УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
ДЕПАРТМАН ЗА МАТЕМАТИКУ И
ИНФОРМАТИКУ

мр БРАНКО ПРЕНТОВИЋ

РАЧУНАР У НАСТАВИ АНАЛИТИЧКЕ ГЕОМЕТРИЈЕ У ГИМНАЗИЈИ

- ДОКТОРСКА ДИСЕРТАЦИЈА -

Нови Сад, 2014.

Садржај

Предговор

Проблем унапређења наставе математике, условљен је циљевима савремене наставе математике, развојем математике и информационих технологија. Решавање овог проблема подразумева стално усклађивање наставних садржаја са најновијим достигнућима у математици и науци уопште, и стално осавремењавање методике наставе математике.

Наведени проблем и могућност његовог решавања, одређују **предмет** ове Докторске дисертације, који се може дефинисати као:

- методичка трансформација научних у наставне садржаје аналитичке геометрије, у наставном систему – настава уз помоћ рачунара, адекватним избором садржаја, израдом одговарајућих генеричких организатора уз коришћење погодног образовног софтвера;
- теоријска обрада дидактичког система настава уз помоћ рачунара, анализом међусобне зависности фактора наставе, анализом дидактичких принципа, класификацијом и приказом наставних метода, уз подесно формиране генеричке организаторе;
- експериментално истраживање о могућности примене овог дидактичког система, његовом утицају на реализацију циљева и задатака, на укупан образовни учинак и подизање нивоа ефикасности савремене наставе.

На основу наведеног проблема и дефинисаног предмета, може се закључити да је **основни циљ** ове Докторске дисертације да допринесе унапређењу теорије и праксе методике наставе математике, уз могућност адекватног избора, артикулације и трансформације наставних садржаја и њихове дидактичке обраде у оквиру наставног система – настава уз помоћ рачунара, чиме се настава математике усмерава на **процес стицања знања** и **могућност примене знања**.

У складу са предметом и циљем, конципиран је и садржај докторске дисертације – Рачунар у настави аналитичке геометрије у гимназији. Тако су у глави 1. уз предмет, циљеве и задатке Дисертације, дати историјски преглед развоја и предмет аналитичке геометрије. У глави 2. дата је компаративна анализа заступљености садржаја аналитичке геометрије у средњошколским наставним програмима неких земаља из окружења, као и једна могућа верзија Оперативног плана наставне теме алалитичка геометрија у III разреду гимназије природно – математичкиг смера, прилагођена наведеној методичкој трансформацији и дидактичком систему – настава уз помоћ рачунара. У глави 3. теоријски је обрађен дидактички систем – настава уз помоћ рачунара, а у глави 4. приказана је дидактичка трансформација неких садржаја аналитичке геометрије, у наставне садржаје аналитичке геометрије, израдом одговарајућих апликација у програмима Mathematica и GeoGebra. Глава 5. представља Педагошко истраживање, о примени овог дидактичког система, обављено на узорку од 93 ученика две гимназије, почев од дефинисања проблема, постављања циљева, задатака и хипотеза истраживања, преко описа организације и тока експеримента, до статистичке обраде података и анализе резултата.

У Прилогу докторској дисертацији – Интерактивном уџбенику аналитичке геометрије, дата је методичка трансформација научних у наставне садржаје аналитичке геометрије, предвиђених за редовну и додатну наставу у трећем разреду гимназије, и израду матурских радова.

Садржај Докторске дисертације и Интерактивног уџбеника дати су на CD-у, у PDF формату. CD је снабдевен и одговарајућим апликацијама израђеним у програмима Mathematica и GeoGebra. Већина апликација представља генеричке организаторе одређеног концепта, или решеног примера. Апликације прате текст дисертације и уџбеника и могу се покренути из текста, или независно од њега. На тај начин уџбеник је прилагођен настави уз помоћ рачунара.

Током реализације Педагошког истраживања, у све три школе, коришћен је програм GeoGebra. Разлози за то су вишеструки. Програм GeoGebra је бесплатан и лако доступан сваком ученику. И програм и упутство за коришћење, преведени су на српски језик. Једноставан је за употребу, пошто су његове наредбе једноставне – еквивалентне су „математичким наредбама“. Програм је погодан за самосталан рад ученика и пружа велике могућности за визуализацију наставних садржаја.

Приликом израде Дисертације и Уџбеника осим програма GeoGebra коришћен је и програм Mathematica, пошто Природно – математички факултет у Новом Саду има лиценциран овај програмски пакет. Овај програм је такође погодан за рад у средњој школи, са одличним упутством и великим бројем решених примера, као и условима за визуализацију наставног садржаја.

Дидактичким системом – настава уз помоћ рачунара бавим се од 2003. године, а применом програмских пакета Mathematica и GeoGebra у настави, бавим се врло интензивно од 2001, односно 2002. године.

Ова Докторска дисертација, са свим својим прилозима и научним резултатима садржи у себи резултате дугогодишњег стручног и научног усавршавања и професионалног искуства, као и резултате рада на детаљном изучавању и примени једног новог дидактичког система, (видети [73], [74], [75], [76], [77] а, [77] б, [77] в.).

Посебну захвалност желим да изразим проф. др. Драгославу Херцегу, који је био мој ментор током специјалистичких и магистарских студија и током израде Докторске дисертације. Сарадња са њим, његово интересовање за мој рад и савети, увек су ми представљали велико охрабреће и подстицај, а несебична помоћ значајно је утицала на квалитет Дисертације.

Такође се захваљујем и проф. др. Ђурђици Такачи на интересовању за мој рад и на корисним саветима.

За сарадњу и помоћ на успешној реализацији Педагошког истраживања о могућностима примене рачунара у настави аналитичке геометрије захваљујем се колегама: За сарадњу и помоћ на успешној реализацији Педагошког истраживања о могућностима примене рачунара у настави аналитичке геометрије захваљујем се колегама: Маријетици Самарџијевић, Хермини Љуштини и Верици Говедарици, професорима математике у гимназији "Јован Јовановић - Змај" у Новом Саду, Бранку Родићу и Костадину Мићовићу, професорима математике у гимназији "Никола Тесла" у Апатину.

Директори ових школа – др Радивој Стојковић и Костадин Мићовић, подржали су реализацију овог Педагошког истраживања у својим школама, на чему им срдачно захваљујем.

Коначно, моја породица – супруга Милева и синови Филип и Марко, за мој рад су имали велико стрпљење и пружали су ми несебичну подршку, дајући тиме велики допринос успешном остварењу ове Докторске дисертације.

У Оџацима 20.5.2014. мр Бранко Прентовић

1. УВОДНИ ДЕО

1.1. Предмет докторске дисертације

Проблем који се разматра у овој докторској дисертацији, је веома значајан и увек **актуелан** – проблем унапређења наставе математике.

Ако посматрамо циљеве савремене наставе математике, уочићемо да се међу њима посебно истичу следећи: „развијање менталних способности ученика и стицање математичких знања и умења, неопходних за разумевање законитости у природи и друштву и примену у свакодневном животу и пракси, као и за наставак професионалног образовања“. [70]

Међу задацима обратимо пажњу на „стицање знања неопходних за разумевање квантитативних и просторних односа, као и проблема из разних области; развијање логичког мишљења и закључивања, апстрактног мишљења и интуиције, допринос изграђивању позитивних особина личности и сл.“

Међутим, и поред јасно дефинисаних циљева и задатака, у многим нашим школама, актуелна настава математике је усмерена на усвајање готових информација и на њихову количину, а не на квалитет и могућност примене стечених знања. Зато, ако се има у виду и чињеница, да се број научних информација удвостручује за мање од пет година, јасно је да су постављени циљеви недостижни, и да исходи овакве наставе не могу задовољити потребе савременог човека.

Такође, резултати разних тестирања, и домаћих (пријемни испити) и међународних (PISA), [104], показују да су знања наших ученика статична, самим тим и слабо примењива. У исто време ученици се боре са најелементарнијим проблемима: како да овладају језиком математике, како да усвоје математичке моделе и мисаоне токове математике. Такође, уобичајено је да се каже да ученици не усвајају све оно што им се нуди током наставног процеса, или да су потпуно незаинтересовани за наставу математике. Ова забрињавајућа ситуација, није само наша реалност, са њом се сусрећу и други.

На проблем слично гледа и M. Prensky у раду [72], где говори о нужној промени „парадигме наставе“ на почетку XXI века. Он, наиме, упозорава да још увек у школаам преовладава традиционална настава, да „тренутно, велики број наставника (и администрација) виде процес образовања, као трансфер градива (тј. уџбеника) у главе ученика“. Међутим, такво образовање, наставу вођену таквим циљевима, ученици не прихватају. „За њих је образовање припрема за будућност - своју будућност. Више него било шта друго, ученици данас желе да школовање буде релевантно за будућност, и осећају његов значај и његову вредност. За њих су: чињенице, објашњења, алати и образложења вредни учења (труда), само у оној мери у којој представљају подршку сопственим циљевима ученика.“

С друге стране, у савременом свету и времену у коме живимо, када се привредни и политички статус неке државе мери нивоом владавине информацијама, када информатизација укупне делатности једнога друштва постаје приоритет, јасно је да је приоритет увођење рачунара и рачунарских технологија и у сектор образовања.

Овај проблем почиње да заузима једно од најзначајнијих места у савременој дидактици, а посебно значајним, чини га то што је принципијелно нов. Појављује се у последњих двадесетак година, са појавом и масовном употребом персоналних рачунара, савремених оперативних система и савременог образовног софтвера.

„Технологија XXI века је довела до тога да образовање више не значи оно што је значило у прошлости. Модерна технологија се одлично уклапа у нову образовну парадигму – проналажење информација од значаја, где год је то могуће, међусобна размена информација, потврда информација са више извора ... Нова, дигитална технологија диктира не само будућност ученика, већ и нову парадигму њиховог образовања“, [72].

С обзиром на чињеницу да су математика и њене дисциплине најшира основа за развој информатике, јасно је да је настава математике оптималан простор за увођења рачунара.

Значај и место математике, као и њен утицај на друге науке и технологију, затим утицај на њихов развој, такође представљају значајну обавезу наставника, школе и друштва у целини, да перманентно раде на унапређењу наставе математике.

Непрекидан развој математике и могућности њене примене у свим областима науке и технологије, с једне, и рачунарске технологије и образовног софтвера, с друге стране, чини овај проблем увек **актуелним**.

Анализа наведеног проблема отвара један широки сет нових проблема и могућности њиховог решавања, од којих се у овом раду анализирају два, и то:

- усклађивање наставних садржаја са најновијим достигнућима у математици и науци уопште
- унапређивање методике наставе.

Први од наведених проблема подразумева адекватну методичку трансформацију одређених математичких садржаја, конкретно садржаја аналитичке геометрије, и усклађивање наставних садржаја са развојем математике, узрастом ученика и нивоом развоја материјалне основе наставе, утврђивање нивоа знања и рад на оспособљавању за ефикасну примену стечених знања.

Полазећи од најновијих сазнања дидактике и психологије учења, за решавање **другог** проблема неопходно је да се савремена настава математике, усмерава на **процес стицања, квалитет и могућност примене стечених знања**, а не на **усвајање готових чињеница и на њихову количину**, што се може постићи у дидактичком систему – **настава уз помоћ рачунара**, знатно успешније него у традиционалној настави.

На основу изложеног може се закључити, да проблем који је пред нама има: математичко – методички, дидактичко – методички и педагошко – истраживачки карактер, тј. изучава се на теоријском (математичком и дидактичко – методичком) и емпиријском нивоу.

Процес стицања знања и могућност примене знања, су основне идеје на којима се, у овом раду, заснива примена рачунара у настави математике.

Идеју о рачунару у настави, тј. идеју о рачунару, снабдевеном орговарајућим образовним софтвером, као окружењу за развијање и проверу математичких концепата, веома детаљно је елаборирао D.Tall у радовима [92 - 103]. Он уводи појам **генеричког организатора**, као „окружења (микросвета), који омогућава ученику да манипулише примерима, и (ако је могуће) контра-примерима одређених математичких концепата, или повезаног система концепата“. На тај начин се стварају услови за изучавање појава, кроз њихову генезу и интеракцију са другим појавама.

У изради ове докторске дисертације, пошло се управо од ове идеје, која представља основу наставе усмерене на **процес стицања знања и могућност примене знања.**

Сагласно наведеним запажањима, истакнути проблем дефинише **предмет** ове докторске дисертације, који се може означити као:

- методичка трансформација научних у наставне садржаје аналитичке геометрије, (предвиђених за редовну и додатну наставу у трећем разреду гимназије, и израду матурских радова) у дидактичком систему – настава уз помоћ рачунара;
- приказ дидактичког система – настава уз помоћ рачунара, са нагласком на наставне методе, дидактичке принципе и образовни софтвер (генеричке организаторе) као наставно средство у овом дидактичком систему;
- експериментално истраживање о могућности примене рачунара у настави аналитичке геометрије, у трећем разреду гимназије природно-математичког смера, о утицају који настава уз помоћ рачунара има на

стицање знања и примену у свакодневном животу и пракси, тј. на укупан образовни учинак и подизање нивоа ефикасности наставе.

1.2. Циљеви и задаци докторске дисертације

Основни циљ докторске дисертације је да допринесе унапређењу теорије и праксе методике наставе математике (аналитичке геометрије) у гимнауији природно-математичког смера уз могућност адекватног избора, артикулације и трансформације наставних садржаја и њихове дидактичке обраде у оквиру наставног система настава уз помоћ рачунара, чиме се настава математике усмерава на процес стицања знања и могућност примене знања.

У складу са уоченим проблемом и дефинисаним предметом, **основни циљ докторске дисертације** прецизираћемо на следећи начин:

1. да се методичка трансформација научних у наставне садржаје аналитичке геометрије, реализује у процесу наставе уз помоћ рачунара, адекватним избором садржаја, израдом одговарајућих генеричких организатора уз коришћење образовног софтвера Mathematica и GeoGebra;
2. да се теоријски обради дидактички систем настава уз помоћ рачунара, анализом међусобне зависности фактора наставе, анализом дидактичких принципа, класификацијом и приказом наставних метода уз подесно формиране генеричке организаторе коришћењем наведеног образовног софтвера;
3. да се утврди да ли постоје педагошко – дидактички предуслови за примену рачунара у настави математике у гимназији, чиме би се повећао образовни учинак и ученици оспособили за самостално учење и стицање знања, као и примену стечених знања.

Методичка трансформација садржаја аналитичке геометрије, биће остварена израдом интерактивног уџбеника, који представља саставни део дисертације.

У складу са дефинисаним циљем истраживања постављене су и следеће **полазне хипотезе**:

- настава уз помоћ рачунара утиче на значајно повећање укупног образовног учинка у настави математике у гимназији
- знања стечена у процесу наставе уз помоћ рачунара имају карактер веће стабилности и трајности, од знања стечених на класичан начин, у традиционалном наставом процесу

– настава уз помоћ рачунара, утиче на већу практичну примењивост стечених знања и доприноси бржем стицању нових знања

– настава уз помоћ рачунара повећава активност и упућују ученике на самосталан рад, више него традиционална настава.

Да би се постигао постављени циљ и потврдиле хипотезе истраживања, потребно је реализовати следеће **задатке**:

1. Дати приказ реализације наставних садржаја аналитичке геометрије:

   а) предвиђених актуелним наставним програмом,

   б) предвиђених програмом додатне наставе,

   в) погодних за израду матурских радова,

   у оквиру дидактичког система – настава уз помоћ рачунара, израдом интерактивног уџбеника, снабдевеног одговарајућим генеричким организаторима, уз коришћење образовног софтвера Mathematica и GeoGebra;

2. Теоријски обрадити:

   а) место и улогу рачунара у настави,

   б) дидактички систем – настава уз помоћ рачунара,

   в) дидактичке принципе наставе уз помоћ рачунара

   г) наставне методе наставе уз помоћ рачунара и дати адекватне примери за илустрацију,

   д) израдити адекватне примере генеричких организатора, уз коришћење образовног софтвера Mathematica и GeoGebra;

3. Утврдити разлике у погледу:

   а) квалитета и количине знања ученика,

   б) оспособљености за решавање проблемских задатака,

   в) трајности знања,

   стечених у настави уз помоћ рачунара и у традиционалној настави, на основу резултата постигнутих на тестовима знања из наставног подручја – аналитичка геометрија.

1.3. Организација докторске дисертације

Карактер проблема, предмет и циљ, одређују садржај и структуру докторске дисертације.

Уводни део садржи тему и садржај рада, историјски преглед и предмет аналитичке геометрије, као и ознаке које ће бити коришћене.

Други део садржи компаративну анализу заступљености садржаја из аналитичке геометрије у средњошколским наставним програмима неких земаља.

У **трећем делу** теоријски је обрађен нови дидактички систем – настава уз помоћ рачунара. Анализиран је међусобни однос и улоге сваког од фактора наставе. Анализирани су дидактички принципи са посебним нагласком на **принцип индивидуализације** и **принцип визуализације**, који у овом дидактичком систему добијају пуну афирмацију. Анализиране су наставне методе: објашњавачко-приказивачка, репродуктивна, проблемска и истраживачка, и илустроване су одговарајучим примерима и генеричким организаторима.

Четврти део је методичка трансформација неких садржаја аналитичке геометрије, који су предвиђени за редовну и додатну наставу у трећем разреду гимназије, као и израду матурских радова, у процесу наставе путем рачунара. Формирани су генерички организатори за: множење вектора скаларом, координатни систем у равни, поделу дужи, разне облике једначине праве, прамен правих, конструкције кривих другог реда, односе праве и криве, тангенту (као гранични случај сечице) криве, општу теорију кривих другог реда. Све апликације су урађене коришћењем образовног софтвера Mathematica и GeoGebra.

Упоредо је написан **интерактивни уџбеник** аналитичке геометрије, који је снабдевен CD-ом, са одговарајућим апликацијама и прилагођен је настави уз помоћ рачунара. Свака апликација представља генерички организатор за одређени објекат, или неки однос. При томе, уџбеник и CD покривају градиво аналитичке геометрије.

У **петом делу** приказано је педагошко истраживање, обављено је у две школе: Гимназији „Јован Јовановић – Змај“ у Новом Саду и Гимназији „Никола Тесла“ у Апатину, почевши од дефинисања проблема, постављања циљева, задатака и хипотезе истраживања, преко описа организације и тока експеримента, до статистичке обраде и анализе резултата. У свакој од школа формиране су, експериментална и контролна група и анализиран је **утицај независне варијабле** – настава уз помоћ рачунара, на **зависну варијаблу** – образовни учинак, што је заједничко име за: квалитет и количину знања, оспособљеност за самостално решавање проблемских задатака, трајност знања.

Шести део представља закључна разматрања.

Приликом израде ове докторске дисертације и спровођења наведеног педагошког истраживања, током протекле четири године, уз литературу наведену у **седмом делу**, коришћени су многи чланци и публикације, од који се значајан број налази на наведеним интернет адресама.

За идентификовање проблема и дефинисање предмета и циља посебан значај имају следеће референце: [1], [7], [18], [30], [31], [32], [33], [34] [35], [47], [49], [57], [55], [62], [63], [83], [109] , [112].

Трећи део је обрађен уз коришћење следеће литературе: [1], [2], [4], [8], [18], [27], [30], [31], [32], [33], [34] , [37], [38], [40], [41], [45], [47], [51], [65], [80], [83], [85], [92], [93-104], [109], [110], [112].

Приликом израде методичке трансформације, интерактивног уџбеника и израде одговарајућиих генеричких организатора посебно су консултоване следеће референце: [3], [11], [13], [17], [26], [29], [35], [36], [43], [53], [59], [60], [81], [110], [111].

За реализацију педагошког истраживања и статистичку обраду резултата коришћене су следеће референце: [5], [20], [39], [43], [50], [59], [61], [79], [107], [120], [121], [122], [123], [124], [126], [127], [128], [129] [130], [131], [133],

1.4. Историјски преглед развоја аналитичке геометрије

Идеја координата и једначине кривих, биле су познате још античким Грцима. Архимед[1], а нарочито Аполоније[2], у својим делима (видети [87]), сводили су конусне пресеке на такозване *симптоме*, који се у неким случајевима не разликују од садшњих једначина. Међутим, низак ниво грчке алгебре и слаб интерес за изучавање кривих, различитих од праве или кружнице, имају далекосежне негативне последице. Наиме, на плану изучавања кривих, другог и вишег реда, посредством једначина, вековима није учињен никакав помак.

У Европи, први који је користио координиратно представљање (за неку функцију у зависности од времена), Никола Орезмо[3], по аналогији са географима, координате је називао – дужина и ширина. Концепт координата, развијен до тада користио се у астрономији и географији.

Одлучујући корак је начињен тек пошто је Вијет[4], изградио симболички језик за писање једначина и установио, за то време, модерну алгебарску нотацију.

Заснивајући свој рад, управо на Вијетовој нотацији, Ферма[5] и Декарт[6], два водећа француска математичара XVII века, истовремено, независно један од

---

[1] **Архимед** (грч. Ἀρχιμήδης; 287 – 212. п.н.е.) старогрчки математичар, физичар и инжењер из Сиракузе

[2] **Аполоније** из Пергама (грч. Ἀπολλώνιος ὁ Περγαῖος; 256 – 170. п.н.е.) велики старогрчки математичар, најзначајнији представник Александријске школе

[3] **Никола Орезмо** (фр. *Nicolas Oresme, Nicholas Oresme, Nicole Oresme*; 1330 – 1382.) католички бискуп, један од најпознатијих француских философа и и научника у XIV веку

[4] **Франсоа Виет** (фр. *François Viète*; 1540 – 1603.) – истакнути француски математичар, један од утемељивача алгебре, правник по образовању и по основној професији

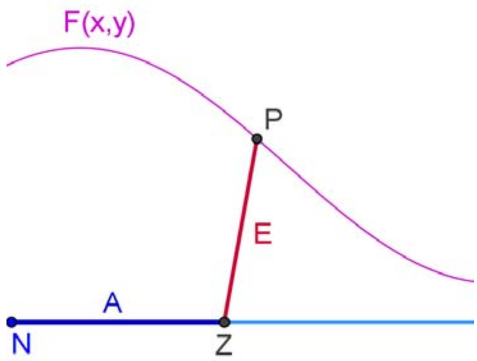
[5] **Пјер де Ферма** (фр. *Pierre de Fermat*; 1601 – 1665.) био је француски математичар и правник у тулуском парламенту

[6] **Рене Декарт** (лат. *Renatus des Cartes*, фр. *René Descartes*; 31. марта 1596 – 11. фебруара 1650.) истакнути француски математичар, филозоф и научник

другог, уводе нови, координатни, метод и постављају основе аналитичке геометрије.

Око 1637. године Ферма шаље Мерсену[7] рукопис „Увод у изучавање равних и физичких места (фигура)“, где приказује једначине различитих кривих другог реда у правоуглим координатама, користећи Вијетову нотацију. Да би поједноста-вио облик једначина, Ферма у значајној мери користи трансформације координата, и показује како је нови приступ једноставнији и плоднији него онај, чисто геометријски. Међутим, Фермаов рукопис, у време када је настао, није добио неки значајнији публицитет, него тек након неколико деценија, 1679. године, када је штампан, у оквиру књиге „Varia Opera Mathematica“.

Ферма формулише принцип аналитичке геометрије на следећи начин: „Сваки пут када се у коначном облику једначине, појаве две непознате величине – дужи, постоји геометријско место – фигура, а крај једне од њих (непознатих величина – дужи) описује праву или криву линију ... За формирање једначине погодно је да две непознате величине образују неки дати угао (најчешће прав) и да се зада положај и крај једне од величина“, (видети [19] и [25]).



Слика 1.

Фермаов метод се заснива на обострано једнозначној кореспонденцији између тачака равни и парова бројева, као и кореспонденцији између кривих и њихових једначина, (видети [23]). У својим истраживањима, полазио је од радова научника старе александријске школе, а посебно Аполонија, са настојањем да их прикаже алгебарским језиком Вијета. Положај тачке P на кривој (1.4.1.ggb), одређен је дужином дужи A, која је измерена, од почетне тачке N до неке тачке Z, на некој правој узетој за основу, и дужином дужи E од тачке Z до тачке P. Крајња тачка P описује наведену криву.

На овај начин, у зависности од променљивих величина A и E, Ферма изводи једначине: праве, кружнице, елипсе, хиперболе, параболе. Установио је да једначине првог степена представљају праве, а једначине другог степена – конусне пресеке.

[7] **Марин Мерсен** (фр. *Marin Mersennus* or *le Père Mersenne*; 1588 – 1648.) француски теолог и математичар

VARIA OPERA
MATHEMATICA
D PETRI DE FERMAT,
SENATORIS TOLOSANI.

Accesserunt selectæ quædam ejusdem Epistolæ, vel ad ipsum à plerisque doctissimis viris Gallice, Latinè, vel Italicè, de rebus ad Mathematicas disciplinas, aut Physicam pertinentibus scriptæ.

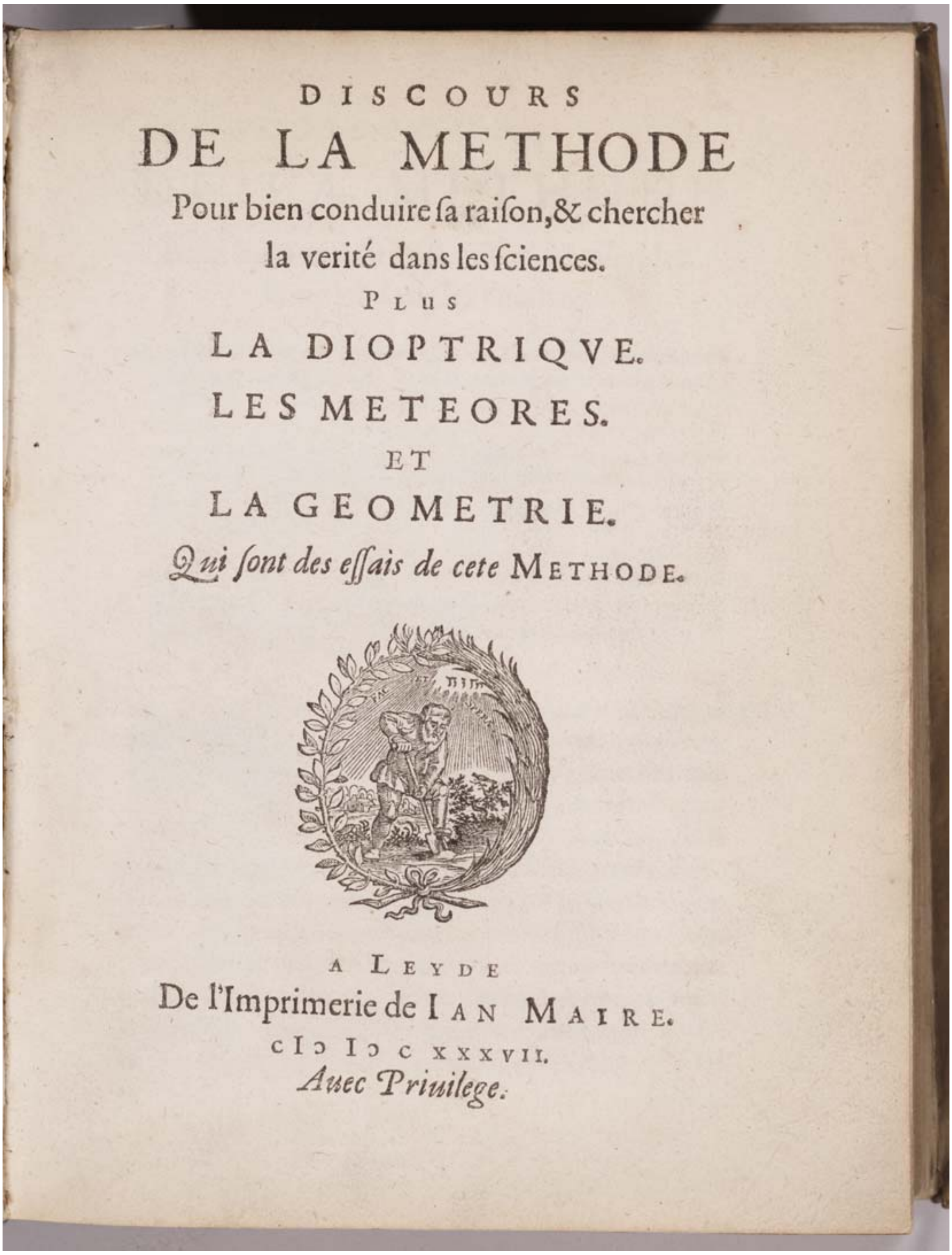
TOLOSÆ,
Apud JOANNEM PECH, Comitiorum Fuxensium Typographum, juxta Collegium PP. Societatis JESU.

Насловна страна Фермаових сабраних дела из 1679. године

Своје ремек-дело „Расправа о методи“, чији је пуни наслов „Расправа о методи, која омогућује управљање својим разумом и откривање истине у наукама. Плус Диоптрика, Метеори и Геометрија, који су прилози Методе“, Рене Декарт публикује 8. јуна 1637. године.

У „Расправи о методи“, Декарт је формулисао „главна правила методе“, а то су:

а) не прихватати као истинито нешто, што претходно није прихваћено као несумњиво истинито, тј. одлучно избегавати ужурбаност и предрасуде, и у своја расуђивања укључивати само оно што је у твојој свести толико јасно и очигледно, да ни на који начин не може дати повод за сумњу,



DISCOURS
DE LA METHODE
Pour bien conduire ſa raiſon,& chercher
la verité dans les ſciences.
PLUS
LA DIOPTRIQVE.
LES METEORES.
ET
LA GEOMETRIE.
Qui ſont des eſſais de cete METHODE.

A LEYDE
De l'Imprimerie de IAN MAIRE.
CIↃ IↃ C XXXVII.
Auec Priuilege.

Насловна страна књиге „Расправа о методи“

б) рашчланити сваки проблем на онолико делова колико је потребно да би се могао лакше решити,

в) управљати током својих мисли, полазећи од најпростијих и лако разумљивих појмова, и напредујући корак по корак, као по степеницама, до сазнавања најсложенијих, допуштајући постојање поретка чак и међу оним појмовима, који у природном поретку не претходе један другоме, г) формирати увек толико употпуњене листе података и тако опширна истраживања, да се може бити уверен да ништа није пропуштено, (видети [28]).

Декартова „Геометрија“, објављена је дакле, први пут 1637. године, као додатак књизи „Расправа о методи“, потпуно независано од Фермаовог рукописа. „Геометрија“, у којој су још потпуније развијене исте идеје, остварила је у свету математике, далеко већи утицај, него Фермаов „Увод...“.

Декарт укључује у геометрију шире класе кривих, међу њима и „механичке“ (трансцендентне, типа спирале), и изводи закључак да је **свака крива дефинисана једначином**. Он формира једначине алгебарских кривих, и на основу тога врши њихову класификацију (непотпуну, а касније значајно измењену). Међутим, иако је ова Декартова класификација погрешна и нема неког значаја, битно је да се нагласи да је он први уочио да је класификација кривих у директној вези са редом одговарајућих једначина.

Декарт наглашава, иако не доказује, да основне карактеристике криве не зависе од избора координата, (видети [19] и [25]).

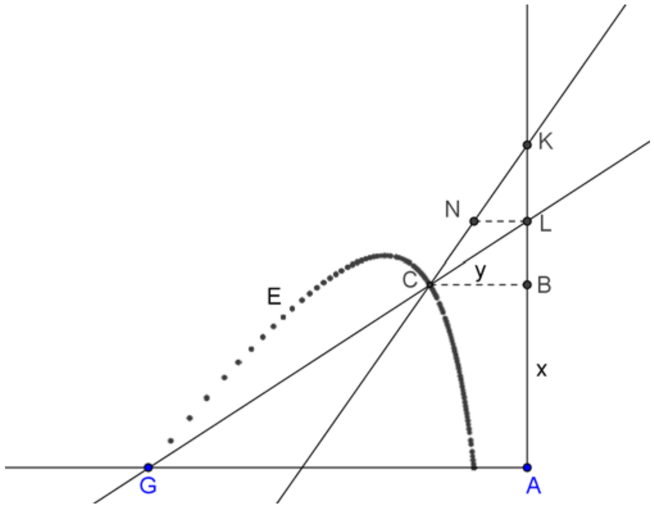
Систем координата у Декартовој „Геометрији“, био је „обрнут“ у односу на савремени (ординатна оса је хоризонтална), а такође нису узете у обзир ни негативне координате. Термини „апсциса“ и „ординирата“, повремено су се могли срести код појединих аутора. Међутим, у широку употребу ушли су тек крајем XVII века, заједно са термином „координате“. Назив „Аналитичка геометрија“ усталио се тек крајем XVIII века.

У своју „Геометрију“, Декарт укључује бројне примере који илуструју огромне могућности нове методе, а добија многе резултате непознате математичарима ранијих епоха. Могуће примене у простору, он помиње, али их не користи.

У Другој књизи „Геометрије“ под насловом - **О природи кривих линија**, Декарт приказује „Начин за класификацију свих кривих линија на одређене типове и увиђање односа између свих њихових тачака и тачака правих“.

За илустрацију навденог „Начина ...“, Декарт изводи једначину „линије CE, коју описује тачка пресека „лењира“ GL и „неодређено“ продужене стране CNK равне праволинијске фигуре NKL, чија се страна KL креће дуж дате праве BA, уз обавезу да обртањем око тачке G, лењир пролази кроз тачку L“. (Другим речима: ради се о једначини геометријског места тачака C, пресека правих $p(G,L)$ и $p(N,K)$, при чему се катета $KL=b$, правоуглог троугла ΔKLN, где је $NL=c$, креће по нормали $n(A)$ у тачки A, на праву $p(A,G)$, где је $AG=a$.)

Узимајући $n(A)$ за осу x и тачку A за почетак, Декарт означава „неодређене и непознате величине“ $CB=y$, $BA=x$ (Слика 2.), где је B подножје нормале из тачке C на $n(A)$, (1.4.2.ggb) .



Слика 2.

Тада, за $BL = p$, на основу сличности троуглова: $\Delta CBK \sim \Delta NLK$, односно $\Delta CBL \sim \Delta GAL$, важе следеће једнакости

$$(b+p):b = y:c \text{ и } (x+p):p = a:y,$$

а после елиминације p, добија се „једанчина линије CE"

$$yy \propto cy - \frac{c}{b}xy + ay - ac,$$

у облику у коме је добио Декарт. Као што се види из последње једначине, Декарт у својим радовима користи симбол $\propto$ за једнакост, а xx за степен x^2.

Јасно је да у „савременом Декартовом координатном систему", једначина овог геометријског места тачака гласи

$$bx^2 - cxy + (a+c)bx + abc = 0.$$

Ако се у наведеном примеру права $p(N,K)$, замени неком кривом линијом, које Декарт назива „криве првог рода" (на пример: параболом - 1.4.3.ggb, елипсом или кружницом - 1.4.4.ggb, хиперболом - 1.4.5.ggb), добијају се неке друге криве линије, које Декарт назива "криве другог рода".

До појаве Декартове „Геометрије", знало се само за један начин образовања конусних пресека, искључиво на просторним геометријским фигурама, тј. на кружној конусној површи. Али геометрија овог великог реформатора, била је услов да се у теорији конусних пресека, такође и у свим другим гранама математике, направи одлучан заокрет: она омогућава да се конусни пресеци формирају директно у равни, не користећи се при томе посматрањем конусне површи. Декарту је било довољно да закључи, да се у његовом систему координата, конусни пресеци представљају општом квадратном једначином са две променљиве. Такво аналитичко представљање доводи до каснијег откривања и изучавања њихових многобројних својстава.

За многе Декартове савременике, разумевање „Геометије“ било је веома тешко. Због тога, непосредно по њеном објављивању, Декарт дистрибуира рукопис, који у својим писмима назива „Увод“, а нама је познат под именом „Израчунавање господина Декарта“, (видети [19] и [25]). На основу наведеног у [19], „рукопис садржи кратак увод у алгебарски алгоритам Декарта, обрађен је један број алгебарско – геометријских задатака о троуглу и уведена су нека геометријска места тачака, методом координата“.

Декартов аналитички метод, убрзо по објављивању, почели су да користе, дајући му своје прилоге, многи угледни математичари тога времена, а међу њима Скоутен[8], де Бон[9] и Валис[10]. Подробнији алгебарски увод у „Геометрију“, дали су: Скоутен, у свом раду „Основи универзалне математике Франса Скоутена итд.“ и де Бон, у раду „Кратке напомене“. Анализирајући „Геометрију“, они исправљају неке њене недостатке, и користе нови метод за решавање многих других проблема (видети [19], [25]).

Ови радови су били прикључени каснијим издањима „Геометриј∊“ на латинском језику, као што је, на пример, издање из 1659. године.

Са својим напоменама де Бон, већ током 1639. године упознаје Декарта, који их је оценио као добронамерне. Анализирајући општу квадратну једначину, де Бон претпоставља да је угао између оса x и y, произвољан, (видети [19]).

У издању „Геометрије“ из 1659. године, у Скоутеновом раду се појављује једначина

$$y = a - x\,,$$

као једначина геометријског места тачака, затим основне једначине три типа конусних пресека

$$rx = yy \quad \text{и} \quad \frac{acqx \pm acxx}{bb} = yy\,.$$

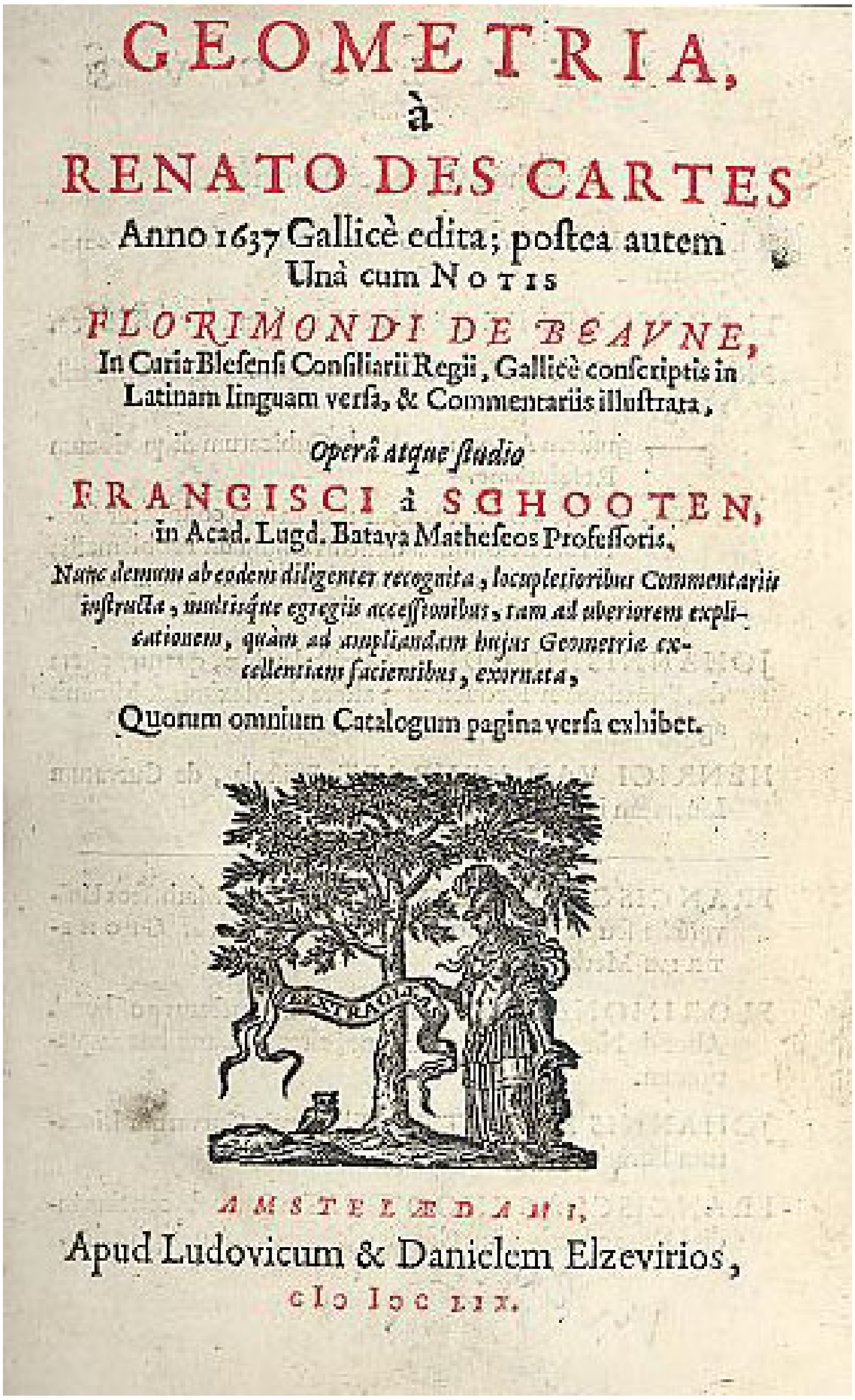
Такође, Декарт у назнакама даје могућност трансформације координата (без доказа), и у односу на њих, наглашава инваријантност кривих, Скоутен изводи формуле за ротацију координата, чиме практично и доказује Декартов став о инвариајнтности кривих, у односу на промену координатног система.

---

[8] **Франс ван Скоутен** (хол. *Frans van Schooten*; 1615 – 1660.), Холандски математичар, професор универзитета у Антверпену

[9] **Флоримонд де Бон** (фр. *Florimond de Beaune*; 1601 – 1652.), француски математичар

[10] **Џон Валис** (енгл. *John Wallis*; 1616 – 1703.), енглески математичар, један од претхо-дника математичке анализе



GEOMETRIA,
à
RENATO DES CARTES
Anno 1637 Gallicè edita; postea autem
Unà cum Notis
FLORIMONDI DE BEAUNE,
In Curia Blesensi Consiliarii Regii, Gallicè conscriptis in
Latinam linguam versa, & Commentariis illustrata,
Operâ atque studio
FRANCISCI à SCHOOTEN,
in Acad. Lugd. Batava Matheseos Professoris.
Nunc demum ab eodem diligenter recognita, locupletioribus Commentariis instructa, multisque egregiis accessionibus, tam ad uberiorem explicationem, quàm ad ampliandam hujus Geometriæ excellentiam facientibus, exornata,
Quorum omnium Catalogum pagina versa exhibet.

AMSTELÆDAMI,
Apud Ludovicum & Danielem Elzevirios,
CIↃ IↃC LIX.

Насловна страна Скоутеновог (латинског) издања Декартове „Геометрије“

У свом последњем делу „Трактат о спровођењу геометријских доказа помоћу алгебарског израчунавања“, у прилогу 2. латинског издања Декартове „Геометрије“, 1659. године, Скоутен жели да убеди оне који нису прихватили алгебарску интерпретацију геометрије, у њену супериорност над класичном геометријском методом, (видети [19]).

Такође, Џон Валис, у раду „Трактат о конусним пресецима изложеним на нови начин“ разматра конусне пресеке као криве у равни (1655), и при томе користи негативне вредности на апсциси, као и косе координате. И Валис, као и Скоутен даје предност методи координата, у односу на класични Еуклидов метод, (видети [19]).

Током 1659. године, у прилогу другог латинског издања Декартове "Геометрије", објављен је рад „Елементи кривих линија“, Јана де Вита[11], рад који неки истори-чари математике сматрају једном од најпотпунијих књига из аналитичке геометрије, до тада. Аутор овде уочава да једначина са промењљивима x и y, која садржи само чланове првог степена, представља праву. Он анализира једначине облика

$$y = \frac{bx}{a}, \quad y = \frac{bx}{a} \pm c, \quad y = -\frac{bx}{a} + c$$

и даје њихов графички приказ. Даље, разматра једначине

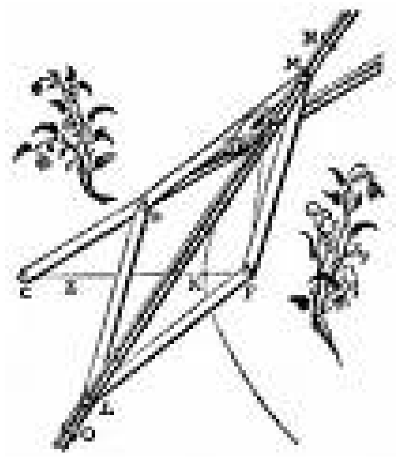
$$y^2 = ax, \quad y^2 = ax + b^2, \quad y^2 = -ax + b^2,$$

и доказује да свака представља параболу. Као основне облике једначине хиперболе он анализира једначине

$$xy = f^2, \quad \frac{ly^2}{g} = x^2 - f^2, \quad y^2 - f^2 = \frac{lx^2}{g}, \quad \frac{ly^2}{g} = f^2 - x^2,$$

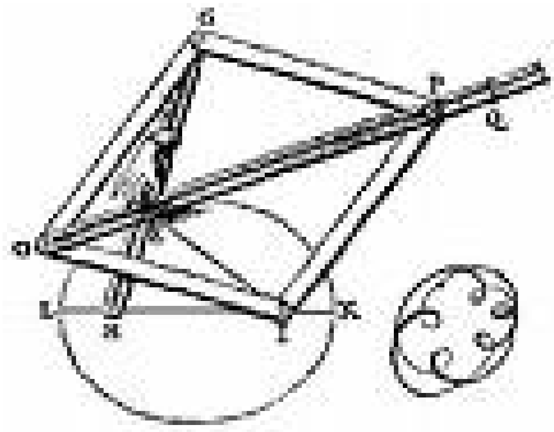
а аналогне једначине анализира у случају елипсе. Такође, де Вит је први, у савременом аналитичком облику, решио задатак о геометријском месту тачака, чији је збир (разлика) растојања од две утврђене тачке константан, (видети [16]).

Параболограф



Хиперболограф

[11] **Јан де Вит** (хол. *Johan de Witt*; 1625 – 1672.), холандски матеамтичар, правник и политичар



Елипсограф

Осим напред поменутих и многи други математичари, међу којима и Ф. де ла Хире[12], Лопитал[13], Стирлинг[14], Крамер[15] и т.д., током XVII и XVIII века, дали су значајан допринос развоју аналитичке геометрије.

