gde se bavio upravljanjem resursima u IP VPN (MPLS) mrežama. Diplomirao je 27. marta 2008. na Odseku za telekomunikacije, sa prosečnom ocenom 9,71 po petogodišnjem studijskom programu. Diplomski rad „Linearni i planarni nizovi proreznih antena u talasovodnoj tehnici“, odbranio je sa ocenom 10.

Od 2008. do 2014. Nikola Basta bio je zaposlen u Nemačkom aeronautičkom i kosmičkom centru (German Aerospace Center - DLR) kao naučni saradnik u Antenskoj grupi Odeljenja za navigaciju, pri Institutu za telekomunikacije i navigaciju (IKN). U toku šest godina naučnog i istraživačkog rada učestvovao je na više nemačkih nacionalnih i međunarodnih projekata unutar kojih se bavio analizom i razvojem naprednih antenskih sistema za navigacione i telekomunikacione primene, kao i analizom antenskih nizova u vremenskom domenu.

Doktorske studije na Smeru za mikrotalasnu tehniku upisao je 24. oktobra 2014. godine. Na doktorskim studijama položio je svih 10 predmeta sa prosečnom ocenom 10,0. Nikola Basta je zaposlen na Katedri za opštu elektrotehniku Elektrotehničkog fakulteta Univerziteta u Beogradu od 1. februara 2015. godine. Za asistenta za užu naučnu oblast Elektromagnetika, antene i mikrotalasi izabran je 1. februara 2015. godine, a ponovo je izabran u isto zvanje 14.2.2018.

Izjava o autorstvu

Ime i prezime autora: **Nikola Basta**

Broj indeksa: **2014/5029**

Izjavljujem

Da je doktorska disertacija pod naslovom

Efikasno računanje Zomerfeldovih integrala u slučaju električki velikih struktura u blizini razdvojne površi dve sredine

- rezultat sopstvenog istraživačkog rada;
- da disertacija u celini ni u delovima nije bila predložena za sticanje druge diplome prema studijskim programima drugih visokoškolskih ustanova;
- da su rezultati korektno navedeni i
- da nisam kršio autorska prava i koristio intelektualnu svojinu drugih lica.

U Beogradu, 9.7.2014.

Potpis autora

Nikola Basta

Izjava o istovetnosti štampane i elektronske verzije doktorskog rada

Ime i prezime autora: **Nikola Basta**

Broj indeksa: **2014/5029**

Studijski program: **Elektrotehnika i računarstvo**

Naslov rada: **Efikasno računanje Zomerfeldovih integrala u slučaju električki velikih struktura u blizini razdvojne površi dve sredine**

Mentor: **dr Branko Kolundžija, redovni profesor**

Izjavljujem da je štampana verzija mog doktorskog rada istovetna elektronskoj verziji koju sam predao radi pohranjivanja u **Digitalnom repozitorijumu Univerziteta u Beogradu**.

Dozvoljavam da se objave moji lični podaci vezani za dobijanje akademskog naziva doktora nauka, kao što su ime i prezime, godina i mesto rođenja i datum odbrane rada.

Ovi lični podaci mogu se objaviti na mrežnim stranicama digitalne biblioteke, u elektronskom katalogu i u publikacijama Univerziteta u Beogradu.

U Beogradu, *J. F. Zolo*

Potpis autora

Nikola Basta

Izjava o korišćenju

Ovlašćujem Univerzitetsku biblioteku „Svetozar Marković“ da u Digitalni repozitorijum Univerziteta u Beogradu unese moju doktorsku disertaciju pod naslovom:

Efikasno računanje Zomerfeldovih integrala u slučaju električki velikih struktura u blizini razdvojne površi dve sredine

koja je moje autorsko delo.

Disertaciju sa svim priložima predao sam u elektronskom formatu pogodnom za trajno arhiviranje.

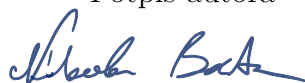
Moju doktorsku disertaciju pohranjenu u Digitalnom repozitorijumu Univerziteta u Beogradu i dostupnu u otvorenom pristupu mogu da koriste svi koji poštuju odredbe sadržane u odabranom tipu licence Kreativne zajednice (Creative Commons) za koju sam se odlučio.

1. Autorstvo (CC BY)
2. Autorstvo – nekomercijalno (CC BY-NC)
3. Autorstvo – nekomercijalno – bez prerada (CC BY-NC-ND)
4. Autorstvo – nekomercijalno – deliti pod istim uslovima (CC BY-NC-SA)
5. Autorstvo – bez prerada (CC BY-ND)
6. Autorstvo – deliti pod istim uslovima (CC BY-SA)

(Molimo da zaokružite samo jednu od šest ponuđenih licenci. Kratak opis licenci je sastavni deo ove izjave).

U Beogradu, J. J. Lolo.

Potpis autora



1. **Autorstvo.** Dozvoljavate umnožavanje, distribuciju i javno saopštavanje dela, i prerade, ako se navede ime autora na način određen od strane autora ili davaoca licence, čak i u komercijalne svrhe. Ovo je najslobodnija od svih licenci.
2. **Autorstvo – nekomercijalno.** Dozvoljavate umnožavanje, distribuciju i javno saopštavanje dela, i prerade, ako se navede ime autora na način određen od strane autora ili davaoca licence. Ova licenca ne dozvoljava komercijalnu upotrebu dela.
3. **Autorstvo – nekomercijalno – bez prerada.** Dozvoljavate umnožavanje, distribuciju i javno saopštavanje dela, bez promena, preoblikovanja ili upotrebe dela u svom delu, ako se navede ime autora na način određen od strane autora ili davaoca licence. Ova licenca ne dozvoljava komercijalnu upotrebu dela. U odnosu na sve ostale licence, ovom licencom se ograničava najveći obim prava korišćenja dela.
4. **Autorstvo – nekomercijalno – deliti pod istim uslovima.** Dozvoljavate umnožavanje, distribuciju i javno saopštavanje dela, i prerade, ako se navede ime autora na način određen od strane autora ili davaoca licence i ako se prerada distribuira pod istom ili sličnom licencom. Ova licenca ne dozvoljava komercijalnu upotrebu dela i prerada.
5. **Autorstvo – bez prerada.** Dozvoljavate umnožavanje, distribuciju i javno saopštavanje dela, bez promena, preoblikovanja ili upotrebe dela u svom delu, ako se navede ime autora na način određen od strane autora ili davaoca licence. Ova licenca dozvoljava komercijalnu upotrebu dela.
6. **Autorstvo – deliti pod istim uslovima.** Dozvoljavate umnožavanje, distribuciju i javno saopštavanje dela, i prerade, ako se navede ime autora na način određen od strane autora ili davaoca licence i ako se prerada distribuira pod istom ili sličnom licencom. Ova licenca dozvoljava komercijalnu upotrebu dela i prerada. Slična je softverskim licencama, odnosno licencama otvorenog koda.