Међутим, битно је да се нагласи, да појава и развој методе координата, тј. изградња аналитичке геометрије, није циљ сама себи, већ напротив, представља својеврстан услов, основу, средство, за даљи развој матеаматике, у првом реду за откриће и развој диференцијалног и интегралног рачуна, диференцијалне геометрије, аналитичке геометрије простора итд.

У прилог овоме становишту, говори каснији брзи развој математике, коме је свакако главни предуслов – појава и развој аналитичке геометрије.

У тексту који следи, осврнућемо се укратко, на онај део опуса великих математичара, Њутна[16] и Лајбница[17], који спада у домен аналитичке геометрије, или је са њом у директној вези.

Декартову концепцију о подели кривих линија на алгебарске и „механичке“ (трансцендентне) криве, које Декарт игнорише, ревидирао је Лајбниц, већ 1677. године, почевши примену диференцијалног рачуна првенствено на трансценде-нтним кривама. Од Лајбница потичу називи **трансцендентни** и **алгебарски**, којима придодаје и појам **интерсцендентности** (видети [19]), под којим подразомева израз облика $x^{\sqrt{2}}$, чији се график добија покретањем апликације (1.4.6.nb), у програму Mathematica. Сматра се да је Лајбниц увео у ширу употребу

[12] **Филип де Лахир** (фр. *Philippe de La Hire*, или *Lahire* 1640 – 1718.), француски математичар, физичар, астроном и сликар.

[13] **Лопитал** (фр. *Guillaume François Antoine de L'Hospital*, 1661 – 1704.), француски математичар.

[14] **Џемјс Стирлинг** (енгл. *James Stirling*, 1692 – 1770.), шкотски матеамтичар

[15] **Габријел Крамер** (фр. *Gabriel Cramer*; 1704 – 1752.) швајцарски математичар, аутор расправе „О алгебарским кривама“

[16] **Исак Њутн** (енг. *Sir Isaac Newton* 4.1.1643 – 31.3.1727.), енглески физичар, математичар, филозоф.

[17] **Готфрид Вилхелм Лајбниц**, (нем. *Gottfried Wilhelm Freiherr (baron) von Leibniz*; Лајпциг, 1. 7. 1646 – Хановер, 14. 11. 1716), немачки филозоф, математичар, правник, историчар, дипломата и политички саветник.

термине „апсциса“ и „ординирата“, иако су се један, или други, повремено могли срести код појединих аутора и пре њега.

У делу „Математички принципи филозофије природе“ (*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, у савременој формулацији „Математичке основе физике“) 1687. године, Њутн је највећи део теорије успео да изложи на класичан начин, без употребе координата и бесконачно малих величина. Ипак, један део садржаја дат је применом нових метода, тј. применом метода аналитичке геометрије и диференцијалног рачуна.

Много већу улогу игра аналитичка геометрија у Њутновом делу „Универзална аритметика“, из 1708. године. Њутн, на пример, не само да се ослањао на координатни метод у својим радовима из анализе, него је још и проширио Декартова геометријска истраживања. Извршио је класификацију кривих трећег реда, уочавајући 4 типа и 58 врста, а касније је додао још 14 врста. Ови резултати, добијени око 1668. године, објављени су под називом **„Enumeratio lineis tertii ordinis“** у оквиру „Оптике“, током 1704. године. Ова класификација је извршена управо на основу анализе одговарајуће једначине. ([19]).

Њутн је установио да се класификација кривих линија, може најбоље извршити на основу реда криве, при чему ред криве одговара степену њене једначине, а степен једанчине, једнак је могућем броју пресечних тачака криве и праве. Такође, теореме о конусним пресецима, уопштио је и на криве трећег реда. Тако је на пример, за криве трећег реда открио (видети [19]): да средине свих међусобно паралелних тетива припадају једној правој – дијаметру криве, који је коњугован сечицама, којима припадају поменуте тетиве, или ако је број асимптота криве, једнак степену одговарајуће једначине, онда се за сваку сечицу, било ког правца она била, средина тетиве, поклапа са средином дужи коју на њој одсецају асимптоте.

Затим, аналогно одговарајућим елементима конусних пресека, за криве трећег реда дефинише: темена криве, осе, које се добијају када су узајамно ортогонални дијаметри и коњуговане тетиве, центар, који постоји када се сви дијаметри секу у једној тачки, и т.д.

Такође, координатни систем Њутна, по ничему се не разликује од савременог.

Даље, слично као што је код непараболичких конусних пресека квадрат ординате у константном односу према правоугаонику над два одсечка диаметра отсечена ординатом, тако је и код непараболичких кривих трећег реда, константан однос паралелопипеда над трима ординатама, које одговарају некој тачки диаметра, према паралелопипеду над три одсечка диаметра.

Њутн је открио још неке, веома важне особине (наговестио их је у „Принципима ...“), које се такође односе на криве другог, односно трећег реда. Наиме, ако се конусни пресек централно пројектује на раван, онда је његова пројекција такође неки конусни пресек, и при томе се ред криве не мења. Конкретно, као што при централном пројектовању кружница може да генерише све конусне пресеке, тако и криве трећег реда дате општом једначином

$$yy = ax^3 + bx^2 + cx + d ,$$

могу да генеришу све једначине „другог типа", трећег реда (видети [19] и [23]). График ове криве може се добити покретањем апликације (1.4.6.nb), у програму Mathematica.

Ове, веома је важне особине кривих, које је Њутн, без доказа, саопштио у „Принципима ...", доказао је Клеро[18] 1731. године, а за његов рад „Студије о кривама двоструке кривине", приказан у Париској академији 1729. године, који такође говори о особинама кривих, сматра се да представља темељ за три геометријске дисциплине: аналитичку геометрију простора, диференцијалну геометрију и нацртну геометрију.

Стирлинг, 1717. године, у свом раду „Њутнове криве трећег реда", броју од 72 врсте, који је установио Њутн, додаје још 4 нове врсте кривих трећег реда. Такође, израчунава и број коефицијената једначине n-тог реда, једнак

$$\frac{n(n+3)}{2},$$

што је и број тачака, које одређују криву n-тог реда, (видети [19] и [23]).

Један од најплоднијих математичара свих времена, Леонард Ојлер[19], посветио је аналитичкој геометрији значајан део своје чувене књиге: „Увод у анализу бесконачних величина", коју је објавио 1748. године. У овом делу јасно и темељно је резимирао сва дотадашња достигнућа аналитичке геометрије, извршио је класификацију кривих линија и површи, изложио на оригиналан начин теорију о кривини криве и утврдио формулу за одређивање радијуса кривине.

Ојлер је увео поларне координате у савременом облику и доказао да се приликом пројекције на раван, најкраћа линија која припада закривљеној површи и спаја две њене тачке, пресликава на дуж. У ову књигу је укључио о део посвећен трансцендентним кривама и ту је посебно обрадио криве: тригонометријске, експоненцијалне, логатитамске, циклоиду, епициклоиду, хипоциклоиду, спиралу и линију

$$x^y = y^x .$$

График ове криве може се добити покретањем апликације (1.4.6.nb), у програму

[18] **Алексис Клод Клеро** (фр. *Alexis Claude Clairaut*, 1713 – 1765.) француски математичар

[19] **Леонард Ојлер** (нем. *Leonhard Paul Euler*, 15. април 1707 – 18. септембар 1783.) велики швајцарски математичар. Живео је и радио у Берлину и Санкт Петербургу

Mathematica

Иначе, многе теореме, као и многи појмови и објекти у математици, у своме имену садрже придев Ојлеров(а), што свакако указује на једно обимно дело овог великог математичара, (видети [19] и [23]).

Важно је напоменути, да већ почетком XIX века, садржаји аналитичке геометрије добијају савремену форму, као и да термин **аналитичка геометрија** има данашњи смисао. С тим у вези, у тексту који следи, наведени су неки садржаји аналитичке геометрије, обрађени у делима знаменитих математичара тога времена, (видети [14], [19], [118]).

Основне задатке о правој, први је, систематски и у савременом облику, изложио Лакру[20], у књизи „Курс математике“ из 1799. године, где је методички изложио и особине кружнице, увео поларне и темене једначине конусних пресека. Аналитичка геометрија, као наслов, на насловној страни књиге, први пут се појављује 1801. године у Гарнијеовој[21] књизи „Основи аналитичке геометрије“.

У делу „Трактат о аналитичким кривама и површима другог степена“, из 1802. године, Био[22] даје једначине тангенти за канонске једначине свих видова конусних пресека, налази везу за коефицијенте праваца коњугованих дијаметара конусних пресека, у облику

$$\mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{tg}\alpha' = -\frac{b^2}{a^2}.$$

Такође, налази формулу

$$\mathrm{tg}2\alpha = \frac{2B}{A-C},$$

за одређивање главне осе конусног пресека, датог једначином

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Монж[23], 1809. гогине, уводи општу формулу за површину троугла преко координата његових темена.

Гаус[24], 1810. године, даје формулу за одређивање површине многоугла у правоуглим координатама.

[20] **Лакру** (фр. Lacroix*, Silvestre Francois*, 1765 – 1843.), француски математичар

[21] **Жан-Гијом Гарније** (фр. *Garnier, Jean Guillaume*, 1766 – 1840.), француски математи-чар, професор анализе на Политехничкој школи у Паризу

[22] **Жан-Батист Био** (фр. *Jean-Baptiste Biot*, 1774 – 1864.), француски физичар, астроном и математичар

[23] **Гаспар Монж** (фр. *Gaspard Monge*, 1746 – 1818.), француски математичар, геометар

[24] **Карл Фридрих Гаус** (нем. *Johann Carl Friedrich Gauß*, 1777 – 1855.) немачки математичар и научник који је дао значајан допринос у многим пољима науке

Ламе[25], 1818. године у књизи „Истраживања“ приказује **сегментни облик** једначине равни, даје услов да три праве буду конкурентне, уводи канонске

једначине конусних пресека и врши анализу прамена конусних пресека.

Креле[26], у књизи „Збирка математичких есеја и коментара“ из 1821. године уводи, између осталог, **сегментни облик** једначине праве.

Белгијанац Данделен[27], 1822. године доказује важну теорему, да „лопте уписане у конусну површ, пресечену једном равни, додирују ту раван у фокусима конусног пресека“. Један могући приказ оев теореме може се добити покретањем апликација (1.4.7.ggb), (1.4.8.ggb) и (1.4.9.ggb), у програму GeoGebra.

Магнус[28], 1833. године, проширује поменуту Гаусову формулу, на косоугле координате.

У књизи „Предавања о примени инфинитезималног рачуна у геометрији“, из 1826. године, Коши[29] параметарску једначину праве и једначину равни у нормалном облику.

Кели[30], 1843. године, исту формулу приказује у облику детерминанте.

У претходном излагању, наведени су само неки математичари, чији је рад допринео развоју аналитичке геометрије и њеној примени. О њиховим, као и резултатима многих других математичара, који овом приликом нису поменути, видети у [14], [19], [23], [25], [28], [118], [153].

1.5. Предмет и метод аналитичке геометрије

Познато је, да је уз помоћ координатног система установљен обострано-једно-значни однос (бијекција) међу геометријским објектима – тачкама и алгебарским објектима – бројевима. Прецизније, у одељку 3.1.3.2. биће доказано да, у односу на Декартов правоугли координатни систем, свакој тачки у равни, одговара тачно један уређени пар реалних бројева и обрнуто, сваком уређеном пару реалних бројева, одговара тачно једна тачка у равни.

Успостављени однос омогућује, да се изучавање геометријских односа међу тачкама своди на изучавање алгебарских односа међу њиховим координатама, што у већини случајева упрошћава решавање геометријских проблема.

[25] **Габријел Ламе** (фр. *Père de Gabriel Léon Jean Baptiste L*amé, 1795 – 1870.), француски математичар

[26] **Аугуст Леополд Креле** (нем. *August Leopold Crelle*, 1780 – 1855.), немачки математичар и инжењер

[27] **Данделен** (фр. *Dandelin Germinal Pierre*, 1794 – 1887.), белгијски математичар

[28] **Магнус** (нем. *Magnus, Ludwig Immanuel*, 1790 – 1861.), немачки математичар

[29] **Огистен Луј Коши** (фр. *Augustin Louis Cauchy*, 1789 – 1857.) истакнути француски математичар, професор универзитета у Паризу

[30] **Артур Кејли** (енгл. *Arthur Cayley*; 1821 – 1895.) енглески математичар

У следећој етапи успоставља се обострано-једнозначни однос између скупова тачака у равни и једначина са две променљиве. И ова бијекција дозвољава да се изучавање својстава геометријских фигура у равни сведе на изучавање аналитичких својстава одговарајућих једначина. Иначе, у аналитичкој геометрији користимо и термин геометријско место тачака и под тим именом подразумевамо скуп тачака (геометријску фигуру) које поседују неко заједничко својство. Аналогно се поступа и у аналитичкој геометрији простора: формира се координатни систем и успоставља се обострано једнозначни однос између скупа тачака простора и скупа уређених тројки реалних бројева – координата, као и између скупова тачака у простору и једначина са три променљиве.

1.5.1. Предмет аналитичке геометрије

Предмет аналитичке геометрије јесу **алгебарске линије првог реда** (праве), или алгебарске линије другог реда, које чешће називамо **криве другог реда**.

Алгебарске линије вишег реда су предмет изучавања посебне математичке дисциплине – **алгебарске геометрије**, а трансцедентне линије се углавном изучавају у **математичкој анализи**.

Приликом изучавања алгебарских линија, често се јавља потреба за трансформи-сањем Декартовог координатног система. Начелно говорећи, у различитим Декартовим координатним системима, једначине једне исте линије се разликују. Међутим, може се доказати, (видети на пример [11], [26], [53], [83]) да класификација алгебарских линија, на основу реда алгебарске линије, као и класификација свих уопште линија, на алгебарске и трансцедентне, не зависи од избора Декартовог координатног система. Ово питање регулише следећа теорема, коју наводимо без доказа.

Теорема 1. При трансформцији Декартових координата, ред алгебарске криве се не мења. ■

1.5.2. Метод аналитичке геометрије

Успостављање наведене бијекције и замена геометријских фигура одговарајућим формулама, јесте централна идеја на којој је заснована аналитичка геометрија.

Наведена разматрања, илустроваћемо следећим примерима.

Пример 1. Нека је дата једначина

$$y = f(x),$$

где је f непрекидна, реална функција једне реалне променљиве дефинисана на интервалу $[a,b]$. Пошто свакој вредности променљиве $x \in [a,b]$, одговара тачно једна вредност $y \in \mathbb{R}$, онда сваком, тако одређеном уређеном пару $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, одговара нека тачка P у равни. Ако x узима све вредности из $[a,b]$, онда тачка P описује неку геометријску фигуру (линију) l у равни. Очигледно је да ће права, која садржи неку тачку $T(x,0)$, $x \in [a,b]$, а паралелна је са осом Oy, сећи линију l у само једној тачки.

Пример 2. Нека је дата једначина две реалне променљиве

$$F(x,y) = 0,$$

при чему $x \in [a,b]$. Претпоставомо да за свако фиксно $x \in [a,b]$ дата једначина има једно или више решења у скупу $\mathbb{R}$. Означомо та решења са $y_1, y_2, \ldots, y_n$, $n \geq 1$. Значи за свако фиксно $x \in [a,b]$, постоји један или више уређених парова $(x,y_1),(x,y_2),\ldots,(x,y_n)$, којима одговарају једна или више тачака из скупа $\{P_1,P_2,\ldots,P_n\}$ у равни. Ако x узима све вредности из $[a,b]$, онда наведене тачке описују неку геометријску фигуру – линију l у равни. Такође, права, која садржи неку тачку из$[a,b]$, а паралелна је са осом Oy, сече линију l у једној или више тачака.

Претходна два примера показују да се свака од наведене две једначине може тумачити, помоћу појма координата, као линија у равни, тј. као скуп тачака у равни који задовољава следеће услове:

1. координате произвољне тачке линије (скупа тачака), задовољавају дату једначину,
2. свака тачка равни, чије координате задовољавају дату једначину, припада линији (скупу тачака).

Такође, пошто геометријско место тачака представља скуп тачака (геометријску фигуру) које поседују неко **заједничко својство**, а свакој тачки тог скупа придру-жујемо уређени пар реалних бројева (x,y), њене координате, тада **заједничко својство** обезбеђује могућност повезивања бројева x и y неком једначином, например

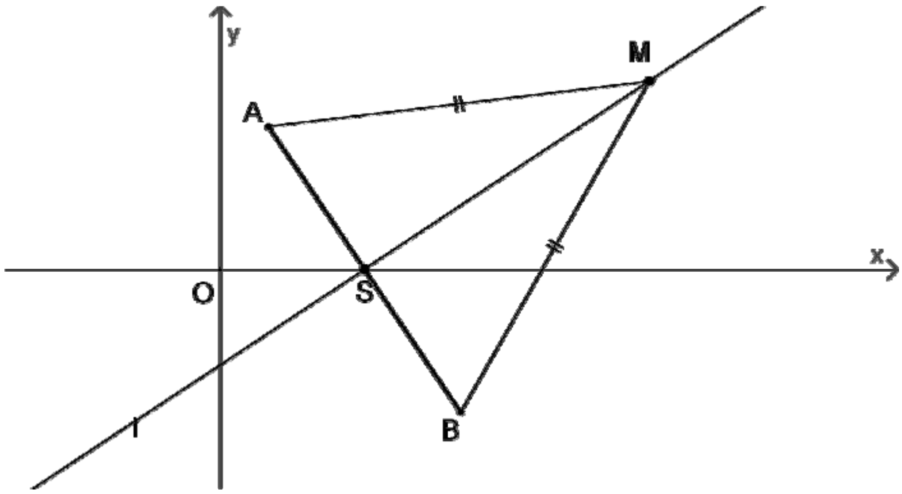
$$F(x,y) = 0,$$

где је $F(x,y)$, реална функција две реалне променљиве.

Пример 3. Саставићемо једначину геометријског места тачака (линије) l у равни, чија су растојања од тачака $A(1,3)$ и $B(5,-3)$, једнака.

У ту сврху посматрамо тачке $M(x,y)$, такве да важи $d(M,A)=d(M,B)$. Ове тачке сачињавају геометријско место тачака (1.5.1.ggb)

$$l=\{M : d(M,A)=d(M,B)\}.$$



Слика 3.

Из једнакости растојања $d(M,A)=d(M,B)$ следи

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-3)^2}=\sqrt{(x-5)^2+(y+3)^2}.$$

После сређивања добијамо једначину

$$(1) \qquad 2x-3y-6=0.$$

Значи, ако тачка $M(x,y)$ припада линији l, онда њене координате задовољавају једначину $2x-3y-6=0$, тј.

$$M(x,y)\in l \;\Rightarrow\; l: 2x-3y-6=0.$$

Сада ћемо доказати да само координате тачака линије l задовољавају једначину (1), тј. да ако тачка не припада линији l, онда њене координате не задовољавају једначину (1). Ово је еквивалентно са импликацијом: ако координате x и y тачке M задовољавају једначину (1), онда тачка $M(x,y)$ припада линији l, или записано математичким језиком

$$l: 2x-3y-6=0 \;\Rightarrow\; M(x,y)\in l.$$

Значи, ако координате x и y тачке M задовољавају једначину $2x-3y-6=0$, онда је $M(x,y)=M\left(x,\frac{2}{3}x-2\right)$ и тада важи

$$d(M,A)=\sqrt{(x-1)^2+\left(\frac{2}{3}x-2-3\right)^2}=\sqrt{\frac{13}{9}x^2-\frac{26}{3}x+26}=\sqrt{(x-5)^2+\left(\frac{2}{3}x-2+3\right)^2}=d(M,B),$$

што значи да тачка M припада линији l. Очигледно је да линија l представља симетралу дужи $[AB]$.

Ако је $F(x,y)$ реална функција две реалне променљиве x и y, онда једначина

(2) $$F(x,y)=0$$

дефинише геометријско место тачака (линију) $\mathcal{F}$ у равни, које сачињавају тачке $M=M(x,y)$, чије координате задовољавају једначину (2), тј.

$$\mathcal{F}=\{M \mid M=M(x,y)\wedge F(x,y)=0\}.$$

Из напред наведених разматрања, може се закључити да се **метод аналитичке геометрије** заснива на следеће две чињенице:

1. Придруживање координата (уређеног пара реалних бројева (x,y)) свакој тачки датог геометријског места тачака $\mathcal{F}$, у одређеном координатном систему, омогућује да се на основу заједничког својства тачака из $\mathcal{F}$, њихове координате x и y повежу једначином

   (3) $$F(x,y)=0,$$

   где је $F(x,y)$, реална функција две реалне променљиве. Једначину (3) називамо геометријског места тачака $\mathcal{F}$, тако да важи релација

   $$M=M(x,y)\in\mathcal{F} \;\Leftrightarrow\; F(x,y)=0;$$

2. Испитујући једначину (3) и дајући геометријску интерпретацију њеним особинама, испитују се особине геометријског места тачака $\mathcal{F}$ и црта се његов график у координатном систему.

У највећем делу средњошколског курса аналитичке геометрије, геометријско место тачака $\mathcal{F}$ у равни је линија l (права или крива). У свим тим случајевима једначина (3) је једначина линије l.

Ако је функција $F(x,y)$ полином (цела рационална функција) $n-$тог степена, онда се линија l, зове **алгебарска линија** $n-$**тог реда**.

Линија која није алгебарска зове се **трансцендентна** линија.

1.5.3. Неке значајне претпоставке

С обзиром на чињеницу, да су линије у равни скупови тачака, односи међу линијама регулисани су правилима која важе за скупове. Како се односи међу линијама рефлектују на односе међу једначинама линија, питање је на које се може дати одговор поштовањем правила математичке логике, тј. довођењем у везу скуповних релација: подскуп и једнакост, са импликацијом и еквиваленцијом, а операције: пресек и унија доводе се у везу са логичким операцијама конјункција и дисјункција. Дакле, не упуштајући се у доказивања доле наведених закључака, јер су они предмет математичке логике, веза између линија и њихових међусобних релација и операција, с једне стране, и операциаја над одговарајућим једначинама, с друге стране, регулише се следећим тврђењима, која су дата у форми претпоставки, (видети [11]).

Претпоставка 1. Ако су $F_{\mathcal{S}}(x,y)=0$ и $F_{\mathcal{T}}(x,y)=0$ једначине геометријских места тачака $\mathcal{S}$ и $\mathcal{T}$ и ако је $\mathcal{S}\subseteq\mathcal{T}$, онда важи импликација

$$F_{\mathcal{S}}(x,y)=0 \;\Rightarrow\; F_{\mathcal{T}}(x,y)=0 .$$

Претпоставка 2. Геометријска места тачака $\mathcal{S}$ и $\mathcal{T}$, чије су једначинае $F_{\mathcal{S}}(x,y)=0$ и $F_{\mathcal{T}}(x,y)=0$, једнака су (поклапају се), тј. $\mathcal{S}=\mathcal{T}$, ако и само ако важи еквиваленција

$$F_{\mathcal{S}}(x,y)=0 \;\Leftrightarrow\; F_{\mathcal{T}}(x,y)=0 .$$

Претпоставка 3. Ако су $F_{\mathcal{S}}(x,y)=0$ и $F_{\mathcal{T}}(x,y)=0$ једначине геометријских места тачака $\mathcal{S}$ и $\mathcal{T}$, онда је једначина њиховог пресека $\mathcal{S}\cap\mathcal{T}$, систем (конјункција) једначина

$$F_{\mathcal{S}}(x,y)=0 \;\wedge\; F_{\mathcal{T}}(x,y)=0 .$$

Претпоставка 4. Ако су $F_{\mathcal{S}}(x,y)=0$ и $F_{\mathcal{T}}(x,y)=0$ једначине геометријских места тачака $\mathcal{S}$ и $\mathcal{T}$, онда је једначина њихове уније $\mathcal{S}\cup\mathcal{T}$, дата са

$$F_{\mathcal{S}}(x,y)\cdot F_{\mathcal{T}}(x,y)=0 .$$

2. ЗАСТУПЉЕНОСТ АНАЛИТИЧКЕ ГЕОМЕТРИЈЕ У НАСТАВНИМ ПРОГРАМИМА

2.1. Увод

Аналитичка геометрија је, у већој или мањој мери, заступљена у свим средњошколским програмима у нашој земљи. Слична је ситуација и у већини држава нашег окружења. Наша пажња је усмерена на њену заступљеност у наставном плану и програму гимназије, посебно – гимназије природно-математичког смера и њој сродних гимназија из окружења, јер програм математике у овој школи, по правилу, представља оптималан оквир за реализацију наставних садржаја аналитичке геометрије.

За потребе упоредне анализе заступљености аналитичке геометрије у наставним програмима гимназије природно – математичког смера у Србији, или њој одговарајућим школама, у неким земљама из окружења, биће приказани делови наставних програма математике, који обухватају садржаје аналитичке геометрије, са одговарајућим бројем предвиђених часова за реализацију[1].

2.2. Приказ теме аналитичка геометрија у наставним програмима гимназија

СРБИЈА

У Србији је 1990. године поново установљена гимназија, и то гимназија општег типа, гимназија природно – математичког смера и гимназија друштвено – језичког смера. Недељни фонд часова математике, предвиђен наставним планом за сва три типа гимназије [65], представљен је у следећој табели:

разред / тип гимназије	I	II	III	IV
Општи тип М-1	4	4	4	4
Друштвено – језички смер М-2	4	3	2	2
Природно – математички смер М-3	4	5	5	4

У наставном програму математике за трећи разред гимназије природно – математичког смера [70], градиву аналитичке геометрије, претходи тема:

Вектори (15 часова)

Правоугли координатни систем у простору, пројекције вектора; координате вектора. Скаларни, векторски и мешовити производ вектора; детерминанте другог и трећег реда. Неке примене вектора.

[1] У наведени број часова, предвиђених за обраду наставне теме, нису урачунати часови предвиђени за школске писмене задатке и исправке

Ову тему наводимо због важности њене примене у обради садржаја аналитичке геометрије. Иначе, садржаји аналитичке геометрије обрађују се у трећем разреду, у оквиру теме

Аналитичка геометрија у равни (50 часова)

Растојање две тачке. Подела дужи у датој размери. Површина троугла. Права, разни облици једначине праве; угао између две праве; растојање тачке од праве. Системи линеарних једначина, Гаусов поступак. Систем линеарних неједначина са две непознате и његова графичка интерпретација; појам линеарног програмирања. Криве линије другог реда: кружница, елипса, хипербола, парабола (једначине; међусобни односи праве и кривих другог реда, услов додира, тангента; заједничка својства).

Основна знања о Декартовом правоуглом координатном систему, дужини дужи, обрађују се у оквиру наставних тема: **Логика и скупови,** у **првом разреду** и **Вектори** у трећем разреду.

У оквиру теме **Алгебарски рационални изрази**, у **првом разреду**, продубљују се и проширују садржаји: Линеарне једначине и неједначине (једначине с параметрима, системи с три непознате); линеарна функција[2].

Додатна настава

Такође, наставним планом је предвиђено да се у сваком разреду реализује, по 32 часа Додатне наставе. Неки садржаји аналитичке геометрије, овде су заступљени у I разреду и у III разреду.

У I разреду аналитичка геометрија се обрађује у оквиру теме:

Системи линеарних једначина и неједначина (5 часова)

Системи линеарних једначина и неједначина с више непознатих, примене. Решавање проблема линеарног програмирања (геометријски приступ, појам о симплекс-методу).

У III разреду, аналитичка геометрија се обрађује у оквиру две теме:

Метод координата. Функције и графици (8 часова)

Координате на правој, Декартов координатни систем у равни, други координатни системи. Општа идеја координата. Трансформације координатних система, примене. Важније функције и њихови графици, разломљено-рационална функција, функције с апсолутним вредностима. Графичко решавање једначина и неједначина, графичко решавање задатака линеарног програмирања. Примена метода координата на испитивање једначина и неједначина с параметрима. Формирање једначина геометријских места тачака у равни. Координатни метод у решавању геометријских задатака.

[2] У Правилнику о плану образовања и васпитања за гимназију и програму образовања и васпитања за I разред ("Службени гласник СРС - Просветни гласник", бр. 5/90) наведено је "ти садржаји су обрађени у VIII разреду основне школе и овде се обавља само њихово продубљивање и мање проширивање"

Конусни пресеци (6 часова)

Конусни пресеци: геометријски и аналитички приступ.

БОСНА И ХЕРЦЕГОВИНА

У **Босни и Херцеговини** постоје [155]: гимназија општег типа и гимназија математичко – информатичког усмјерења. Недељни фонд часова математике, предвиђен наставним планом за ова два типа гимназија, приказан је у следећој табели:

разред / тип гимназије	I	II	III	IV
ОПШТА	4	4	3	3
МАТЕМАТИЧКО – ИНФОРМАТИЧКО УСМЈЕРЕЊЕ	4	4	5	5

У трећем и четвртом разреду гимназије математичко – информатичког усмјерења, ученици се опредељују за један изборни предмет, који може бити и математика, заступљен са 2 часа недељно.

Као и у Србији, и овде у гимназији математичко – информатичког усмерења, садржајима аналитичке геометрије претходи тема

Вектори у простору (15 часова)

Вектори у простору. Основне операције са векторима. Векторски простор. Линеарна зависност вектора. База векторског простора. Координатни вектори $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. *Разлагање вектора на компоненте. Координате вектора у односу на неку базу векторског простора. Пројекција вектора на праву и на раван. Пројекција вектора на осу. Дефиниција и особине скаларног производа вектора. Приказ помоћу координата вектора. Векторски производ два вектора. Особине. Приказ помоћу координата вектора (у облику детерминанте, а претходно продубити знања о детерминантама трећег реда). Мјешовити производ вектора. Геометријско значење и приказ помоћу координата (у облику детерминанте). Услов линеарне зависности три вектора.*

За обраду наставних садржаја анлитичке геометрије, у **трећем разреду** су предвиђене следеће теме:

Аналитичга геометрија у равни (35 часова)

Метод координата у координатном систему. Растојање између двије тачке. Подјела дужи у датом односу. Координате средине дужи. Тежиште троугла. Површина троугла. Опћи (имплицитни) облик, експлицитни (главни) облик, сегментни облик, нормални облик једначине праве. Однос двије праве (пресјек, угао између двије праве). Услови паралелности и нормалности правих. Прамен правих. Једначина праве кроз једну тачку. Једначина праве кроз двије тачке. Растојање тачке од праве. Симетрала угла. Једначина кружнице у облицима $\left(x-p\right)^2+\left(y-q\right)^2=r^2$ *(централни облик) и* $Ax^2+Ay^2+Bx+Cy+D=0$ *(општи облик). Положај праве према кружници (пресјек и услов додира). Тангента и* *нормала кружнице. Дефиниција и конструкција елипсе. Једначина елипсе. Дефиниција и конструкција хиперболе. Једначина хиперболе. Дефиниција и конструкција параболе. Једначина параболе. Однос праве и криве другог реда (елипсе, хиперболе, параболе).*

Пресјек и услов додира. Тангента и нормала криве другог реда. Неки системи од двије квадратне једначине са двије непознате. Пресјек двије криве другог реда. Заједничке тангенте двије криве другог реда.

Аналитичка геометрија у простору (тачка, права, раван) (20 часова)

Вектор положаја тачке. Растојање двију тачака. Подјела дужи у датом односу. Једначина равни (разни облици). Удаљеност тачке од равни. Међусобни положај двије равни. Угао између двије равни. Геометријско тумачење система три линеарне једначине са три непознате. Разни облици једначине праве у простору. Удаљеност тачке од праве. Међусобни положај двију правих. Права и раван. Међусобни положај праве и равни. Угао између праве и равни.

Као директна примена садржаја аналитичке геометрије, у оквиру **изборног предмета математика**, у **трећем** разреду гимназије математичко – информатичког усмерења, обрађује се тема:

Основе линеарног програмирања (6 часова)

Увод у проблем. Линеарне неједначине и системи линеарних неједначина. Максимизирање (минимизирање) линеарног полинома уз задате услове. Рјешавање лакших, практичних проблема линеарног програмирања.

Може се сматрати да курсу аналитичке геометрије припада и највећи део теме, која се обрађује у оквиру градива **првог разреда**:

Координатни систем у равни (10 часова)

Правоугли координатни систем у равни. Правоугле координате тачке. Удаљеност двију тачака. Координате средине дужи. Координате тежишта троугла. Површина троугла. Размјер (омјер). Пропорционалност и пропорција. Функција директне пропорционалности (хомогена линеарна функција) $x = kx,\ (k \neq 0)$. *Афина (лине-арна нехомогена) функција* $x = kx + n$. *Ток и график тих функција и функција са апсолутним вриједностима, које се на њих своде. Функција обрнуте пропорционалности* $y = k/x,\ (k \neq 0)$, *њен ток и график (хипербола).*

ХРВАТСКА

У **Хрватској** постоје [154]: опћа, језична, класична, природословна и природословно – математичка гимназија, а недељни фонд часова математике предвиђен наставним планом, приказан је у табели:

разред / тип гимназије	I	II	III	IV
Опћа, Језична, Класична, Природословна	4	4	3	3
Природословно – математичка	4	4	5	5

У природословно – математичкој гимназији [154], [155], наставни садржаји из аналитичке геометрије, реализују се током трећег разреда у оквиру следећих тема:

Аналитичка геометрија у равнини (67 часова)

Точка и дужина. Једнаџба правца. Удаљеност точке од правца. Кут двају праваца, увјет окомитости и увјет паралелности двају праваца.

Једнаџба кружнице. Међусобни однос правца и кружнице. Једнаџба тангенте и једнаџба нормале кружнице.

Елипса. Једнаџба елипсе. Хипербола. Једнаџба хиперболе. Парабола. Једнаџба параболе. Кружница, елипса, парабола и хипербола, као пресјеци стожасте (конусне) плохе равнином. Правац и кривуља II реда. Увјет да правац буде тангента кривуље II реда. Пол и полара кривуље II реда. Папо – Бошковићева дефиниција коника. Тјемене једнаџбе елипсе, параболе и хиперболе.

Напомена. За програм природословно-математичке гимназије од 6 и 7 сати тједно додају се ове теме из **аналитичке геометрије простора** (без наведеног броја часова за обраду), [154]:

Координатни сустав Е3. Формуле за удаљеност двију тачака, за дуљину вектора и скаларни продукт. Једнаџба сфере. Детерминанте другог и трећег реда и линеарни сустави једнаџби. Векторски и мјешовити продукт вектора. Једнаџба равнине. Једнаџба правца. Аналитичка обрада међусобних положаја праваца и равнина.

Основно о линеарном програмирању (5 часова)
Увод у проблем. Линеарне неједнаџбе и сустави линеарних неједнаџби. Максимизирање (минимизирање) линеарног полинома уз задане увјете. Рјешавање лакших, практичних проблема линеарног програмирања.

Ова тема представља примену аналитичке геометрије. Као и у Босни и Херцеговини, у Хрватској се уводни садржаји аналитичке геометрије обрађују и у оквиру градива **првог разреда**, у оквиру теме:

Координатни сустав у равнини (12 часова)

Координатни сустав у равнини. Удаљеност точака у равнини. Једнаџба правца и граф линеарне функције. Граф функције $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}, f(x)=|x|$. *Сјециште двају праваца и сустави линеарних једнаџби.*

И овде се у оквиру сваког наставног програма обрађује тема посвећена векторима

Вектори (22 часа)

Појам вектора. Збрајање вектора. Множење вектора реалним бројем. Линеарна комбинација вектора. Линеарна зависност и независност вектора. Дуљина вектора. Формула за удаљеност точака у координатном суставу. Дијељење дужине у датом омјеру. Скаларни продукт вектора. Окомитост вектора.

Такође, увид у наведене наставне програме показује и да су циљеви и задаци наставе математике идентични.

2.3. Анализа приказаних програма

Из наведеног приказа можемо закључити да је аналитичка геометрија, у трећем разреду гимназије природно – математичког смера (и сродних школа), у укупном фонду часова математике, као обавезног предмета, заступљена: у Србији са 27.78%, у Босни и Херцеговини са 31.43%, а у Хрватској са 40%.

Ако се фонду од 50 часова, предвиђених за обраду садржаја анлитичке геометрије, у трећем разреду гимназије природно – математичког смера у Србији, додају и часови предвиђени за обраду истих садржаја, у оквиру додатне наставе, онда њен удео у укупном фонду часова математике у трећем разреду премешује 30%.

Такође, наставни садржаји аналитичке геометрије чине више од 30% укупног фонда часова математике у трећем разреду, и у гимназији општег типа и друштвено – језичког смера у Србији.

У приказу је дат и део наставног програма, који се односи на наставну тему **Вектори**, која се обрађује такође у трећем разреду гимназије, у сва три наведена наставна програма. Како се овде ради о координатном представљању вектора (и векторских операција) у равни и у простору, јасно је да и ове садржаје можемо сматрати делом наставних садржаја аналитичке геометрије, макар у ширем смислу. На тај начин се удео аналитичке геометрије у наставном програму знатно увећева.

Наведени приказ, указује на значајну заступљеност аналитичке геометрије у наставним програмима математике у гимназији, у Србији и у државама најближег окружења, као и да њени садржаји представљају веома важан сегмент градива математике.

Значај и место аналитичке геометрије у наставном програму математике, свакако детерминишу: циљеви, задаци, могућност примене стечених знања и слично.

Основни циљ у реализацији аналитичке геометрије у трећем разреду гимназије природно–математичког смера, свакако јесте разумевање суштине координатног метода и овладавање његовом ефикасном применом.

Осим овог основног, имамо и следеће циљеве и задатке:

- овладавање техникама формирања једначина геометријских места тачака,
- успешно налажење геометријског места тачака, које одговара датој једначини,

- испитивање међусобних односа геометријских места тачака,
- инсистирање на целисходној примени аналитичког апарата при решавању појединих типова задатака из геометрије,
- продубљивање и проширивање знање о системима линеарних једначина,
- упознавање системе линеарних неједначина са две непознате, као и суштине проблема линеарног програмирања,
- коришћење математичког апарата (једначина) при решавању задатака.

С друге стране, наставни садржаји аналитичке геометрије су веома **погодни садржаји за примену рачунара у настави**, тј. за реализацију у дидактичком систему настава уз помоћ рачунара.

Примена рачунара у настави математике, препоручена је у Правилнику о наставном плану и програму за гимназију – Објашњења садржаја програма математике, [70], где је, између осталог, наведено: „Ради осавремењивања наставе математике и ефикаснијег усвајања садржаја, пожељно је да се обезбеди и присуство рачунарске подршке у настави математике (у почетној фази у фронталном облику рада и уз коришћење узорних демонстрационих програмских апликација, уколико нема услова за масован индивидуални рад ученика на рачунару у оквиру наставе математике)".

Дакле, велике могућности примене рачунара, које пружају наставни садржаји аналитичке геометрије, и увођење информационе технологије у наставу, данас и у будућности, иду у прилог тези о значају и месту наставних садржаја аналитичке геометрије у наставном програму математике у гимназији.

О дидактичком систему настава уз помоћ рачунара (о њеним принципима, наставним методама, образовном рачунарском софтверу, генеричким организаторима и сл.) и реализацији наведених циљева, задатака и наставних садржаја аналитичке геометрије у том систему, биће речи у главама, које следе.

2.4. План реализације наставне теме аналитичка геометрија у трећем разреду гимназије

У овом одељку, приказана је једна могућа верзија Плана реализације наставне теме: аналитичка геометрија, у трећем разреду гимназије природно – математи-чког смера. У Табели 1. дат је Годишњи план рада, за сваки од актуелних наставних програма: М1, М2 и М3, који се користе у гимназији: општег типа, друштвено – језичког смера и природно – математичког смера, редом, у Србији. Са М3* обележен наставни програм је који се може реализовати, у дидактичком систему настава уз помоћ рачунара у трећем разреду гимназије природно-матеамтичког смера.

2.4.1. ГОДИШЊИ (ГЛОБАЛНИ) ПЛАН РАДА ЗА НАСТАВНИ ПРЕДМЕТ МАТЕМАТИКА У III РАЗРЕДУ ГИМНАЗИЈЕ

Ред.број теме	Насатвна тема	М1	М2	М3	М3*
1.	Полиедри	23	13	25	25
2.	Обртна тела	19	12	20	20
3.	Вектори	15	5	15	14*
4.	Аналитичка геометрија у равни	46	22	50	53*
5.	Математичка индукција. Низови	23	8	38	37*
6.	Комплекси бројеви	6	/	20	19*
7.	Писмени задаци и исправци	12	12	12	12
	Укупно:	144	72	180	180

Табела 1.

У Табели 2. дат је један пример Оперативног плана наставне теме Аналитичка геометрија, по програму М3*.

2.4.2. ОПЕРАТИВНИ ПЛАН НАСТАВНЕ ТЕМЕ АНАЛИТИЧКА ГЕОМЕТРИЈА – НАСТАВНИ ПРОГРАМ М3*

<table>
<tr><th>Тема</th><th>Бр. н. ј.</th><th>Наставна јединица</th></tr>
<tr><td rowspan="10">А
Н
А
Л
И
Т
И
Ч</td><td colspan="2">УВОД У АНАЛИТИЧКУ ГЕОМЕТРИЈУ</td></tr>
<tr><td>1.</td><td>1. Декартов правоугли координатни систем; Тачка; Дуж</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>2. Подела дужи у датој размери; Површина троугла</td></tr>
<tr><td>3.</td><td>3. Предмет и метод аналитичке геометрије</td></tr>
<tr><td colspan="2">ПРАВА</td></tr>
<tr><td>4.</td><td>1. Општи (имплицитни) облик једначине праве
Једначина праве одређене тачком и вектором правца
Једначина праве кроз једну тачку
Експлицитни облик једначине праве</td></tr>
<tr><td>5.</td><td>2. Једначина праве кроз две тачке (векторски и скаларни облик, услов колинеарности три тачке)
Једначина дужи
Сегментни облик једначина праве</td></tr>
<tr><td>6.</td><td>3. Вежбање</td></tr>
<tr><td>7.</td><td>4. Нормални облик једначина праве (векторски – посебно Хесеов - и скаларни облик)</td></tr>
</table>

К		Тачка и права - растојање тачке од праве
А	8.	5. Пресек две праве и паралелност Углови између две праве, нормалност правих, Симетрала дужи
Г	9.	6. Системи линеарних једначина - Гаусов поступак
	10.	7. Вежбање
Е	11.	8. Оса симетрије две праве у равни Симетрала угла;
О	12.	9. Једначина прамена правих Услов да три праве буду конкурентне
М	13.	10. Права као геометријско место тачака, Вежбање
Е	14.	11. Линеарне неједначине (полураван) Системи линеарних неједначина (многоугао)
Т	15.	12. Максимум (минимум) линеарне ф-је две промењиве; Појам линеарног програмирања
Р	16.	13. Вежбање
		Други школски писмени задатак
И		Други школски писмени задатак
Ј		Исправак писменог задатка
	КРУЖНИЦА	
А **У**	17.	1. Једначина кружнице: Скаларни облик; Векторски облик Параметарски облик Однос једначине кружнице и опште квадратне једначине Кружница описана око троугла
	18.	2. Вежбање
	19.	3. Кружница и права
Р	20.	4. Вежбање
А	21.	5. Једначина тангенте кружнице Полара и пол у односу на кружницу
В	22.	6. Вежбање
	23.	7. Међусобни однос (и угао) две кружнице
Н	24.	8. Кружница као геометријско место тачака, Вежбање
И	25.	9. Вежбање
	ЕЛИПСА	
А	26.	1. Дефиниција, конструкција и једначина елипсе Општи и канонски облик Параметарски облик Унутрашња и спољашња област елипсе
Н	27.	2. Вежбање
А	28.	3. Нека својства елипсе: симетричност, центар, темена
	29.	4. Ексцентрицитет, директрисе и параметар елипсе
Л	30.	5. Вежбање
И	31.	6. Елипса и права; Тангента елипсе
	32.	7. Вежбање
Т	33.	8. Елипса као геометријско место тачака, Вежбање
И	34.	9. Контролни задатак
	ХИПЕРБОЛА	
Ч	35.	1. Дефиниција, конструкција и једначина хиперболе

К А Г Е О М Е Т Р И Ј А У Р А В Н И		Општи и канонски облик Параметарски облик Унутрашња и спољашња област хиперболе
	36.	2. Вежбање
	37.	3. Нека својства хиперболе:симетричност, центар, темена Асимптоте хиперболе
	38.	4. Ексцентрицитет, директрисе и параметар хиперболе
	39.	5. Вежбање
	40.	6. Хипербола и права; Тангента хиперболе
	41.	7. Хипербола као геометријско место тачака, Вежбање
	42.	8. Вежбање
	ПАРАБОЛА	
	43.	1. Дефиниција, конструкција и једначина параболе Општи и канонски облик Параметарски облик Унутрашња и спољашња област параболе
	44.	2. Нека својства параболе: положај, симетричност, теме
	45.	3. Ексцентрицитет, директрисе и параметар хиперболе
	46.	4. Вежбање
	47.	5. Парабола и права; Тангента параболе
	48.	6. Парабола као геометријско место тачака, Вежбање
	49.	7. Вежбање
	ЕЛЕМЕНТИ ОПШТЕ ТЕОРИЈА КРИВИХ ДРУГОГ РЕДА	
	50.	1. Координатно представљање трансформација подударно-сти: Ротација, Транслација
	51.	2. Вежбање
	52.	3. Крива другог реда и општа квадратна једначина
	53.	4. Вежбање
	54.	5. Конусни пресеци
	55.	6. Контролни задатак

Табела 2.

2.4.3. Објашњење глобалног и оперативног плана

I Увидом у Табеле 1 и 2, видимо да се фонд од 50 часова, предвиђених за обраду наставне теме – аналитичка геометрија у наставном програму М3, разликује, од фонда од 55 часова предвиђених Оперативним планом. Међутим, у Објашњењима садржаја програма математике, [70], је наведено, да фонд часова, предвиђен наставним програмом за обраду поједине наставне тема, треба схватити "оријентационо", и да се фонд часова Оперативног плана наставника, може разликовати за око 10% од предвиђеног фонда часова за тему, зависно од конкретне ситуације.

II Треба узети у обзир и чињеницу да су неке наставне јединице, за које је у Оперативном плану предвиђен, на пример, по 1 час, обрађене детаљно у оквиру неких ранијих тема, током трећег, или првог разреда, а наведене су да би програм био потпун. С тим у вези имамо:

- наставна јединица: 1. Декартов правоугли координатни систем; Тачка; Дуж, детаљно је обрађена у оквиру наставних тема: **Логика и скупови,** у првом разреду и **Вектори** у трећем разреду;
- наставна јединица: 2. Подела дужи у датој размери; Површина троугла, детаљно је обрађена у оквиру наставне теме **Вектори** у трећем разреду.

III Такође, фонд часова предвиђених за обраду наставне теме **Вектори**, могуће је умањити за један час, и додати га теми аналитичка геометрија. Наиме, Оперативним планом је предвиђено да се, наставни садржаји најмање пет наставних јединица ове теме (4, 5, 6, 7, 8), обрађују и применом вектора.

Приликом израде Оперативног плана и приликом писања интерактивног уџбеника, водило се рачуна да је приликом обраде сдаржаја аналитичке геометрије, који се традиционално уче у средњој школи, потребно, кад год је то могуће, користити и вектор. За овакав приступ постоји неколико разлога, од којих наводимо следећа три:

Први је, веома значајна улога вектора у обради неких појмова аналитичке геометрије, као што су: растојање две тачке, подела дужи, површина троугла, једначина праве, геометријске трансформације, транслација и хомотетија и сл.

Други разлог има шири значај и огледа се у томе, да вектор као један од најзначајнијих и најраспрострањенијих математичких појмова, има примену у свим областима математике, у информатици, у економији, у науци уопште и зато је веома важно да се знања о вектору, која су до сада стечена и даље утврђују, проширују и обогаћују новим могућностима примене.

Трећи разлог се заснива на дидактичком принципу поступности, чиме се аналитичка геометрија у простору, која се учи на многим вишим школама и факултетима, и то управо уз примену вектора, изучава као природан наставак, као уопштење, аналитичке геометрије у равни.

IV Фонд часова предвиђених за обраду тема: 5. Математичка индукција. Низови и 6. Комплекси бројеви, такође треба умањити за по један час и додати га теми аналитичка геометрија. Овим променама неће бити нарушен обим наставних садржаја наведених тема, јер се, на пример,

- питањима везаним за граничну вредност низа и њене примене, бави и теорија граничних процеса, која се врло детаљно обрађује у четвртом разреду;
- неке особине полинома над пољем реалних бројева, детаљно примењују у поступцима налажења граничних вредности (разломљених рационалних) функција, приликом испитивања функција, налажења неодређеног интеграла.

VI У оквиру подтеме **Елементи опште теорије кривих другог реда**, реализују се наставне јединице: 50. Координатно представљање трансформација подударности: Ротација, Транслација и 52. Крива другог реда и општа квадратна једначина.

Овде је предвиђено да методама аналитичке геометрије буду обрађене трансформације подударности: ротација и транслација, као и да се анализа опште квадратне једначине обради применом ових трансформација на саму криву другог реда, а не на координатни систем.

Овакав приступ омогућава:

- да се прошири скуп проблема геометрије, који се на једноставан начин могу решавати методама аналитичке геометрије,
- да дође до изражаја директна примена принципа аналитичке геометрије на познате изометријске трансформације: ротацију и транслацију, као и могућности које он пружа,
- проширивање се и утврђивање знања из геометрије,
- да овакво представљање геометријских трансформација, буде подесно за интерпретацију путем рачунара, чиме се стварају услови за лакшу примену рачунара у настави.

3. НАСТАВА УЗ ПОМОЋ РАЧУНАРА

Овај део докторске дисертације посвећен је теоријским и практичним питањима везаним за један релативно нов дидактички систем - **настава уз помоћ рачунара**, као и факторима наставе и њиховом међусобном односу. Анализирани су они дидактички принципи, који као руководеће смернице наставе, карактеришу овај дидактички систем. Посебна пажња је посвећена наставним методама, прилаго-ђеним овом дидактичком систему, као и њиховој примени у настави појединих садржаја аналитичке геометрије. Чињеница да је класификација приказаних наставних метода превасходно заснована на природи активности ученика у наставном процесу, у дидактичком систему настава уз помоћ рачунара има посебан значај. Наведени су примери образовног софтвера, који се користи у настави математике, а такође, приказани су и примери неких генеричких организатора у настави аналитичке геометрије.

3.1. Увод

Међу циљевима савремене наставе математике [70] посебно се истичу „**развијање менталних способности ученика и стицање математичких знања и умења, неопходних за разумевање законитости у природи и друштву и примену у свакодневном животу и пракси, као и за наставак професионалног образовања**". Наведени циљеви, усклађени са потребама сваког појединца, у времену у коме наука и технологија доживљавају брз развој, указују и на обавезу сталног осавремењавања наставе математике, тј. дефинишу следеће задатке: стално усклађивање наставних садржаја са најновијим достигнућима у математици и науци уопште и осавремењавање методике наставе.

С друге стране, „будући да се број научних информација, према подацима УНЕСКО-а, удвостручује сваких пет-шест година, те ће информације моћи искористити само онај субјект који буде оспособљен за самостално учење и перманентно образовање" [89], што је закључак познат још осамдесетих година прошлог века, јасно је да настава која је усмерена на усвајање готових чињеница и на њихову количину, а не на квалитет и могућност примене стечених знања, не може да одговори потребама савременог човека.

Такође, тенденције развоја савременог друштва, његова интензивна информатизација, указују на неопходност све ширег коришћења рачунарских (нових информационих) технологија и у сфери образовања. Савремени човек, независно од професије и врсте делатности, мора да поседује знања и способности за рад са електронским средствима обраде и преноса информација.

Дакле, напред наведени закључци указују на неопходност замене традиционалног модела школе, новим и њено прилагођавање новим потребама друштва, тј. традиционална настава мора уступити место новим наставним системима.

То је процес који подразмева иновације „у следећим васпитно - образовним подручјима:

- Циљеви васпитања, образовања и наставе;
- Организација васпитно-образовног система, школског система, система наставе;
- Функције и положај наставника и ученика;
- Наставни садржаји, методе и облици;
- Наставни објекти, наставна средства, техника и технологија.“ [34].

„Међу савременим дидактичарима широко је прихваћено мишљење да је најзначајнија иновативна снага, која утиче на развој и модернизацију наставе, садржана управо у избору путева и поступака индивидуализације, односно у избору прво теоријског па затим практичног модела индивидуализоване наставе.“ [34].

У складу са напред наведеним јесте и становиште да „Индивидуализација наставе је у дидактици објашњена као дидактички принцип, као претпоставка рационали-зације наставе и као перманентна иновација. Истичући да је индивидуализација наставе императив времена у коме живимо, један од познатих аутора у овој области прецизира да је индивидуализација такво планирање, организовање и реализовање наставног програма, свакодневних лекција и целокупне васпитно – образовне делатности, која уважава интересовања, потребе и могућности сваког ученика, максимално развија његове снаге и способности и обезбеђује претпоставке за стваралачко укључивање у наставни процес.“[56]

У раду [34], као одлике индивидуализације наставе истичу се „флексибилна употреба наставног времена, нова улога наставника, програм континуираног прогреса за ученика, ефикасно коришћење ученичких способности и стална евалуција њиховог напредовања“.

Дакле, сараднички однос на релацији наставник – ученик, стваралачки приступ наставном процесу, активизација ученика, индидвидуализација наставе – све су то тенденције савремене дидактике и све су предмет наведаних иновација.

Наш основни задатак је да покажемо да је управо **настава уз помоћ рачунара** дидактички систем, у коме се реализују наведене тенденције, јер настава уз помоћ рачунара као дидактички систем, у коме ученик преузима нову улогу, тј. ученик је активни субјект у наставном процесу.

3.2. Рачунар у настави

Рачунар, као средство у свакодневном раду, савременом човеку пружа огромне могућности, као на пример: приступ широком спектру информација и могућност њихове прераде, подизање нивоа сазнајних и истраживачких могућности, органи-зација размене информација, изграђивање новог система комуникације човек-машина и сл. Свака од ових могућности, или неки њен значајни део, има своје место у примени рачунара у настави.

Рачунар у настави се може посматрати са два аспекта:

- рачунар као предмет изучавања у наставном процесу;
- рачунар као наставно средство.

Први аспект (на средњошколском нивоу) подразумева стицање информатичке писмености ученика, што у нашим условима значи да ученик, средњошколац, поседује основна знања о рачунару и његовим могућностима, да је оспособљен за рад на рачунару и коришћење оперативног система MS Windows, програмског пакета MS Office, његових програма Word, Excel и PowerPoint, као и програма CorelDraw. Такође се подразумева да ученик у свакодневном раду користи Internet.

У овом раду бавимо се **другим аспектом**, а то је примена рачунара у наставном процесу, што подразумева примену **рачунара као наставног средства**, **образовног софтвера GeoGebra и Mathematica** и генеричких организатора

Рачунар је моћно средство за обраду информација представљених у облику речи, броје, слике, звука итд. Једна од главних карактеристика рачунара јесте могућност његовог програмирања за извршавање низа наредби, повезаних са коришћењем и прерадом информација.

Међутим, „мишљење да ће увођење рачунара у наставу, само по себи побољшати наставу, данас у светлу богатог искуства у овој области, није важеће. Следећи цитат то објашњава: Рачунар нас присиљава да мислимо о стварима, о којима бисмо морали да мислимо и без рачунара“, [113].

У прилог овој тези пише и M. Prensky у раду [72]: „Технологија у служби старе парадигме, за њих (ученике) нема смисла. „Неки наставници користе PowerPoint и мисле да су феноменални“, каже студент. „Али то је баш као натпис на школској табли“, каже други. „И онда нам га читају“, каже трећи. „Зашто онда треба да слушамо читање“?“

Управо наведене чињенице указују на обавезу да је увођење рачунара у наставу процес који се одвија у оквиру одговарајуће методике. Наиме, рачунар и образовни софтвер представљају тзв. **интерактивна** наставна средства, наставна средства која пружају могућност давања непосредног „одговора“ на поједине радње ученика, односно наставника, ступања у „дијалог“, што и представља једну од одлика **методике наставе уз помоћ рачунара**.

Већ су прва истраживања показала, да примена рачунара у настави, уз употребу одговарајућег образовног софтвера, добро осмишљених наставних метода, уз уважавање дидактичких принципа, обезбеђује суштинско повећање ефикасности наставе, подиже ниво знања, ствара услове за пружање индивидуалне помоћи наставника сваком ученику у решавању појединих задатака и олакшава реализацију нових наставних садржаја Примена рачунарске технике у наставном процесу открива нове путеве у развоју навика, мишљења и умења у решавању сложених проблема, представља принципијелно нове могућности за активизацију ученика. Рачунар омогућује да се настава учини интересантнијом, динамичнијом и убедљивијом, а велики фонд наставних садржаја лако доступним.

Основне предности над другим (техничким) наставним средствима су: компатибилност, прилагодљивост, могућност укључивања у разне наставне методе, индивидуализација наставе, а нарочито појединачне реакције на активност сваког ученика посебно. Примена рачунара ствара услове да наставни процес буде динамичнији и да добија истраживачки карактер. За разлику од радија, телевизије и дијафилма, рачунар омогућује непосредан одговор на активност ученика. Такође омогућује понављање, објашњавање наставних садржаја слабијим ученицима, прелазак на сложеније и најсложеније садржаје за најприпремљеније ученике. При томе настава се лако и једноставно реализује у индивидуалном темпу.

3.3. Нови дидактички систем

Увођењем **рачунара и образовног софтвера** у наставни процес, савремена настава добија и своју четврту компоненту, **четврти фактор наставе**, који ствара услове да се стичу знања, вештине и навике на прихватљивији начин, а да се у исто време ученик оспособи да „**сам учи**", да „**сам зна како**". Оваква промена улога води ка значајној ревизији теорије наставе.

Рачунар се користи у свим фазама наставног процеса, почев од увођења и објашњавања нових садржаја, преко постављања и решавања задатака, све до понављања, утврђивања и провере (оцењивања) знања, умења и навика. При томе рачунар, у већој или мањој мери, обавља различите функције.

Функцију **наставника** рачунар извршава као:

- неисцрпан извор наставних садржаја (градива), замењујући наставника и уџбеник, делимично или потпуно,
- очигледно средство (са особинама мултимедија и телекомуникације, квалитетно вишег нивоа),
- индивидуални информативни простор,
- тренажер,
- средство за диагностику и контролу.

Функцију **помоћног средства** рачунар извршава као:

- средство за визуализацију наставног садржаја,
- средство за припрему разних текстуалних садржаја и њихово чување,
- средство за уређивање текста,

- средство за уређивање цртежа и слике,
- рачунска машина великих могућности,
- средство за моделирање.

Функција – рачунар као **предмет изучавања,** остварује се посредством:
- програмирања,
- израде програмираног материјала,
- коришћења различитих интерфејса.

Функција **групе сарадника,** остварује се комуникацијом путем тзв. **друштвене мреже**, посредством Interneta.

Функција **игровне средине**, реализује се путем:
- компјутерских игара,
- компјутерског видеа.

Како рачунар преузима део функција наставника, пружајући му велику техничку помоћ, ослобађа се значајан део времена за индивидуални рад наставника са сваким учеником посебно, за драгоцени директни контакт који постаје знатно блискији и хуманији него раније. На тај начин, рачунар не само да не спречава комуникацију на релацији: наставник-ученик, већ напротив ствара знатно веће могућности комуникације; само их је потребно открити и правилно искористити.

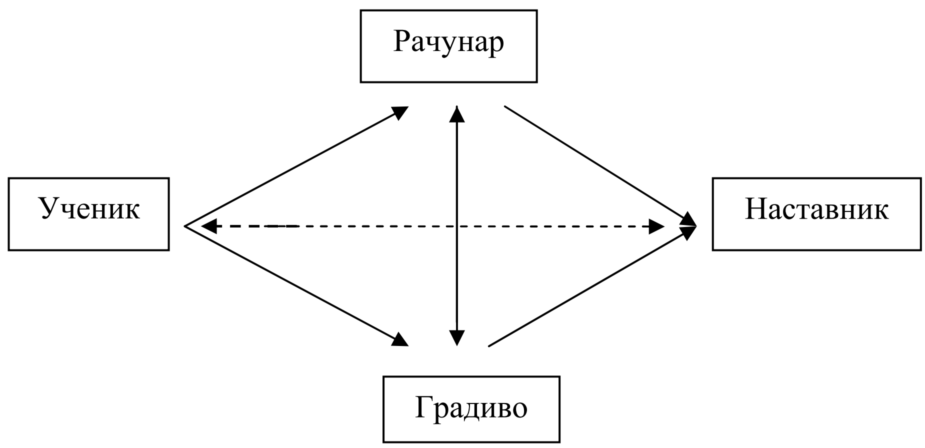
Свакако, наставнику и даље остаје веома значајна улога у наставном процесу:
- Планирање наставе, избор наставног материјала и задатака,
- Организација наставног процеса на нивоу целог одељења,
- Организација активности и координација рада група и управљање унутрашњом рачунарском мрежом,
- Индивидуално посматрање и пружање индивидуалне помоћи,
- Избор и припрема одговарајућег интерфејса,
- Избор, припрема и евалуација одговарајућег образовног софтвера и осталих очигледних наставних средстава.

Све наведене веома сложене функције, захтевају од наставника велико искуство, висок ниво познавања предмета и имају стваралачки карактер. Основни захтев у реализацији ових функција јесте јасно раздвајање примарних од секундарних садржаја градива и диференцијација градива по степенима сложености.

С друге стране, поред наведеног низа измењених функција, наставнику припада изванредно сложен задатак – да преузме на себе улогу „креатора наставе“, „кормилара у свету знања“, „старијег колеге“ и „саветодавца од ауторитета“. За наставника је неопходно да схвати чињеницу, да ученици, захваљујући могућностима компјутерске комуникације, знају не оно, или не само оно, што им је задато на часу, већ су некад упознати са таквим садржајима, о којима и сам наставник нема значајнијих информација. То је нормална, уобичајена ситуација у савременој настави, директан резултат информатизације наставног процеса и друштва уопште, најизраженија карактеристика **нове парадигме наставе**. У таквим условима, од наставника се не захтева апсолутно „свезнање“, него да мудро, разборито, сагледава везе међу појавама и разуме њихов научни и свакодневни смисао.

Из претходног излагања, може се извести закључак, да се традиционални **дидактички троугао** проширује на **дидактички четвороугао** (Слика 1.): ученик, наставник, наставни садржаји (градиво) и рачунар (са образовним софтвером), што представља наведену **нову парадигму наставе**.

Настава уз помоћ рачунара је, дакле, **нов дидактички систем**, у коме ученик преузима нову улогу, тј. ученик није само објект, него активни субјект у наставном процесу, а рачунар наставно средство, нови фактор наставе, са наведеним функцијама.



Слика 1.

Наведена промена функција учесника у наставном процесу, условљена увођењем рачунара у наставни процес, приказана је у Табели број 1., где су наведене неке од најзначајнијих функција, и знаком „+“ означени њихови „извршиоци“. Ако неку од функција истовремено обавља више њих, онда је знаком „++“ означен најквалитетнији „извршилац“ (под условом да се он може издвојити).

Табели број 1.

	ФУНКЦИЈА	НАСТАВНИК	РАЧУНАР	УЧЕНИК
1.	Избор наставне стратегије	+	-	-
2.	Избор наставног градива и задатака	+	-	-
3.	Дефинисање редоследа изучавања наставног градива	++	+	+
4.	Излагање новог градива и задавање задатака	+	+	-
5.	Израда задатака	-	-	+
6.	Преглед и оцена решења	+	++	-
7.	Саопштавање резултата	+	++	-
8.	Упутство за даљи рад	+	++	-
9.	Регистрација података о току процеса	+	++	-
10.	Помоћ у току наставног процеса	++	+	+

О настави уз помоћ рачунара, као дидактичком систему, видети још у [1], [2], [34], [84].

3.4. Дидактички принципи

„Под дидактичким принципима подразумевају се руководеће смернице наставне делатности, начела од којих се у настави не одступа. Они се изводе из циља и задатка наставе, законитости наставног процеса и законитости психо-физичког развоја. Будући да се циљеви и задаци наставе мењају и да се законитости наставе и психо-физичког развоја све темељније упознавају, мењају се и дидактички принципи – једни престају да важе, други добијају другачији смисао, а јављају се и сасвим нови принципи“, [8].

Познато је да не постоји општа сагласност око броја и назива дидактичких принципа. То се може објаснити чињеницом да „настава није свуда истоветна – различите друштвене средине имају различите наставне системе и што неки дидактичари сажимају, а други рашчлањују поједине принципе (обједињују два принципа у један принцип, или од једног принципа праве два)“, [8].

То значи да се и настава уз помоћ рачунара, осим на општим, заснива и на неколико дидактичких принципа, за које се може рећи да карактеришу овај дидактички систем.

Када је о класичним дидактичким принципима реч, јасно је да сви они захтеви који карактеришу традиционалну наставу, углавном остају на снази и у дидактичком систему настава уз помоћ рачунара, с тим што у овом систему неки од њих, у већој или мањој мери, добијају и нека нова својства.

1. Принцип научности

Принцип научности детерминише и наставне садржаје и наставне методе, тј. захтева да се у наставно градиво укључе, не само традиционална научна сазнања, него и суштинске поставке савремене науке, а такође и питање перспективе њеног развоја. При томе, методе усвајања наставног садржаја, треба да буду адекватне савременим методама научног сазнања. Другим речима, научне методе: компаративна метода, индукција, дедукција, аналогија, анализа, синтеза и сл. у дидактици се користе и сврставају у групу, логичких (научних) метода у настави [41]. Такође, познато је да се у науци користе истраживачки, или поступци који представљају решавање проблема, а с друге стране, такве методе постоје и у настави уз помоћ рачунара, о чему ће бити речи у посебном одељку. Коначно, и науку и наставу карактерише једна значајна заједничка особина: **активност**. Наиме, основна теза дидактике, „да је услов ефикасности наставе, активност ученика“ [41], што има за последицу, и **начин стицања знања и примену стечених знања**, има свој аналогон, у тези о сазнајно-теоријским односима научног сазнања и праксе.

Наставне активности, реализоване током усвајања наставних садржаја у настави уз помоћ рачунара, одражавају основне елементе научног сазнања. Системски приступ презентацији наставног садржаја, његово структурирање и извођење основних концепата и њихових међусобних односа применом генеричких организатора, управо и представља поступке аналогне методама савременог научног сазнања. Сами садржаји при структурирању и извођењу различитих нивоа сложености, ученицима допуштају да се укључе не само у оне теме које обезбеђују обавезни минимум знања, него и да разматрају шире концепте, проширују видике и чвршће утемељују његова знања, а затим да повезују те концепте изучавајући их у узајамном односу. Коришчење образовног рачунарског софтвера доводи наставни процес до једног квалитетно новог нивоа. То је ниво на коме је омогућено да се у било којој школи опремљеној рачунарима, независно од места постојања, користе резултати методичког и научног рада експерата највишег нивоа. На тај начин, сама настава уз помоћ рачунара обезбеђује научност наставног садржаја.

2. Принципи систематичности и поступности

Принципи систематичности и поступности односе се на организацију наставног градива, и на систем деловања наставника и ученика на његовом разумевању. Како је наведено у претходном одељку, наставу уз помоћ рачунара карактерише низ конкретних специфичних радњи, од којих су неке својствене свим наставним системима, а неке - само настави уз помоћ рачунара. Такаве радње, на пример, представљају: перцепција информације са екрана монитора, рад у знаковним моделима, уношење одговора путем тастатуре. За обезбеђње принципа поступности корисно је на почетку курса наставе уз помоћ рачунара, ученику саопштити оријентациону основу активности, формулисати наставне циљеве. Без обзира на сложеност и дужину пута који води ученика до циља, наставни процес се изводи систематски и поступно.

Принцип поступности добио је пуни значај у настави уз помоћ рачунара, где се под поступношћу управо и подразумева прецизно дефинисан редослед излагања секвенци наставног градива, израда и корекција најефикаснијег редоследа самосталних активности ученика у таквом окружењу за изградњу и тестирање математичких концепата, какав је рачунар. У зависности од садржаја наставног градива, редослед излагања може бити изведен, било индуктивном, било дедуктивном методом. Само усвајање знања у процесу наставе уз помоћ рачунара, обезбеђује дидактички принцип систематичности.

3. Генерички принцип

Наставни час је веома динамична и веома флексибилна форма организације наставе. Он се налази у константном развоју и модификуе се у зависности од спољашњих и унутрашњих услова. Зато је при конципирању наставног часа неопходно узети у обзир **принцип развоја**, који треба да обезбеди континуирану реализацију и унапређење њеног система задатака, као и средстава за њихову реализацију. Принцип развоја подразумева креирање наставног часа као динамичне, флексибилне целине, прилагођене током реализације, реконструкцији, мењању нивоа сложености и сл. Генерички принцип, осим креирања наставног часа, подрезумева и креирање математичких концепата, ослањањем на њихову генезу. Програми GeoGebra и Mathematica, пружају наставнику и ученику, велике могућности коришћења алата за израду и примену генеричких организатора, како за развијање концепата из области аналитичке геометрије, тако и за решавање задатака различитих нивоа сложености. Програм Mathematica, осим тога даје велике могућности коришћења готових примера и информација о математичким појмовима.

4. Принцип сазнајности

Принцип сазнајности постигнут је у настави уз помоћ рачунара изградњом организационе стратегије, чему се даје примат у овом наставном систему. Ова техника је усмерена на формирање, обучавање, стратега који посматра објекте и појаве у њиховој међузависности, самостално изучава наставно градиво, допуњујући знања стечена у школи. Имплементација принципа сазнајности подразумева да се ученику саопште циљеви и задаци наставе, упутства о предметној активности и основним етапама њене реализације. Успешност остварења принципа сазнајности, зависи о теоријског нивоа предмета, целовитости расветљавања изучаваних концепата и њихових узајамних веза.

Информационе наставне технологије указују на потребу увођења, заснивања и откривање још једног посебног облика овог општег принципа, који, иако је одувек био присутан у наставном процесу, не сматра се темељним. Реч је о комуникацији, организацији дијалога између ученика и наставника, као и између ученика и рачунара. Тај „нови принцип, присутан само у настави уз помоћ рачунара могуће је назвати **принципом когнитивности комуникације**“, [1].

5. Принцип индивидуализације

Један од најзначајнијих проблема који прате традиционалну наставу, налази се у њеној организацији, у којој су наставни програми, наставне методе и услови наставе једнаки за све ученике. Наиме, наставни програм, наставне методе, наставников приступ ученицима, прилагођени су замишљеном „просечном“ ученику. У таквој настави, „бољи“ ученици стагнирају, јер се од њих не захтева неки већи интелектуални напор, а „слабији“ нису у стању да прате ни просечни ниво осталих ученика. „Током друге половине прошлог века, овим проблемима бавили су се многи педагози, психолози, дидактичари, међу којима и Гање[1], Бударниј[2], Крутецкиј[3] и многи други“ [31]. Прилагођавање наставе могућностима сваког појединачног ученика, индивидуализација наставе, постаје једно од основних питања савремене дидактике.

[1] **Robert Mills Gagné** (1916 – 2002.) – познати амерички психолог из области педагошке психологија

[2] **Бударный А.А.** совјетски дидактичар, аутор више радова из области индивидуализације наставе

[3] **Крутецкий Вадим Андреевич** (1917 – 1989.) – совјетски психолог, један од водећих стручњака из области педагошке психологије

У [8], под дидактичким принципом индивидуализације наставе, подразумева се захтев „да сваки ученик обрађује наставно градиво у обиму којем је дорастао, на нивоу сложености који му је доступан, помоћу поступака прилагођених његовој личности и темпом који му одговара“. Настава у којој је остварена потпуна реализација овог дидактичког принципа, назива се индивидуализована настава.

Такође, у одељку[4] 3.1., цитирани су ставови према којима је индивидуализација наставе „перманентна иновација“ [56], или, да је „најзначајнија иновативна снага, која утиче на развој и модернизацију наставе, садржана управо у избору путева и поступака индивидуализације“ [34], што значи да је принцип индивидуализације наставе, један од најважнијих захтева савремене наставе.

Између индивидуализоване наставе и индивидуалног рада, постоји јасна, суштинска разлика (видети [8], [31]).

У традиционалној настави, под индивидуалним радом подразумева се самостално учење, самосталан рад ученика на решавању задатака, без размене информација, при чему наставно градиво, односно задаци, могу бити исти за све ученике, једне групе или одељења. Без обзира на то да ли је настава фронтална или групна, поучавање најчешће има групни карактер, а само учење је индивидуалан (самосталан) рад. Иначе, самосталан рад ученика на извршавању обавеза, не умањује улогу наставника, јер је он у обавези да мења своју дидактичку активност и прилагођава је ситуацијама, које се мењају, али увек остају под контролом наставника. У [32] и [34], приказани су неки модели индивидуализоване наставе.

Анализирајући „статичке и динамичке параметре индивидуализације“, наведене у раду [34], може се закључити да је настава уз помоћ рачунара дидактички систем у коме се, у највећој мери, остварује принцип индивидуализације.

Пођимо од наведеног у одељку 3.3., а то је, да увођењем **рачунара и образовног софтвера** у наставни процес, савремена настава добија и своју четврту компоненту, **четврти фактор наставе**, и да је настава уз помоћ рачунара **нов дидактички систем.** То заправо значи, да савремена настава уз помоћ рачунара подразумева образовни софтвер, тј. у савременим условима нема наставе уз помоћ рачунара, без употребе образовног софтвера. Ова чињеница има за последицу, да карактер наставе уз помоћ рачунара директно зависи од карактера образовног софтвера.

На садашњем нивоу развоја информационе технологије, рачунара, образовног софтвера, глобалне мреже (Интернета), дидактички систем настава уз помоћ рачунара, у великој мери обухвата „статичке и динамичке параметре индивидуализације наставе“, наведене у раду [34].

---
[4] Реч је о одељку у Дисертацији

Рачунар у настави математике, са образовним софтвером Mathematica и GeoGebra[5], разни електронски уџбеници, интернет и сл., представљају неисцрпан извор знања, нуде широк избор наставног садржаја и другог дидактичког материјала.

Виши ниво индивидуализације ученичке активности у наставном процесу, несумњиво подиже ниво сазнајности и активност ученика. Та педагошка импликација, која изражава један од елемената принципа индивидуализације, обезбеђена је у настави уз помоћ рачунара. На тај начин, посредством ефикасније организације сазнајне активности ученика, из корена се мењају методе стицања нових знања. Другим речима, настава уз помоћ рачунара, значајно унапређује наставне методе и даје им знатно веће могућности, што се посебно односи на објашњавачко-показивачке, проблемске и истраживачке методе. Такође, значајно доприноси развоју визуалног мишљења и визуализације, као когнитивно-визуалног приступа настави математике, и алгоритмизације, као облика управљања наставним процесом.

Рачунар пружа изванредне могућности за вођење детаљне евиденције о индивидуалним способностима, когнитивном стилу, интересовањима, циљевима и аспирацијама, сваког појединачног ученика, као и за праћење и евиденцију резултата и постигнућа сваког ученика.

Индивидуализована настава математике **мотивише ученика на активност**, тиме што му оставља могућност да ради на оном нивоу који је за њега увек могућ, достижан. Рачунар у настави и погодно изабран образовни софтвер, управо омогућују ученику овакву активност и учешће у наставном процесу. GeoGebra је тај погодан алат који активира ученика и ствара услове за самостално експериментисање приликом обраде скоро свих наставних садржаја у средњој школи, а посебно садржаја аналитичке геометрије.

Из напред наведених разматрања, следи да настава уз помоћ рачунара, обезбеђује широк избор циљева и задатака наставе математике, као и више нивоа њихове реализације.

Принцип индивидуализације у дидактичком систему настава уз помоћ рачунара реализује се пре свега **ако постоји квалитетан образовни софтвер**. Његова вредност огледа се у томе што ученик сам може да одреди начин, темпо и ниво обраде наставног градива, активирањем сопствених индивидуалних способности, претходних знања и нивоа припремљености. Програмски пакет Mathematica садржи велики фонд информација, примере решених задатака, велике могућности претраживања, примене постојећих примера на решавање нових и сл. Као и GeoGebra, пружа велике могућности за експериментисање, решавањем задатака, од најједноставнијих до веома сложених, по избору самог

[5] Овде су наведена само два програмска пакета, представника образовног рачунарског софтвера, док се у настави уз помоћ рачунара, могу успешно користити и многи други (видети одељак 3.5)

ученика. И један и други програм пружају могућност: **иконичке (слика), симболичке (аналитички израз) и акционе (манипулација, динамика) репрезентације**, што свакако позитивно утиче на процес стицања знања. GeoGebra је посебно подесан програм за формирање генеричких организатора, чије коришћење посебно помаже остваривање принципа индивидуализације. На тај начин рачунар, снабдевен наведеним образовним софтвером, уз уважавање индивидуалних разлика и могућности сваког појединачног ученика, радикално **мења процес стицања нових знања**, потпомаже сазнајни процес и активира ученика, чиме даје настави математике нови квалитет.

Многобројни експерименти и дугогодишња педагошка пракса показују да, што се више користе средства самосталног рада, тиме се постиже већа ефикасност у **развијању стваралачких способности ученика**. Другим речима, све оно што је ученик током наставе способан да испуни без помоћи са стране, он треба да испуњава и самостално, у новим околностима. Јасно је да рачунар у настави математике, са програмима Mathematica и GeoGebra, пружа те могућности. Ученици могу да их користе, не само током обраде, понављања и утврђивања градива, него и за самосталну израду генеричких организатора. На тај начин, поред подизања нивоа знања, индивидуализује се процес стицања знања, увећава се могућност примене знања, у нестандардним ситуацијама, развија се математичка и информатичка компетентност.

Методичка конкретизација часа математике у овом дидактичком систему, ствара услове за индивидуални рад ученика, као и за широку примену интерактивног уџбеника.

Индивидуални приступ у наставном процесу ствара услове, тј. даје могућност наставнику да посвети активну пажњу **индивидуалној креативности сваког ученика**. Принцип индивидуализације не негира фронтални и групни облик наставе, него у условима разредно-часовног система подразумева једну рационалну хармонизацију свих облика наставе у циљу **повишења њеног квалитета и развоја сваког ученика**, што су свакако услови за подизање нивоа ефикасности наставе.

Програми Mathematica и GeoGebra, као образовни софтвер, поседују велике могућности за подизање нивоа ефикасности наставе математике, тј. аналитичке геометрије. Коришћење овог образовног софтвера у настави аналитичке геометрије, ствара услове за продуктивну сазнајну активност ученика, узимајући у обзир њихове интересе, склоности и потребе, формирајући неопходна знања и могућност примене знања. Примери генеричких организатора формираних уз помоћ програма Mathematica и GeoGebra, за развијање математичких концепата и за решавање задатака, свакако да одговарају потребама савремене наставе, а ученику дају могућност да сам креира примере, према својим захтевима.

Креирајући наставни процес, важно је да сваки наставник има на уму једну мисао: рачунар у наставном процесу – није механички наставник, није замена, или аналогон предавача, него наставно средство које јача и проширује могућности, и ученика и наставника у наставном процесу.

Принцип доступности наставног циља у настави уз помоћ рачунара, прелази са принципа опште доступности, за одређену узрасну групу ученика, или за неког просечног ученика датог узраста, у принцип индивидуалне доступности и посматра се као могућност постизања наставних циљева. Наставни материјал (наставна грађа, градиво) који се обрађује у процесу наставе уз помоћ рачунара, претпоставља постојање разгранатих, различитих путева и брзина савладавања наставног градива, пружање помоћи у виду објашњења, сугестија, допунских упутстава и задатака, константно контролише и одржава на неопходном нивоу мотивацију ученика. Принцип доступности у настави уз помоћ рачунара игра улогу филтера наставних садржаја, „семафора наставног процеса“ и коначно, обезбеђује постизање наставних циљева за ученике са различитим предзнањем и различитом почетном припремљеношћу.

6. Принцип очигледности

Коришћење очигледних средстава, Јан А. Коменски[6], још у XVII веку, сматра „златним правилом дидактике“. Првобитно је принцип очигледности означавао захтев конкретне, сликовите, очигледности (представљање спољашњих облика објеката у целини, њихових спољашњих својстава). У XX веку принцип очигледности се тумачи као ослањање, не само на одређене објекте и њихове слике, него и на њихове моделе. Током друге половине XX века, укључивањем најновијих технолошких достигнућа у образовни процес, значајно се увећава обим очигледних наставних средстава, што доводи до проширивања захтева принципа очигледности, што га чини највише разматраним у литератури.

П**ринцип очигледности**, у дидактичком систему настава уз помоћ рачунара, назива се такође и принцип „**интерактивне очигледности**“. Ако се у традиционалном поимању под очигледношћу подразумева, пре свега, илустративна компонента, обезбеђивање услова да ученик може на било који начин да посматра предмете и појаве и да са предметима, евентуално, изводи минималне манипулације, тада у настави уз помоћ рачунара очигледност омогућује посматрање и увиђање предмета и појава, које није увек изводљиво у реалном животу, чак ни помоћу самих чула и прецизних уређаја. Шта више, са објектима који су представљени уз помоћ рачунара, могуће је извршавати различите радње, изучавати их, не само статично приказане, него и кроз динамику развоја у различитим условима. При томе рачунар омогућује анализу главних законитости које карактеришу предмет или појаву, као и посматрање сваког детаља. Рачунар омогућује различите облике репрезентације (иконичке –

[6] **Јан Амос Коменски** (чеш. *Jan Amos Komenský*, лат. *Comenius*;. 28.3. 1592, Нивница, Јужна Моравска - 15. 11. 1670, Амстердам) - Чешки просветитељ и хуманиста, писац, епископ Чешко-братске цркве, утемељивач научне педагогије, творац разредно-часовног система

слика, симболичке – аналитички израз и акционе – манипулација, динамика), што употпуњује информацију о изучаваном објекту, или појави и чак је проширује.

С друге стране, не задовољава сваки модел неког објекта или појаве, принцип очигледности, ма колико он деловао „природно“. Задовољавају га само

– модели који потпомажу остварење дидактичких циљева изучаваног наставног програма;
– модели, садржани у програму, треба да буду приказани у форми, која најјасније разоткрива суштинске везе и односе међу објектима;
– модели код којих су критеријуми веза и односа међу објектима адекватно маркирани, бојом, звуком, или светлосним сигналом итд.

Конкретне препоруке за коришћење разних начина представљања објеката у рачунарској симулацији, коришћење одређених карактеристика и могућности примене рачунара по принципу очигледности, описани су у следећим поглављима овог рада.

Очигледност у наставном процесу има две функције: директну и индиректну. Неке од директних функција су: когнитивна, управљање учениковом активношћу, интерпретативна, естетска, непосредност расуђивања. У индиректне функције треба уврстити следеће: развијање целисходне пажње ученика, меморисања и понављање наставног градива, реализација практичног усмеравања, [24].

М.И.Башмаков и Н.А.Резник о коришћењу очигледности на часу, оцењују: „Сваки наставник у настави користи очигледни материјал - формуле и скице на табли, цртеже и дијаграме на екрану, графиконе и табеле на зидовима, моделе и обрасце у рукама ученика. Први циљ наставника састоји се у томе, да ученик погледа на презентоване слике. Овај циљ постиже се лако. Други циљ се састоји у томе да је ученик погледао и видео оно што је уграђено у ове слике. Култура визуалне перцепције захтева тако дуго и озбиљно васпитање, као и култура писања и говора“, [2].

7. Принцип визуализације

Визуално мишљење

Из претходног излагања је јасно, да је принцип очигледности, један од основних наставних принципа, великог образовног значаја.

С друге стране познато је, да у настави математике преовладава употреба формално-логичких средстава за оперисање знаковним системима, често, без довољног ослањања на сликовне, визуалне компоненте, што сигурно отежава процес усвајања знања и ученике чини пасивним и незаинтересованим.

Дидактички осмишљена употреба очигледних слика у настави математике, може да измени наставу математике, тако што функцију очигледности преводи од помоћног, илустративног средства, у водеће, продуктивно методичко средство, које потпомаже развијању математичког мишљења ученика.

Проблем реализације принципа очигледности у настави математике добија фундаментално ново решење, ако се активност ученика методички осмисли тако, да омогући функционисање његовог **визуалног мишљења** за добијање продуктивних резултата у овладавању математичким концептима, методама деловања, за јачање развојне функција очигледности. Другим речима, проблем реализације принципа очигледности добија посебан значај **на основу развоја и коришћења ресурса визуалног мишљења ученика**, што је данас наглашено као један од приоритетних праваца развијајуће функције математике.

У данашње време широко распрострањени термин „**визуално мишљење**“, увео је амерички психолог Рудолф Арнхајм у [6], дефинишући га као „мишљење посредством визуалних операција. Другим речима, **визуалне слике** не представљају илустрацију мисли аутора, него, коначно, развијање самог мишљења“ (видети такође [49]).

В. П. Зинченко и Н. Ј. Вергилес у [38], дефинишу појам **визуалног мишљења** на следећи начин: „Визуално мишљење – то је човекова активност, чији резултат је генерисање нових слика, креирање нових визуалних форми, које носе одређено мисаоно оптерећење и знање чине видљивим“ (видети такође [24]).

Савремена психолошко-педагошка истраживања проблема формирања и развијања визуалног мишљења ученика, концентришу се око следећих питања:

- операције и законитости невербалног мишљења,
- проблеми визуалне перцепције,
- механизми и карактеристичне особености визуалног мишљења,
- динамика формирања математичке слике,
- проблем преноса информација и препознавање слике,
- психофизиолошки механизми опажања информације доминантном и субдоминантом хемисфером великог мозга (о чему ће бити речи касније).

Когнитивно-визуални приступ у настави

Међу приоритетима савремене наставе математике истиче се изградња наставног процеса заснованог на **когнитивно-визуалном приступу** у формирању знања, вештина и навика, што треба да омогући да се максимално користе потенцијали визуалног мишљења.

Једна од главних претпоставки когнитивно-визуалног приступа јесте, широко и сврсисходно коришћење когнитивне функције очигледности. Рачунар и одговарајући образовни софтвер, као „окружење за креирање и тестирање математичких концепата[7]“, стварају услове за реализацију ове функције, о чему пише Д. Тол: „Рачунар поседује могућности, комплементарне онима које поседује људски ум. Тамо где је људски ум подложан грешкама, али и где показује проницљивост, рачунар је конзистентан (под претпоставком да је исправно програмиран) и предвидив. Управо та конзистентност и предвидивост чине рачунар, у Скемповој терминологији, **окружењем за креирање и тестирање математичких концепата**. Концепти могу бити креирани разматрањем већег броја примера процеса у акцији како би се сагледале правилности и апстраховале темељне генерализације, и на сличан начин, концепти могу бити тестирани помоћу претпоставки о ситуацијама које се још увек нису десиле, а чијим се извођењем проверавају претпоставке“ у раду [96].

На основу напред изложеног, корисно је присетити се и речи К. Ф. Гауса: „Математика – то је наука не толико за уши, колико за очи“, [24].

Овај приступ (когнитивно-визуални) настави математике, представља основу „**технологије визуализације наставних садржаја**, која се у може дефинисати као систем, који у себе укључује: наставно градиво, визуалне поступке његовог саопштавања, визуално-техничка средства саопштавања (презентовања) наставних садржаја, укупност психолошких поступака (метода) коришћења и развијања визуалног мишљења у наставном процесу. Иначе, **Технологија визуализације наставних садржаја** настала је у Сједњеним Америчким Државама крајем шездесетих година XX века“, [49].

У последњих неколико деценија, многи психолози се слажу у оцени да једна од вредности когнитивно-визуалног приступа јесте то, што он узима у обзир индивидуалне карактеристике ученика, и посебно, питање функционалне асиметрије хемисфера великог мозга, као и утицај те асиметрије на праксу наставе математике, који данас постаје све актуелнији[8].

---

[7] **концепт** = појам, идеја, замисао, нацрт, скица, почетна верзија, ...
Појам се најчешће дефинише као мисао о битним својствима, ознакама и односима предмета мишљења. Као члан мисаоне везе која се изражава у суду, појам се најчешће изражава речју (речима), као знаком (знацима) за појам (појмове). Сваки појам има свој садржај, обим и подручје примене. (детаљније: Петровић Г. Логика, Загреб 1964.; Шешић Б. Основи логике, Београд, 1969.: Филозофски рјечник. Загреб 1965. идр.)

[8] **Tony Buzan**, савремени енглески психолог, аутор многих књига-бестселера из области психологије учења, у књизи **[15]** пише: „Развоју технологије визуализације, свакако доприносе и резултати истраживања америчких научника Роџера Сперија и Роберта Орнштајна, обављаних током шездесетих и седамдесетих година XX века, када су открили да је свака од две хемисфере великог мозга, доминантна при различитим врстама менталне активности. Хемисфере су иначе повезане сложеном мрежом нервних влакана која се зове **corpus callosum**.
Код већине људи лева хемисфера је доминантна у такозваним „академским“ активностима, као што су: логика, речи, бројеви, математика, низови и сл.. Док се лева хемисфера бави активностима свог домена, десна је у стању одмарања, „спремна да помогне“ уколико затреба. Десна хемисфера је доминантна у такозваним „креативним“ активностима, као што су: ритам, рима, имагинација, боје, дневно сањарење, слике, музика и сл.

„Откриће о функционалној асиметрији хемисфера великог мозга, за које је, амерички неуролог Р. Спери добио Нобелову награду 1981. године, довело је до неопходности преиспитивања и кориговања застарелих погледа на систем математичког образовања, у правцу развоја фигуративног мишљења ученика“, [24].

Важно је такође напоменути, да су психолошка истраживања показала, да до 80% информација добија путем чула вида.

Визуализација

На основу претходних разматрања, може се поставити питање, да ли ове идеје о равномерном ангажовању обе хемисфере великог мозга, могу да учине ефикаснијом наставу математике; да ли могу да помогну да ученици лакше усвајају математичке садржаје; да ли могу да покрену интересовање за математику?

На основу резултата наведених истраживања може се поставити следећи проблем: „Како конципирати наставу математике, тако да она буде заснована на уравнотеженом раду леве и десне хемисфере великог мозга, односно, на разумној комбинацији логичког и очигледно-фигуративног мишљења“?

Управо наведена истраживања указују на могућност да у наставном систему настава уз помоћ рачунара принцип очигледности добија нови смисао. Наиме, очигледност, коју пружа рачунар, омогућује когнитивно-визуално представљање наставног садржаја, не само у виду слика и текста, већ омогућује визуализацију оних људског знања, која захтевају виши ниво апстракције.

Резник Н. А. под **визуализацијом наставног градива** подразумева презентацију, структурирање и формирање образовних знања, коришћењем информационог садржаја статичких (писаних, папирних), или динамичких (рачунар, мултимедија) наставних средстава. Овај садржај треба да се заснива на сталној интеракцији три начина презентовања информација (текст-слика-формула), што доводи до формирања целовите образовне слике, која омогућује активирање визуалног мишљења ученика, приликом изучавања наставних предмета различитих области, [85].

Касније, такође амерички научник Иран Зејдел, настављајући рад Нобеловца Сперија, открио је да свака хемисфера садржи много више способности „друге стране”, него што се раније мислило и да је свака хемисфера способна за много шири и много суптилнији дијапазон менталних активности.

Такође, резултати ових истраживања показују да хемисфере великог мозга могу да раде интегрисано, тј. да подједнако коришћење интелектуалних могућности, леве и десне хемисфере мозга, даје максималан интелектуални резултат.“

То показује пример слушања песме: тада лева хемисфера региструје речи песме, а десна региструје музику. Речи песме које прати музика уче се веома лако, без неког напора, много лакше него речи, које не прати музика. Основни закључак је да је процес учења знатно бржи, ако су ангажоване обе хемисфере великог мозга.

Дакле, основу **визуализације наставних садржаја** чине сазнајна и сврсисходна употреба наставних средстава, која су специјално дизајнирана и организована на посебан начин, да подстичу усвајаање наставних садржаја и мисаоних операција са њима.

Д. Тол у [104] види рачунар, као средство за визуализацију наставног садржаја математике „Повећана доступност рачунара са графиком високе резолуције допринела је могућностима побољшаног визуалног начина мишљења о математици уопште, и, посебно, рачуну (калкулусу). Интерактивни рачунарски софтвер се може искористити за давање визуалне слике ученицима, наставницима и професионалним математичарима на начин који је, до скора, био непојмљив. Ипак, технологија са собом доноси изазове разматрања онога што је битно у програму (курикулуму), а то је задатак који се показао тежим за професионалне математичаре са богатим искуством из периода пре појаве рачунара“.

Ови услови подразумевају постојање, како традиционалних очигледних наставних средстава, тако и специјализованих средстава и поступака, за активирање рада органа вида.

Покушаји да се визуализује математика, да се учини очигледнијом, предузимани су врло давно. Антички математичари су покушавали да најелементарније алгебарске идентитете и теореме представље у геометријском облику. Касније, заговорници разумне визуализације математике биле су такви научници, као на пример: Ојлер, Риман[9], Хилберт[10], ...

Без визуалне слике, знања ученика бивају лишена садржаја, што несумњиво води у формализам. Треба истаћи да, увек када је могуће да одређени математички концепт добије визуално тумачење, онда ту могућност треба искористити. Другим речима, у дидактичком систему настава уз помоћ рачунара, **визуализацију наставних садржаја**, кад год то услови дозвољавају, треба третирати као **начело од кога се у настави не одступа**, као **дидактички принцип**.

Основа принципа визуализације је когнитивна графика, чији је циљ формирање комбинованих когнитивних модела репрезентације наставног садржаја, који у себи садрже симболички и геометријски начин мишљења и доприносе активизацији сазнајног процеса. Међутим, коришћење визуалне информације не треба да одведе у другу крајност – „скретање ка десној хемисфери“, већ треба користити и вербалну информацију. Оптималним се сматра разуман спој оба начина представљања информација у наставном процесу, и визуални, и вербални.

[9] **Бернард Риман** (нем. Riemann Berngard, 1826 – 1866.) велики немачки математичар, дао значајан допринос развоју математичке анализе и диференцијалне геометрије

[10] **Давид Хилберт** (нем. Hilbert David, 1862 – 1943.), велики немачки математичар, дао велики допринос развоју неколико математичких дисциплина (Хилбертов: систем аксиома, простор, ...)

Д. Тол у раду [100] уочава и формулише разлику између когнитивних процеса на којима су засновани математички концепти, и формално дефинисаних математичких концепата, тј. објашњава разлику између **слике концепта** и **дефиниције концепта**.

У овом раду, Д. Тол користи „термин **слика концепта**, за описивање укупне когнитивне структуре, која је повезана са концептом, која укључује све менталне приказе и (са њим) повезана својства и процесе. **Слика концепта** се формира током времена кроз искуства свих врста, мењајући се током сазревања појединца стимулисаног различитим подстицајима“.

Д. Тол у истом раду даље наводи: „Сматраћемо да је **дефиниција концепта** један скуп речи који се користи да се одреди тај концепт. **Дефиницију концепта** појединац може да научи, или напамет, или на смислен начин, повезујући је, у већој, или мањој мери, са концептом као целином. То, такође, може бити лична конструкција ученика. То онда постаје скуп речи које ученик користи за сопствено објашњење, своје (евоциране) слике концепта. Било да му је дефиниција концепта дата, или да је сам конструисао, она се може мењати током времена. На тај начин **индивидуална дефиниција** концепта, може се разликовати од формалне дефиниције концепта, тј. од оне дефиниције концепта, која је општеприхваћена од стране стручне математичке јавности. Свака индивидуална дефиниција концепта, створена код појединца, генерисана је сопственом сликом концепта“, [100].

То значи да **слика концепта** представља главно средство које, приликом изучавања апстрактних математичких концепата, омогућује свесно оперисање концептима и закључцима, њихово утврђиваање и "оживљавање" у свести.

У настави, **слике математичких концепата** испуњавају важне функције, као што су на пример: усвајање, чување и репродукција информација, стварање напредних програма понашања, референтна функција, управљање операцијама, итд.

Основна идеја когнитивно-визуалног приступа у формирању знања, вештина и навика у настави математике јесте: широко и целисходно коришћење когнитивних функција очигледности. Когнитивно-визуални приступ има за циљ васпитање „математичког погледа на свет“.

Примери који следе треба да покажу, како се уз помоћ динамичког цртежа прво формира слика концепта, а на основу ње, постепено се изграђују особине, генерише се (поменута индивидуална) дефиниција и на крају се формира сам концепт.

Другим речима, примери треба да илуструју креирање концепата разматрањем већег броја примера процеса у акцији. На тај начин се уочавају и сагледавају одређене правилности, а такође, концепти могу бити тестирани варирањем параметара, чиме се стварају претпоставке о ситуацијама које се још нису десиле.

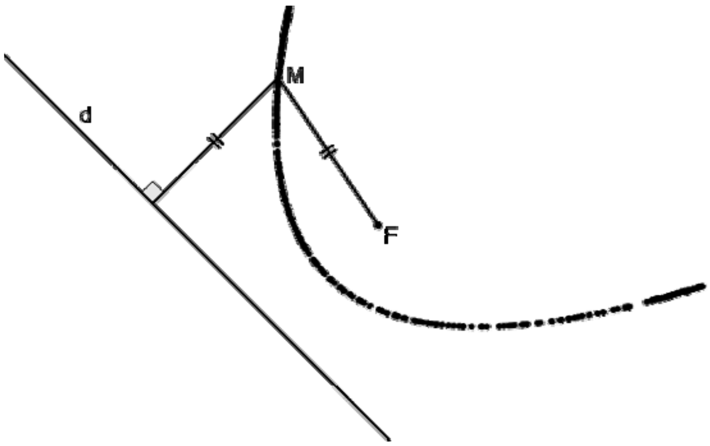
Пример 1. Дефиниција, конструкција и једначина параболе

У равни, одређеној датом правом d и тачком F, која јој не припада, уочимо тачку M, различиту од F, која такође не припада правој d, (Слика 1.). Нека тачка M има особину да су њена растојања од праве d и тачке F - једнака, тј. нека је

$$d(M,d)=d(M,F).$$

Кликом на линк (3.4.1. ggb) активира се апликација GeoGebra, где се померањем тачке M, уочава наведена њена особина.

Применом наредбе **Pomeranje** и укључивањем опције **Uključi trag**, на тачку M, она описује скуп тачака које представљају контуру једне криве линије. Крива се зове **парабола**, права d – директриса, а тачка F - фокус, или жижа.



Слика 1.

Напомена 1. Ако су у програму GeoGebra задате права d и тачка F, уношењем у **Polje za unos** наредбе **Parabola[F,d]**, добија се график параболе, са директрисом d и жижом F. Избором произвољне тачке M на параболи, а затим применом алата **Prikaži (sakrij) objekat** на конструисану параболу, на екрану остаје тачка M приказана у апликацији GeoGebra – 3.4.1. ggb. □

Сада се може дефинисати парабола, са директрисом d и жижом F, као**:**

Дефиниција 1. Нека је d дата права - **директриса** и нека је F дата тачка – **фокус** (жижа), ван праве. **Парабола** је скуп тачака равни α одређене правом l и тачком F, **чија су растојања од директрисе** d **и жиже** F **- једнака.**

Тачка параболе, која је најближа директриси, зове се **теме**, права одређена жижом и теменом оса, а број $p=d(F,d)$ зове се **параметар параболе**. Значајно је напоменути да променом положаја жиже F, у односу на директрису d, увећавањем и смањивањем растојања $d(F,d)$, тј. варирањем параметра p, парабола мења облик, тј. постаје "шира", односно "ужа". Ове особине се могу анализирати кликом на линк (3.4.2.ggb), покретањем апликације GeoGebra.

Конструкција параболе, са датом жижом F и директрисом d, изводи се по дефиницији, и добија се кликом на линк (3.4.3.ggb), покретањем апли-кације GeoGebra. Задавањем ових елемената задат је и параметар $p = d(F,d)$, који се добија уношењем у **Polje za unos** наредбе **p = Rastojanje[F,d]**. Прво се наредбом **Nova tačka** конструише тачка L, на растојању од директрисе d, не мањем од $p/2$, тј.

$$r = d(L,d) \geq \frac{p}{2},$$

и у тачки L права $l \parallel d$. Затим се конструише кружница $\mathcal{K}(F,r)$ и одреди се њен пресек са правом l, тј.

$$\mathcal{K}(F,r) \cap l = \{A,B\} \text{ или } \mathcal{K}(F,r) \cap l = \{A\}.$$

Прво се кликом на тачку A, укључује опција **'Uključi trag'**, (иста наредба се примењује и на тачку B). Затим се, применом наредбе **Pomeranje** на тачку L, помера и права l, увећава се полупречник кружнице $\mathcal{K}(F,r)$, а тачке A и B, описују скуп тачака које припадају параболи. Провера исправности поступка конструкције, може се извршити уношењем наредбе **Parabola[F,d]** у **Polje za unos**.

У алгебарском прозору, ако је отворен, поред слова које означава параболу записана је и квадратна једначина са две променљиве, која представља једначину параболе. Ако се искључи наредба **'Uključi trag'** и врши померање жиже, онда варира параметар p параболе, што има за последицу промену облика параболе и промену коефицијената у њеној једначини.

Једначина параболе, у специјалном случају: за $F\left(\frac{p}{2},0\right)$ и $d: x = -\frac{p}{2}$, изводи се такође по дефиницији, тј. применом једнакости

$$d(M,F) = d(M,d),$$

одакле је

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \left|x+\frac{p}{2}\right|,$$

где је $M(x,y)$, произвољна тачка параболе. Квадрирањем последње једнакости и сређивањем, добијамо једначину параболе

$$y^2 = 2px.$$

Поступак извођења ове једначине (као и једначине $y^2=-2px$, за $F\left(-\frac{p}{2},0\right)$ и $d:x=\frac{p}{2}$) добија се и кликом на линк (3.4.4.ggb), покретањем апликације GeoGebra. Кликом на линк (3.4.5.ggb), добија се парабола чија је једначина

$$x^2=2py,$$

у специјалном случају: за $F\left(0,\frac{p}{2}\right)$ и $d:y=-\frac{p}{2}$, као и једначине $x^2=-2py$, за $F\left(0,-\frac{p}{2}\right)$ и $d:y=\frac{p}{2}$. □

У наведеном примеру изложен је когнитивно – визуални приступ у изградњи једног математичкиг концепта, изградњи појма параболе, коришћењем директоријалног својства, тј. односа растојања произвољне тачке криве од жиже и њеног растојања од директрисе.

Напомена 1. Сличним поступком је могуће визуализовати изградњу појма елипсе и хиперболе, коришћењем одговарајућег својства.

У претходном примеру, тачка $M(x,y)$ описује параболу, а однос њених растојања од жиже и од директрисе, обележимо га са e, константан је и једнак је 1, тј. важи

(1) $$\frac{d(M,F)}{d(M,d)}=e,$$

при чему је $e=1$, када тачка M описује параболу.

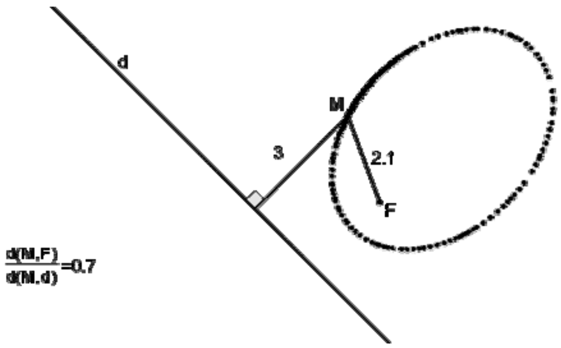
Ово је погодан тренутак да се анализа настави у два смера, тј. да се анализирају још два случаја:

1. $e\in(0,1)$ - када тачка $M(x,y)$ описује елипсу и
2. $e>1$ - када тачка $M(x,y)$ описује хиперболу,

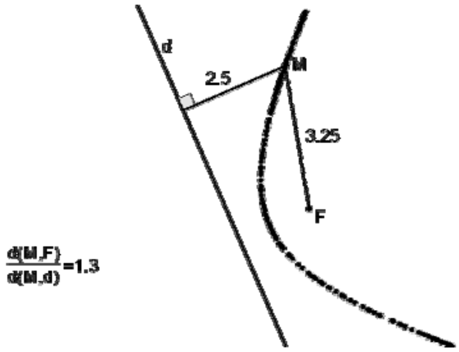
одакле непосредно следе и дефиниције елипсе и хиперболе. За конструкцију, обе криве, задају се коефицијенти $a,b,c\in\mathbb{R}$, за $a^2+b^2\neq 0$, координате $p,q\in\mathbb{R}$ и број $e>0$, и конструишу се: права $d:ax+by+c=0$ и жижа $F(p,q)$, тако да $F\notin d$. Затим се у **Polje za unos** уноси једначина

(2) $$e\cdot(ax+by+c)=\operatorname{sgn}(-c)\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{(x-p)^2+(y-q)^2},$$

која представља координатни запис једначине (1), познат и као **директоријално својство** криве другог реда.



Слика 2.



Слика 3.

Поступак у коме се, полазећи од слике концепта елипса (Слика 2.), или хипербола (Слика 3), варирањем параметара стиже до дефиниције концепта елипса, односно хипербола, реализује се кликом на линк (3.4.6.ggb), покретањем апликације GeoGebra.

Аналогно конструкцији параболе, непосредно из дефиниције (уз уважавање директоријалног својства) конструише се елипса, за $e \in (0,1)$, односно хипербола, за $e > 1$, што се реализује кликом на линк (3.4.7.ggb), покретањем апликације GeoGebra. □

За акумулацију визуалних искустава корисни су специјални – **визуализовани задаци**. Визуализованим се сматра онај задатак у коме се слика експлицитно или имплицитно укључује у услове и одговоре, поставља метод за решавање проблема, даје подршку у свакој етапи решавања задатка, било експлицитно или имплицитно прати у одређеним фазама њена решења [24].

У примерима који следе, решења су значајно олакшана захваљујући експлицитном коришћењу одговарајућих слика (графици, цртежи и сл.). Те слике обогаћују информацију о посматраним објектима и њиховим међусобним односима, дајући очигледности сазнајну (когнитивну) функцију, за разлику од обичне, илустративне.

Пример 2. Анализа услова да две тачке одређују централну елипсу

У овом одељку анализирамо следећи задатак.

Задатак 1. Утврдити услове које треба да испуњавају координате тачака A и B, тако да оне једнозначно одређују елипсу

(1) $$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2,$$

где је $a \neq 0$ и $b \neq 0$.

Решење. Нека су у Декартовом правоуглом координатном систему дате тачке

$A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$. Пошто свака тачка елипсе (1) одређује још три, њој симетричне тачке елипсе (у односу на сваку од координатних оса и у односу на координатни почетак), то значи да две задате тачке у координатном систему, могу представљати довољан број елемената да се изведе конструкција елипсе (1).

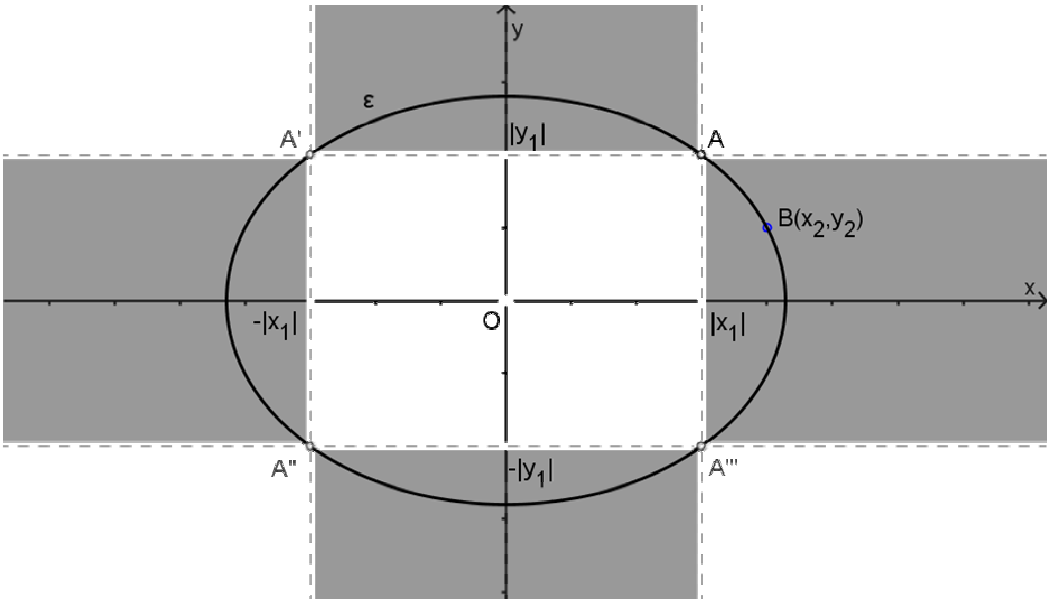
За конструкцију елипсе (1), коришћењем ових тачака активира се апликација GeoGebra, кликом на линк (3.4.8.ggb). Прво се конструишу: тачка A', симетри-чна тачки A, у односу на $y-$осу, уношењем у **Polje za unos** наредбе $\boxed{\mathbf{A' = Ogledanje[A, yOsa]}}$, а истом наредбом тачка A''' симетрична тачки A, у односу на $x-$осу, као и тачку A'' симетрична тачки A, у односу на координатни почетак. Затим се конструише елипса ε, одређена тачкама A, A', A'', A''' и B, уношењем у **Polje za unos** наредбе $\boxed{\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{= KonusniPresek[A, B, A', A'', A''']}}$. Нека је тачка A фиксирана (због чега су фиксиране и тачке A', A'' и A'''), а нека се тачка B помера применом наредбе **Pomeranje**. Померањем тачке B мења се облик криве ε, која је за неке положаје тачке B елипса, а за неке хипербола.

Под којим условима крива ε представља елипсу?

Да се то установи, прво се конструише права $p(A, A')$, уношењем у **Polje za unos** наредбе $\boxed{\mathbf{n = Prava[A, A']}}$, а затим се истом наредбом, конструишу праве

$$p(A'', A'''),\ p(A, A''') \text{ и } p(A', A'').$$

Сада се кликом на линк (3.4.9.ggb) и покретањем апликације GeoGebra, може уочити одређена правилност, о којој говори следећа теорема.



Слика 4.

Теорема 1. *Ако тачка B припада унутрашњости било кога од четири маркирана "правоугаоника", који су одређени тачком A, (Слика 4.), одакле су искључене тачке правих $p\left(A,A'\right)$, $p\left(A'',A'''\right)$, $p\left(A,A'''\right)$ и $p\left(A',A''\right)$, онда је овако задатим тачкама A и B, једнозначно одређена елипса (1).*

Припадност тачке B унији унутрашњости, наведена четири плава "правоугаоника", који су одређени положајем тачке A, записујемо у форми Декартовог производа, на следећи начин:

$$(2)\quad \left(x_2,y_2\right)\in\left(\left(\left(-\infty,-\left|x_1\right|\right)\bigcup\left(\left|x_1\right|,\infty\right)\right)\times\left(-\left|y_1\right|,\left|y_1\right|\right)\right)\bigcup\left(\left(-\left|x_1\right|,\left|x_1\right|\right)\times\left(\left(-\infty,-\left|y_1\right|\right)\bigcup\left(\left|y_1\right|,\infty\right)\right)\right),$$

или

$$\left(x_2\in\left(-\infty,-\left|x_1\right|\right)\cup\left(\left|x_1\right|,\infty\right)\wedge y_2\in\left(-\left|y_1\right|,\left|y_1\right|\right)\right)\vee\left(x_2\in\left(-\left|x_1\right|,\left|x_1\right|\right)\wedge y_2\in\left(-\infty,-\left|y_1\right|\right)\cup\left(\left|y_1\right|,\infty\right)\right)$$

,

што је еквивалентно са

$$(3)\qquad \left(\left|x_1\right|<\left|x_2\right|\wedge\left|y_2\right|<\left|y_1\right|\right)\vee\left(\left|x_2\right|<\left|x_1\right|\wedge\left|y_1\right|<\left|y_2\right|\right).$$

Последња релација је еквивалентна са

$$(4)\qquad \left(x_1^2-x_2^2<0\wedge y_2^2-y_1^2<0\right)\vee\left(x_1^2-x_2^2>0\wedge y_2^2-y_1^2>0\right),$$

одакле очигледно следи и релација:

$$(5)\quad \left(x_1^2-x_2^2<0\wedge y_2^2-y_1^2<0\right)\Rightarrow x_1^2y_2^2-x_2^2y_1^2<0\ \vee\ \left(x_1^2-x_2^2>0\wedge y_2^2-y_1^2>0\right)\Rightarrow x_1^2y_2^2-x_2^2y_1^2>0.$$

С друге стране, услов да тачке A и B припадају елипси (1), еквивалентан је

систему линеарних једначина са две променљиве $1/a^2$ и $1/b^2$

$$x_1^2/a^2+y_1^2/b^2=1 \text{ и } x_2^2/a^2+y_2^2/b^2=1,$$

који, под условом (3), односно (4) и (5), има једнозначно одређена, позитивна решења

$$a^2=\left(x_1^2y_2^2-x_2^2y_1^2\right)/\left(y_2^2-y_1^2\right) \quad \text{и} \quad b^2=\left(x_1^2y_2^2-x_2^2y_1^2\right)/\left(x_1^2-x_2^2\right),$$

тј. $a^2,b^2\in\mathbb{R}^+$.

То значи да, за дате тачке $A\left(x_1,y_1\right)$ и $B\left(x_2,y_2\right)$, чије координате испуњавају услов

$$\left(\left|x_1\right|<\left|x_2\right|\wedge\left|y_2\right|<\left|y_1\right|\right)\vee\left(\left|x_2\right|<\left|x_1\right|\wedge\left|y_1\right|<\left|y_2\right|\right),$$

постоје једнозначно одређени бројеви $a,b\in\mathbb{R}^+$ – полуосе елипсе, тј. дате тачке A и B једнозначно одређују елипсу (1). □

Овај визуализовани задатак показује могућности које приужа когнитивно-визуални приступ у решавању задатака, почев од слике концепта, до изграђивања самог концепта.

Приказани пример такође показује како се функција слике као помоћног, илустративног средства, трансформише у водеће, когнитивно средство, средство које генерише математичке концепте, средство које потпомаже развијање математичког мишљења.

Напомена 2. Аналогним поступком може се извести још један закључак.

Теорема 2. *Ако тачка B припада унутрашњости било кога од пет маркираних "правоугаоника", који су одређени тачком A, (Слика 5.), одакле су искључене тачке правих $p(A,A')$, $p(A'',A''')$, $p(A,A''')$, $p(A',A'')$, $p(A,A'')$, $p(A',A''')$ и координатни почетак $O(0,0)$, онда је овако задатим тачкама A и B, једнозначно одређена хипербола*

(6) $$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 .$$

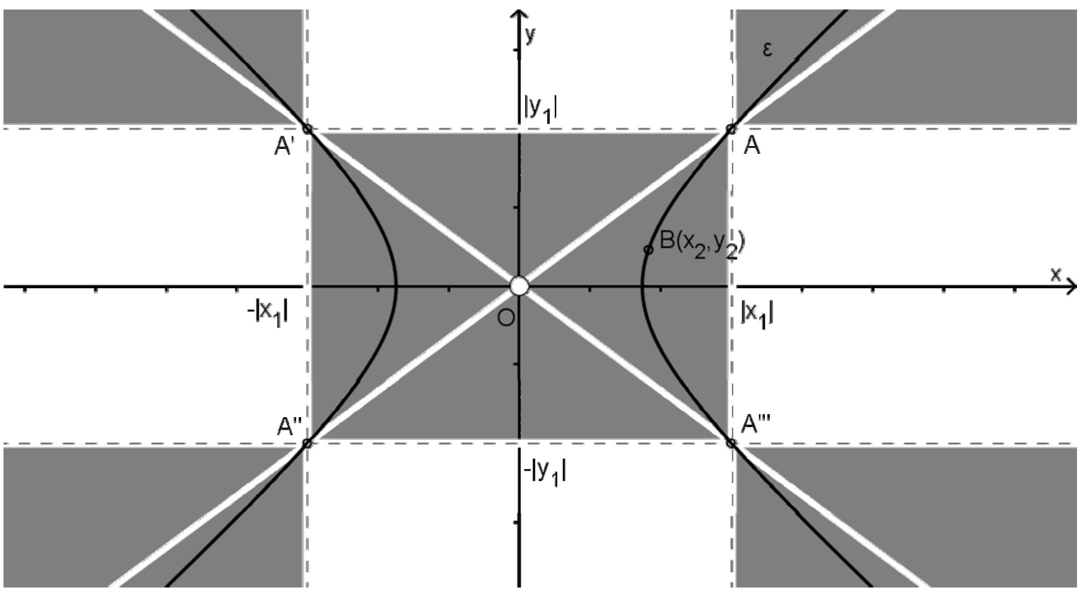
То значи да, за дате тачке $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$, чије координате испуњавају услове

$$\left(|x_1| < |x_2| \wedge |y_1| < |y_2|\right) \ \vee \ \left(|x_2| < |x_1| \wedge |y_2| < |y_1|\right)$$

и

$$x_1y_2 - x_2y_1 \neq 0 \ \text{ и } \ x_1y_2 + x_2y_1 \neq 0$$

једнозначно одређују хиперболу (6). Ово разматрање се може добити кликом на линк (3.4.10.ggb), активирањем апликације GeoGebra. □



Слика 5.

Задатак 2. Тачке A и B одређују, елипсу или хиперболу, са центром у координатном почетку. Саставити њену једначину, ако је: а) $A(9,4)$ и $B(-12,-3)$, б) $A(3,2)$ и $B(4,3)$.

Решење. Како је а) $|x_1|<|x_2| \wedge |y_2|<|y_1|$, б) $|x_1|<|x_2| \wedge |y_1|<|y_2|$, то тачке A и B одређују: а) елипсу $\varepsilon : x^2+9y^2=225$, б) хиперболу $\chi : 5x^2-7y^2=17$, што се добија и кликом на линк (3.4.9.ggb), или (3.4.10.ggb), активирањем апликације GeoGebra. □

Пример 3. Линеарна неједначина са две непознате

За решавање линеарне неједначине са две непознате

$$ax+by+c\rho 0$$

где је $a,b,c\in\mathbb{R}$, $a^2+b^2\neq 0$ и $\rho\in\{\geq,\leq,>,<\}$, пођимо прво од појма полуравни.

Познато је, наиме, да свака права у равни дели скуп свих тачака равни на два дисјунктна подскупа, две отворене полуравни.

Прецизније, **отворена полураван** са ивицом l, која садржи тачку A, у ознаци $(l\alpha_A)$, представља скуп тачака равни α, које се налазе са исте стране праве l, као и тачка A. Унија отворене полуравни $(l\alpha_A)$ и праве l је **затворена полураван** $[l\alpha_A)$. Приказ полуравни се може добити кликом на линк (3.4.11.ggb), активи-рањем апликације GeoGebra.

Дакле, за дате параметре $a,b,c\in\mathbb{R}$, уношењем у **Polje za unos** једначине $l: ax+by+c=0$, конструишемо праву l, а наредбом **Nova tačka** конструишемо тачку $A(x_0,y_0)$ и нека је $ax_0+by_0+c=\Omega_A$, а такође и тачку $T(1,0)$. Померањем тачке A, применом наредбе **Pomeranje**, величина Ω_A узима разне вредности у скупу $\mathbb{R}$ и може се уочити следећа правилност: када $A\in l$, онда је $\Omega_A=0$, а када тачка A, прелази из једне у другу полураван са ивицом l, Ω_A мења знак, што се може анализирати кликом на линк (3.4.12.ggb), активирањем апликације GeoGebra.

Другим речима то значи, да ако је $A\in[l\alpha_T)\Leftrightarrow\Omega_A\geq 0$, онда скуп свих тачака затворене полуравни $[l\alpha_T)$ представља скуп решења неједначине $ax+by+c\geq 0$, и скуп свих тачака затворене полуравни $[l\alpha'_T)$ представља скуп решења неједначине $ax+by+c\leq 0$, при чему је $[l\alpha_T)\cup[l\alpha'_T)=\alpha$. Такође, релација $A\in(l\alpha_T)\Leftrightarrow\Omega_A>0$, значи да скуп свих тачака отворене полуравни $(l\alpha_T)$ представља скуп решења неједначине $ax+by+c>0$, и скуп свих тачака отворене полуравни $\left(l\alpha'_T\right)$ представља скуп решења неједначине $ax+by+c<0$.

Овај резултат се добија кликом на линк (3.4.13.ggb), активирањем апликације GeoGebra.

Можемо закључити да, решити неједначину

$$ax+by+c\ \rho\ 0,$$

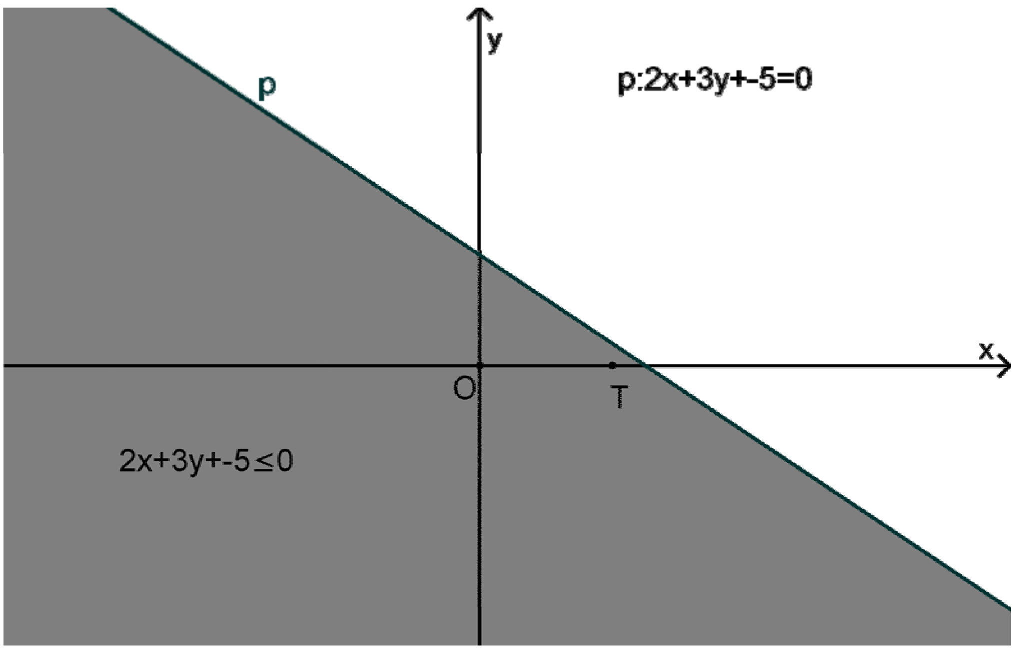
за $a,b,c\in\mathbb{R}$, $a^2+b^2\neq 0$ и $\rho\in\{\geq,\leq,>,<\}$ значи: одредити затворену, или отворену, полураван са ивицом $l: ax+by+c=0$, тако да координате тачака полуравни задовољавају дату неједначину

Задатак 3. Реши неједначину $2x+3y-5\leq 0$.

Решење. Кликом на линк (3.4.13.ggb) покренуће се апликација GeoGebra, Слика 6. Уређени пар координата сваке тачке затворене полуравни, одређене ивицом l, и координатним почетком, јесте решење неједначине, и можемо га приказати на следећи начин

$$(-\infty<x<\infty)\wedge\left(-\infty<y\leq(-2x+5)/3\right)$$

или у облику



Слика 6.

$$(x,y)\in(-\infty,\infty)\times\left(-\infty,(-2x+5)/3\right].\qquad\square$$

Претходно теоријско разматрање приказује поступак, у коме се полазећи од слике одређеног објекта, од слике полуравни, тестирањем већег броја примера процеса у акцији, уочавају одређене правилности које карактеришу тачке и ивицу полуравни, на основу којих се генерише сам концепт линеарне неједначине са две непознате и поступак за њено решавање.

Задатак 3. илуструје примену овог поступка на решавање линеарне неједначине са две непознате, у програму GeoGebra.

Следећи пример илуструје примену истог поступка (слика као илустративно средство, прелази у средство које генерише математички концепт), на једном сложенијем примеру: решавању система линеарних неједначина са две непознате, коришћењем програмског пакета Matheamtica.

Пример 4. Системи линеарних неједначина са две непознате

Задатак 4. Решити систем линеарних неједначина

$$\left.\begin{array}{l} x-2y+10\geq 0 \\ 3x-2y+5\leq 0 \\ 2x+3y-1>0 \end{array}\right\}.$$

Решење. На основу напред изложеног теоријског разматрања и Примера 1. можемо закључити да прва неједначина представља скуп тачака затворене полуравни са ивицом $a: x-2y+10=0$, која садржи координатни почетак, друга је скуп тачака затворене полуравни са ивицом $c: 3x-2y+5=0$, која не садржи координатни почетак, а трећа је скуп тачака отворене полуравни, са ивицом $b: 2x+3y-1=0$, која такође не садржи координатни почетак Решење прве неједначине се добија покретањем апликације Matheamtica, кликом на линк (3.4.14.nb), и оно гласи

$$(x,y)\in(-\infty,\infty)\times\left(-\infty,\frac{x}{2}+5\right].$$

Кликом на линк (3.4.15.nb) и покретањем апликације Matheamtica, добија се решење система линеарних неједначина

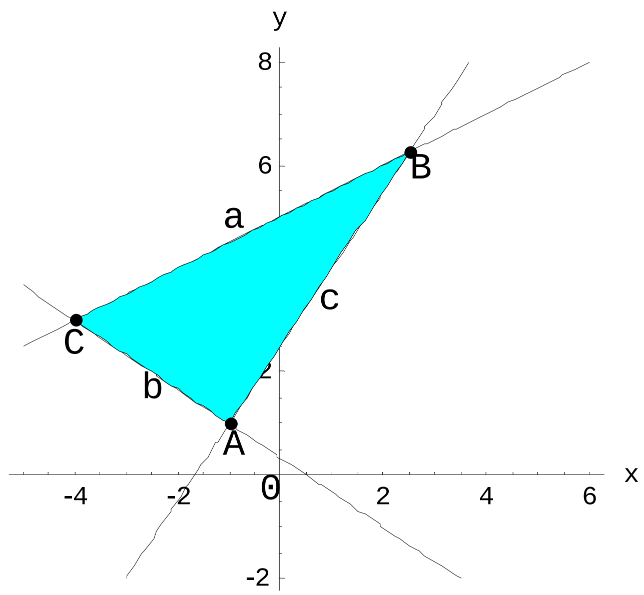
$$\left.\begin{array}{l} x-2y+10\geq 0 \\ 3x-2y+5\leq 0 \end{array}\right\},$$

представља пресек прве две полуравни, са ивицама a и c, а оно износи

$$(x,y)\in\left(-\infty,\frac{5}{2}\right]\times\left[3x+5,\frac{x}{2}+5\right].$$

Коначно, дати систем (конјункција) неједначина представља пресек све три наведене полуравни, тј. представља скуп тачака T троугла из кога су искључене тачке затворене дужи $[AC]$, (Слика 7.),

$$T(x,y)\in \Delta ABC\setminus[AC]$$



Слика 7.

Решење датог система је

$$(x,y)\in\left(\left(-4,-1\right]\times\left(-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3},\frac{x}{2}+5\right]\right)\cup\left(\left(-1,\frac{5}{2}\right]\times\left[\frac{3}{2}x+\frac{5}{2},\frac{x}{2}+5\right]\right),$$

добија се кликом на линк (3.4.16.nb), покретањем апликације Matheamtica.

3.5. Образовни софтвер

Настава уз помоћ рачунара, подразумева употребу образовног (рачунарског) софтвера. У зависности од намене у наставном процесу можемо разликовати неколико типова образовног софтвера. Управо тип образобног софтвера опредељује место рачунара у настави.

Један тип образовног софтвера предодређен је за **утврђивање градива**. Место таквог софтвера није тешко дефинисати: њега је могуће користити после усвајања одређеног дела теоријских наставних садржаја у оквиру традиционалног наставног система.

Други тип софтвера оријентисан је првенствено на **усвајање нових појмова**, у режиму веома блиском програмираној настави. Већина софтвера овог типа поседује ограничене дидактичке могућности. Овде се рачунар користи као средство програмиране наставе, нешто савршеније него просто наставно средство, које не допушта могућност дијалога, и по правилу, садржи ограничен опсег образовног деловања.

Преовладава образовни софтвер који **реализује проблемску наставу**, посебно "интелектуални" образовни софтвер (својим називом он упућује на то да су приликом његове разраде коришћене идеје "искуствене интелигенције"). Овај образовни софтвер реализује рефлексивно управљање наставним процесом, што претпоставља изградњу наставног модела. Овај тип образовног софтвера генерише наставну активност (текст, задатке, питања, помоћ у решавању). Он по правилу, узима у обзир исправност одговора, али и начин решавања, може да оцени одговор, а неки и да усавршава стратегију наставе евидентирањем накупљеног искуства.

Постоји образовни софтвер који може да **дискутује са учеником**, не само исправност решења, него и могуће варијанте решења, при чему се дискусија води језиком који је близак говорном. По мишљењу педагога и психолога, који су се упознали са протоколима ове врсте дијалога, ствара се утисак као да разговарају ученик и наставник.

Следећи тип образовног софтвера претпоставља **моделирање и анализу конкретних ситуација**. Такав је софтвер посебно користан у радном и професионалном образовању, посебно ако потпомаже формирање умења за проналажење решења у различитим, па и у неким екстремним ситуацијама.

Коначно, могуће је издвојити и онај образовни софтвер који **изграђује видео – игре**. Он поспешује подизање нивоа мотивације (ваља приметити да такмичарски мотиви, жеља за победом, понекад надвладавају сазнајне мотиве, што тешко да је оправдано). Игра стимулише иницијативу и стваралашко мишљење потпомаже формирању афинитета за тимски рад (посебно у кооперативним играма) и подређивање личног интереса општем циљу. Поред тога, игра дозвољава да се изађе из оквира одређеног наставног предмета, побуђујући учеснике да усвајају знања из других, сродних области и на практичну делатност. Игре код ученика стварају претпоставке за формирање најразличитијих стратегија решавања задатака и структура знања које могу бити успешно коришћење у разним областима. Није неважно и то, да ученик може слободно да налази решења – како тачна, тако и нетачна – и да на тај начин увиђа, где води свако од њих.

Настава уз коришћење оваквих игара, веома је привлачна за ученике и многима се толико допада, да би хтели да се комплетна настава реализује путем игре.

3.5.1. Образовни софтвер у настави математике

Образовни софтвер у настави математике уз помоћ рачунара има, свакако, неке специфичности, које нису карактеристичне за образовни софтвер који се користи у настави других наставних предмета. Ове специфичности су условљене потребом да образовни софтвер буде примерен циљевима и задацима наставе, узрасту ученика, наставним садржајима, типу часа, као и дидактичким принципима (видети 3.4.) и наставним методама, (видети 3.6.).

Посебно је важно да образовни софтвер у настави математике обезбеђује услове за: самосталан рад и индивидуализацију наставе, визуализацију наставног садржаја, са посебним нагласком на примену проблемске и истраживачке наставне методе, (видети 3.6.4. и 3.6.5.).

Динамички геометријски системи

У настави геометрије, данас у свету, широку примену имају **динамички геометријски системи** (Dynamic Geometry Systems, DGS). "Уобичајено је да се у системима динамичке геометрије објекти могу посматрати аналитички, преко својих координата и једначина. Обрнуто, да се задају координате и једначине и да се потом појави графичка презентација датих објеката која би се могла још и мењати директно помоћу миша у овим системима није могуће" [113]. У тексту који следи, у кратким цртама су наведене основне карактеристике неких од ових система.

Geometer's Sketchpad, [134] је популаран комерцијални интерактивни геометријски софтвер за упознавање Еуклидске геометрије, алгебре, рачуна, као и других области математике, чији је креатор Николас Џекју (Nicholas Jackiw). Geometer's Sketchpad обухвата традиционалне Еуклидове алате класичних геометријских конструкција, то јест, ако се фигура (као што је петнаестоугао) може конструисати помоћу шестара и лењира, може се конструисати и коришћењем овог програма. Међутим, програм омогућава корисницима и да користе трансформације за конструкције објеката који се не могу конструисати традиционалним шестар-лењир правилима (као што је правилни деветоугао). Програм се може користити и за анимацију објеката.

Cabri Geometry [135] је геометријски комерцијални интерактивни софтвер произведен од стране француске фирме Cabrilog за наставу и учење геометрије и тригонометрије. Систем је пројектован тако да се може лако користити. Програм омогућава кориснику анимацију геометријских фигура, као и показивање односа између тачака на геометријским објектима, што може бити корисно у процесу учења. Ту су и графички приказне функције, што омогућава проучавање веза између геометрије и алгебре.

C.a.R. – Compass and Ruler [136] (познат и као Z.u.L, немачки "Zirkel und Lineal") - је бесплатан, интерактивни геометријски софтвер којим се могу изводити геометријске конструкције у еуклидској и нееуклидским геометријама. Софтвер је заснован на програмском језику Java, и, између осталог, омогућава анимацију конструисаних објеката, креирање макроа помоћу којих се могу конструисати компликованији објекти, сакривање детаља конструкције, 3D конструисање итд. Конструкције изведене помоћу овог програма се лако могу интегрисати у WEB – странице.

Cinderella [137] је интерактивни геометријски софтвер, написан у програмском језику Java, од стране Јиргена Рихтер-Герберта (Jürgen Richter-Gebert) и Улриха Кортенкампа (Ulrich Kortenkamp). Осим класичних геометријских конструкција, Cinderella подржава конструкције у сферној и хиперболичној геометрији, поседује алат за доказивање теорема, симулатор процеса из физике, и омогућава генерисање Java аплета који се могу лако интегрисати у WEB – странице.

Geometrix [159] је бесплатан, интерактивни геометријски софтвер написан у програмским језицима Prolog и Free Pascal. Овај програм промовише конструктивистички приступ настави: омогућава наставнику да задаје ученику специфичне геометријске конструкције, при чему програм проверава тачност креираних дијаграма. Може се користити за аутоматско генерисање вежби доказивања, омогућава ученицима конструкцију доказа са аутоматским обавештавањем о сваком кораку у том процесу итд.

Dr. Geo [138] је награђивани интерактивни геометријски софтвер написан у програмском језику Smalltalk. Dr. Geo. омогућава консруисање геометријских фигура и њихову интерактивну манипулацију у складу са сопственим геометријским ограничењима. Употребљив је у настави са ученицима основних и средњих школа. Једноставан је за коришћење и поседује јединствене могућности, као што је скриптовање и програмирање у програмском језику Smalltalk.

EUKLID DynaGeo [139], је интерактивни геометријски софтвер за консруисање динамичких цртежа. Може се користити за креирање свих стандрадних геометријских објеката, поседује стандардне конструкције и трансформације, може се користити за мерење удаљености и углова, омогућава креирање макроа, интегрисање динамичких цртежа у веб странице итд.

Geonext [140] је бесплатни интерактивни динамички геометријски софтвер написан у програмском језику Java на Факултету за математику и дидактику Универзитета у Бајројту. Сличан програму GeoGebra, омогућава аутономно и кооперативно учење математике, и може се користити од основне школе до факултета. Користи се као алат за креирање различитих геометријских конструкција помоћу великог броја алата за конструкцију.

Системи рачунарске алгебре

Програме који пружају могућност за аналитичку обраду геометрије, као и обраду наставних садржаја математичке анализе, алгебре, нумеричке математике и сл., представљају **системи рачунарске алгебре** (Computer Algebra Systems, CAS).

"Код ових алата могуће је координате и једначине геометријских објеката визуализовати, тј. могуће је графички представити и посматрати промене код алгебарских објеката на њиховим графичким приказима. Ова графичка представљања, такозвани Plots, не могу се мењати помоћу миша. Задавање алгебарских објеката није увек једноставно, пошто синтакса ових система често има веома мало заједничког са уобичајеном школском нотацијом. Ови програми могу, између осталог, да решавају алгебарске системе, да одређују, на пример, конусне пресеке. CAS су веома моћни алати опште намене, али не дозвољавају у области аналитичке геометрије никакве директне динамичке промене" [113].

Познати и често коришћени представници ове групе програма су:

Derive [141] је систем рачунарске алгебре имплементиран у програмском језику muLISP. Користи се за обраду алгебарских промењљивих, израза, једначина, функција, вектора, матрица и Буловских израза, у решавању проблема из аритметике, алгебре, тригонометрије, рачуна и линеарне алгебре. Може се користити за цртање графика различитих математичких израза у две или три димензије коришћењем различитих координатних система.

Maple [142] је систем рачунарске алгебре имплементиран у програмском језику C. Дизајниран је за решавање математичких проблема и креирање висококвалитетне техничке графике. Поседује пакете специјализованих функција које се могу искористити у теорији група, линеарној алгебри, статистици, као и у другим областима. Maple убрзава и олакшава ток аналитичког рада – извођењем математичких модела, оптимизацијом параметара, валидацијом решења и брзим обезбеђивањем резултата.

Mathematica

Mathematica је софтверски пакет који је 1988. године креирао Stephen Wolfram, и који се користи у инжињерству, математици, медицини и многим другим научним областима, [143]. *Mathematica* представља моћан софтверски систем за нумеричко, симболичко и графичко рачунање и визуализацију. Осим практичне примене у привреди и индустрији, *Mathematica* се може користити и у научне и образовне сврхе. Овај програмски пакет се већ годинама употребљава у свим фазама учења математике, од основне школе, до високообразовних установа. *Mathematica* обезбеђује комплетно окружење за креирање материјала за курсеве, комбинујући моћне рачунске могућности, као и могућности динамичке визуализације, са професионалном документацијом и алатима за презентацију, што овом софтверском пакету даје најбоље карактеристике DGS и CAS програма.

Mathematica је, структурно, подељена на два дела: језгро (енгл. *kernel*), које служи за интерпретацију израза и враћање резултата, и корисничког интерфејса (енгл. *front end*), који омогућава креирање и измене докумената који садрже програмски код, графике, табеле, звукове итд. Комуникација са другим апликацијама је омогућена помоћу протокола *MathLink,* који служи за комуникацију између језгра и корисничког интерфејса, али и за повезивање између језгра и апликација написаних у другим програмским језицима. *Mathematica*-у је могуће инсталирати на различитим верзијама *Linux*-а, *Mac OS X*-а i *Windows*-а, као и на другим оперативним системима.

GeoGebra

GeoGebra је софтвер у који су инплементиране најбоље карактеристике DGS и CAS програма, а повезује геометрију и алгебру. Развио га је Markus Hohenwarter са Универзитета у Салцбургу за извођење наставе математике. GeoGebra је бесплатна и доступна на више од 45 језика, међу којима и српски и може се преузети преко Интернета, [144].

С једне стране, GeoGebra је DGS алат. Директно интерактивно се могу конструисати тачке, вектори, линије и конусни пресеци и померањем се могу динамички мењати. Поред кругова могу се цртати елипсе, хиперболе и параболе. Конструкције тангенти и полара спадају такође у основне функције. С друге стране, у GeoGebra-и могуће је једначине и координате директно задавати. GeoGebra познаје експлицитне и имплицитне једначине правих и конусних пресека, параметарско представљање правих као и поларне и Декартове координате тачака и вектора. Будући да GeoGebra рачуна са бројевима, угловима, векторима, тачкама, правама и конусним пресецима, може се рећи да је GeoGebra нумерички CAS алат. Због тога GeoGebra нуди више геометријских наредби: одређивање средишта дужи, жижа и темена конусних пресека. Поред тога даје коефицијент правца, вектор правца и нормални вектор једне праве, главне осе и конјуговане дијаметре конусног пресека, [113].

GeoGebra је написана у Java-и, што омогућава да се користи независно од оперативног система, који је у употреби: Windows, Linux, MacOS X, или Unix. Програм је веома једноставан за коришћење, и пружа идеалне услове за само-сталан рад ученика из наведених, веома важних, области школске математике, из геометрије и алгебре. Креирање анимација и једноставне илустрације школског садржаја омогућавају наставнику да за кратко време и веома ефикасно упозна ученике са основним математичким појмовима и знањима.

Радне површине креиране у програму GeoGebra могу се преносити у html и word документе. Поред тога конструкције се могу понављати по вољи, корак по корак, и аутоматски, и ручно, [113].

"Динамичко јединство геометрије и алгебре у GeoGebra-и омогућава ученицима једноставан експериментални прилаз математици. Они могу као сопствени учитељи самостално да напредују, индивидуално и откривачки да раде и уче. Уз чешћу употребу рачунара и овог програма и бољу обученост, пре свега наставника, организација часа може бити и боља и занимљивија од досадашње. Реакције ученика, повратне информације, такође ће утицати на будуће организације часова" [113].

3.5.2. Генерички организатори

Да би описао "интерактивно, рачунарско окружење за учење у којем су предзнања уграђена у систем и у коме ученици могу да постану активне архитекте", Пејперт[1] је први пут употребио израз **микросвет** [94]. У таквим окружењима, деца обично испољавају висок ниво креативности, мада им је за претварање математичких алгоритама у математичке објекте, тј. за "вертикално напредовање" (Пијаже[2]), потребна помоћ са стране.

Рачунар може да реализује алгоритам, брзо и ефикасно, и да представи коначан резултат, на много различитих начина. На пример, резултати могу бити приказани визуално, и њима се може манипулисати физички помоћу миша (тастатуре, џојстика), како би ученик могао да креира унутрашње везе, које су део шире концептуалне структуре. Ово доводи до појма генеричких организатора:

Генерички организатор је окружење (или микросвет) које омогућава ученику да манипулише примерима и (ако је могуће) контрапримерима одређених математичких концепата или, са њим повезаног система концепата, [96].

Генерички организатори могу бити рачунарски програми који одмах дају и одговор на оно што корисник ради. То могу бити и физички објекти као што су Диенесови[3] блокови, који се користе у настави аритметике, за развијање концепата бројних система и представљања вредности рачунских операција у

[1] **Сејмур Пејперт** (енг. *Seymour Papert*; 1928. г. – , у Јужноафричкој Унији) – угледни амерички математичар, програмер, психолог (сарадник Жана Пијажеа) и педагог, један од утемељивача вештачке интелигенције и аутор програмског језика LOGO

[2] **Жан Пијаже** (фр. *Jean William Fritz Piaget*; 1896. – 1980. г.) – велики швајцарски психолог, оснивач Женевске школе, творац једне од најутицајнијих савремених теорија когнитивног развоја

[3] **Золтан Пал Диенес** (мађ. *Zoltán Pál Dienes*; 1916. г. -) мађарски математичар, светски познати теоретичар и творац новог приступа учењу математике, коришћењем дидактичких игара

бројним системима различитих основа. Обично (али не увек) генерички организатори имају визуалне и физичке аспекте који су повезани са фундаменталним процесима људског мозга, његовим чулима и повезаним акцијама [101].

Једна од основних вредности генеричких организатора, огледа се у њиховој **гипкости** и **промењивости**, другим речима што корисник може да управља његовим понашањем, да активно учествује у његовом раду, чак и сам да учествује у креирању.

Ако је корисник наставник, он може да користи генеричке организаторе у демонстрационе сврхе и пред њим се отвара широк простор за педагошко стваралаштво. Током демонстрације, он може по свом нахођењу да бира режим рада и редослед промене параметара испитиваног објекта, да регулише темпо рада, ако је потребно да понавља елементе демонстрације, а у исто време да води разговор са одељењем.

Ако је корисник ученик, онда генерички организатор има улогу предмета истраживања. При томе и ученик има велике могућности за истраживачку и стваралачку делатност, што стимулише развој његових интелектуалних потенцијала, продубљује и учвршћује усвојена знања и увећава интерес за наставни предмет. Такође, ученик стиче елементарна умења рада на рачунару: покретање и прекид програма, уношење података, простија израчунавања и сл.

С друге стране генерички организатор може имати улогу илустративног средства, које подиже ниво очигледности, а посебно ствара услове за визуализацију наставних садржаја.

Рад ученика са генеричким организатором може трајати неколико минута, а може и цео час. У сваком случају неопходна су одређена упутства наставника у вези са организацијом наставне активности, или ако је реч, на пример, о лабораторијском, или о практичном раду, неопходна су поред тога и одређена писана упутства.

Сада издвајамо нека од својстава генеричких организатора, која потпомажу њихову успешну примену у наставном процесу.

Информативност је својство под којим се подразумева могућност генеричких организатора да кориснику даје неопходне информације о изучаваном објекту, при чему се ниво и карактер информација одређују дидактичким циљевима дате наставне активности.

Очигледност је својство које подразумева да информација добијена у раду са генеричким организатором има облик погодан за перцепцију. То се обезбеђује дељењем информација на делове оптималног обима, избором одређеног темпа њихове предаје, применом разних облика њиховог саопштавања (текст, формуле, графици, цртежи и др.), издвајањем из ње суштинских елемената.

Динамичност је својство генеричких организатора, под којим се подразумева могућност промене положаја, фигура на екрану по жељи, што изводи представе и сазнања ученика из статичног у динамичко стање, а познато је, да мишљење и статичност не иду заједно.

Могућност варирања параметара и режима рада, што има за последицу промену положаја, облика, боје, објеката на екрану, тј. анимацију, а у складу с тим и промену њихових нумеричких карактеристика (координате, мере, једначине).

Једноставно управљање, веома је важна генеричких организатора, јер је потребно да пажња корисника буде усмерена на концепте, док је технички део посла који се тиче издавања наредби за рад, секундаран.

Природно, пре него што се приступи формирању (изради) генеричких организатора, неопходно је **у општим цртама дефинисати, који задаци ће се решавати** уз помоћ дате апликације и **на који начин**, тј. да ли ће **ученик самостално** радити са апликацијом, или ће је **користити наставник** у демеонстрационе сврхе итд. Сем тога, потребно је да се корисник сам увери у рачунске, графичке могућности рачунара, на коме ће се реализовати софтверска апликација.

Ако је сличност генеричког организатора и стварне појаве (или објекта), само квалитативна, онда математички апарат генеричког организатора може бити значајно упрошћен у односу на математички апарат стварне појаве. Ако у информацију о генеричком организатору, коју тражи корисник, улазе: бројеви, графици, дијаграми, онда ту треба да постоји подударност на нивоу количинских односа, тј. математички апарат генеричког организатора, или његов део, који описује дато својство појаве или процеса, треба да буде копија математичког апарата појаве, процеса, или њеног дела. Коначно, у једном генеричком организатору део својстава може се описивати само квалитативно, а део квантитативно.

3.5.3. Примери неких генеричких организатора у настави аналитичке геометрије

1. Генерички организаторуи за анализу односа криве другог реда и праве

Један је од значајнијих проблема геометрије, који се посебно третира у аналитичкој геометрији, је однос праве и криве другог реда. У тексу који следи биће анализиран тај однос, у случају елипсе, хиперболе и параболе, и биће представљени генерички организатори, као средство (окружење) за анализу тог односа.

Елипса и права

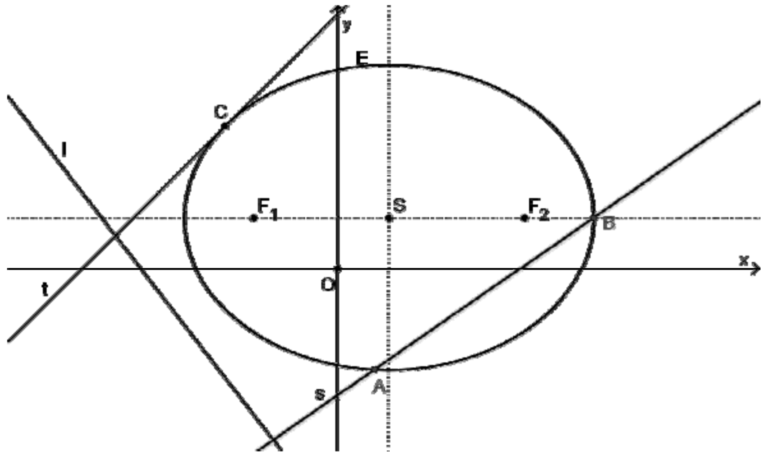
Однос елипсе, са центром $S(p,q)$ и полуосама a и b, и праве l, у настави уз помоћ рачунара може да се анализира решавањем система: једне квадратне (једначине елипсе) и једне линеарне једначине (једначине праве)

(1) $$b^2(x-p)^2 + a^2(y-q)^2 = a^2b^2 \quad \text{и} \quad y = kx+n.$$

где је $a,b \in \mathbb{R}^+$.

Заменом непознате y из једначине праве у једначину елипсе и сређивањем, добијамо квадратну једначину по x

(2) $$\left(a^2k^2+b^2\right)x^2 + 2\left(a^2kn - a^2kq + b^2p\right)x + a^2n^2 + a^2q^2 - 2a^2nq + b^2p^2 - a^2b^2 = 0.$$



Слика 1.

Анализа дискриминанте

$$D = 4a^2b^2\left(a^2k^2+b^2-(kp-q+n)^2\right),$$

показује да за решења x_1 и x_2, једначине (2), важи:

$$x_1 = \overline{x}_2 \wedge x_1, x_2 \in \mathbb{C} \Leftrightarrow a^2k^2+b^2 < (kp-q+n)^2$$

$$x_1 = x_2 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow a^2k^2+b^2 = (kp-q+n)^2$$

$$x_1 \neq x_2 \wedge x_1, x_2 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow a^2k^2+b^2 > (kp-q+n)^2.$$

Решењима

$$x_1 = \frac{-a^2kn + a^2kq - b^2p + \sqrt{D/4}}{a^2k^2+b^2}, \quad x_2 = \frac{-a^2kn + a^2kq - b^2p - \sqrt{D/4}}{a^2k^2+b^2},$$

једначине (2) одговарају, редом, решења

$$y_1 = \frac{a^2k^2q - b^2kp + b^2n + k\sqrt{D/4}}{a^2k^2+b^2}, \quad y_2 = \frac{a^2k^2q - b^2kp + b^2n - k\sqrt{D/4}}{a^2k^2+b^2},$$

линеарне једначине $y = kx + n$, тако да су парови (x_1, y_1) и (x_2, y_2), решења система (1). Ако су то парови реалних бројева (различити, или једнаки), права и елипса имају заједничке тачке $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$, (различите, или једнаке). Ако су пак, (x_1, y_1) и (x_2, y_2) парови комплексних бројева, права и елипса немају заједничких тачака (Слика 1.).

Претходну анализу могуће је извести израдом **генеричког организатора** за анализу односа елипсе и праве, који се може добити кликом на линк 3.5.1.ggb, активирањем апликације GeoGebra.

У овом генеричком организатору, варирањем координата центра p и q, и коефицијената у једначини праве k и n, мењањем њихових величина кретањем по одговарајућем клизачу, мењају се положаји елипсе и праве, а сама елипса се мења и варирањем дужина њених полуоса a и b.

Из ове анализе, дакле, следи да за елипсу $\mathcal{E}(p,q,a,b)$ и праву l, дате системом једначина (1), важе следећи односи:

$$
\begin{cases} \text{права и елипса су дисјунктни скупови} \Leftrightarrow a^2k^2 + b^2 < (kp - q + n)^2, \\ \text{права је тангента елипсе} \Leftrightarrow a^2k^2 + b^2 = (kp - q + n)^2, \\ \text{права је сечица елипсе} \Leftrightarrow a^2k^2 + b^2 > (kp - q + n)^2. \end{cases} \tag{3}
$$

Изједначавањем полуоса, тј. ако је $a = b$, елипса се трансформише у кружницу $\mathcal{K}(p,q,a)$, а генерички организатор омогућује анализу односа кружнице и праве. Кликом на линк (3.5.2.ggb), активирањем апликације GeoGebra, покреће се генерички организатор, који као специјалан случај претходног, визуализује однос кружнице $\mathcal{K}(p,q,a)$ и праве $y = kx + n$, за који важи:

$$
\begin{cases} \text{права и кружница су дисјунктни скупови} \Leftrightarrow a^2(k^2 + 1) < (kp - q + n)^2, \\ \text{права је тангента кружнице} \Leftrightarrow a^2(k^2 + 1) = (kp - q + n)^2, \\ \text{права је сечица кружнице} \Leftrightarrow a^2(k^2 + 1) > (kp - q + n)^2. \end{cases} \tag{4}
$$

Тнгента у тачки елипсе

Тангента криве (кружнице, елипсе, и сл.) у њеној тачки T_0, често се посматра као гранични положај сечице $s(T_0, T_1)$, одређене фиксираном тачком T_0 криве и променљивом тачком T_1, која крећући се по кривој тежи ка тачки T_0.

Ова идеја је искоришћена за израду генеричког организатора у коме се може одредити тангента криве (кружнице, елипсе, хиперболе и параболе) и једначина тангенте у тачки криве. Програм GeoGebra поседује могућност за кретање тачке T_1 по елипси, ка тачки T_0, и за анимацију сечице $s(T_0,T_1)$ до положаја тангенте $t(T_0)$, због чега је веома погодан за формирање овог генеричког организатора. Приказ наведеног генеричког организатора, тј. описане анимације прелаза сечице у тангенту, добија се кликом на линк 3.5.3.ggb, активирањем апликације GeoGebra.

За тачке $T_0(x_0,y_0)$ и $T_1(x_1,y_1)$ елипсе (3), важе једнакости

$$(5)\quad b^2(x_0-p)^2+a^2(y_0-q)^2=a^2b^2 \quad \text{и} \quad b^2(x_1-p)^2+a^2(y_1-q)^2=a^2b^2,$$

а једначина праве (сечице) $s(T_0,T_1)$ гласи

$$y-y_0=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(x-x_0).$$

Одузимањем прве од друге једнакости (5), добијамо

$$\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}=-\frac{b^2(x_1+x_0-2p)}{a^2(y_1+y_0-2q)},$$

па се једначина сечице $s(T_0,T_1)$ може записати на следећи начин

$$(6)\qquad y-y_0=-\frac{b^2(x_1+x_0-2p)}{a^2(y_1+y_0-2q)}(x-x_0).$$

Кад се тачка T_1 креће по елипси и тежи ка T_0, тј. када x_1 тежи ка x_0, онда

израз $\dfrac{x_0+x_1-2p}{y_0+y_1-2q}$ тежи ка $\dfrac{2x_0-2p}{2y_0-2q}=\dfrac{x_0-p}{y_0-q}$,

због чега једначина (6) постаје еквивалентна једначини таненте елипсе у тачки T_0

$$b^2(x-p)(x_0-p)+a^2(y-q)(y_0-q)=a^2b^2,$$

тј. сечица елипсе $s(T_0,T_1)$ тежи ка тангенти елипсе $t(T_0)$.

Хипербола и права

Однос хиперболе $\mathcal{H}(p,q,a,b)$ са центром $S(p,q)$ и полуосама a и b, и праве l, датих једначинама

$$(7)\qquad b^2(x-p)^2-a^2(y-q)^2=a^2b^2 \quad \text{и} \quad y=kx+n$$

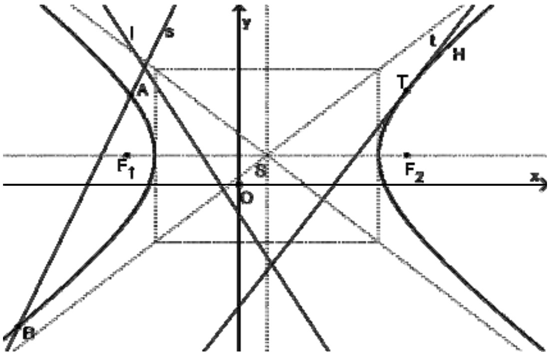
испитује се аналогно претходном поступку, тј. решавањем одговарајућег система, при чему се заменом непознате y из једначине праве у једначину хиперболе, добија квадратна једначина по x

$$(8)\quad \left(a^2k^2-b^2\right)x^2+2\left(a^2kn-a^2kq-b^2p\right)x+a^2n^2+a^2q^2-2a^2nq-b^2p^2+a^2b^2=0,$$

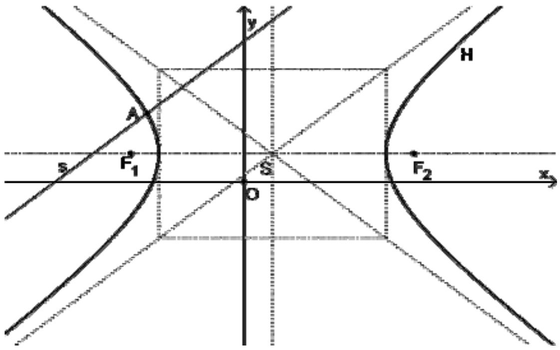
ако и само ако је $a^2k^2-b^2\neq 0$, (посебно је важно истаћи!).

Анализом дискриминанте (под условом $a^2k^2-b^2\neq 0$)

$$D = -4a^2b^2\left(a^2k^2 - b^2 - (kp - q + n)^2\right),$$



Слика 2. а.



Слика 2. б.

јасно је да за решења x_1 и x_2, једначине (8), важи:

$$x_1 = \overline{x}_2 \wedge x_1, x_2 \in \mathbb{C} \Leftrightarrow a^2k^2 - b^2 > (kp - q + n)^2$$

$$x_1 = x_2 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow a^2k^2 - b^2 = (kp - q + n)^2$$

$$x_1 \neq x_2 \wedge x_1, x_2 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow a^2k^2 - b^2 < (kp - q + n)^2 .$$

Дакле, под условом $a^2k^2 - b^2 \neq 0$, решењима

$$x_1 = \frac{-a^2kn + a^2kq + b^2p + \sqrt{D/4}}{a^2k^2 - b^2}, \quad x_2 = \frac{-a^2kn + a^2kq + b^2p - \sqrt{D/4}}{a^2k^2 - b^2},$$

једначине (8) одговарају, редом, решења

$$y_1 = \frac{a^2k^2q + b^2kp - b^2n + k\sqrt{D/4}}{a^2k^2 - b^2}, \quad y_1 = \frac{a^2k^2q + b^2kp - b^2n - k\sqrt{D/4}}{a^2k^2 - b^2}.$$

Ако су (x_1, y_1) и (x_2, y_2), парови реалних бројева (различити, или једнаки), права и хипербола имају заједничке тачке $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$, (различите, или једнаке). Ако су пак, (x_1, y_1) и (x_2, y_2) парови комплексних бројева, права и хипербола немају заједничких тачака (Слика 2. а. и Слика 2.б.)

Претходно испитивање могуће је извести покретањем **генеричког организатора** за анализу односа хиперболе и праве, кликом на линк 3.5.4.ggb, активирањем апликације GeoGebra.

Такође, овај генерички организатор пружа могућност да се испита однос дате хиперболе и дате праве у специјалном случају $a^2k^2 - b^2 = 0$.

Наиме, ако се вредност коефицијента k изабере тако да је $a^2k^2 - b^2 = 0$, тј. $k = \pm b/a$, тада за $n = kp + q$ права l је асимптота хиперболе, а за $n \neq kp + q$, права сече хиперболу у једној тачки. Ово следи из чињенице да је за $a^2k^2 - b^2 = 0$

једначина (8) линеарна и (због $k \neq 0$) има за $kp-q+n \neq 0$, **једно решење**, које није тачка додира него тачка пресека праве l и хиперболе, а за $kp-q+n=0$ праве $l_{1,2} : y = \pm(b/a)(x-p)+q$ су асимптоте хиперболе.

За хиперболу $\mathcal{H}(p,q,a,b)$ и праву l, дате једначинама (7), важе следећи односи:

1. $a^2k^2-b^2 \neq 0$

$$(9)\qquad \begin{cases} \text{права и хипербола су дисјунктни скупови} \Leftrightarrow a^2k^2-b^2 > (kp-q+n)^2, \\ \text{права је тангента хиперболе} \Leftrightarrow a^2k^2-b^2 = (kp-q+n)^2, \\ \text{права је сечица хиперболе} \Leftrightarrow a^2k^2-b^2 < (kp-q+n)^2, \end{cases}$$

2. $a^2k^2-b^2 = 0$

$$(10)\qquad \begin{cases} \text{права сече хиперболу у једној тачки} \Leftrightarrow kp-q+n \neq 0, \\ \text{праве } y = \pm(b/a)(x-p)+q \text{ су асимптоте хиперболе} \Leftrightarrow kp-q+n = 0. \end{cases}$$

Тнгента у тачки хиперболе

Идеја о тангенти криве, као граничном случају сечице криве, биће коришћена и за налажење тангенте у тачки хиперболе.

Генерички организатор, у коме се приказује кретање тачке $T_1(x_1, y_1)$ по хиперболи (7), ка тачки $T_0(x_0, y_0)$, и трансформација праве из положаја сечице $s(T_0,T_1)$ до положаја тангенте $t(T_0)$, покреће се кликом на линк 3.5.5.ggb, активирањем апликације GeoGebra.

Понављајући поступак примењен у случају тангенте елипсе, добија се једначина сечице $s(T_0,T_1)$

$$(11)\qquad y-y_0 = \frac{b^2(x_1+x_0-2p)}{a^2(y_1+y_0-2q)}(x-x_0),$$

хиперболе дате једначином (7).

Кретањем тачке T_1 по хиперболи ка T_0, тј. када x_1 тежи ка x_0, онда коефицијент правца сечице хиперболе тежи ка

$$\frac{x_0-p}{y_0-q},$$

тако да једначина сечице (11) постаје еквивалентна једначини таненте хиперболе у тачки T_0

$$b^2(x-p)(x_0-p)-a^2(y-q)(y_0-q)=a^2b^2,$$

тј. сечица хиперболе $s(T_0,T_1)$ тежи ка тангенти хиперболе $t(T_0)$.

Парабола и права

За анализу односа параболе $\mathcal{P}(\alpha,\beta,p)$ и праве l, које су дате са

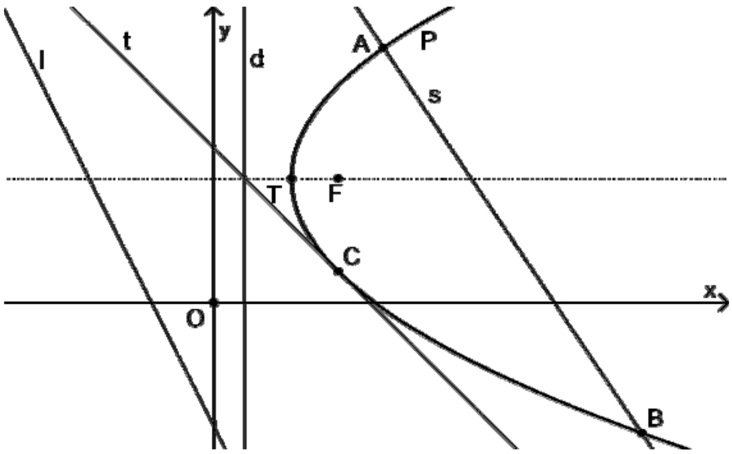
(12) $$\left(y-\beta\right)^2 = 2p\left(x-\alpha\right),\ \ p>0 \quad \text{и} \quad y = kx+n$$

решавамо систем једне квадратне (једначина параболе) и једне линеарне једначине (праве). Заменом непознате y из једначине праве у једначину параболе и сређивањем, добијамо квадратну једначину

(13) $$k^2x^2 + 2\left(kn - k\beta - p\right)x + n^2 - 2n\beta + \beta^2 + 2p\alpha = 0,$$

ако и само ако је $k \neq 0$, при чему дискриминанта једначине гласи

$$D = 4p\left(p - 2k\left(k\alpha - \beta + n\right)\right)$$



Слика 3.

Уз услове $p>0$ и $k\neq 0$, јасно је да за решења x_1 и x_2, једначине (13) важи:

$$x_1 = \overline{x}_2 \wedge x_1, x_2 \in \mathbb{C} \Leftrightarrow p < 2k\left(k\alpha - \beta + n\right)$$

$$x_1 = x_2 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow p = 2k\left(k\alpha - \beta + n\right)$$

$$x_1 \neq x_2 \wedge x_1, x_2 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow p > 2k\left(k\alpha - \beta + n\right).$$

Под условом $k \neq 0$, решењима

$$x_1 = \frac{p - kn + k\beta + \sqrt{p^2 - 2kp\left(k\alpha - \beta + n\right)}}{k^2},\quad x_2 = \frac{p - kn + k\beta - \sqrt{p^2 - 2kp\left(k\alpha - \beta + n\right)}}{k^2}$$

једначине (10), одговарају решења

$$y_1 = \frac{p + k\beta + \sqrt{p^2 - 2kp\left(k\alpha - \beta + n\right)}}{k},\quad y_2 = \frac{p + k\beta - \sqrt{p^2 - 2kp\left(k\alpha - \beta + n\right)}}{k},$$

тако да су парови $\left(x_1, y_1\right)$ и $\left(x_2, y_2\right)$, решења система (12).

Ако су то парови реалних бројева (различити, или једнаки), права и парабола имају заједничке тачке $A\left(x_1, y_1\right)$ и $B\left(x_2, y_2\right)$, (различите, или једнаке).

Ако су, (x_1, y_1) и (x_2, y_2) парови комплексних бројева, права и парабола немају заједничких тачака (Слика 3).

Претходну анализу могуће је извести покретањем **генеричког организатора** за анализу односа параболе и праве, кликом на линк 3.5.6.ggb, активирањем апликације GeoGebra.

Такође, ако се у овом генеричком организатору коефицијент k бира тако да је $k=0$, права $l: y=n$ је сечица параболе, паралелна њеној оси, и са параболом има једну заједничку тачку.

То следи из чињенице да је за $k=0$ једначина (13) линеарна и има **једно решење**, а решење система (12) је пар $\left(n^2/2p, n\right)$, што није тачка додира него тачка пресека праве l и параболе и реч је о сечици која је паралелна са осом параболе.

Дакле, за параболу $\mathcal{P}$ и праву l, дате једначинама (12), важе следећи односи:

$$1. \quad k \neq 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} \text{права и парабола су дисјунктни скупови} \Leftrightarrow p < 2k(k\alpha - \beta + n), \\ \text{права је тангента параболе} \Leftrightarrow p = 2k(k\alpha - \beta + n), \\ \text{права је сечица параболе} \Leftrightarrow p > 2k(k\alpha - \beta + n). \end{cases}$$

2. $k=0 \;\Rightarrow\;$ права је паралелна оси параболе и сече је у једној тачки .

Напомена 1. Аналогним поступком се анализира однос параболе $\mathcal{P}(\alpha, \beta, p)$ и праве l, које су дате једначинама

$$(14) \qquad (x-\alpha)^2 = 2p(y-\beta),\; p>0 \quad \text{и} \quad y = kx+n\;.$$

Приказ ове анализе добија се покретањем **генеричког организатора** за анализу односа параболе и праве, кликом на линк 3.5.7.ggb, активирањем апликације GeoGebra, где је установљен следећи однос

$$\begin{cases} \text{права и парабола су дисјунктни скупови} \Leftrightarrow pk^2 + 2(k\alpha - \beta + n) < 0, \\ \text{права је тангента параболе} \Leftrightarrow pk^2 + 2(k\alpha - \beta + n) = 0, \\ \text{права је сечица параболе} \Leftrightarrow pk^2 + 2(k\alpha - \beta + n) > 0. \end{cases}$$

Напомена 2. Анализа односа параболе $\mathcal{P}(a,b,c)$ и праве l, које су дате једначинама

$$(15) \qquad y = ax^2 + bx + c,\; a \neq 0 \quad \text{и} \quad y = kx+n\;.$$

добија се покретањем **генеричког организатора** за анализу односа параболе и праве, кликом на линк 3.5.8.ggb, активирањем апликације GeoGebra, где је установљен следећи однос

$$\begin{cases} \text{права и парабола су дисјунктни скупови} \Leftrightarrow (k-b)^2 < 4a(c-n), \\ \text{права је тангента параболе} \Leftrightarrow (k-b)^2 = 4a(c-n), \\ \text{права је сечица параболе} \Leftrightarrow (k-b)^2 > 4a(c-n). \end{cases}$$

Тангента у тачки параболе

Генерички организатор, у коме се приказује кретање тачке $T_1(x_1, y_1)$ по параболи (12), ка тачки $T_0(x_0, y_0)$, и трансформација праве из положаја сечице $s(T_0, T_1)$ до положаја тангенте $t(T_0)$, покреће се кликом на линк 3.5.9.ggb, активирањем апликације GeoGebra.

Понављајући поступаке примењене у претходним случајевима, добија се једначина сечице $s(T_0, T_1)$

$$(16) \qquad y - y_0 = \frac{2p}{(y_1 + y_0 - 2\beta)}(x - x_0),$$

параболе дате једначином (12). Кретањем тачке T_1 по параболи ка T_0, тј. када x_1 тежи ка x_0, онда коефицијент правца сечице (16) параболе, тежи ка

$$\frac{p}{y_0 - \beta},$$

тако да једначина сечице (16) постаје еквивалентна једначини таненте хиперболе у тачки T_0

$$(y_0 - \beta)(y - y_0) = p(x - x_0),$$

тј. сечица хиперболе $s(T_0, T_1)$ тежи ка тангенти хиперболе $t(T_0)$.

Напомена 3. Генерички организатор, у коме се приказује кретање тачке $T_1(x_1, y_1)$ по параболи (14), ка тачки $T_0(x_0, y_0)$, и трансформација праве из положаја сечице $s(T_0, T_1)$ до положаја тангенте $t(T_0)$, покреће се кликом на линк 3.5.10.ggb, активирањем апликације GeoGebra.

Понављајући поступаке примењене у претходним случајевима, добија се једначина сечице $s(T_0, T_1)$

$$(17) \qquad y - y_0 = \frac{2p}{(y_1 + y_0 - 2\beta)}(x - x_0),$$

параболе дате једначином (12). Кретањем тачке T_1 по параболи ка T_0, тј. када x_1 тежи ка x_0, онда коефицијент правца сечице (17) параболе, тежи ка

$$\frac{x_0-\alpha}{p},$$

тако да једначина сечице (17) постаје еквивалентна једначини таненте хиперболе у тачки T_0

$$p\left(y-y_0\right)=\left(x_0-\alpha\right)\left(x-x_0\right),$$

тј. сечица хиперболе $s\left(T_0,T_1\right)$ тежи ка тангенти хиперболе $t\left(T_0\right)$.

Напомена 4. Генерички организатор, у коме се приказује кретање тачке $T_1\left(x_1,y_1\right)$ по параболи (15), ка тачки $T_0\left(x_0,y_0\right)$, и трансформација праве из положаја сечице $s\left(T_0,T_1\right)$ до положаја тангенте $t\left(T_0\right)$, покреће се кликом на линк 3.5.11.ggb, активирањем апликације GeoGebra.

Понављајући поступаке примењене у претходним случајевима, добија се једначина сечице $s\left(T_0,T_1\right)$

(18) $$y-y_0=\left(a\left(x_1+x_0\right)+b\right)\left(x-x_0\right),$$

параболе дате једначином (12). Кретањем тачке T_1 по параболи ка T_0, тј. када x_1 тежи ка x_0, онда коефицијент правца сечице (18) параболе, тежи ка

$$2ax_0+b,$$

тако да једначина сечице (11) постаје еквивалентна једначини таненте хиперболе у тачки T_0

$$y-y_0=\left(2ax_0+b\right)\left(x-x_0\right),$$

тј. сечица хиперболе $s\left(T_0,T_1\right)$ тежи ка тангенти хиперболе $t\left(T_0\right)$.

2. Генерички организаторуи за решавање квадратне неједначине са две непознате

У прилогу одељку који се односи на принцип визуализације (видети 3.4.7), представљени су генерички организатори за решавање: линеарне неједначине са две непознате и система линеарних неједначина са две непознате. У тексту који следи биће представљени генерички организатори за решавање квадратних неједначина са две непознате, облика

$$b^2\left(x-\alpha\right)^2\pm a^2\left(y-\beta\right)^2\rho a^2b^2,\qquad \left(y-\beta\right)^2\rho 2p\left(x-\alpha\right),\qquad \left(x-\alpha\right)^2\rho 2p\left(y-\beta\right),$$

где је $a,b\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $p\in\mathbb{R}^+$, $\alpha,\beta,\in\mathbb{R}$ и $\rho\in\{\geq,\leq,>,<\}$, и неједначина које се на њих своде, као и система једне квадратне неједанчине са две непознате, наведеног облика, и једне линеарне неједначине са две непознате.

У ту сврху, полазећи од познате чињенице, да свака крива другог реда дели скуп тачака равни на два дисјунктна подскупа, анализираћемо унутрашњу и спољашњу област елипсе, хиперболе и параболе.

Унутрашња и спољашња област елипсе

За елипсу $\mathcal{E}$ са жижама F_1 и F_2 и главном осом $2a$ у равни π, скуп тачака $U_{\mathcal{E}}$, које су са исте стране елипсе као и жиже, зове се **унутрашња област** (унутрашњост), а скуп тачака $S_{\mathcal{E}} := \pi \setminus \left(U_{\mathcal{E}} \cup \mathcal{E}\right)$ зове се **спољашња област** (спољашњост) елипсе.

Генерички организатор за маркирање унутрашње и спољашње области елипсе, покреће се кликом на линк 3.5.12.ggb, активирањем апликације GeoGebra.

Један од критеријума за маркирање унутрашње и спољашње области елипсе, регулише следеће тврђење.

Теорема 1. Ако је $\mathcal{E}$ елипса у равни π, са фокусима F_1 и F_2 и главном осом $2a$, онда је унутрашња област

$$U_{\mathcal{E}} = \left\{X : X \in \pi\left(\mathcal{E}\right) \wedge d\left(F_1, X\right) + d\left(X, F_2\right) < 2a\right\}$$

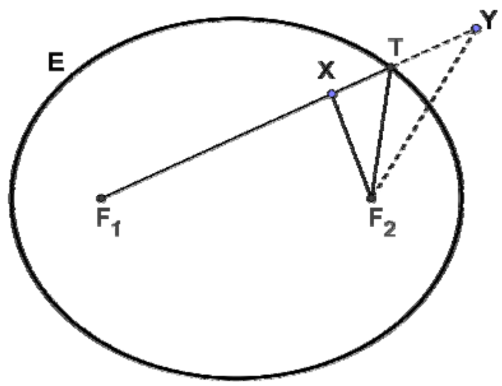
а спољашња област

$$S_{\mathcal{E}} := \left\{T : T \in \pi\left(\mathcal{E}\right) \wedge d\left(T, F_1\right) + d\left(T, F_2\right) > 2a\right\}.$$

Доказ. Нека је $\mathcal{E}$ елипса у равни π, са фокусима F_1 и F_2 и главном осом $2a$. Нека је X унутрашња тачка елипсе (Слика 4.), тј. нека је $X \in U_{\mathcal{E}}$, тада важи

$$d\left(F_1, X\right) + d\left(X, T\right) = d\left(F_1, T\right),$$

где је T тачка елипсе $\mathcal{E}$, због чега је $d\left(F_1, T\right) + d\left(T, F_2\right) = 2a$.



Слика 4.

Примењујући неједнакост троугла

$$d\left(X, F_2\right) < d\left(X, T\right) + d\left(T, F_2\right),$$

где строга неједнакост важи због услова $X \neq T$, добијамо следећу релацију

$$d\left(F_1, X\right) + d\left(X, F_2\right) < d\left(F_1, X\right) + d\left(X, T\right) + d\left(T, F_2\right) = d\left(F_1, T\right) + d\left(T, F_2\right) = 2a.$$

Обрнуто, претпоставимо да за тачку Y важи

$$d(Y,F_1)+d(Y,F_2)<2a$$

и да Y није унутрашња тачка. Пошто последња релација није једнакост, следи да је Y тачка спољашњости, тј. постоји тачка T елипсе $\mathcal{E}$, која припада отвореној дужи (F_1Y), због чега важи релација

$$d(F_1,T)+d(T,Y)=d(F_1,Y).$$

Тада важи

$$d(F_1,Y)+d(Y,F_2)=d(F_1,T)+d(T,Y)+d(Y,F_2)>d(F_1,T)+d(T,F_2)=2a,$$

што је у контрадикцији са претпоставком. Аналогним поступком, доказује се и друга једнакост. ■

Аналитички критеријум на основу кога се утврђује да ли тачка припада унутрашњој или спољашњој области, наведен је у следећој теореми, која је директна последица Теореме 1.

Теорема 2. Тачка $M(x_0,y_0)$ припада **унутрашњости елипсе** $\mathcal{E}(\alpha,\beta,a,b)$ ако и само ако је

$$b^2(x_0-\alpha)^2+a^2(y_0-\beta)^2<a^2b^2.$$

Тачка $M(x_0,y_0)$ припада **спољашњости елипсе**, ако и само ако је

$$b^2(x_0-\alpha)^2+a^2(y_0-\beta)^2>a^2b^2.$$ ■

Овај критеријум је дат у генеричком организатору који се може добити кликом на линк 3.5.13.ggb, активирањем апликације GeoGebra.

Последњи генерички организатор пружа могућност за решавање квадратне неједначине облика

$$b^2(x-\alpha)^2+a^2(y-\alpha)^2\ \rho a^2b^2$$

за разне вредности параметара $a,b\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, као и за различите облике релације $\rho\in\{\geq,\leq,>,<\}$.

Унутрашња и спољашња област хиперболе

Нека је $\mathcal{H}$ хипербола у равни π са жижамама F_1 и F_2, а s симетрала дужи $[F_1F_2]$. Са $\mathcal{G}_1$ ћемо обележавати грану хиперболе која припада полуравни са ивицом s, којој припада и фокус F_1, а са $\mathcal{G}_2$ обележавамо грану хиперболе која припада полуравни са ивицом s, којој припада и фокус F_2.

Унутрашња област гране $\mathcal{G}_1$, у ознаци $U_{\mathcal{G}_1}$, је скуп тачака равни π, које су са исте стране **гране** $\mathcal{G}_1$, као и жижа F_1, а **унутрашња област гране** $\mathcal{G}_2$, у ознаци $U_{\mathcal{G}_2}$, је скуп тачака равни π, које су са исте стране **гране** $\mathcal{G}_2$, као и жижа F_2.

Унутрашња област хиперболе $\mathcal{H}$ је скуп $U_{\mathcal{H}} := U_{\mathcal{G}_1} \cup U_{\mathcal{G}_2}$, а **спољашња област хиперболе** $\mathcal{H}$ је скуп $S_{\mathcal{H}} := \pi \setminus \left(U_{\mathcal{H}} \cup \mathcal{H}\right)$.

Генерички организатор за маркирање унутрашње и спољашње области хиперболе, може се покренути кликом на линк 3.5.14.ggb, активирањем апликације GeoGebra.

За маркирање унутрашње и спољашње области хиперболе, може се користити следећи критеријум, који се доказује аналогно одговарајућем критеријуму за унутрашњу у спољашњу област елипсе, и дајемо га без доказа.

Теорема 3. Ако је $\mathcal{H}$ хипербола у равни π, са фокусима F_1 и F_2 и реалном осом $2a$, онда је унутрашња област

$$U_{\mathcal{H}} = \left\{X : X \in \pi\left(\mathcal{H}\right) \wedge \left|d\left(F_1, X\right) - d\left(F_2, X\right)\right| > 2a\right\}$$

а спољашња област

$$S_{\mathcal{H}} := \left\{X : X \in \pi\left(\mathcal{H}\right) \wedge \left|d\left(F_1, X\right) - d\left(F_2, X\right)\right| < 2a\right\}.$$

Аналитички критеријум на основу кога се утврђује да ли тачка припада унутрашњој или спољашњој области хиперболе, као и у случају елипсе, наведен је у следећој теореми, која је директна последица Теореме 3.

Теорема 4. Тачка $M\left(x_0, y_0\right)$ припада **унутрашњости хиперболе** $\mathcal{H}\left(\alpha, \beta, a, b\right)$ ако и само ако је

$$b^2\left(x_0 - \alpha\right)^2 - a^2\left(y_0 - \beta\right)^2 < a^2 b^2.$$

Тачка $M\left(x_0, y_0\right)$ припада **спољашњости елипсе**, ако и само ако је

$$b^2\left(x_0 - \alpha\right)^2 - a^2\left(y_0 - \beta\right)^2 > a^2 b^2. \qquad \blacksquare$$

Овај критеријум је дат у генеричком организатору који се може добити кликом на линк 3.5.15.ggb, активирањем апликације GeoGebra.

Последњи генерички организатор пружа могућност за решавање квадратне неједначине облика

$$b^2\left(x - \alpha\right)^2 - a^2\left(y - \beta\right)^2 \rho a^2 b^2$$

за разне вредности параметара $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, као и за различите облике релације $\rho \in \{\geq, \leq, >, <\}$.

Унутрашња и спољашња област параболе

Нека је $\mathcal{P}$ парабола у равни π, са жижом F и директрисом l. **Унутрашња област параболе** $\mathcal{P}$, у означаци $U_{\mathcal{P}}$, је скуп тачака равни π, које су са исте стране параболе као и жижа, а скуп $S_{\mathcal{P}} := \pi \setminus (U_{\mathcal{P}} \cup \mathcal{P})$ зове се **спољашња област параболе** $\mathcal{P}$.

Генерички организатор за маркирање унутрашње и спољашње области параболе, покреће се кликом на линк 3.5.16.ggb, активирањем апликације GeoGebra.

Као и у случају елипсе и хиперболе, за маркирање унутрашње и спољашње области параболе, може се користити следеће тврђење.

Теорема 5. Ако је $\mathcal{P}$ парабола у равни π, са фокусом F и директрисом l, онда је унутрашња област

$$U_{\mathcal{P}} = \{X : X \in \pi(\mathcal{P}) \wedge d(X,F) < d(X,l)\},$$

а спољашња област

$$S_{\mathcal{P}} := \{X : X \in \pi(\mathcal{P}) \wedge d(X,F) > d(X,l)\}.$$

Аналитички критеријум на основу кога се утврђује да ли тачка припада унутрашњој или спољашњој области, наведен је у следећој теореми, која је директна последица Теореме 3.

Теорема 6. Тачка $M(x_0, y_0)$, припада **унутрашњости параболе** $\mathcal{P}(\alpha, \beta, p)$, ако и само ако је

$$(y_0 - \beta)^2 < 2p(x_0 - \alpha).$$

Тачка $M(x_0, y_0)$ припада **спољашњости параболе**, ако и само ако је

$$(y_0 - \beta)^2 > 2p(x_0 - \alpha). \qquad \blacksquare$$

Овај критеријум је дат у генеричком организатору који се може добити кликом на линк 3.5.17.ggb, активирањем апликације GeoGebra.

Последњи генерички организатор пружа могућност за решавање квадратне неједначине облика

$$(y_0 - \beta)^2 \rho 2p(x_0 - \alpha)$$

за разне вредности параметара $p \in \mathbb{R}^+$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, као и за различите облике релације $\rho \in \{\geq, \leq, >, <\}$.

Претходно теоријско разматрање приказује поступак за формирање генеричких организатора за решавање квадратне неједначине са две непознате. И овде, као и у одељку 3.4.7., слика као илустративно средство, прелази у средство које генерише математички концепт. У сваком од формираних генеричких организатора полази се од одговарајуће криве, и сваког од два дисјунктна подскупа, на које крива дели раван. Као и у случају линеарне неједанчине, тестирају се примери тачака у акцији и уочавају законитости које важе за тачке наведених подскупова, на основу којих се генерише квадратна неједначина са две непознате и поступак за њено решавање.

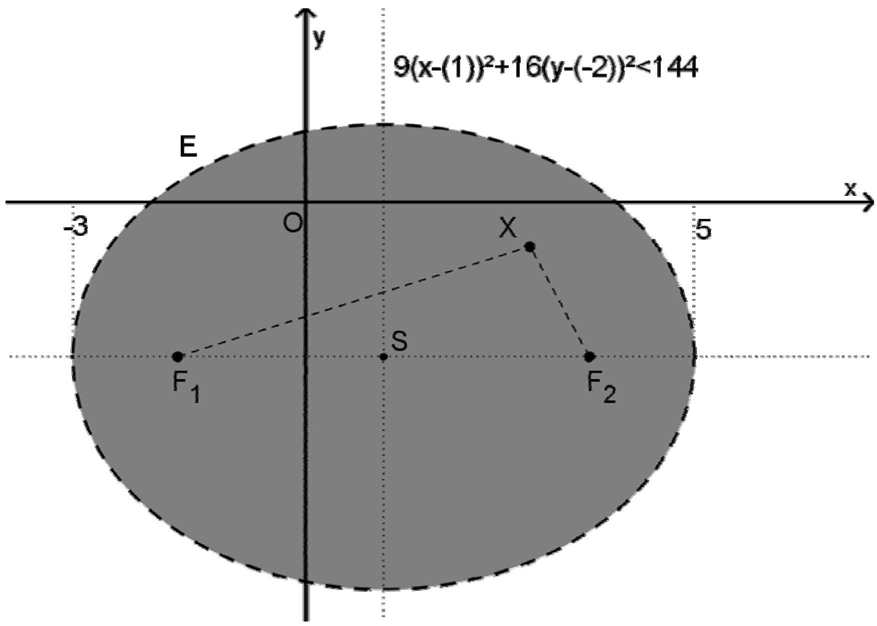
Следећи пример илуструје примену генеричких организатора у поступку решавања квадратних неједначина са две непознате, у програму GeoGebra.

Пример 1. Решити неједначине:

а) $9(x-1)^2+16(y+2)^2<144$; б) $(x+1)^2-4(y-1)^2-4\geq 0$; в) $(y+1)^2-3(x-3)\leq 0$.

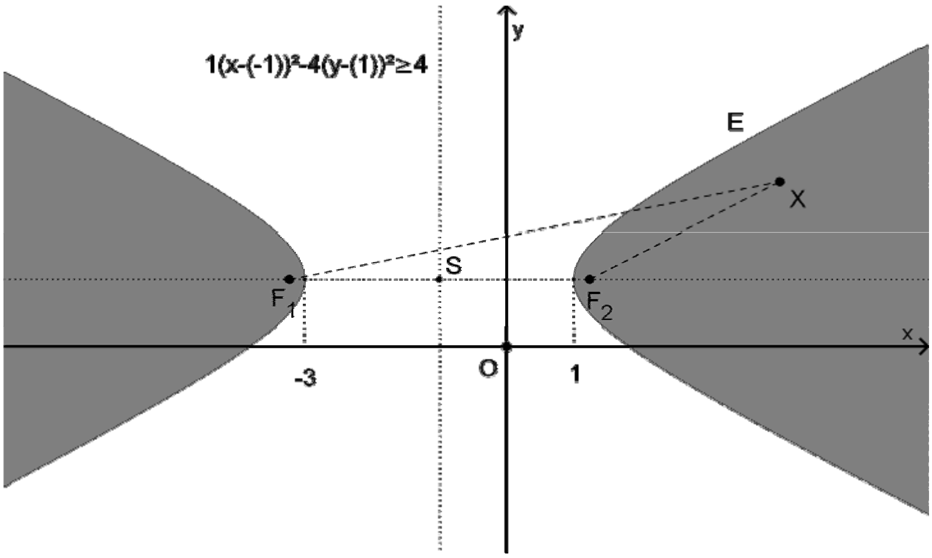
Решење. а) Генерички организатор, у коме се приказује решење добија се кликом на линк 3.5.13.ggb, активирањем апликације GeoGebra. Уређени пар координата сваке тачке маркираног дела равни, одређеног елипсом $\mathcal{E}(\alpha,\beta,a,b)$, и координатним почетком, јесте решење неједначине, које је графички приказано на Слици 5., а аналитички следећом формулом

$$(x,y)\in(-3,5)\times\left(-2-\frac{3}{4}\sqrt{15+2x-x^2},-2+\frac{3}{4}\sqrt{15+2x-x^2}\right)$$



Слика 5.

б) Решење је дато у генеричком организатору, који се добија кликом на линк 3.5.15.ggb, активирањем апликације GeoGebra. Графички приказ решења је дат на Слици 6.



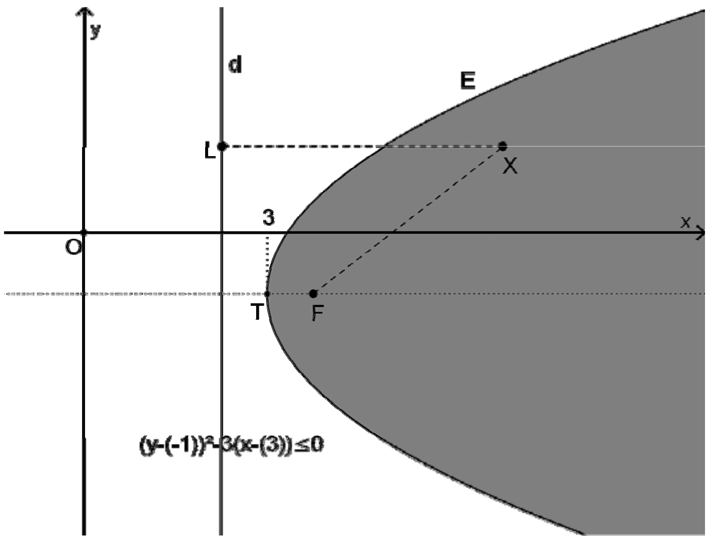
Слика 6.

У аналитичком облику решење је

$$(x,y) \in \left((-\infty,-3] \cup [1,\infty) \right) \times \left[1 - \frac{1}{2}\sqrt{-3+2x+x^2}, 1 + \frac{1}{2}\sqrt{-3+2x+x^2} \right].$$

в) Пример се решава коришћењем генеричког организатора, који се покреће кликом на линк 3.5.17.ggb, активирањем апликације GeoGebra. Решење неједначине је графички приказано на Слици 7. и гласи

$$(x,y) \in [3,\infty) \times \left[-1 - \sqrt{3x-9}, -1 + \sqrt{3x-9} \right].$$



Слика 7.

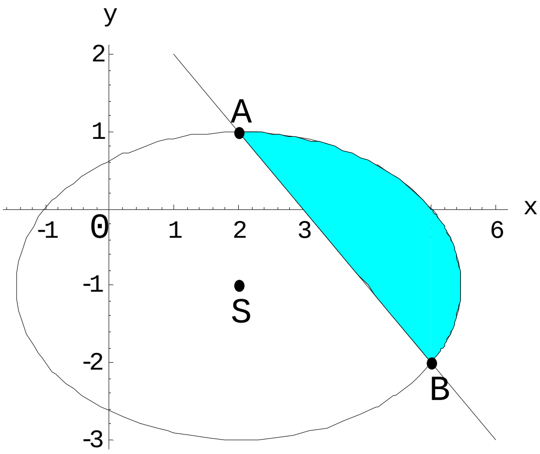
Илустрација примене генеричких организатора у поступку решавања једног сложенијег задатка: система једне квадратне и једне линеарне неједначина са две непознате, коришћењем програмског пакета Matheamtica, дата је у следећем примеру.

Пример 2. Решити систем неједначина

$$\begin{cases} x^2+3y^2-4x+6y<5 \\ x+y-3>0 \end{cases}.$$

Решење. Једначина $x^2+3y^2-4x+6y=5$ представља елипсу са центром $S(2,-1)$ и полуосама $a=2\sqrt{3}$ и $b=2$, а једначина $x+y-3=0$, представља праву, која сече елипсу у тачкама $A(2,1)$ и $B(5,-2)$.

Кликом на линк (3.5.18.nb) и активирањем апликације Mathematica, добија се генерички организатор, који решава систем, као пресек скупова решења сваке од неједначина.



Слика 8.

Решење система неједначина представља пресек отворене полуравни и унутрашње области елипсе, приказан на Слици 8., одакле је очигледно да прва неједначина представља скуп свих унутрашњих тачака елипсе $\mathcal{E}\left(2,-1,2\sqrt{3},2\right)$, а друга представља скуп тачака отворене полуравни са ивицом $x+y-3=0$, која не садржи координатни почетак.

Решење система се може записати на следећи начин

$$(x;y)\in\left((2;5]\times\left(-x+3;-1+\frac{\sqrt{8+4x-x^2}}{\sqrt{3}}\right)\right)\cup$$

$$\cup\left(\left(5;2\left(1+\sqrt{3}\right)\right)\times\left(-1-\frac{\sqrt{8+4x-x^2}}{\sqrt{3}};-1+\frac{\sqrt{8+4x-x^2}}{\sqrt{3}}\right)\right).$$

3.6. Наставне методе

О дефиницији наставне методе, до данашњег дана не постоји потпуно усаглашен став. Међутим, коректном се може сматрати свака дефиниција, која карактерише њену суштину.

Дефиницију, која узима у обзир карактеристике наставне методе, као на пример, заједничко деловање наставника и ученика, сазнајну активност ученика, начин поступања наставника, **наставна средства**, и сл., увео је И. Ј. Лернер ([21], [27], [51]). Ову дефиницију чини посебно значајном то што узима у обзир и „средства помоћу којих наставник организује практичну и сазнајну активност...“. Како у дидактичком систему – настава уз помоћ рачунара, управо рачунар (са образовним софтвером), као фактор наставе представља та средства, јасно је да се у овом дидактичком систему, може сматрати коректном она дефиниција која и њих узима у обзир.

Другим речима, пошто примена рачунара и образовног софтвера у настави математике, суштински утиче на начине поступања наставника током саопштавања наставног садржаја, као и на активност ученика током усвајања истих садржаја, то свакако значи да ова наставна средства (рачунар, образовни софтвер) суштински утичу на карактер наставне методе.

На основу изложеног, у дидактичком систему – настава уз помоћ рачунара **под наставном методом, као начином постизања наставних циљева, подразумевамо систем поступака и планираних радњи наставника, који помоћу одређених средстава (рачунар, образовни софтвер, интернет и сл.), организује практичну и сазнајну активност ученика, на усвајању наставног садржаја.**

Ово је једна верзија поменуте Лернерове дефиниције наставне меоде, прилагођене дидактичком систему настава уз помоћ рачунара, у којој је прецизирано да су: рачунар, образовни софтвер, интернет и сл., „средства помоћу којих наставник организује практичну и сазнајну активност...“

3.6.1. Класификација наставних метода

У методици математике, као и у дидактици уопште, изграђене су различите класификације наставних метода, које се и користе у наставном процесу. Ове класификације су извршене у зависности од многих питања која се тичу наставе, као што су: извори знања, карактер узајамне активности наставника (преношење знања, организација, ...) и ученика (сазанјна функција, ...), социолошки облици рада, и сл.

У [65], В. Пенавин је дао једну класификацију наставних метода, прилагођену настави математике (прецизније: настави аритметике и алгебре), веома сличну класификацији Т. Продановића и Љ. Ничковића, заснованој на "прегледу развоја и функционалној групацији наставних метода" (видети[80]). По

Пенавиновој класификацији, постоје три групе наставних метода које се користе у настави аритметике и алгебре: вербално-текстуалне методе, илустративно-демонстративне методе, лабораторијско-експерименталне методе. Ове методе заузимају значајно место у традиционалној настави математике, где је веома распрострањена њихова примена.

Једну класификацију наставних метода, која се превасходно заснива на природи когнитивних активности ученика у процесу усвајања градива, изградили су руски дидактичари М. Н. Скаткин и И. Ј. Лернер, у [21], [27], [51]. У радовома [16], [40], [88], је показано да је ова класификација примерена дидактичком систему настава уз помоћ рачунара.

Дакле, по овој класификацији, наставне методе су: **објашњавачко-илустративна, репродуктивна, метода решавања проблема и истраживачка метода**.

Избор и коришћење сваке од наведених наставних метода условљени су и примерени типу часа, карактеру наставних садржаја, облику рада, нивоу знања градива и нивоу оспособљености за коришћење рачунара и образовног софтвера.

У настави математике уз помоћ рачунара, ове методе користе се у комбинацији са наведеним вербално-текстуалним методама, међу којима се посебно истичу: наставниково излагање, разговор, рад са књигом (текстом) и решавање задатака. Наиме, током наставе, без обзира на то о коме типу часа је реч (обрада новог градива, вежбање и утврђивање, понављање и оцењивање, или мешовити час) и која се од наведених метода користи, неопходно је да наставник ученицима даје одређене инструкције, да са ученицима води разговор, анализира добијене одговоре и сл.

За успешну примену било које од наведених метода, увек је потребан одговарајући образовни софтвер, који омогућава једноставно моделирање (имитацију реалних објеката, ситуација – у динамици, у покрету).

Једна од највећих вредности употребе рачунара у свакој од наставних метода јесте очигледност, а посебно **визуализација наставног садржаја**, што доприноси развијању визуалног мишљења и успешном разумевању математичких концепата. Рачунар као наставно средство, на том плану пружа велике могућности, (видети [1], [2], [84]).

С тим у вези, образовни софтвер GeoGebra, приликом обраде било ког математичког концепта, или приликом решавања било ког задатка, омогућује промену вредности датих параметара, њиховим кретањем по одговарајућем клизачу, што омогућује кретање датих тачака по правој, или кривој. Променом положаја тачака, мењају се положаји дужи, њихове дужине или облици кривих, тј. мењају се њихове нумеричке карактеристике (координате, мере, или једначине), које су такође приказане у посебном тзв. алгебарском прозору.

Неколико примера који следе треба да послуже као илустрација примене наведених наставних метода, које се користе у настави путем рачунара, на садржајима аналитичке геометрије.

3.6.2. Објашњавачко – илустративна метода

Суштина **објашњавачко-илустративне** наставне методе огледа се у томе да наставник саопштава ученицима готову информацију уз употребу рачунара, и образовног софтвера, а такође и других наставних средстава, а ученици је усвајају, разумеју и фиксирају у меморији. Објашњавачко-илустративна метода представља један од најекономичнијих поступака за презентацију информација. Међутим, када се користи ова наставна метода, не формирају се способности ученика, као на пример умења и навике, да користе стечена знања.

Иако ова метода не предвиђа неку директну активност ученика и рад на рачунару, она је ипак важна због тога, што значајно подиже ниво очигледности и доприноси визуализацији наставних садржаја. Примењује се на уводним часовима, приликом обраде нових садржаја и приликом увођења нових појмова.

Посебан допринос раду наставника у примени ове методе, дају генерички организатори. Током демонстрације одређеног математичког концепта, наставник сам бира режим рада и редослед промене параметара, регулише темпо рада, по потреби понавља елементе демонстрације, а у исто време може да води разговор са одељењем.

Примену ове методе биће приказана приликом решавања Задатка 1. и доказа Теореме 1, који следе.

Задатак 1. Ако је дата права $s: x-3y+2=0$ и тачке $A(2,6)$ и $B(9,2)$, одредити тачку $C \in s$, тако да разлика њених растојања од тачака A и B буде максимална (минимална).

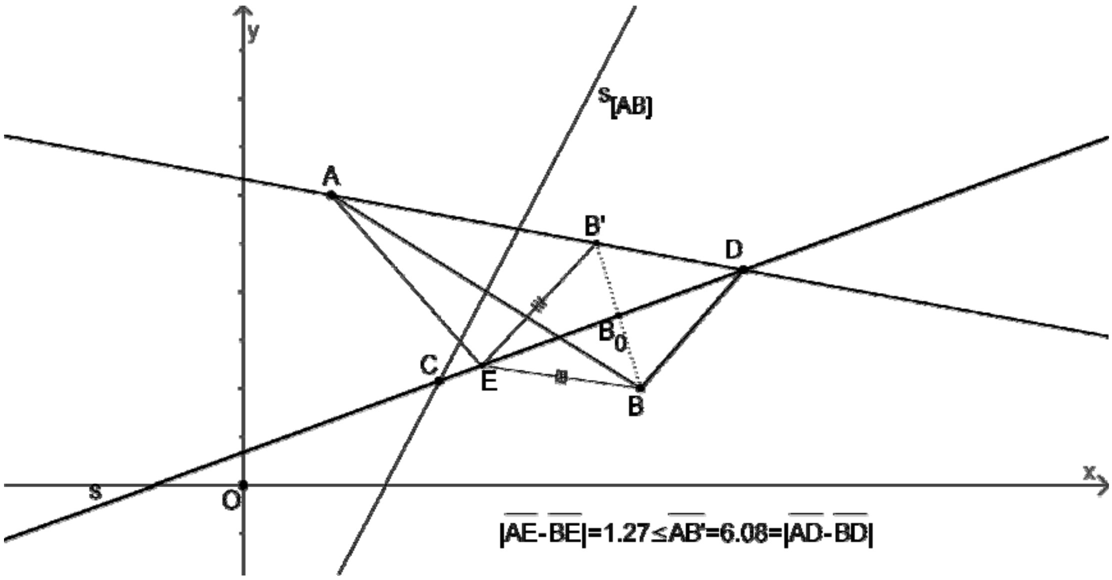
Решење. Праву $s: ax+by+c=0$ и тачке $A(x_1,y_1)$ и $B(x_2,y_2)$ задајемо тако што задајемо одговарајуће коефицијенте, односно координате. GeoGebra, омогућуава промену вредности задатих елемената, због чега се њиховим кретањем по одговарајућем клизачу, врши и промена положаја дате праве, односно датих тачака, што се добија покретањем апликације (3.6.2.1.ggb). Овако задате тачке A и B су са разних страна праве s, Ако је B' тачка симетрична тачки B, с обзиром на осу s, онда је $B'(8,5)$, тада ако је $p(A,B')=a$ и $a \cap s=\{D\}$, онда је

$$\left|d(A,D)-d(B,D)\right|=\left|d(A,D)-d(B',D)\right|=d(A,B').$$

С друге стране, за сваку тачку $E \in s$, важи

$$d(A,B') \geq \left|d(A,E)-d(B',E)\right|=\left|d(A,E)-d(B,E)\right|,$$

што значи да израз $\left|d\left(A,E\right)-d\left(B,E\right)\right|$ постиже свој максимум за $E=D$.



Слика 1.

Координате тачке D добијамо, решавајући систем

$$\left.\begin{array}{r} a: x+6y-38=0 \\ s: x-3y+2=0 \end{array}\right\}$$

одакле је $x=34/3$, $y=40/9$, па је $D\left(34/3,40/9\right)$.

Иначе, у пресеку дате праве s и симетрале дужи AB, праве $s_{[AB]}$, добијамо тачку C, на једнаком растојању од тачака A и B, тј.

$$\left|d\left(A,C\right)-d\left(B,C\right)\right|=0,$$

што значи да за тачку C, разлика $\left|d\left(A,C\right)-d\left(B,C\right)\right|$ постиже минимум, што се добија покретањем апликације (3.6.2.1.ggb) у програму GeoGebra. Једначину симетрале дужи добићемо, као једначину геометријског места тачака једнако удаљених од крајњих тачака дужи. За њену произвољну тачку M важи

$$d\left(A,M\right)=d\left(B,M\right)$$

тј.

$$\sqrt{\left(x-2\right)^2+\left(y-6\right)^2}=\sqrt{\left(x-9\right)^2+\left(y-2\right)^2},$$

одакле је

$$s_{[AB]}: 14x-8y-45=0,$$

па је $C\left(151/34;73/34\right)$.

Када се, у наведеној апликацији, на радној површини екрана, кретањем тачке E по правој s, мењају и одговарајуће дужи EA и EB, као и њихова разлика, тада се у алгебарском прозору мењају њихове дужине, а може се уочити да је разлика њихових дужина најмања, када се тачка E поклопи са тачком C, а највећа, када се тачка E поклопи са тачком D. ■

Напомена 1. Ако су тачке A и B, са исте стране праве s, разлика $\left|d(A,D)-d(B,D)\right|$ је максимална, ако је $p(AB)\cap s=\{D\}$, што се добија покретањем апликације (3.6.2.2.ggb) у програму GeoGebra. ■

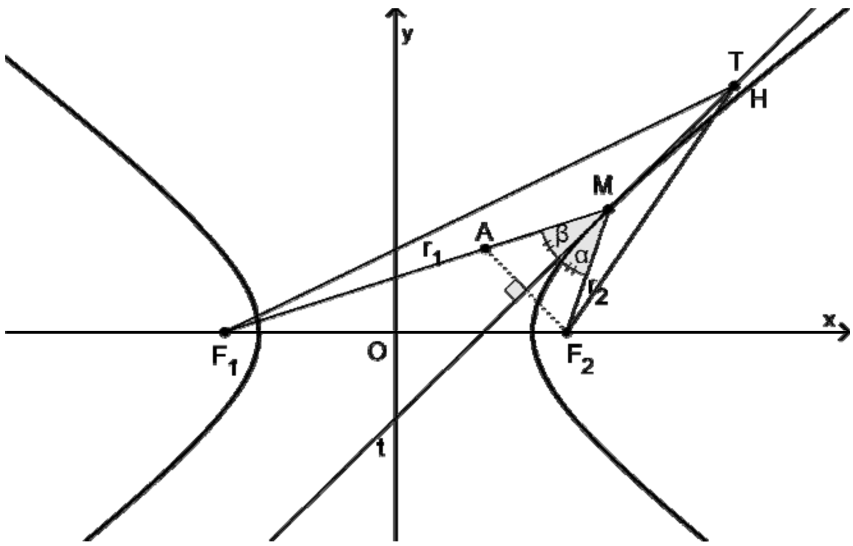
Напомена 2. Ако је $p(A,B)\perp s$, онда је $p(A,B)\cap s=\{D\}$, па је разлика $\left|d(A,D)-d(B,D)\right|=d(A,B)$ максимална, што се добија покретањем апликације (3.6.2.3.ggb) у програму GeoGebra. ■

Напомена 3. Ако је у општем случају $p(A,B')\parallel s$,(тј. $d(A,s)=d(B,s)$), онда је $p(A,B')\cap p=\varnothing$, па $\boldsymbol{max}\left|d(A,C)-d(B,C)\right|$ не постоји, што се добија покретањем апликације (3.6.2.4.ggb) у програму GeoGebra. ■

Особина наведена у претходном примеру, може се искористити за илустрацију и доказ **оптичког својства хиперболе**, које регулише следећа теорема.

Теорема 1. *Тангента у тачки M хиперболе, чије су жижа F_1 и F_2, образује једнаке углове са фокалним радијусима F_1M и F_2M и припада унутрашњости угла $\measuredangle F_1MF_2$.*

Доказ. Нека је t тангента у тачки M хиперболе са великом осом $2a$ и жижама F_1 и F_2, (Слика 2.).



Слика 2.

Познато је, на основу Теореме 2., доказане у 4.1.10.3., да за сваку тачку тангенте $T \in t$, која је осим додирне тачке M, тачка спољашњости хиперболе, важи

$$\left| d\left(T, F_1\right) - d\left(T, F_2\right) \right| \leq 2a,$$

где знак једнакости важи за $T = M$, што значи да израз $\left| d\left(T, F_1\right) - d\left(T, F_2\right) \right|$ постиже свој максимум у тачки M, додирној тачки тангенте и хиперболе. Како за тачку A, симетричну жижи F_2, у односу на тангенту t, важи

$$\left| d\left(M, F_1\right) - d\left(M, A\right) \right| = \left| d\left(M, F_1\right) - d\left(M, F_2\right) \right| = 2a$$

то значи да су тачке F_1, M и A, три различите колинеарне тачке.

Другим речима, $M \in p\left(F_1, A\right)$, а тангента t је симетрала угла $\measuredangle AMF_2$, унутрашњег угла троугла $\Delta F_1 F_2 M$. Одатле непосредно следи да су углови које тангента t образује са фокалним радијусима $F_1 M$ и $F_2 M$ подударни. ■

Илустрација описаног оптичког својства, може се добити кликом на линк (3.6.2.5.ggb), активирањем апликације GeoGebra.

И у овом случају, програм GeoGebra омогућује да се кретањем тачке M по хиперболи, мења положај тангенте t, при чему се у алгебарском прозору добијају мере углова и утврђује се њихова једнакост. Такође се кретањем тачке T по тангенти уочава, да је разлика њених растојања од жижа хиперболе увек мања од $2a$, а једнак је $2a$ када се тачка T поклопи са M. Ови примери служе и да прикажу улогу рачунара у визуелизацији наставних садржаја.

3.6.3. Репродуктивна метода

За стицање умења и навика за примену стечених знања, користи се **репродуктивна наставна метода**. Њена суштина је у понављању (и више пута, ако је потребно) поступака активности на основу упутстава наставника.

Активност наставника састоји се у разради и приказивању концепата, алгоритама и сл., а активност ученика у реализацији наведених активности у складу са упутствима наставника.

Репродуктивна метода наставе уз помоћ рачунара, подразумева усвајање знања, саопштених ученику од стране наставника и (или) рачунара, и организацију активности ученика на репродуковању наученог и примену у аналогним ситуацијама. Примена ове методе обезбеђује суштинско побољшање квалитета организације наставног процеса, у односу на традиционалне методе. Побољшање квалитета наставе огледа се у индивидуализовању активности ученика и визуализацији наставног садржаја, коју креира и спроводи сам ученик.

И у овој наставној методи, генрички организатори играју значајну улогу, посебно што их, на основу инструкција наставника формира и користи сам ученик.

У овом случају, генерички организатор има улогу предмета истраживања и ученику се пружају велике могућности за истраживачку делатност, а то стимулише његов сазнајни развој, учвршћује усвојена знања и увећава интерес за математику. Такође, ученик усавршава рад на рачунару.

Примену **репродуктивне** методе илуструју примери следећих задатака, аналогних Задатку 1. и Теореми 1.:

Задатак 1. Ако је дата права $s: x-3y+2=0$ и тачке $A(2,6)$ и $B(8,5)$, одредити тачку $C \in p$, тако да збир растојања $d(A,C)+d(B,C)$ буде минималан.

Решење се добија кликом на линк (3.6.3.1.ggb), покретањем апликације GeoGebra. ■

Задатак 2. Тангента у тачки M елипсе ε, са жижама F_1 и F_2, образује једнаке углове са фокалним радијусима F_1M и F_2M и припада спољашњости угла $\measuredangle F_1MF_2$.

Решење се добија кликом на линк (3.6.3.2.ggb), покретањем апликације GeoGebra. ■

Задатак 3. Тангента параболе у њеној тачки M, образује једнаке углове са фокалним радијусом FM и осом параболе.

Решење се добија кликом на линк (3.6.3.3.ggb), покретањем апликације GeoGebra. ■

3.6.4. Проблемска метода

Основу ове методе чини **проблемска ситуација**, која се рађа увек када појединац није у стању да одговори на питање, "како објаснити ову, или ону појаву?", када не може да учини помак напред, ка решењу, када не може да дође до циља, неким њему познатим поступком, када долази до несагласности на нивоу интелектуалних способности, на нивоу постојања акције.

Психолог Т. В. Кудрјавцев, под проблемском ситуацијом подразумева "сложено, замршено, психолошко стање, које у себе укључује, како сазнајне, тако и мотивационо-захтевне компоненте деловања" и наглашава "два суштинска критеријума проблемске ситуације: присуство мотивишуће активности и укључење механизма мишљења", [18]. Сагласно овоме је и схватање психолога С. Л. Рубинштајна "мишљење почиње проблемском ситуацијом и разрешава постављени проблем, кроз сгледавање низа постављених проблемских ситуација" [31].

При настајању проблемске ситуације, потребно је откривање нових знања о предмету, о начинима и условима извршавања радњи. Са проблемском ситуацијом мисаони процес само започиње, а решавател још не зна, која ће знања, које ће релације користити при решавању, тј. не зна услове под којима ће се налазити решења. Решавател у том тренутку не зна шта је непозната, шта се тражи, шта је циљ; другим речима, не зна се како ће се тражити решења, тј. не знају се начини деловања.

Дакле, са психолошке тачке гледишта проблемска ситуација представља мање или више јасно схваћену препреку (потешкоћу), генерисану нескладом, противречношћу, између постојећих знања и оних знања која су неопходна за решавање насталог, односно постављеног задатка.

То значи да је **задатак**, генератор проблемске ситуације, а називамо га и проблемски задатак, или једноставно - проблем.

Наведено се односи, и на науку, и на наставу названу проблемском, која у извесној мери имитира процес развијања научних сазнања, путем разрешавања проблемских ситуација.

Разумевање природе проблема, недостатка расположивих знања, открива путеве његовог превазилажења, који се састоји у трагању за новим знањима, за новим начинима деловања, а управо то трагање је једна од основних компонената процеса стваралачког мишљења. Без такве свести, не рађа се потреба за трагањем, за истраживањем, а самим тим, нема креативног мишљења.

То значи да проблемску ситуацију не генерише свака потешкоћа, свака препрека. Да би била генератор проблемске ситуације, противречност (препрека, потешкоћа) треба да потиче из недостатка расположивих знања и да је ученик свестан тог недостатка.

С друге стране, ни свака проблемска ситуација не генерише процес размишљања. То се, посебно, дешава када проблем превазилази ниво оспособљености ученика. Због тога је изузетно важно да се у наставни процес не укључују проблеми који превазилазе могућности ученика одређеног узраста, или образовног нивоа, проблеми који не поспешују развој, него слабе самосталност и поверење у сопствене могућности.

Који се типови задатака могу сматрати проблемским за ученика одређеног разреда?

Проблемски задатак карактеришу следећи критеријуми:

1. постојање проблемске ситуације (у науци, или у наставном процесу),
2. манифестовање јасног интересовања и јасне спремности решаватеља за проналажење решења,
3. могућност различитих начина решавања, што условљава и различите правце трагања за решењима.

Постављање проблемске ситуације има за циљ активизацију ученикових напора на разрешавању настале противречности. Проблемска метода је оријентисана на формирање и развијање креативних способности и као таква значајније утиче на развој креативног мишљења, него традиционалне наставне методе.

У педагошкој теорији се сматра, да се продуктивна сазнајна активност ученика током процеса разрешавања проблемске ситуације, може свести на следеће карактеристичне етапе:

1. постављање проблемске ситуације;
2. разумевање суштине противречности и формулисање проблемског задатка;
3. трагање за начином решења проблемског задатка, итерирањем досетки (наслућивања, претпоставки, хипотеза и т.д.), са сталним проверама и покушајима одговарајућих доказивања;
4. доказ хипотезе;
5. провера исправности решења проблемског задатка.

Проблемска метода користи могућности рачунара за организацију наставног процеса, како за постављање проблема, тако и за трагање за начинима њиховог решавања. Главни циљ примене ове методе јесте максимално садејство свих сазнајних активности ученика. У наставном процесу претпоставља се решавање разних класа задатака на основу усвојених знања, а такође и анализа низа допунских знања, неопходних за решавање постављеног проблема. При томе, значајно место заузима стицање навика за **прикупљање**, **упоређивање**, **анализу** и **обраду информација**. Такође, веома значајна улога примене рачунара у поступку решавања проблема, огледа се у **фази верификовања хипотеза**.

Примену ове методе илуструју решења Проблема 1. и 2. Примери који следе треба да прикажу улогу рачунара у процесу алгоритмизације наставног процеса.

Проблем 1. Саставити једначину елипсе чије су жиже $F_1(1;1)$ и $F_2(5;4)$, а права $t: x-y-3=0$, тангента.

1) Постављање проблемске ситуације

Када би права $p(F_1,F_2)$ била паралелна са неком од координатних оса, на пример са x- осом, онда би тражена елипса имала једначину

(1) $$b^2(x-p)^2+a^2(y-q)^2=a^2b^2,$$

где је $a,b\in\mathbb{R}^+$ и $S(p,q)$ средина дужи F_1F_2. Тада се из услова

$$a^2k^2 + b^2 = \left(kp - q + n\right)^2,$$

да је права $y = kx + n$ тангента елипсе (1) и једначине

$$a^2 - b^2 = c^2,$$

где је $c = d\left(F_1, F_2\right)/2$ линеарни ексцентрицитет елипсе, лако одређује једначина (1), што се добија кликом на линк (3.6.4.1.ggb), покретањем апликације GeoGebra. Међутим, како права $p\left(F_1, F_2\right)$ није паралелна ни са x - осом, ни са y - осом, то наведене једначине немају никаквог значаја, а решавање проблема на овај начин није могуће. и даје му посебан карактер.

2) **Разумевање суштине противречности и формулисање проблемског задатка**

Дакле, наведени поступак не решава проблем, јер је очигледно реч о елипси чија је једначина облика

(2) $$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0,$$

где је $a, b, c \neq 0$, тј. осе елипсе нису паралелне координатним осама, редом. Тада је, као што је познато, потребно пет тачака, од којих никоје три нису колинеарне, да би елипса била једнозначно одређена, што се види кликом на линк (3.6.4.2.ggb), покретањем апликације GeoGebra. У овом случају су позната "само" три елемента (две жиже и тангента).

Да ли су три овако задата елемента услов, еквивалентан трима задатим тачкама? Ако је одговор потврдан, онда задатак не би било могуће решити!

Међутим, ако би уз задате жиже била позната још једна тачка елипсе, например тачка M, тада би се на основу дефиниције елипсе

(3) $$d\left(F_1, M\right) + d\left(F_2, M\right) = 2a$$

могла одредити и њена једначина. У ту сврху кликом на линк (3.6.4.3.ggb), покренути апликацију GeoGebra

Последње расуђивање наводи на закључак, да задате две жиже и тангента елипсе, баш као и две жиже и тачка елипсе, представљају довољан број задатих елемената да се проблем реши.

С друге стране ваља напоменути, да у наставном програму аналитичке геометрије за гимназију, није експлицитно наведено оптичко својство елипсе (хиперболе, параболе), што значи да произвољан ученик и не мора да га зна, односно, не мора да га се "сети".

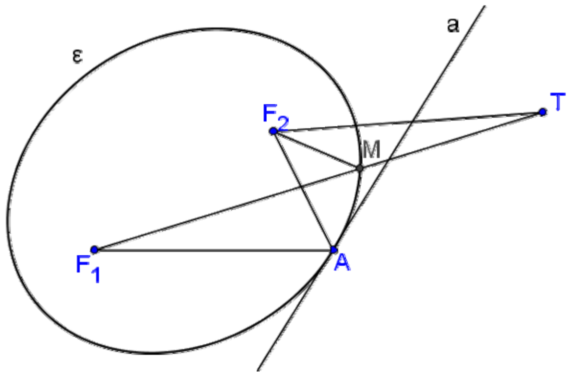
То дакле значи да суштину противречности представља немогућност сагледавања везе између задатих елемената и траженог коначног резултата, једначине елипсе.

Стога се намеће закључак да треба анализирати везу, ако та веза постоји, између: жижа и тангенте, с једне стране и тачака елипсе, с друге стране.

Проблемски задатак се може формулисати на следећи начин: треба утврдити везу између жижа и тангенте елипсе, с једне стране, са додирном тачком тангенте и елипсе, с друге стране.

3) Трагање за начином решавања проблемског задатка

Познато је да за савку тачку M елипсе, чије су жиже F_1 и F_2, важи релација (3), што важи и за додирну тачку A, тангенте и елипсе.



Слика 3.

За тачку T, спољашњости елипсе, (Слика 3.) важи неједнакост

$$d(F_1,T)+d(F_2,T)=d(F_1,M)+d(M,T)+d(F_2,T)>d(F_1,M)+d(F_2,M)=2a,$$

која свакако важи и за произвољну тачку тангенте, различиту од додирне тачке, што се добија кликом на линк (3.6.4.4.ggb), покретањем апликације GeoGebra.

Међутим, из последње релације може се уочити једна значајна карактеристика тачака тангенте, а то је: збир растојања произвољне тачке тангенте, различите од додирне тачке, од жижа елипсе, већи је од збира растојања додирне тачке од жижа. Другим речима, збир растојања произвољне тачке тангенте, од жижа елипсе постиже свој минимум у додирној тачки.

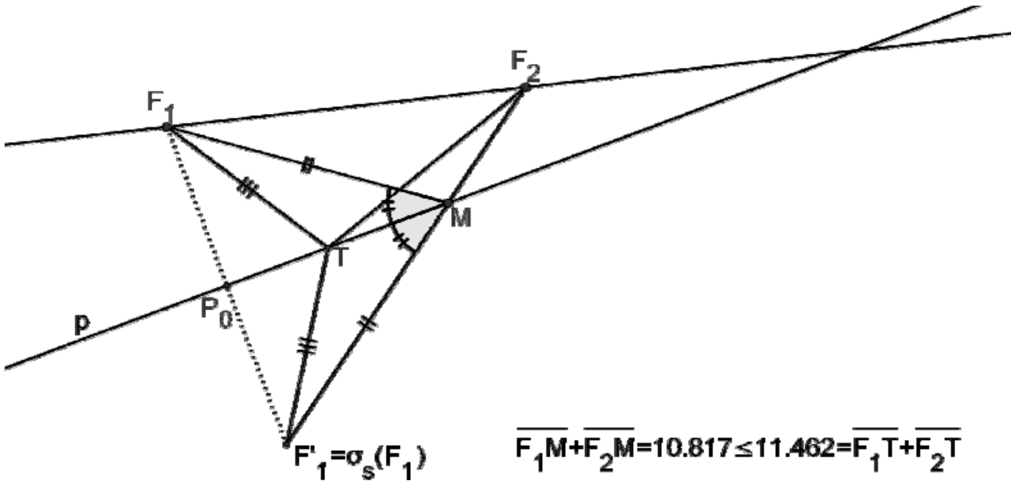
Управо је додирна тачка, тачка коју тражимо!

4) Доказ хипотезе

Сада имамо нови задатак, који гласи:

Ако је у равни α дата права t и тачке F_1 и F_2, са исте стране праве, одредити тачку $M\in t$, тако да збир растојања $d(F_1,M)+d(F_2,M)$ буде минималан.

У ту сврху, нека су тачке F_1 и F_2, са исте стране праве t и нека је F'_1 тачка симетрична тачки F_1, с обзиром на осу t, (Слика 4.).



Слика 4.

Пошто су тачке F_2 и F'_1 са разних страна праве t, постоји пресек $[F_2F'_1] \cap t = \{M\}$, а пошто је осна симетрија трансформација подударности и $M \in p(F_2, F'_1)$, онда за тачку $T \in t$, важии

$$d(F_1, M) + d(F_2, M) = d(F'_1, M) + d(F_2, M) = d(F'_1, F_2) \leq d(F'_1, T) + d(F_2, T),$$

а за $T \neq M$ важи строга неједнакост, што се добија кликом на линк (3.6.4.5.ggb), покретањем апликације GeoGebra.

Дакле, тачка M је тражена додирна тачка тангенте и елипсе. **Овде треба нагласити и да је тангента t, симетрала угла $\measuredangle F_1MF'_1$, напоредног угла, $\measuredangle F_1MF_2$.**

Сада, када је одређена тачка M, додирна тачка тангенте и елипсе, из релације (3) одређује се непознати параметар a, а затим применом поступка, аналогног поступку налажења једначине елипсе – по дефиницији, одређује се једначина елипсе коју добијамо у облику (2).

Сада је откривена тражена веза из проблемског задатка, која се добија кликом на линк (3.6.4.6.ggb), покретањем апликације GeoGebra.

Да бисмо применили наведени поступак, прво налазимо осносиметричну слику F'_1, жиже F_1. У ту сврху налазимо пресек P_0, дате тангенте t и нормале

$$n : x + y = 2$$

из жиже F_1, на тангенту t. Тачка $P_0(2.5;-0.5)$ је средина дужи $[F_1F'_1]$, због чега је $F'_1(4,-2)$. Права $p(F_2, F'_1)$, чија је једначина

$$6x - y = 26,$$

сече тангенту t у тачки $M(4.6;1.6)$, додирној тачки тангенте t и тражене елипсе.

Применом једначине (3), параметар a једнак је

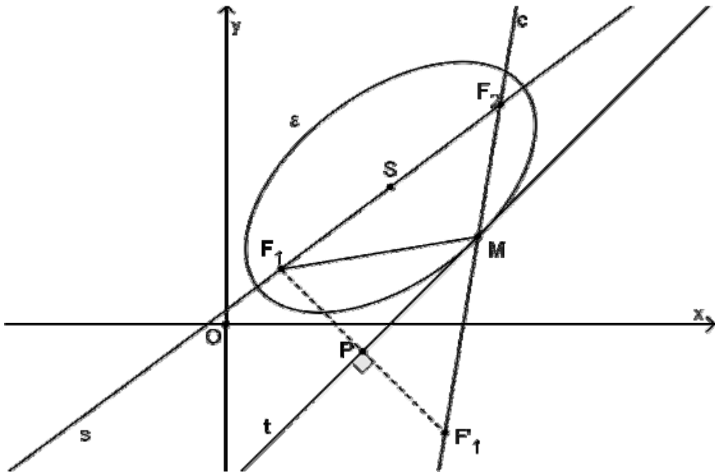
$$a = 0.5\left(d\left(F_1, M\right) + d\left(F_2, M\right)\right) = \sqrt{3.33} + \sqrt{1.48} \approx 3.04138\,.$$

Применом дефиниције елипсе

$$d\left(F_1, T\right) + d\left(F_2, T\right) = 2a$$

где је $T\left(x, y\right)$, произвољна тачку елипсе, после два узастопна квадрирања и сређивања, добија се тражена једначина елипсе (Слика 5.)

$$21x^2 - 24xy + 28y^2 - 66x - 68y + 73 = 0\,.$$



Слика 5.

Тражена једначина се добија покретањем апликације (3.6.4.7.nb) у Mathematica-и.

5) Провера исправности решења проблемског задатка

Анализом добијене једначине, којом се добија

$$\delta = 444 > 0 \quad \text{и} \quad \Delta = -49284 \neq 0$$

јасно је да она представља елипсу, чије су жиже дате, а решавањем система једначина

$$21x^2 - 24xy + 28y^2 - 66x - 68y + 73 = 0$$

$$x - y - 3 = 0$$

добија се једно решење, тј. један уређени пар $\left(23/5, 8/5\right)$, што значи да је дата права t тангента елипсе. Једини услов, који треба да испуњавају дати елементи јесте да су дате тачке са исте стране дате праве. У противном, ако би права t садржала унутрашњу тачку дужи $\left[F_1F_2\right]$, а то је унутрашња тачка елипсе, онда та права не би била тангента елипсе, и тада задатак нема решења, јер таква елипса не постоји. ■

Напомена 4. Ако права t садржи унутрашњу тачку дужи $[F_1F_2]$, онда постоји хипербола са жижама F_1 и F_2, за коју је, тако задата, права t - тангента. У ту сврху, за $t: 2x-y-3=0$ и $F_1(0;2)$ и $F_2(4.5;3.5)$, може се на сличан начин решити одговарајући проблем. Резултат се може добити кликом на линк, (3.6.4.8.ggb), покретањем апликације GeoGebra. ■

Проблем 2. По мердевинама дужине d, наслоњеним на зид, креће се мачка. У тренутку када је заузела ослонац у тачки T, која дели мердевине у односу $m:n$, оне почињу да клизе (један крај клизи по поду, а други по зиду). Коју путању описује тачка ослонца мачке?

1) Постављање проблемске ситуације:

Нека је T тачка ослонца, која дели мердевине AB у размери $m:n$, тј.

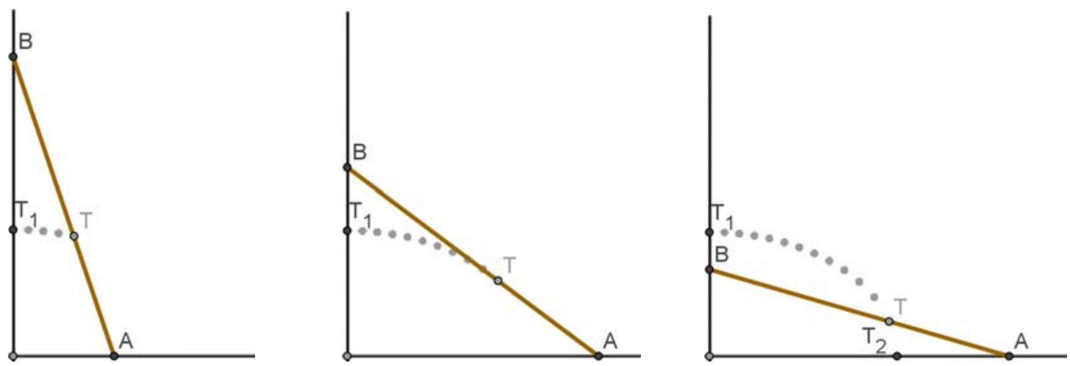
$$\overline{AT}:\overline{BT}=m:n$$

и нека је T_1 њен положај када су мердевине потпуно усправне, а T_2 положај када су мердевине на поду.

Да ли је путања тачке T праволинијска, да ли је путања дуж T_1T_2, или је реч о некој криволинијској путањи?

2) Разумевање суштине противречности и формулисање проблемског задатка:

На Слици 4., или кликом на линк (3.6.4.9.ggb), покретањем апликације GeoGebra, може се закључити да путања није права линија.



Слика 6.

Међутим то није довољан разлог да се изведе сигуран закључак. За решавање проблема, улогу зида и пода преузеће координатне осе, улогу мердевина, дуж константне дужине d, а улогу тачке ослонца тачка T, која врши унутрашњу поделу дужи у датом односу. Наведене тачке T_1 и T_2, у овој ситуацији, одређене су на следећи начин

$$T_1\left(0,\frac{dm}{m+n}\right) \quad \text{и} \quad T_2\left(\frac{dn}{m+n},0\right).$$

Сада се решавање проблема своди на решавање следећег задатка:

Одредити геометријско место тачака, које дуж константне дужине d, чије се крајње тачке крећу по координатним осама, деле у размери $m:n$, где је $m,n\in\mathbb{R}^+$.

3) Трагање за начином решења проблемског задатка

Нека је AB дата дуж дужине d, где је $d>0$. Ако је у Декартовом правоуглом координатном систему тачка $A(a_0,0)$, где је $|a_0|\le d$, и $B(0,b_0)$ онда је

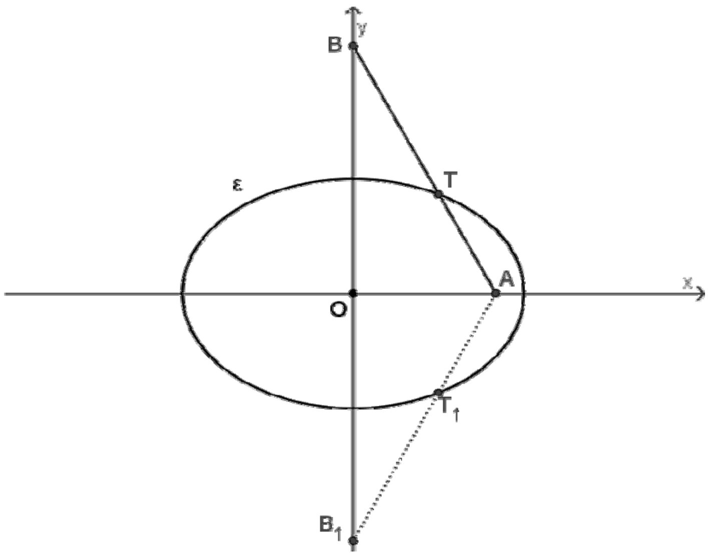
$$(4) \qquad {a_0}^2+{b_0}^2=d^2.$$

С друге стране, ако тачка T дели дуж AB у размери $m:n$, за $m,n\in\mathbb{R}^+$ тј.

$$\overrightarrow{AT}=\frac{m}{n}\cdot\overrightarrow{TB},$$

онда за координате тачке $T(x,y)$, важи

$$x=\frac{na_0}{m+n}\ ,\ \ y=\frac{mb_0}{m+n},$$



Слика 7.

На основу релације (4) , имамо

$$(5) \qquad \varepsilon:\left(\frac{m+n}{dn}\right)^2 x^2+\left(\frac{m+n}{dm}\right)^2 y^2=1,$$

што представља елипсу са центром у координатном почетку и полуосама

$$a=\frac{dn}{m+n} \text{ и } b=\frac{dm}{m+n},$$

при чему је $a>0$ и $b>0$.

4) Доказ хипотезе

Обрнуто, нека $d(A.B)=d$ где је $A(a_0,0)$ и $B(0,b_0)$. Пошто систем

$$\left(\frac{m+n}{dn}\right)^2 x^2+\left(\frac{m+n}{dm}\right)^2 y^2=1 \quad \wedge \quad b_0x+a_0y=a_0b_0$$

увек има два решења,

$$x_1=\frac{na_0}{m+n},\ y_1=\frac{mb_0}{m+n} \quad \text{и} \quad x_2=\frac{na_0\left(b_0^2(m+n)^2-d^2m^2\right)}{(m+n)\left(a_0^2m^2+b_0^2n^2\right)},\ y_2=\frac{mb_0\left(a_0^2(m+n)^2-d^2n^2\right)}{(m+n)\left(a_0^2m^2+b_0^2n^2\right)},$$

права

$$p(A,B): b_0x+a_0y=a_0b_0$$

сече елипсу (5) у двема тачкама $T(x_1,y_1)$ и $S(x_2,y_2)$, од којих, очигледно, тачка T дели дату дуж AB у размери $m:n$.

5) Провера исправности решења проблемског задатка

Тачка ослонца мачке, креће се по путањи, која представља део централне елипсе (5) који лежи у I квадранту. (3.6.4.10.ggb) ■

Програм GeoGebra омогућује да се кретањем клизача a_0, тј. кретањем тачке a_0 по интервалу $[-d,d]$, тачке A и B крећу по координатним осама, што условљава и кретање дужи AB (мердевина), као и тачке M. Наредба "укључи траг" омогућује цртање тачке T у разним положајима, што представља тражено геометријско место тачака. Такође, могуће је варирање и осталих параметара (d,m,n) што има за последицу промену положаја тачака и облика геометријских фигура, а у складу с тим и промену њихових нумеричких карактеристика (координате, мере, једначине).

Примену ове наставне методе, илуструју и следећи задаци

Задатак 1. Саставити једначину елипсе чије су жиже $F_1(9;20)$ и $F_2(49;55)$, а тангента x- оса.

Решење се добија покретањем апликације (3.6.4.11.ggb), у програму GeoGebra, односно покретањем апликације (3.6.4.12.nb), у програму Mathematica. ■

Задатак 2. Одреди једначину параболе, која садржи тачке $A(0;-1.5)$ и $B(0;-4)$ и има директрису $2x-y+1=0$.

Решење се добија покретањем апликације (3.6.4.13.ggb), у програму GeoGebra. ■

Задатак 4. Дата кружница $k: x^2 + y^2 = a^2$, тачке $A(c,0)$ и $B(-c,0)$, права $s \perp p(A,N)$ у произвољној тачки N, кружнице и тачка T симетрична тачки A, у односу на праву s. Одредити геометријско место тачака M, пресека правих s и $p(B,T)$, ако је: а) $0 < c < a$, б) $c > a > 0$. ■

Задатак 5. Дата је права $d: x = -\frac{p}{2}$ и тачка $F\left(\frac{p}{2},0\right)$, где је $p > 0$ и произвољна тачка праве $A \in d$. Одредити геометријско место свих пресечних тачака M, симетрале дужи FA и праве $c \perp d$, која садржи тачку A. ■

Задатак 6. Применом програма GeoGebra конструисати геометријска места тачака одређена у Проблемима 1. и 2., као и у Задацима 4. и 5. ■

Задатак 7. Наћи геометријско место тачака, које су симетричне са жижом у односу на тангенте елипсе. ■

3.6.5. Истраживачка метода

Као наставна метода, истраживачка метода се обично реализује као виши ниво проблемске методе. Заснива се на индивидуалном раду ученика, на решавању проблема, тежих задатака, сазнајног или практичног карактера. Истраживачка активност ученика, нема за циљ само проналажење решења постављеног про-блема, него и оспособљавање за самостално уочавање и постављање проблема, као и истицање циља своје истраживачке активности.

Ова метода подразумева организацију наставног процеса по узору на процес научног истраживања. Ученици "откривају ново", што субјективно, са аспекта ученика, јесте ново, али је науци добро познато. Током реализације истраживачке методе, ученик пролази кроз фазе истраживачког процеса, слично активном истраживачу, током спровођења процеса истраживања, наравно, на поједностављен начин, приступачан ученику. Можемо издвојити следеће фазе:

1. идентификација проблема и формулација предмета истраживања,
2. постављање хипотезе истраживања,
3. састављање плана истраживања,
4. реализација плана истраживања,
5. тестирање хипотезе, анализа непознатих чињеница и њихових односа са другима чињеницама,
6. формулација резултата,
7. оцена вредности добијених резултата и могућности њихове примене.

Истраживачка метода, као и свака друга наставна метода, није универзална. Она се може применити само на наставу одређених тема, превасходно ових које се обрађују у вишим разредима средње школе, за чију обраду је потребно да ученици поседују одређени, довољно обиман, фонд знања.

Једна од вредности ове наставне методе јесте и то, што су знања ученика резултат самосталног истраживања ученика, каналисаног од стране наставника. Међутим, без обзира на самосталну когнитивну активност ученика, неопходно је организовати истраживање, развијати когнитивну активност ученика, што је несумњиво сложеније и захтева стручно-методичку припрему вишег нивоа, него презентовање градива изложеног у уџбенику и захтев да га ученици запамте.

За реализацију ове методе, улога рачунара и одговарајућег образовног софтвера је веома битна. У свакој фази истраживачког процеса рачунар и образовни софтвер дају велики допринос, што ће бити и показано у примерима који следе.

Примена **истраживачке** методе у дидактичком систему настава уз помоћ рачунара обезбеђује самосталну стваралачку активност ученика у процесу математичких истраживања у оквиру једне теме. Коришћењем ове наставне методе, учење постаје резултат активног истраживања, откривања и игре, због чега су и настава и учење, по правилу, пријатнији и успешнији, него применом традиционалних наставних метода.

Примену ове наставне методе илустроваће примери који следе.

Пример 1. Дате су праве

$$a : a_1x + b_1y + c_1 = 0 \text{ и } b : a_2x + b_2y + c_2 = 0,$$

где је $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{R}$, $a_1^2 + b_1^2 \neq 0$ и $a_2^2 + b_2^2 \neq 0$. Одреди једначину хиперболе чије су асимптоте праве a и b, са којима свака тангента, образује троугао дате површине P. (Специјално, нека је $a : 2x - y + 4 = 0$ и $b : x - 2y + 10 = 0$, $P = 10$.)

1. Идентификација проблема и формулација предмета истраживања

Одмах се може уочити да задатак захтева веома озбиљну анализу, посебно због чињенице да ученик III разреда гимназије не влада апаратом диференцијалног рачуна.

Такође, када би асимптоте биле симетричне у односу на неку од координатних оса, или у односу на неку њима паралелну праву, задатак би био знатно једноставнији. Тада би и хипербола била симетрична у односу на исту осу, односно праву, а њена једначина би била, облика

$$\frac{(x-p)^2}{a^2} - \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1,$$

где су a и b полуосе, а $S(p, q)$ пресек асимптота, што се добија кликом на линк (3.6.5.1.ggb), покретањем апликације GeoGebra. Тада су полуосе решења система једначина

$$ak = b \text{ и } ab = P,$$

а тражена једначина хиперболе гласи

$$k^2 (x-p)^2 - (y-q)^2 = kP.$$

Међутим, због положаја асимптота, проблем је много сложенији и треба га повезати са хиперболом која се одређује на основу својих асимптота.

2. Постављање хипотезе истраживања

Претпоставља се, у општем случају, да решење треба тражити на други начин. Наиме, тражену хиперболу би требало довести у везу са једначином

$$(a_1 x + b_1 y + c_1)(a_2 x + b_2 y + c_2) = \lambda, \tag{6}$$

где је $\lambda \in \mathbb{R}$, и утврдити под којим условима она представља хиперболу. У ту сврху, треба покренути апликацију (3.6.5.2.ggb) у програму GeoGebra.

С тим у вези, треба се сетити анализе опште квадратне једначине (видети 4.2.)

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0,$$

и потребног и довољног услова да она представља хиперболу, који гласи

$$\delta = \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} < 0 \text{ и } \Delta = \begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix} \neq 0,$$

што се добија покретањем апликације (3.6.5.3.ggb) у програму GeoGebra.

Такође, познато је, да за сваке две дате праве, постоји трећа права која са њима образује троугао дате површине. Та трећа права треба да представља тангенту тражене хиперболе. Познато је, даље, да је средиште њеног одсечка између датих асимптота, тачка додира тангенте и хиперболе.

Дакле, основна хипотеза истраживања подразумева, **да свака права која са датим асимптотама образује троугао дате површине предсатвља тангенту хиперболе, а средина одсечка између асимптота, на свакој тангенти, је тачка хиперболе, која задовољава једначину** (6).

3. Састављање плана истраживања

Одредити потребан и довољан услов да једначина (6) представља хиперболу.

Саставити једначину једне (произвољне) од тангената t, која са датим асимптотама образује троугао дате површине P.

Одредити тачку додира тангенте и хиперболе, тј. одредити средиште одсечка на тангенти, одређеног асимптотама.

У једначини (6), одредити вредност параметра $\lambda \in \mathbb{R}$, из услова да тачка додира припада хиперболи.

4. Реализација плана истраживања

Тврђење 1.: Једначина (6), за $\lambda, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{R}$, представља хиперболу, ако и само ако је

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{и} \quad \lambda \neq 0.$$

За доказ тврђења, претпоставимо да једначина (6), написана у облику

$$a_1 a_2 x^2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) xy + b_1 b_2 y^2 + (a_1 c_2 + a_2 c_1) x + (b_1 c_2 + b_2 c_1) y + c_1 c_2 - \lambda = 0,$$

представља хиперболу. Ова претпоставка је еквивалентна следећим релацијама:

$$\delta = \begin{vmatrix} a_1 a_2 & 0.5(a_1 b_2 + a_2 b_1) \\ 0.5(a_1 b_2 + a_2 b_1) & b_1 b_2 \end{vmatrix} = -0.25(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 < 0,$$

и

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 a_2 & 0.5(a_1 b_2 + a_2 b_1) & 0.5(a_1 c_2 + a_2 c_1) \\ 0.5(a_1 b_2 + a_2 b_1) & b_1 b_2 & 0.5(b_1 c_2 + b_2 c_1) \\ 0.5(a_1 c_2 + a_2 c_1) & 0.5(b_1 c_2 + b_2 c_1) & c_1 c_2 - \lambda \end{vmatrix} = 0.25(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 \lambda \neq 0.$$

Прва релација је еквивалентна са релацијом

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

а друга, са релацијом

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0 \wedge \lambda \neq 0,$$

што је требало доказати. Резултат се добија кликом на линк (3.6.5.4.nb), покретањем апликације Mathematica.

Ако су испуњени услови наведени у претходном тврђењу, тада се асимптоте секу у тачки $S = (x_S, y_S)$ - центру хиперболе, где је $x_S = \dfrac{b_1 c_2 - b_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$, $y_S = \dfrac{a_2 c_1 - a_1 c_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$, што се добија кликом на линк (3.6.5.4.nb), покретањем апликације Mathematica. Специјално $S = (2/3, 16/3)$.

За одређивање једначине тангенте t, уочимо на асимптоти a, произвољну тачку $A(x_a, y_a)$, која припада и тангенти. Треће теме $B(x_b, y_b)$, троугла ΔABS, заједничку тачку тангенте t и асимптоте b, одређујемо из услова

$$P_{\Delta ABS} = P,$$

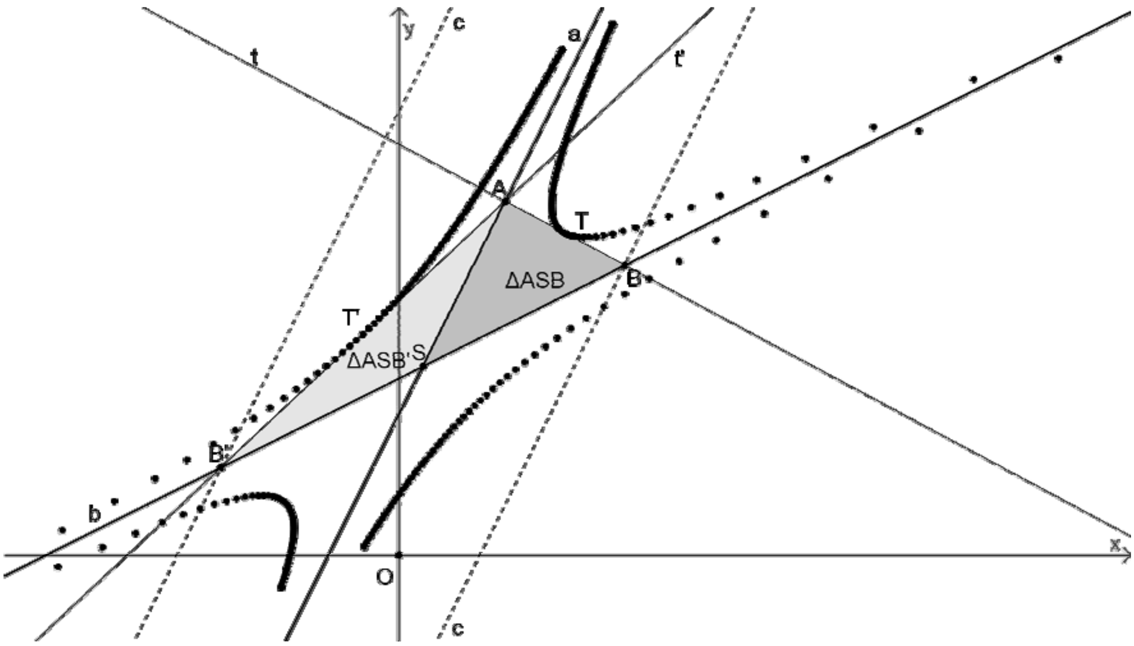
тј.

$$\left|(x_S - x_a)(y - y_a) - (x - x_a)(y_S - y_a)\right| = 2P.$$

Последњи услов представља једначине паралелних правих

$$(x_s - x_a)(y - y_a) - (x - x_a)(y_s - y_a) = \pm 2P,$$

које секу праву b, у тачкама $B(x_b, y_b)$ и $B'(x'_b, y'_b)$, што значи да постоје два таква троугла: ΔASB и $\Delta ASB'$. То се добија покретањем апликације (3.6.5.5.ggb), у програму GeoGebra, Слика 6.



Слика 6.

Специјално: за $A(4,12)$ имамо $B(14/3, 22/3)$ и $B'(-10/3, 10/3)$, а за тангенту важи

$$t: 7x + y - 40 = 0 \quad \text{и} \qquad t': 13x - 11y + 80 = 0,$$

где је $t = p(A, B)$ и $t' = p(A, B')$, што се добија покретањем апликације (3.6.5.4.nb), у програму Mathematica.

Такође, позната је и особина средине одсечка на тангенти између асимптота.

Тврђење 2. T је тачка додира тангенте и хиперболе, ако и само ако је T средиште дужи, одређене пресечним тачкама асимптота хиперболе и тангенте.

За доказ, нека је $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ хипербола, што не утиче на општост. Одредимо пресечне тачке P и Q, тангенте у тачки $T(x_0, y_0)$ хиперболе

$$b^2x_0x - a^2y_0y - a^2b^2 = 0,$$

са асимптотама ове хиперболе

$$bx - ay = 0 \text{ и } bx + ay = 0.$$

Решавањем овог система једначина добијамо $P\left(\frac{a^2b}{bx_0 - ay_0}, \frac{ab^2}{bx_0 - ay_0}\right)$, $Q\left(\frac{a^2b}{bx_0 + ay_0}, \frac{-ab^2}{bx_0 + ay_0}\right)$, одакле следи тврђење, тј. тачка T је средина дужи PQ.

У ту сврху, кликом на линк (3.6.5.6.ggb), покренути апликацију GeoGebra. Обрнуто, права $y = kx + n$, под условом $a^2k^2 - b^2 = n^2$, тангента дате хиперболе, сече њене асимптоте, у тачкама $P\left(\frac{an}{b - ak}, \frac{bn}{b - ak}\right)$ и $Q\left(\frac{-an}{ak + b}, \frac{bn}{ak + b}\right)$, редом. Пошто координате тачке $T\left(\frac{a^2k}{n}, \frac{b^2}{n}\right)$, средине дужи PQ, задовољавају једначину хиперболе, тачка T јој припада.

Дакле, на основу Тврђења 2, закључујемо да су средине дужи AB, односно $A'B'$, додирне тачке $T = \left(\frac{x_a + x_b}{2}, \frac{y_a + y_b}{2}\right)$, односно $T' = \left(\frac{x_a + x'_b}{2}, \frac{y_a + y'_b}{2}\right)$, тангенте t, односно t' и хиперболе. Специјално: $T(13/3, 29/3)$, $T'(1/3, 23/3)$.

Из услова да тачка додира T, односно T', припада траженој хиперболи, одређује се параметар λ, односно λ', у једначини (6), на следећи начин:

$$\lambda = (a_1x_t + b_1y_t + c_1)(a_2x_t + b_2y_t + c_2) \text{ и } \lambda' = (a_1x'_t + b_1y'_t + c_1)(a_2x'_t + b_2y'_t + c_2),$$

где је $T = (x_t, y_t)$ и $T' = (x'_t, y'_t)$, одакле следи да постоје две хиперболе које задовољавају постављене услове

$$H: (a_1x + b_1y + c_1)(a_2x + b_2y + c_2) = \lambda \text{ и } H': (a_1x + b_1y + c_1)(a_2x + b_2y + c_2) = \lambda'.$$

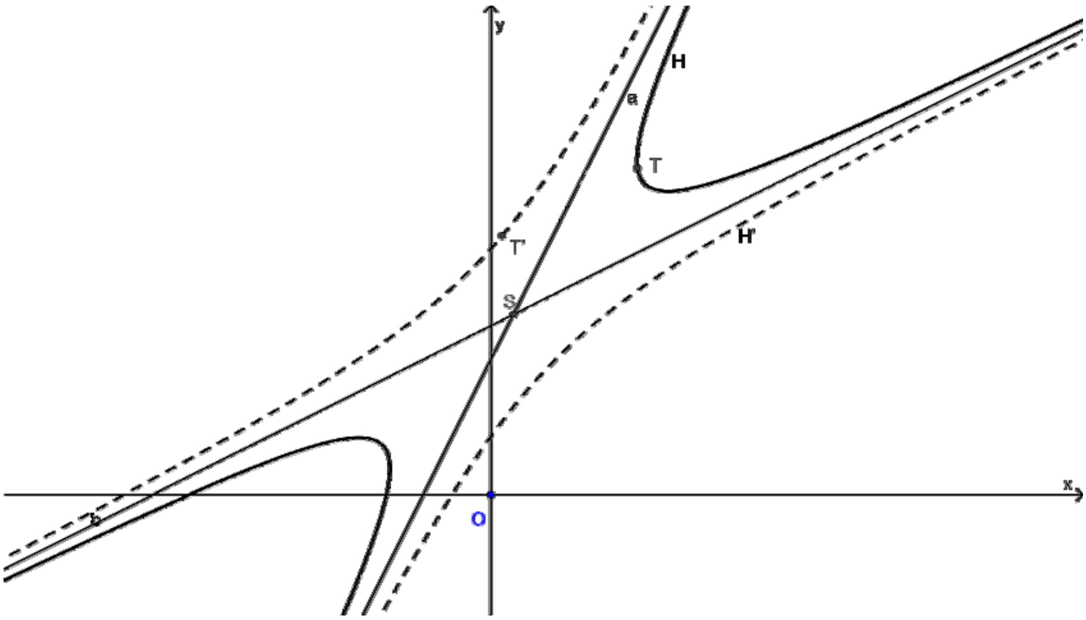
Специјално, за $\lambda = -15$ имамо

$$H: 2x^2 - 5xy + 2y^2 + 24x - 18y + 55 = 0,$$

а за $\lambda' = 15$

$$H': 2x^2 - 5xy + 2y^2 + 24x - 18y + 25 = 0,$$

што се добија кликом на линк 3.6.5.7.ggb), покретањем апликације GeoGebra.



Слика 7.

5. Тестирање хипотезе, анализа непознатих чињеница и њихових односа са другима чињеницама

Решењем задатка потврђена је основна хипотеза, и уочавају се следеће чињенице:

- да ће праве t и t', добијене за разне вредности $x_a \in \mathbb{R}$, бити тангенте хипербола H и H',
- да средине T, дужи AB, (односно T', дужи AB'), добијене за разне вредности $x_a \in \mathbb{R}$, припадају хиперболама H и H',
- да су вредности параметара $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$, независне од избора $x_a \in \mathbb{R}$?

Активирањем апликације (3.6.5.4.nb) у програму Mathematica, уверавамо се да су одговори на сва питања потврдни.

Такође, можемо закључити да ако су праве паралелне, задатак нема решење.

6. Формулација резултата

На основу изложене анализе јасно је: ако се праве a и b секу, онда постоје две хиперболе

$$H:(a_1x+b_1y+c_1)(a_2x+b_2y+c_2)=(a_1x_t+b_1y_t+c_1)(a_2x_t+b_2y_t+c_2)$$

и

$$H':(a_1x+b_1y+c_1)(a_2x+b_2y+c_2)=(a_1x'_t+b_1y'_t+c_1)(a_2x'_t+b_2y'_t+c_2),$$

које испуњавају дате услове, при чему су координате тачака $T=(x_t, y_t)$ и

$T' = (x'_t, y'_t)$ одређене применом описане процедуре.

7. Оцена вредности добијених резултата и могућности њихове примене.

Ово је веома важан резултат, јер представља модел за решавање многих других проблема. Наиме, свака од урађених апликација може да представља генерички организатор за развијање одређеног концепта, за проверу неке претпоставке, за потврду неког добијеног резултата и сл. Тако на пример, апликација (3.6.5.5.ggb) у програму GeoGebra, приказује генерички организатор за одређивање координата трећег темена троугла дате површине, апликација (3.6.5.7.ggb) у програму GeoGebra, може да прикаже генерички организатор целог поступка решавања проблема, а апликација (3.6.5.4.nb), у програму Mathematica омогућава поступну проверу свих добијених резултата. ■

Задаци за вежбу

1. Написати једначину хиперболе, са асимптотама $x+2y-3=0$ и $3x-2y-1=0$, која садржи тачку $T(2,1)$. ■
2. Написати једначину хиперболе са центром $S(1,1)$, која садржи тачку $T(-3,0)$, а једна асимптота јој је права $x-y=0$. ■

Пример 2. Одреди једначине тангенти криве $x^2+4xy+y^2-8x-4y+8=0$, из тачке $T(-1,3)$.

1. Идентификација проблема и формулација предмета истраживања

На самом почетку може се закључити да дата једначина представља елипсу, хиперболу, или параболу. У противном, задатак не би имао смисла. Како је у овом случају $\delta=-3$ и $\Delta=-12$, то на основу резултата приказаних у (4.2) значи да дата крива представља хиперболу, што се добија кликом на линк (3.6.5.3.ggb), покретањем апликације GeoGebra. Пошто у једначини дате криве постоји члан $2bxy$, познато је да осе криве нису паралелне са координатним осама. Без познавања првог извода и без могућности његовог коришћења, није могуће користити услове да права буде тангента криве другог реда, ни готове формуле за једанчине њених тангенти. Зато је решавању овог задатка, потребно приступити на један потпуно нов начин. Наиме потребно је, ако је то могуће, елиминисати наведени члан $2bxy$, из дате једначине криве.

Ова размишљања се могу анализирати на рачунару, кликом на линк (3.6.5.10.ggb), покретањем апликације GeoGebra.

2. Постављање хипотезе истраживања

Нека је у општој квадратној једначини

$$ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0,$$

$b \neq 0$. **Претпоставићемо да се члан $2bxy$ може елиминисати ротацијом криве око координатног почетка**. Тада се крива пресликава на подударну криву, чије ће осе бити паралелне координатним осама, ако је реч о елипси или хиперболи, односно, оса ће бити паралелна једној од координатних оса, ако је крива парабола.

Ова претпоставка се може прегледно приказати на рачунару, кликом на линк 3.6.5.11.ggb, покретањем апликације GeoGebra, или кликом на линк 3.6.5.12.nb, покретањем апликације Mathematica.

Рачунар применом програма GeoGebra и Mathematica пружа могућност да се ротација (и остале трансформације) примењује директно на геометријске фигуре (тачке, праве, криве, ...), а не на трансформисање координатног система, а као резултат добијају се подударне геометријске фигуре, и одговарајуће еквивалентне једначине, што се добија покретањем апликација: (3.6.5.13.ggb), у програму GeoGebra и (3.6.5.14.nb), у програму Mathematica.

3. Састављање плана истраживања

а) Прво ротирамо дату криву $\mathcal{K}$, око координатног почетка за неки угао φ, и добијамо слику $\mathcal{K}_1$. Угао ћемо одредити под условима да у једначини слике $\mathcal{K}_1$, коефицијент уз xy буде једнак 0. Такође, ротирамо и тачку T, из које "конструишемо" тангенте и добијамо слику T_1.

б) Затим, одређујемо центар и полуосе криве, ако се ради о елипси, или хиперболи, односно теме, осу и параметар, ако се ради о параболи.

в) У следећем кораку, састављамо једначине тангенти t_1' и t_2', из тачке T_1, на криву $\mathcal{K}_1$, што је позната процедура.

г) На крају, ротацијом тангенти t_1' и t_2', око координатног почетка, за угао $-\varphi$, добијамо тражене тангенте t_1 и t_2, и њихове једначине.

4. Реализација плана истраживања

а) Ротацију ρ_O^{φ} око координатног почетка за угао φ, којом се тачка $A(x,y)$ пресликава на тачку $A_1(x_1,y_1)$, приказујемо следећом формулом

$$(x,y) \xrightarrow{\rho_O^{\varphi}} (x_1,y_1) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ y_1 = x\sin\varphi + y\cos\varphi \end{cases}$$

Ако су $\mathcal{K}: F(x,y)=0$ и $\mathcal{K}_1: F(x_1,y_1)=0$ две подударне криве, равни α, при чему се, под наведеним условима, ротацијом ρ_O^{φ}, једна од две криве пресликава на другу, онда је

$$\rho_O^{\varphi}(\mathcal{K}_1) = \mathcal{K},$$

тј. при **ротацији** ρ_O^φ, **крива** $\mathcal{K}_1$ **је оригинал, а крива** $\mathcal{K}$ **је њена слика.**

За доказ уочимо две криве $\mathcal{K}$ и $\mathcal{K}_1$, дате својим једначинама (у истом координатном систему xOy):

$$\mathcal{K}: F(x,y)=0 \quad \text{и} \quad \mathcal{K}_1: F(x_1,y_1)=0,$$

тако да се при ротацији ρ_O^φ, једна од две криве пресликава на другу. Тада, ако уређени пар (x,y) задовољава једначину

$$F(x\cos\varphi - y\sin\varphi, x\sin\varphi + y\cos\varphi)=0$$

тј. ако тачка (x,y) припада кривој $\mathcal{K}_1$, онда то очигледно значи, да уређени пар $(x\cos\varphi - y\sin\varphi, x\sin\varphi + y\cos\varphi)=(x_1,y_1)$ задовољава једначину

$$F(x,y)=0,$$

тј. тачка $(x_1,y_1)=(x\cos\varphi - y\sin\varphi, x\sin\varphi + y\cos\varphi)$ припада кривој $\mathcal{K}$. Апликација

(3.6.5.13.ggb) у програму GeoGebra, илуструје претходна разматрања.

б) За одређивање угла φ, ротације којом ћемо анулирати коефицијент уз члан xy, на криву $\mathcal{K}$, применимо ротацију ρ_O^φ око координатног почетка O за тај угао φ. Применом претходних разматрања, слика криве $\mathcal{K}$ је крива $\mathcal{K}_1$, дата једначином

$$\mathcal{K}_1: Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+f=0,$$

где је

$$A=a\cos^2\varphi-2b\sin\varphi\cos\varphi+c\sin^2\varphi,$$

$$2B=2b\left(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi\right)+2a\sin\varphi\cos\varphi-2c\sin\varphi\cos\varphi,$$

$$C=a\sin^2\varphi+2b\sin\varphi\cos\varphi+c\cos^2\varphi,$$

$$D=d\cos\varphi-e\sin\varphi,$$

$$E=d\sin\varphi+e\cos\varphi.$$

Угао ротације φ одређујемо тако да буде испуњен услов $2B=0$, тј.

$$2b\left(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi\right)+2a\sin\varphi\cos\varphi-2c\sin\varphi\cos\varphi=0$$

одакле је

$$(c-a)\sin 2\varphi=2b\cos 2\varphi.$$

Овде је $\sin 2\varphi \neq 0$, јер ако је $\sin 2\varphi = 0$, онда је $\cos 2\varphi = \pm 1 \neq 0$, одакле следи $b = 0$, што је немогуће, јер је по услову $b \neq 0$. Дакле, после скраћивања са $2b\sin 2\varphi$, имамо

$$\operatorname{ctg} 2\varphi = \frac{c-a}{2b}.$$

Пошто је $a,b,c \in \mathbb{R} \wedge b \neq 0$, последња једначина има решење, а то је угао φ, такав да је $2\varphi \in (0,\pi)$, одакле коначно имамо

$$\varphi = \frac{1}{2}\operatorname{arcctg}\frac{c-a}{2b}, \quad \varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Значи, ротацијом око координатног почетка, за добијени оштар угао φ, крива $\mathcal{K}$ се пресликава на криву $\mathcal{K}_1$, облика

$$\mathcal{K}_1 : Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + f = 0.$$

Дакле, вршимо ротацију око координатног почетка, за угао $\varphi = \pi/4$, криве

$$\mathcal{K} : x^2 + 4xy + y^2 - 8x - 4y + 8 = 0$$

и очигледно добијамо хиперболу (3.6.5.15.ggb)

$$\mathcal{K}_1 : \frac{\left(x+\sqrt{2}\right)^2}{4} - \frac{\left(y-\sqrt{2}\right)^2}{4/3} = 1,$$

чији је центар $S\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$, а полуосе $a = 2$ и $b = 2\sqrt{3}/3$. Истом ротацијом пресликавамо дату тачку $T(-1,3)$, на тачку $T_1\left(-2\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$.

в) Ако права $t : y = kx + n$, садржи тачку T_1, онда је

$$\sqrt{2} = -2\sqrt{2}\cdot k + n,$$

а ако је иста права тангента хиперболе $\mathcal{K}_1$, онда важи познати услов

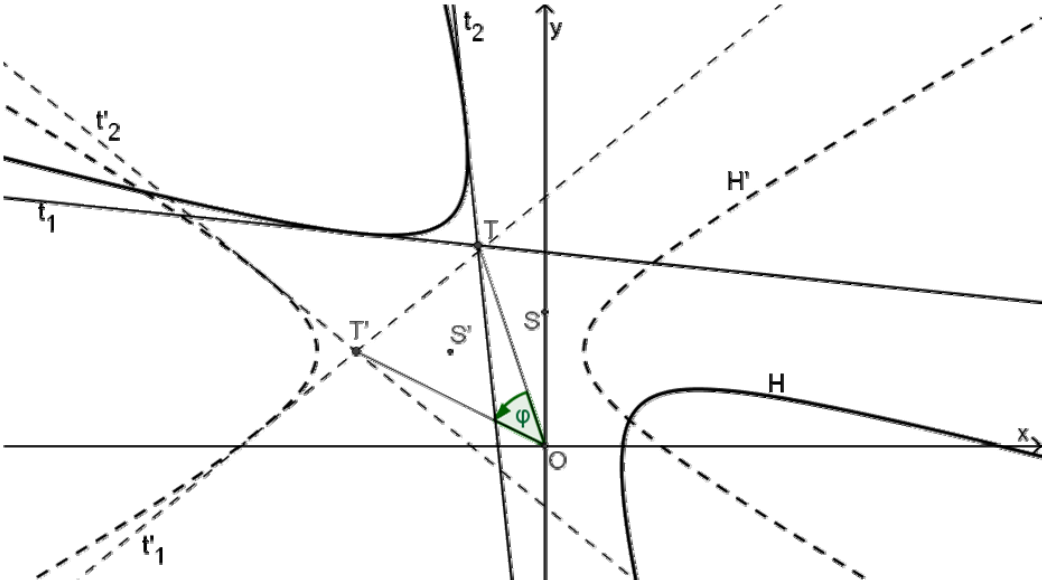
$$4k^2 - 4/3 = \left(-\sqrt{2}k - \sqrt{2} + n\right)^2,$$

одакле је $k_{1,2} = \pm\sqrt{6}/3$ и $n_{1,2} = \left(3\sqrt{2} \pm 4\sqrt{3}\right)/3$. Дакле, једначине тангенти криве $\mathcal{K}_1$ су

$$t'_1 : y = \frac{\sqrt{6}}{3}x + \frac{3\sqrt{2}+4\sqrt{3}}{3} \quad \text{и} \quad t'_2 : y = -\frac{\sqrt{6}}{3}x + \frac{3\sqrt{2}-4\sqrt{3}}{3}.$$

г) Ротацијом правих t'_1 и t'_2 око координатног почетка, за угао $-\pi/4$, добијамо тражене тангенте дате хиперболе из тачке $T(-1,3)$, чије су једначине

$$t_1: y=\left(-5+2\sqrt{6}\right)x-2+2\sqrt{6} \quad \text{и} \quad t_2: y=\left(-5-2\sqrt{6}\right)x-2-2\sqrt{6}\,.$$



Слика 8.

Кликом на линк (3.6.5.9.ggb), покреће се апликација GeoGebra, која представља генерички организатор за решавање овог, и низа сличних задатака.

5. Тестирање хипотезе, анализа непознатих чињеница и њихових односа са другима чињеницама

Решењем задатка потврђена је основна хипотеза, и уочавају се следеће чињенице:

- ако ротацоја ρ_O^{φ} пресликава тачку A криве $\mathcal{K}$, на тачку A_1, криве $\mathcal{K}_1$, при чему се криве једна из друге добијају истом ротацијом, онда њој инверзна ротација $\rho_O^{-\varphi}$, пресликава криву $\mathcal{K}$, на криву $\mathcal{K}_1$;
- ако је у једначини криве $a=c$, онда се за налажење угла ротације користи услов $(c-a)\sin 2\varphi = 2b\cos 2\varphi$, одакле је $\varphi = \pi/4$

6. Формулисање резултата

Применом ротације ρ_O^{φ}, око координатног почетка, за оштар угао $\varphi = \frac{1}{2}\operatorname{arcctg}\frac{c-a}{2b}$, дата крива се пресликава на криву, чије су осе паралелне са координатним осама, тј. на криву чија једначина не садржи члан xy, а њене се тангенте одређују по добро познатој процедури.

7. Оцена вредности добијених резултата и могућности њихове примене.

Ово је веома важан резултат, јер апликација 3.6.5.9.ggb, у програму GeoGebra представља генерички организатор, што је модел за решавање многих сличних проблема. Поступак који је примењен у решавању овог задатка, посебно онај део који се односи на ротацију дате криве, може се применити за анализу опште квадратне једначине, испитивање елемената кривих другог реда, решавање система две квадратне, или једне квадратне и једне линеарне, неједначина са две непознате, и сл. ■

Пример 3. У паралелограм $\square ABCD$, где је $A(4,0)$, $B(2,2)$, $C(0,0)$, уписати елипсу.

1. Идентификација проблема и формулација предмета истраживања

Задатак не би захтевао овакву пажњу, да је дати паралелограм – квадрат, ромб, или правоугаоник. Потребно је, дакле, у паралелограм, који није ни правоугаоник ни ромб, уписати елипсу, а очигледно је да осе те елипсе неће бити паралелне координатним осама. За такву елипсу, чије осе нису паралелне координатним осама, ученику нису познати ни услови да права буде тангента такве елипсе, ни једначине тангенти елипсе.

Наиме, да је паралелограм $\square ABCD$ квадрат, или ромб, тада би решење била уписана кружница, ако је $\square ABCD$ правоугаоник, онда је решење елипса, са теменима у срединама његових страница итд..., што се може размотрити покретањем апликација: 3.6.5.16.ggb, 3.6.5.17.ggb, или 3.6.5.18.ggb, у програму GeoGebra.

2. Постављање хипотезе истраживања

Због наведених околности, може се закључити да би решење требало тражити на на један нов начин.

Зато се поставља питање о могућности "претварања" (превођења, пресликавања) паралелограма $\square ABCD$, у квадрат $\square A'B'C'D'$, или неког квадрата у који би се уписала кружница, у паралелограм $\square ABCD$. Затим, да ли се једним од тих пресликавања кружница пресликава у елипсу, која би била уписана у $\square ABCD$? За илустрацију ове идеје треба покренути апликацију 3.6.5.19.ggb, у програму GeoGebra.

У ту сврху треба се сетити афиности, значајне особине геометријских фигура, и афиних пресликавања.

Другим речима треба се сетити да постоје "нека" пресликавања, која могу да "сажимају кружницу", тј. да пресликају кружницу на елипсу, а праву на праву. При томе, ако тачка припада кружници, онда њена слика припада слици кружнице – елипси, или на пример, ако је права тангента у тачки Т кружнице, онда је њена слика тангента елипсе, у тачаки T', слици тачке T, елипсе ....

Прецизније, овде је реч о **афиним пресликавањима**, пресликавањима при којима особине, као: колинеарност тачака, конкурентност правих, паралелност правих, подела дужи у датој размери, размера површина троуглова, остају инваријантне и називамо их **афине** особине геометријских фигура.

Иначе, афина трансформација равни на саму себе дефинише се на следећи начин:

Дефиниција. Трансформација f равни α на себе, дата са

(1)
$$(x,y)\xrightarrow{f}(x_1,y_1)\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=a_{11}x+a_{12}y+b_1\\ y_1=a_{21}x+a_{22}y+b_2\end{cases},$$

за коју важи

(2)
$$D_a=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0,$$

где су (x,y) и (x_1,y_1), редом, Декартове правоугле координате тачака A и A_1, а $a_{ij},b_i\in\mathbb{R},\ i,j\in(1,2),$ зове се **афина** трансформација.

За илустрацију инваријантности афиних особина могу се покренути апликације: 3.6.5.20.ggb, 3.6.5.21.ggb, 3.6.5.22.ggb, у програму GeoGebra.

Покретањем апликација: 3.6.5.23.ggb, у програму GeoGebra и 3.6.5.24.nb, у програму Mathematica, добија се приказ афине трансформације кружнице у елипсу.

3. Састављање плана истраживања

Прво се одређују координате четвртог темена D, паталелограма. Затим се формира афино пресликавање, које пресликава један квадрат $\square A'B'C'D'$, на дати паралелограм $\square ABCD$, где је $A(4,0)$, $B(2,2)$, $C(0,0)$, $D(6,2)$.

У следећем кораку, у квадрат $\square A'B'C'D'$ се уписује кружница, на коју се примењује формирана афина трансформација. Њена слика треба да буде тражена елипса, уписана у дати паралелограм.

4. Реализација плана истраживања

Тачку $D(6,2)$ добијамо у пресеку праве d кроз тачку A, паралелне са правом $p(B,C)$ и праве c кроз тачку B, паралелне са правом $p(A,C)$, где је $d: x-y=4$ и $c: y=2$.

За темена квадрата $\square A'B'C'D'$, узећемо на пример тачке $A'(0,-4)$, $B'(-4,0)$, $C'(-4,-4)$, $D'(0,0)$. Задатак је да формирамо афину трансформацију (1), којом се квадрат $\square A'B'C'D'$ пресликава на дати паралелограм $\square ABCD$, тако да се тачка A' пресликава на тачку A, B' на B, D' на D, а (због инваријантности паралелности) тачка C', пресликава се на тачку C.

Последњи услов се своди на следеће системе једначина

$$\left.\begin{aligned} -4a_{12}+b_1&=4\\ -4a_{11}+b_1&=2\\ b_1&=6 \end{aligned}\right\} \quad \text{и} \quad \left.\begin{aligned} -4a_{22}+b_2&=0\\ -4a_{21}+b_2&=2\\ b_2&=2 \end{aligned}\right\},$$

чија су решења

$$a_{11}=1,\ a_{12}=0.5,\ b_1=6,\ a_{21}=0,\ a_{22}=0.5,\ \ b_2=2\,.$$

Тако се добија афино пресликавање

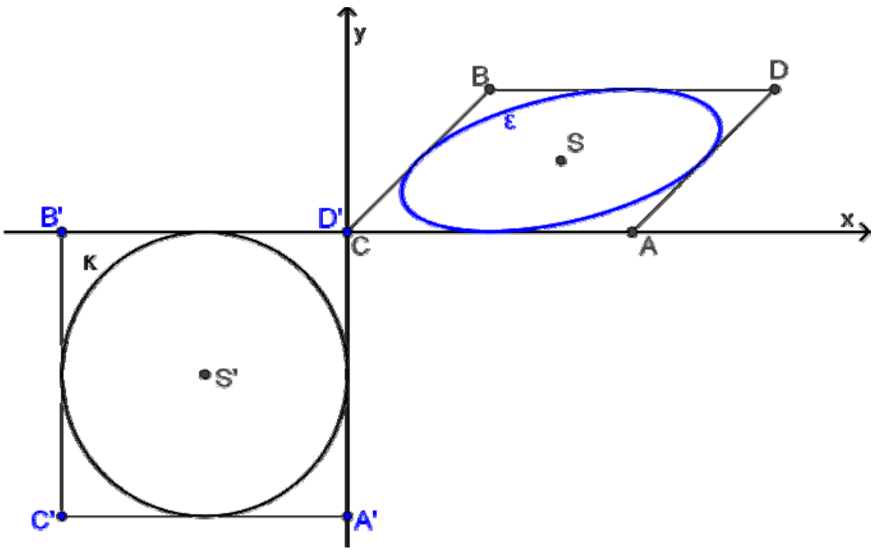
$$(x,y)\xrightarrow{f}(x_1,y_1)\Leftrightarrow\begin{cases} x_1=x+0.5y+6\\ y_1=0.5y+2 \end{cases},$$

које кружницу

$$k:(x+2)^2+(x+2)^2=4\,,$$

уписану у квадрат $\square A'B'C'D'$, пресликава се на криву

$$k':x^2-2xy+5y^2-4x-4y+4=0\,.$$



Слика 9.

Решење задатка се добија покретањем било ког од генеричких организатора: 3.6.5.25.ggb, у програму GeoGebra, или 3.6.5.26.nb, у програму Mathematica.

Пошто је и колинеарност тачака инваријанта афиног пресликавања, јасно је да се овим пресликавањем странице квадрата: $x=0$, $y=0$, $x=-4$, $y=-4$, преслика-вају, редом, на странице паралелограма: $y=x-4$, $y=2$, $y=x$, $y=0$.

5. Тестирање хипотезе, анализа непознатих чињеница и њихових односа са другима чињеницама

Претпоставку да смо у претходном кораку добили тражено решење, потврдићемо ако добијемо потврдан одговор на следећа питања:

а) да ли је добијена крива елипса?

б) да ли су странице паралелограма тангенте добијене криве?

Одговор на прво питање је потврдан. Наиме у складу са 4.4.2.4., имамо: $\delta = 6 \neq 0$, $\Delta = -16 \neq 0$ и $(a+c)\Delta = -96 < 0$, што значи да је добијена крива

$$k': x^2 - 2xy + 5y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$$

елипса.

Свака страница паралелограма $\square ABCD$ има тачно једну заједничку тачку са елипсом k' и то:

- права $y = x - 4$ и елипса k' имају заједничку тачку $M(5,1)$,
- права $y = 2$, и елипса k' имају заједничку тачку $N(4,2)$,
- права $y = x$, и елипса k' имају заједничку тачку $P(1,1)$,
- права $y = 0$, и елипса k' имају заједничку тачку $Q(2,0)$,

што значи да су странице паралелограма тангенте елипсе k', тј. елипса k' је уписана у дати паралелограм $\square ABCD$.

Ово је тренутак када се може уочити нешто, што (вероватно) није било познато пре него што је добијена тражена елипса, а то је чињеница да су додирне тачке елипсе уписане у паралелограм – средине његових страница.

Може се такође извести закључак, да је то последица особине афине трансформа-ције, чијом је применом подела дужи у датој размери, инваријантна. Наиме, додирне тачке елипсе уписане у паралелограм, су слике додирних тачака кружнице уписане у квадрат

6. Формулација резултата

Афином трансфорамцијом, конструисаном тако да неки (слободно изабран) квадрат $\square A'B'C'D'$, пресликава на дати паралелограм $\square ABCD$, уписује се елипса у дати паралелограм, као слика кружнице уписане у квадрат.

7. Оцена вредности добијених резултата и могућности њихове примене.

На важност добијених резултата указују закључци изведени у тачкама 5. и 6., као и могућност да се овлада једним поступком за решаавње многух других, такође сложенијих задатака.

Овај поступак омогућује да се формулише и докаже овакво тврђење: **додирне тачке елипсе уписане у паралелограм су средине страница паралелограма, а центар јој се поклапа са центром параеллограма.**

Директна последица овог тврђења је: **праве одређене срединама страница паралелограма описаног око елипсе, су коњуговани дијаметри те елипсе.** ■

О наведеним наставним методама и њиховој примени у овом дидактичком систему, видети у [85], [86], [156], [157], [158].

Пример 4. Решити систем неједначина

$$\begin{cases} 5x^2 - 6xy + 8y^2 - 10x - 26y + 5 \leq 0 \\ 2x - 5y + 15 > 0 \end{cases}$$

Цео поступак за решавање задатака овог типа, приказан је у одељку 4.6. Резултат датог задатка, који представља пресек унутрашње области елипсе и полуравни, може се добити покретањем, редом, апликација (3.6.5.28.ggb), (3.6.5.29.ggb) и (3.6.5.30.nb), у програмима GeoGebra и Mathematica. ■

4. МЕТОДИЧКА ТРАНСФОРМАЦИЈА НЕКИХ САДРЖАЈА АНАЛИТИЧКЕ ГЕОМЕТРИЈЕ

4.1. Увод

У одељцима 3.4.7 и 3.5, обрађени су неки садржаји аналитичке геометрије применом генеричких организатора, као средства за визуализацију математичких садржаја, изграђивање матеамтичких концепата и решавање задатака. Такође, у одељку 3.6, дат је приказ наставних метода које могу бити примењене у наставном систему – настава уз помоћ рачунара. У излагању које следи биће дата једна од могућих методичких трансформација, неких садржаја аналитичке геометрије, која је прилагођена овом наставном систему, уз примену образовног софтвера GeoGebra и Mathematica.

У ту сврху биће приказано одређивање тангенте криве другог реда из тачке ван криве. Прво се посматрају криве у посебном положају, елипса и хипербола чије су осе паралелне координатним осама, или парабола чија је оса паралелна једној од координатних оса. После анализе опште квадратне једначине и криве другог реда, као директна примена, биће обрађено налажење тангенте криве другог реда у општем положају, као и решавање система једне квадратне и једне линеарне неједначине са две непознате.

4.2. Тангента криве из тачке која не припада кривој

Налажење једначине тангенте криве другог реда из тачке која не припада кривој, за ученика трећег разреда гимназије, је веома сложен задатак. Такође треба имати у виду чињеницу да се диференцијални рачун и његова примена обрађују тек у четвртом разреду гимназије. У средњошколској настави аналитичке геометрије усталила су се, углавном, два начина за решавање овог задатка:

- један, који подразумева коришћење услова да „нека“ права буде тангента дате криве и услова да дата тачка припада тој правој,
- други, који подразумева налажење поларе дате тачке у односу на дату криву и њених пресечних тачака са датом кривом – додирних тачака тражених тангенти.

У оба случаја, потребно је идентификовати задате елементе и објекте који се траже, затим саставити одређене системе једначина (једне квадратне и једне линеарне), решити их, правилно употребити решења и саставити једначине тражених тангенти.

С друге стране, програм GeoGebra „сам одређује“ тангенте (конструише их, саставља њихове једначине) дате криве из дате тачке. За решавање задатака овог типа у програму Mathematica, мора се познавати неки од наведених математичких поступака и у складу са тим правити програм решавања.

Међутим, на овом нивоу математичког образовања, веома је важно да ученик разуме проблем, да успешно овлада поступком његовог решавања и да се оспособи да може да га примењује у сличним и многим другим, сложенијим, ситуацијама, што се свакако поклапа и са циљевима савремене наставе математике.

Програм GeoGebra, такође, даје могућност да се овај проблем решава и применом наведених математичких поступака. Задавање наредби може бити идентично записивању математичких израза, што је слично, али знатно једноставније него у програму Mathematica.

Рачунар, са образовним софтвером, у дидактичком систем настава уз помоћ рачунара, је наставно средство и налази се у функцији остварења постављених циљева наставе математике, уз уважавање основних карактеристика (3.1, 3.2, 3.3), дидактичких принципа (3.4) и примену наставних метода (3.6.), овог дидактичког система.

Стога је јасно да све наставне садржаје, па и оне наведене у уводу Главе 4., потребно обрађивати у складу са циљевима и задацима наставе математике.

4.2.1. Тангента елипсе

За одређивње једначине тангенте елипсе

$$(1)\qquad \mathcal{E}(S,a,b): b^2(x-p)^2 + a^2(y-q)^2 = a^2b^2$$

где је $a,b,p,q \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ и $b \neq 0$, из тачке $T(x_0, y_0)$, која не припада елипси, (припада њеној спољашњости) примењујемо следеће поступке, који се за $a = b = r$ могу применити и за налажења једначине тангенте кружнице.

I начин

Ако је $y = kx + n$, једначина тражене тангенте елипсе (1), онда су испуњени следећи услови

$$a^2k^2 + b^2 = (kp - q + n)^2 \quad \text{и} \quad y_0 = kx_0 + n,$$

одакле се, после елиминације n, добија једначина

$$(2)\qquad \left(a^2 - (x_0 - p)^2\right)k^2 + 2(x_0 - p)(y_0 - q)k + b^2 - (y_0 - q)^2 = 0,$$

за $x_0 \neq p \pm a$, квадратна једначина по k, са дискриминантом

$$D = 4\left(b^2(x_0 - p)^2 + a^2(y_0 - q)^2 - a^2b^2\right).$$

Како тачка $T\left(x_0, y_0\right)$ припада спољашњости елипсе, тј.

$$b^2\left(x_0-p\right)^2+a^2\left(y_0-q\right)^2-a^2b^2>0,$$

то је $D>0$, због чега постоје две различите реалне вредности за k, тј. $k_1 \neq k_2$, што значи да постоје и две различите тангенте

$$t_1: y-y_0=k_1\left(x-x_0\right) \text{ и } t_2: y-y_0=k_2\left(x-x_0\right),$$

из тачке $T\left(x_0, y_0\right)$, спољашњости елипсе.

Ако је $x_0=p \pm a$, из услова $T \notin \mathcal{E}$ следи $y_0 \neq q$, па је једначина (2) линеарна и има једно решење

$$k=\frac{\left(y_0-q\right)^2-b^2}{2\left(x_0-p\right)\left(y_0-q\right)},$$

а једначине тангенти су

$$t_1: y-y_0=k\left(x-x_0\right) \text{ и } t_2: x=x_0.$$

Овај поступак налажења тангенте елипсе, реализује се активирањем, редом, апликација (4.1.1.a.ggb), (4.1.1.b.ggb) и (4.1.1.ggb), у програму GeoGebra, кликом на одговарајући линк.

У последњој апликацији решава се и први део следећег задатка, а решење другог дела добија се кликом на линк (4.1.2.ggb), активирањем апликације GeoGebra.

Задатак 1. Дата је елипса $9x^2+16y^2=144$. Саставити једначине тангенти елипсе: а) из тачке $A(7,2)$, б) које су нормалне на праву $p: 2x-5y+10=0$.

Решење. а) Ако је права $y=kx+n$ тражена тангента (Слика 1.а.), онда су испуњени следећи услови

$$16k^2+9=n^2 \text{ и } 7k+n=2,$$

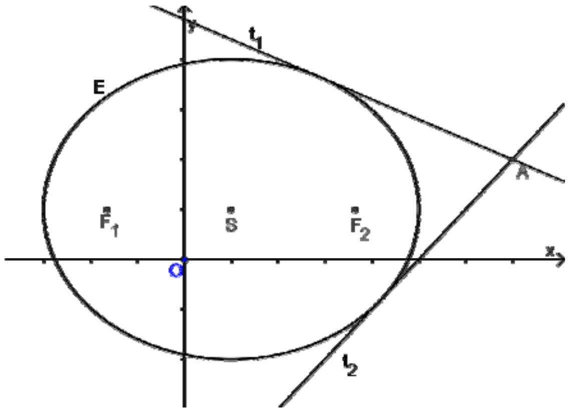
чија решења представљају тачке пресека праве и хиперболе. Координате тачака пресека су

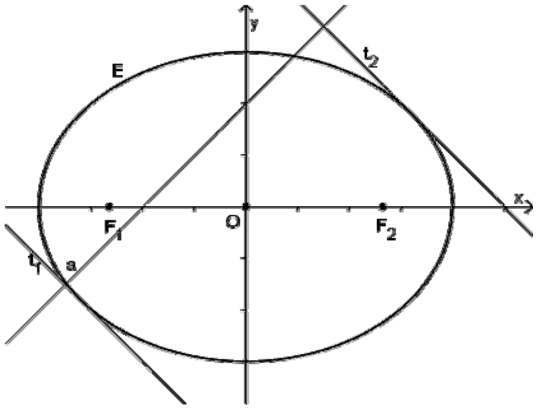
$$k_1=-5/33, \quad n_1=101/33 \text{ и } k_2=1, \quad n_2=-5,$$

а једначине тангенти су

$$t_1: 5x+33y-101=0 \quad \text{и} \quad t_2: y=x-5.$$

б) Права $y=kx+n$ је тангента дате елисе (Слика 1.б.), ако је $16k^2+9=n^2$, а на основу услова нормалности тангенте и дате праве имамо $k=-5/2$.





Слика 1. а. Слика 1.б.

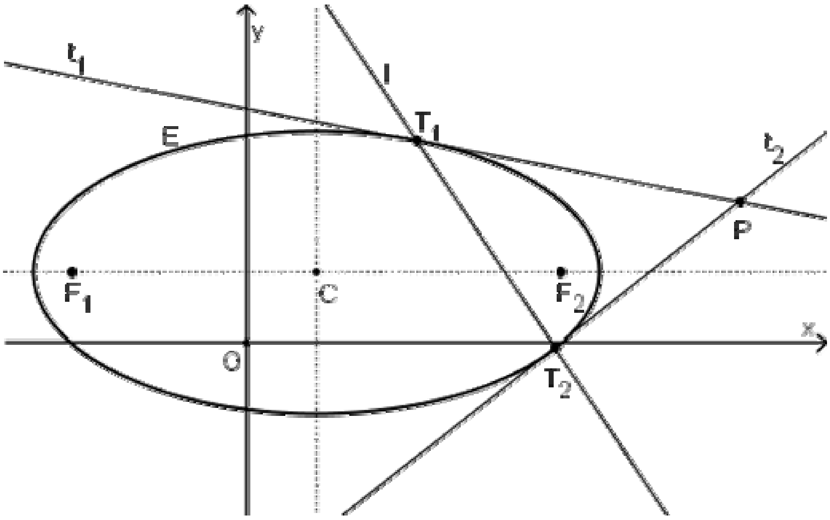
Тада је $n_{1,2} = \pm\sqrt{109}$, а тангенте су

$$t_1 : y = -\frac{5}{2}x + \sqrt{109} \quad \text{и} \quad t_2 : y = -\frac{5}{2}x - \sqrt{109}\,. \qquad \square$$

II начин

Налажење једначине тангенте из тачке ван елипсе, могуће је коришћењем поларе и пола у односу на елипсу.

У ту сврху нека су дате: елипса (1), тачка $P(x_0, y_0)$ у њеној спољашњој области и тангенте t_1 и t_2 из тачке P на елипсу (Слика 2.).



Слика 2.

Ако су $T_1(x_1, y_1)$ и $T_2(x_2, y_2)$ додирне тачке тангенти и елипсе, онда су њихове једначине

$$t_1 : b^2(x_1 - p)(x - p) + a^2(y_1 - q)(y - q) = a^2b^2 \quad \text{и} \quad t_2 : b^2(x_2 - p)(x - p) + a^2(y_2 - q)(y - q) = a^2b^2,$$

а из услова $P \in t_1$ и $P \in t_2$, следи

$$b^2(x_1 - p)(x_0 - p) + a^2(y_1 - q)(y_0 - q) = a^2b^2 \quad \text{и} \quad b^2(x_2 - p)(x_0 - p) + a^2(y_2 - q)(y_0 - q) = a^2b^2.$$

На основу последње две једнакости закључујемо да права

(3) $$l: b^2(x_0-p)(x-p)+a^2(y_0-q)(y-q)=a^2b^2$$

садржи тачке додира T_1 и T_2, тј. права $l=p(T_1,T_2)$ је сечица елипсе $\mathcal{E}$, а зове се **полара тачке (пола)** P**, у односу на елипсу** $\mathcal{E}$**.**

Овај поступак се добија кликом на линк (4.1.3.ggb), активирањем апликације GeoGebra и примењен је у решавању следећег задатка.

Задатак 2. Саставити једначине тангенти из тачке $P(3/2,3)$ на елипсу $\mathcal{E}:(x-1)^2+4(y-1)^2=4$.

Решење. Полара пола $P(3/2,3)$, у односу на дату елипсу $\mathcal{E}$, је права $l: x+16y-25=0$, која сече елипсу у тачкама $T_1(-3/5,8/5)$ и $T_2(37/13,18/13)$. Тангенте $t_1: 2x-3y+6=0$ и $t_2: 6x+5y-24=0$, редом, у тачкама T_1 и T_2 елипсе $\mathcal{E}$, су тражене тангенте из тачке P на дату елипсу. □

Може се доказати да и тачки унутрашње области елипсе, различитој од њеног центра, одговара полара у односу на ту елипсу (видети Интерактивни уџбеник 5.2.4.3.).

Непосредне последице дефиниције поларе јесу следећа интересантна тврђења, о односу поларе и тангенте, и о односу поларе и фокуса елипсе.

Теорема 9. Полара тачке елипсе је тангента елипсе у тој тачки.

Теорема 10. Полара фокуса елипсе је одговарајућа директриса.

Из претходног излагања види се да за сваку тачку, различиту од центра елипсе, постоји полара, у односу на ту елипсу.

Обрнуто, нека је $\mathcal{E}$ елипса (1) и $l: Ax+By+C=0$ произвољна права. Да би права l била полара неке тачке $P(x_0,y_0)$, у односу на елипсу $\mathcal{E}$, једначине

$$Ax+By+C=0 \quad \text{и} \quad b^2(x_0-p)(x-p)+a^2(y_0-q)(y-q)=a^2b^2,$$

треба да представљају исту праву, тј. треба да важи пропорција

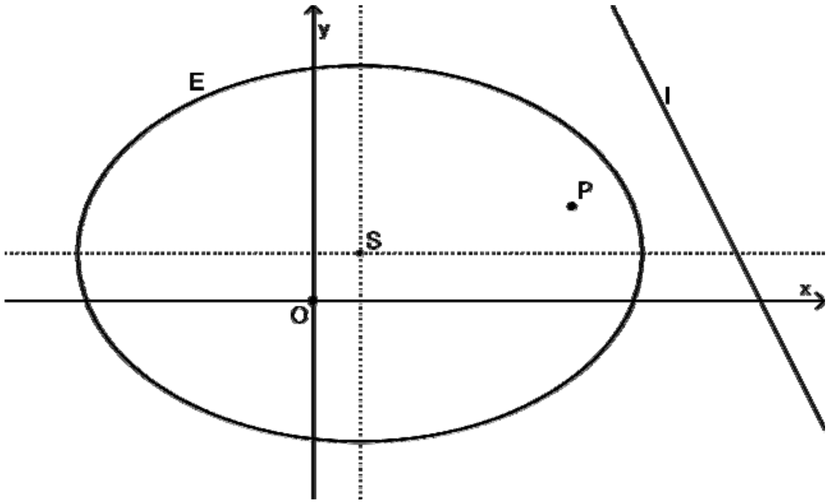
$$\frac{A}{b^2(x_0-p)}=\frac{B}{a^2(y_0-q)}=-\frac{C}{b^2(x_0-p)p+a^2(y_0-q)q+a^2b^2},$$

одакле је

$$x_0=p-\frac{a^2A}{Ap+Bq+C} \quad \text{и} \quad y_0=q-\frac{b^2B}{Ap+Bq+C},$$

где је $Ap+Bq+C\neq 0$, што значи да права l не садржи центар елипсе, а такође коефицијенти A и B нису истовремено једнаки нули, јер $\left(x_0, y_0\right) \neq (p, q)$.

Овим је доказано да за сваку тачку, различиту од центра елипсе, постоји у равни елипсе полара, у односу на елипсу, и за сваку праву, која не садржи центар елипсе, тј. није дијаметар, постоји у равни елипсе пол, у односу на елипсу.



Слика 3.

Задатак 3. Одредити координате пола P, поларе $p: 2x + y - 19 = 0$, у односу на елипсу $\mathcal{E}: 4(x-1)^2 + 9(y-1)^2 = 144$.

Резултат. Пошто је $p: 4\left(x_0 - p\right)(x - p) + 9\left(y_0 - q\right)(y - q) = 144$ једначина поларе, пола $P\left(x_0, y_0\right)$, у односу на дату елипсу, онда важи следећа пропорција

$$\frac{4\left(x_0 - 1\right)}{2} = \frac{9\left(y_0 - 1\right)}{1} = \frac{4\left(x_0 - 1\right)\cdot 1 + 9\left(y_0 - 1\right)\cdot 1 - 144}{19},$$

одакле је $x_0 = 5.5$ и $y_0 = 2$. Тачка $P(5.5, 2)$ је пол праве p. Ово решење се добија кликом на линк (4.1.4.ggb), покретањем апликације GeoGebra. □

Задатак 4. Тангента кружнице $\mathcal{K}: x^2 + y^2 = r^2$, истовремено је полара пола P, у односу на елипсу $\mathcal{E}: b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. Наћи геометријско место полова P.

Специјално: $r = 5$, $a = 5$, $b = 3$.

Решење. Полара p, пола $P\left(x_0, y_0\right)$, у односу на дату елипсу има једначину $p: b^2x_0x + a^2y_0y = a^2b^2$, а тангента t, дате кружнице у њеној тачки $T\left(x_1, y_1\right)$ има једначину $t: x_1x + y_1y = r^2$. Како је, по услову задатка, тангента кружнице у тачки T, истовремено полара пола P, тј. $t = p$, онда је

$$\frac{x_1}{b^2x_0} = \frac{y_1}{a^2y_0} = \frac{r^2}{a^2b^2} = \lambda,$$

одакле је

$$x_1 = \frac{r^2}{a^2} x_0 \quad \text{и} \quad y_1 = \frac{r^2}{b^2} y_0 .$$

Коначно, из услова $T \in \mathcal{K}$, тј. $x_1^2 + y_1^2 = r^2$, за координате x_0 и y_0, пола P, важи

$$\frac{x_0^2}{\left(a^2/r\right)^2} + \frac{y_0^2}{\left(b^2/r\right)^2} = 1,$$

што значи да пол P описује елипсу, са центром $O(0,0)$ и полуосама a^2/r и b^2/r. У специјалном случају, пол P тангенте кружнице $\mathcal{K}$, која је истовремено полара, у односу на елипсу $\mathcal{E}$, описује елипсу

$$81x^2 + 625y^2 = 2025 .$$

Илустрација задатка и решење специјалног случаја, може се добити кликом на линк 4.1.5.ggb, активирањем апликације GeoGebra. □

4.2.3. Тангента хиперболе

Једначина тангенте хиперболе

(4) $$\mathcal{H}\left(S,a,b\right) : b^2\left(x-p\right)^2 + a^2\left(y-q\right)^2 = a^2b^2$$

где је $a,b,p,q \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ и $b \neq 0$, из тачке $T\left(x_0, y_0\right)$, која јој не припада (припада њеној спољашњости), одређује се потпуно аналогно тангенти елипсе из тачке која не припада елипси.

I начин је поступак у коме се за одређивање једначине тангенте облика $y = kx + n$, комбинују: услов да права буде тангента хиперболе, и услов да тачка $T\left(x_0, y_0\right)$ припада тангенти, и добија систем једначина

$$a^2k^2 - b^2 = \left(kp - q + n\right)^2 \quad \text{и} \quad y_0 = kx_0 + n ,$$

одакле се после елиминације n, (аналогно тангентама елипсе) за $x_0 \neq p \pm a$ добијају две различите реалне вредности k_1 и k_2, тј. две различите тангенте

$$t_1 : y - y_0 = k_1\left(x - x_0\right) \quad \text{и} \quad t_2 : y - y_0 = k_2\left(x - x_0\right),$$

из тачке $T\left(x_0, y_0\right)$, спољашњости хиперболе.

Ако је $x_0 = p \pm a$, из услова $T \notin \mathcal{H}$ следи $y_0 \neq q$, па постоји једно решење

$$k = \frac{\left(y_0 - q\right)^2 + b^2}{2\left(x_0 - p\right)\left(y_0 - q\right)},$$

а једначине тангенти су

$$t_1 : y - y_0 = k\left(x - x_0\right) \text{ и } t_2 : x = x_0 .$$

Овај поступак је примењен у Задатку 5., реализује се покретањем, редом, апликација (4.1.6.a.ggb), (4.1.6.b.ggb) и (4.1.6.ggb), у програму GeoGebra, кликом на одговарајући линк.

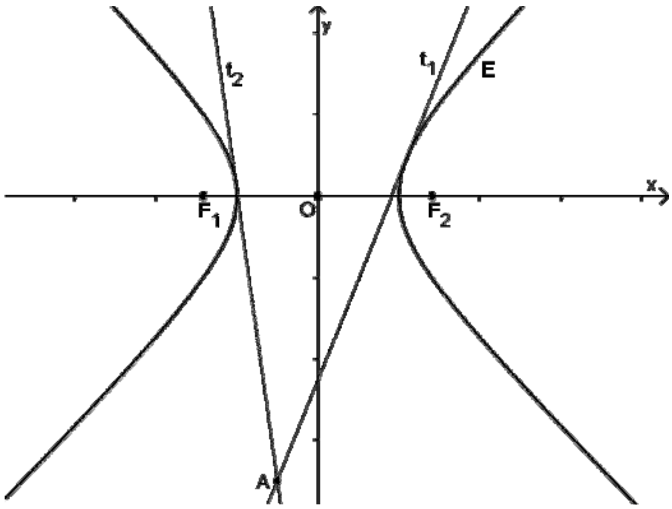
Задатак 5. Саставити једначине тангенти хиперболе $x^2 - y^2 = 16$ из тачке $A(-1,-7)$.

Решење. а) Применом наведеног поступка (Слика 4.), имамо

$$k_1 = 5/3 , \quad n_1 = -16/3 \text{ и } k_2 = -13/5 , \quad n_2 = -48/5 ,$$

а једначине тангенти су

$$t_1 : 5x - 3y - 16 = 0 \quad \text{и} \quad t_2 : 13x + 5y + 48 = 0 .$$



Слика 4. □

II начин

Као и у случају елипсе, права

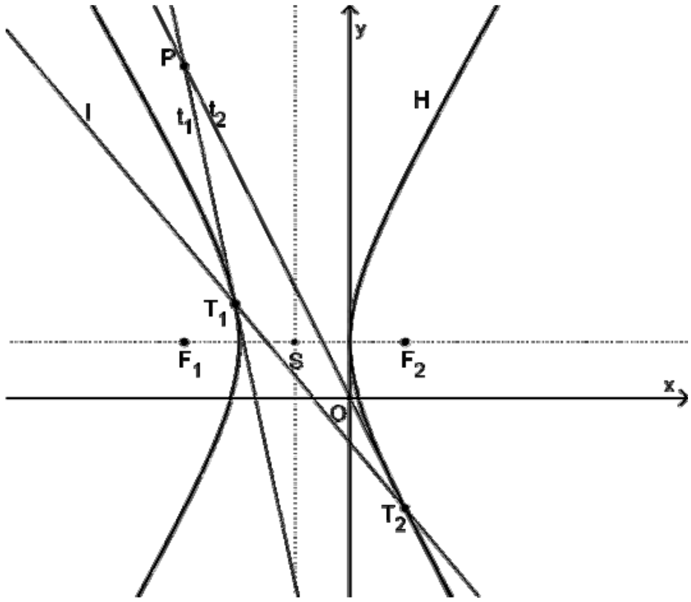
$$l : b^2\left(x_0 - p\right)\left(x - p\right) - a^2\left(y_0 - q\right)\left(y - q\right) = a^2 b^2$$

је **полара тачке** (**пола**) $P\left(x_0, y_0\right)$, **у односу на хиперболу** (4), са центром $S\left(p, q\right)$. За сваку тачку P спољашње области хиперболе, различиту од центра, (Слика 5.) полара сече хиперболу у додирним тачкама $T_1\left(x_1, y_1\right)$ и $T_2\left(x_2, y_2\right)$, тангенти из тачке и хиперболе (видети Интерактивни уџбеник 5.3.4.3.).

Може се доказати да и свакој тачки унутрашње области хиперболе одговара полара у односу на ту хиперболу.

Поступак за одређивање тангенте хиперболе из тачке њене спољашњости, приказан је у Задатку 6., а реализује се, кликом на линк (4.1.7.ggb), покретањем апликације GeoGebra.

Задатак 6. Саставити једначине тангенти хиперболе $3(x+1)^2-(y-1)^2=3$ из тачке $A(-3,6)$.



Слика 5.

Резултат. Тражене тангенте су: $t_1: 14x+3y+24=0$, $t_2: 2x+y=0$, (Слика 5.). □

Непосредне последице претходних разматрања јесу следећа тврђења, о односу тангенте и хиперболе и о односу фокуса и директрисе

Теорема 9. Полара тачке хиперболе је тангента хиперболе у тој тачки.

Теорема 10. Полара фокуса хиперболе је одговарајућа директриса.

4.2.3. Тангента параболе

Поступци за одређивње једначине тангенте параболе

$$\mathcal{P}: (y-\beta)^2 = 2p(x-\alpha), \quad p>0 \tag{5}$$

са теменом $T(\alpha,\beta)$, из тачке $A(x_0,y_0)$ која припада спољашњој области параболе, слични су поступцима налажења једначине тангенте елипсе и хиперболе.

I начин

Наиме, ако је $y=kx+n$, за $k\neq 0$, једначина тражене тангенте параболе (3), која садржи тачку $T(x_0,y_0)$ и $x_0\neq\alpha$, онда важи

$$p-2k(k\alpha-\beta+n)=0 \quad \text{и} \quad y_0=kx_0+n,$$

одакле после елиминације n добијамо квадратну једначину по k

$$2(x_0-\alpha)k^2-2(y_0-\beta)k+p=0,$$

чија је дискриминанта

$$D=4\left((y_0-\beta)^2-2p(x_0-\alpha)\right).$$

Како тачка $T(x_0,y_0)$ припада спољашњости параболе, тј. $(y_0-\beta)^2>2p(x_0-\alpha)$, то постоје две различите реалне вредности за k, тј. $k_1\neq k_2$, што значи да постоје и две различите тангенте

$$t_1: y-y_0=k_1(x-x_0) \quad \text{и} \quad t_2: y-y_0=k_2(x-x_0),$$

из тачке $T(x_0,y_0)$, спољашњости параболе.

Ако је $x_0=\alpha$, из услова $T\notin\mathcal{P}$ следи $y_0\neq\beta$, па је једначина (17) линеарна и има једно решење

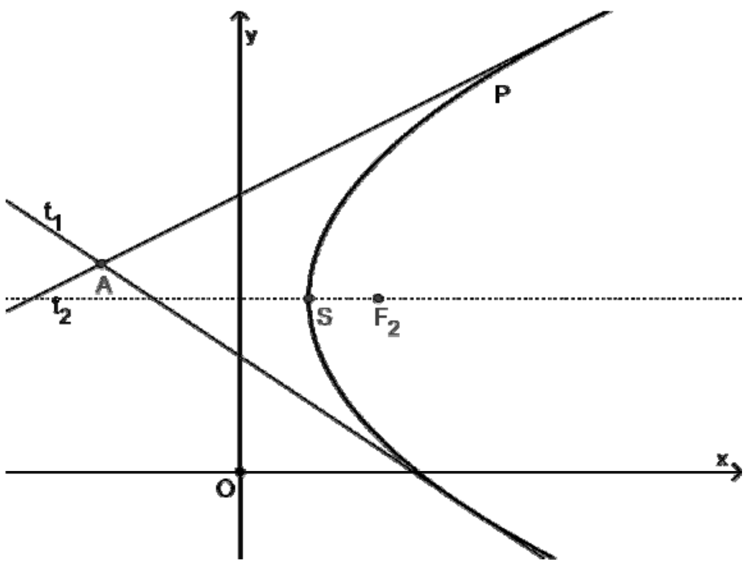
$$k=\frac{p}{2(y_0-\beta)},$$

а једначине тангенти су

$$t_1: px-2y_0y+2y_0^2=0 \quad \text{и} \quad t_2: x=\alpha.$$

Наведени поступак налажења тангенте параболе, примењен у Задатку 7, реализује се покретањем, редом, апликација (4.1.8.a.ggb), (4.1.8.b.ggb) и (4.1.8.ggb), у програму GeoGebra, кликом на одговарајући линк.

Задатак 7. Саставити једначине тангенти параболе $(y-5)^2=8(x-2)$ из тачке $A(-4,6)$, (Слика 6.).



Слика 6.

Резултат. Тангенте параболе су: $t_1: x+6y-20=0$ и $t_2: x-2y+16=0$. □

II начин

Као и у претходним случајевима, нека је дата парабола (5) и тачка $P(x_0, y_0)$ њене спољашњости. Посматра се полара l, пола P, у односу на параболу, као права (сечица) одређена додирним тачкама $T_1(x_1, y_1)$ и $T_2(x_2, y_2)$, редом, тангенти

$$t_1:(y_1-\beta)(y-\beta)=p(x+x_1-2\alpha) \quad \text{и} \quad t_2:(y_2-\beta)(y-\beta)=p(x+x_2-2\alpha),$$

из тачке P на параболу. Њена једначина је

$$l:(y_0-\beta)(y-\beta)=p(x+x_0-2\alpha).$$

а може, такође, доказати и да свакој тачки унутрашње области параболе одговара полара у односу на ту параболу.

Решење следећег задатка, где је приказан наведени поступак, добија се кликом на линк (4.1.9.ggb), покретањем апликације GeoGebra.

Задатак 8. Саставити једначине тангенти параболе $\mathcal{P}:(y-1)^2=6(x-1)$ из тачке $P(-1,3)$, коришћењем њене поларе у односу на параболу.

Резултат. Полара тачке P, права $l: 3x-2y-7=0$, сече параболу у тачкама $T_1(7,7)$ и $T_2(5/3,-1)$, укојима су тангенте $t_1: x-2y-7=0$ и $t_2: x-2y+16=0$, које садрже тачку P. □

Напомена 1. Полара тачке $P(x_0, y_0)$ у односу на параболу

(6) $$\mathcal{P}:(x-\alpha)^2=2p(y-\beta), \quad p>0,$$

права

$$l:(x_0-\alpha)(x-\alpha)=p(y+y_0-2\beta),$$

сече параболу у тачкама $T_1(x_1, y_1)$ и $T_2(x_2, y_2)$, због чега су тангенте из тачке P на параболу праве

$$t_1:(x_1-\alpha)(x-\alpha)=p(y+y_1-2\beta) \quad \text{и} \quad t_2:(x_2-\alpha)(x-\alpha)=p(y+y_2-2\beta).$$

Ова разматрања се могу добити кликом на линк (4.1.10.ggb), покретањем апликације GeoGebra.

Специјално, поступак налажења једначине тангенте параболе

(7) $$\mathcal{P}: y=ax^2+by+c, \ a\neq 0$$

из тачке $P(x_0, y_0)$, њене спољашњости, своди се на претходни, када се једначина (7) трансформише на облик (6), одређивањем параметра и координата темена параболе: $p = 1/2a$, $\alpha = -b/2a$, $\beta = (4ac - b^2)/4a$, што је дато у генеричком организатору, који се покреће кликом на линк (4.1.11.ggb), активирањем апликације GeoGebra.

4.3. Анализа опште квадратне једначине

Анализа опште квадратне једначине са две променљиве је проблем, који се обично решава у оквиру реализације градива аналитичке геометрије, тачније приликом обраде опште теорије кривих другог реда. Како ова анализа захтева веома обимна рачунања, за које је потребно и значајно време, обично, у досадашњој (традиционалној) наставној пракси, њој се не посвећује довољна пажња.

У новије време, увођењем рачунара и рачунарског образовног софтвера у наставни процес, стварају се услови за детаљно расветљавање овог проблема, на један знатно квалитетнији начин, који се огледа у могућности израде генеричких организатора, могућности визуализације наставног садржаја, ослобађању од обимних израчунавања, уштеди времена и сл.

С друге стране, у традиционалној настави, као и у уџбеничкој литератури, за анализу опште квадратне једначине, углавном се користе трансформације координатног система.

Међутим, у даљем излагању, у формираним генеричким организаторима, ове трансформације подударности: ротација и транслација, примењиваће се директно на геометријске фигуре (тачке, праве, криве, ...), а као резултат добијају се, њима подударне фигуре. Трансформације фигура, прате и трансформације њихових једначина у одговарајуће једначине, њима подударних фигура.

Ротација $\rho_S^{\varphi}(A) = A_1$ око центра $S(p,q)$, за угао φ, којом се тачка $A(x,y)$ пресликава на тачку $A_1(x_1, y_1)$, представља се следећом формулом

(1) $$(x,y) \xrightarrow{\rho_S^{\varphi}} (x_1, y_1) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = (x-p)\cos\varphi - (y-q)\sin\varphi + p \\ y_1 = (x-p)\sin\varphi + (y-q)\cos\varphi + q \end{cases},$$

а транслација $\tau_{\vec{v}}(A) = A_1$, за вектор $\vec{v} = (a,b)$, којом се тачка $A(x,y)$ пресликава на тачку $A_1(x_1, y_1)$, представља се формулом

(2) $$(x,y) \xrightarrow{\tau_{\vec{v}}} (x_1, y_1) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x + a \\ y_1 = y + b \end{cases}.$$

Треба нагласити да се приликом пресликавања кривих (геометријских места тачака) користи инверзна изометрија, (видети одељак 3.6.5. Пример 2.). Наиме, може се доказати да ако су $\mathcal{K}$ и $\mathcal{K}_1$, две подударне криве, а f нека од изометрија датих формулом (1), или (2), онда важи

$$f : \mathcal{K}_1 \to \mathcal{K},$$

тј. изометријом f, крива $\mathcal{K}_1$ пресликава се на криву $\mathcal{K}$, што значи: **крива $\mathcal{K}_1$ је оригинал, а крива $\mathcal{K}$ је њена слика, изометријом f.**

Кликом на линк 4.2.1.ggb, покреће се генерички организатор у програму GeoGebra, којим се реализују ротација тачке и ротација криве, а генерички организатор којим се реализују транслација тачке и транслација кружнице, у истом програму, покреће се кликом на линк 4.2.2.ggb.

4.3.1. Центар криве

Једначина

(3) $$\mathcal{K} : \ ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0,$$

где $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ и $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$, зове се општа квадратна једначина са две промењљиве и представља геометријску фигуру у равни, познату под именом – крива другог реда. У тексту који следи, анализирамо једначину (3) и криву $\mathcal{K}$, коју она представља. У ту сврху посматрамо и две детерминанте δ и Δ, формиране на следећи начин:

$$\delta = \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \Delta = \begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix}.$$

Запишимо једначину (3) на следећи начин

$$(ax + by + d)x + (bx + cy + e)y + dx + ey + f = 0.$$

Систем једначина

(4) $$ax + by + d = 0 \quad \text{и} \quad bx + cy + e = 0.$$

је сагласан, ако и само ако за детерминанту система δ, важи

$$\delta = ac - b^2 \neq 0.$$

Ако је пар $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ његово решење (које је јединствено), тј. ако важи

$$ax_0 + by_0 + d = 0 \ \text{ и } \ bx_0 + cy_0 + e = 0,$$

тада је

(5) $$\left(x_0, y_0\right) = \left(\frac{be-cd}{ac-b^2}, \frac{bd-ae}{ac-b^2}\right).$$

Важи следећа важна теорема

Теорема 1. Ако је $\delta \neq 0$, а пар $\left(x_0, y_0\right) \in \mathbb{R}^2$ решење система (4), онда је тачка $S\left(x_0, y_0\right)$ центар симетрије криве $\mathcal{K}$.

Доказ. Тврђење теореме приказује апликације GeoGebra, која се покреће кликом на линк 4.2.3.ggb. Може се уочити, да ако се, под наведеним условима, креће произвољна тачка $T\left(x, y\right)$ по кривој $\mathcal{K}$, онда се и њена централно-симетрична слика, тачка $T_1\left(2x_0 - x, 2y_0 - y\right)$, у односу на центар криве $S\left(x_0, y_0\right)$, такође креће по кривој $\mathcal{K}$. За доказ тврђења, једначина (3) се може представити на следећи начин

$$F\left(x, y\right) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0.$$

Тада важи

$$\begin{aligned}
&F\left(2x_0 - x, 2y_0 - y\right) = \\
&\qquad = a\left(2x_0 - x\right)^2 + 2b\left(2x_0 - x\right)\left(2y_0 - y\right) + c\left(2y_0 - y\right)^2 + 2d\left(2x_0 - x\right) + 2e\left(2y_0 - y\right) + f \\
&\qquad = 4\left(\left(ax_0 + by_0 + d\right)x_0 + \left(bx_0 + cy_0 + e\right)y_0 + dx_0 + ey_0 + f\right) - 4dx_0 - 4ey_0 - 4f - \\
&\qquad\qquad -4\left(ax_0 + by_0 + d\right)x - 4\left(bx_0 + cy_0 + e\right)y \\
&\qquad = 4\left(dx_0 + ey_0 + f\right) - 4\left(dx_0 + ey_0 + f\right) = 0,
\end{aligned}$$

што доказује тврђење. ■

Значи, за $\delta \neq 0$, постоји јединствени центар симетрије $S\left(x_0, y_0\right)$ криве $\mathcal{K}$, дате једначином (3), такву криву називамо **централна крива**.

Ако је $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} \neq \frac{d}{e}$, систем једначина (4) нема решења ($ax + by + d = 0$ и $bx + cy + e = 0$ су различите паралелне праве), а крива $\mathcal{K}$, нема центар симетрије.

Ако је $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{d}{e}$, праве $ax + by + d = 0$ и $bx + cy + e = 0$, се поклапају, систем јед-начина (4) има бесконачно много решења, због чега крива (тачније, скуп тачака) $\mathcal{K}$ нема јединствени центар симетрије.

Последњи закључци су приказани у апликацији GeoGebra, која се покреће кликом на линк (4.2.4.ggb).

Из напред изложеног непосредно следи тврђење.

Теорема 2. Једначина (3) представља: централну криву другог реда, ако и само ако је $\delta \neq 0$, а криву без центра ако и само ако је $\delta = 0$. ■

Однос централне криве и њеног центра може се добити кликом на линк (4.2.5.ggb), активирањем апликације GeoGebra.

Сада се може доказати једна значајна теорема, која регулише наведени однос.

Теорема 3. Нека је (3) једначина централне криве другог реда ($\delta \neq 0$). Центар не припада тој кривој, акко је

$$\Delta \neq 0.$$

Тада кажемо да је крива **недегенерисана**, у противном крива је **дегенерисана**.

Доказ. Претпоставимо супротно, нека центар $S(x_0, y_0)$ централне криве другог реда (3), припада тој кривој, што је еквивалентно са формулом

$$a{x_0}^2 + 2bx_0y_0 + c{y_0}^2 + 2dx_0 + 2ey_0 + f = 0$$

или

$$(ax_0 + by_0 + d)x_0 + (bx_0 + cy_0 + e)y_0 + dx_0 + ey_0 + f = 0.$$

С друге стране, тачка $S(x_0, y_0)$ је центар криве (3), акко је $\delta \neq 0$, тј. акко постоји пар $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}$, који је решење система (4), тј. када важи

$$ax_0 + by_0 + d = 0 \quad \wedge \quad bx_0 + cy_0 + e = 0.$$

После множења последњих једначина са x_0 и y_0, редом, и сабирања, важи

$$(ax_0 + by_0 + d)x_0 + (bx_0 + cy_0 + e)y_0 = 0,$$

због чега је

$$dx_0 + ey_0 + f = 0.$$

Дакле, систем

(6) $$ax + by + d = 0 \quad \wedge \quad bx + cy + e = 0 \quad \wedge \quad dx + ey + f = 0$$

има јединствено решење (x_0, y_0), тј. праве (6) секу се у тачки $S(x_0, y_0)$, а то важи акко је $\Delta = 0$, што је у контрадикцији са претпоставком. ■

Ако за коефицијенте једначине (3) важи $\Delta \neq 0$, тада кажемо да је крива коју она представља **недегенерисана**, у противном крива је **дегенерисана**.

Ако је крива (3) централна, израчунава се детерминанта Δ, и у зависности од тога да ли је $\Delta = 0$, или $\Delta \neq 0$, утврђује се да ли центар припада кривој, или не припада.

Сада анализирамо општу квадратну једначину (3) у којој је $b \neq 0$ и оба случаја:

$$\delta \neq 0 \text{ и } \delta = 0 .$$

4.3.2. Централне криве ($\delta \neq 0$)

а) Нека је, дакле, дата једначина (3), таква да је $\delta \neq 0$, што значи да једначина (3) представља криву $\mathcal{K}$ са центром, и нека је центар криве тачка $S(x_0, y_0)$.

На криву $\mathcal{K}$, применимо ротацију ρ_O^{φ} око координатног почетка O за неки угао φ, са циљем да је пресликамо на подударну криву, у чијој ће једначини коефицијент уз xy, бити једанк нули. Наведена ротација дата је са

(7) $$(x, y) \xrightarrow{\rho_O^{\varphi}} (x_1, y_1) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ y_1 = x\sin\varphi + y\cos\varphi \end{cases}.$$

Слика криве $\mathcal{K}$ је крива $\mathcal{K}_1$, чија је једначина:

(8) $$\mathcal{K}_1 : Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + f = 0 ,$$

где је

$$A = a\cos^2\varphi - 2b\sin\varphi\cos\varphi + c\sin^2\varphi ,$$

$$2B = 2b\left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right) + 2a\sin\varphi\cos\varphi - 2c\sin\varphi\cos\varphi ,$$

$$C = a\sin^2\varphi + 2b\sin\varphi\cos\varphi + c\cos^2\varphi ,$$

$$D = d\cos\varphi - e\sin\varphi ,$$

$$E = d\sin\varphi + e\cos\varphi .$$

Угао ротације φ одређујемо тако да буде испуњен услов $2B = 0$, тј.

$$2b\left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right) + 2a\sin\varphi\cos\varphi - 2c\sin\varphi\cos\varphi = 0$$

одакле је

$$(c - a)\sin 2\varphi = 2b\cos 2\varphi .$$

Овде је $\sin 2\varphi \neq 0$, јер ако је $\sin 2\varphi = 0$, онда је $\cos 2\varphi = \pm 1 \neq 0$, одакле следи $b = 0$, што је немогуће, јер је по услову $b \neq 0$. Дакле, после скраћивања са $2b\sin 2\varphi$, имамо

(9) $$\mathrm{ctg} 2\varphi = \frac{c - a}{2b} .$$

Пошто је $a, b, c \in \mathbb{R} \wedge b \neq 0$, последња једначина има решење, а то је угао φ, такав да је $2\varphi \in (0, \pi)$, одакле коначно имамо

(10) $$\varphi = \frac{1}{2}\operatorname{arcctg}\frac{c-a}{2b}, \quad \varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Кликом на линк (4.2.6.ggb), покреће се генерички организатор, у програму GeoGebra, у коме се реализује ротација централне криве $\mathcal{K}$, око координатног почетка за угао φ.

Значи, ротацијом око координатног почетка за оштар угао φ дат са (10), крива $\mathcal{K}$, пресликава се на криву $\mathcal{K}_1$, облика

(11) $$\mathcal{K}_1 : Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + f = 0.$$

Транслацојом $\tau_{\vec{v}}$

(12) $$(x, y) \xrightarrow{\tau_{\vec{v}}} (x_1, y_1) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x - x_{01} \\ y_1 = y - y_{01} \end{cases}$$

за вектор $\vec{v} = (-x_{01}, -y_{01})$, крива $\mathcal{K}_1$ пресликава се на криву $\mathcal{K}_2$, одређену једначином

$$A(x + x_{01})^2 + C(y + y_{01})^2 + 2D(x + x_{01}) + 2E(y + y_{01}) + f = 0.$$

Ако се последња једначина прикаже на следећи начин

$$Ax^2 + Cy^2 + 2(Ax_{01} + D)x + 2(Cy_{01} + E)y + (Ax_{01} + D)x_{01} + (Cy_{01} + E)y_{01} + Dx_{01} + Ey_{01} + f = 0$$

и ако је тачка $S_1(x_{01}, y_{01})$ изабрана тако да важи

(13) $$Ax_{01} + D = 0 \quad \text{и} \quad Cy_{01} + E = 0,$$

тј.

$$x_{01} = -\frac{D}{A} \quad \text{и} \quad y_{01} = -\frac{E}{C},$$

онда је она (као и тачка $S(x_0, y_0)$ за криву $\mathcal{K}$) центар симетрије криве $\mathcal{K}_1$.

Кликом на линк (4.2.7.ggb), покреће се генерички организатор, у програму GeoGebra, у коме се реализује транслација централне криве $\mathcal{K}_1$ за вектор $\vec{v} = \overrightarrow{S_1O}$. У том случају једначина криве $\mathcal{K}_2$ има облик

$$\mathcal{K}_2 : Ax^2 + Cy^2 + f_1 = 0,$$

где је

$$f_1 = Dx_{01} + Ey_{01} + f = -\frac{D^2}{A} - \frac{E^2}{C} + f = \frac{ACf - CD^2 - AE^2}{AC},$$

тачка $S_1\left(x_{01}, y_{01}\right)$ пресликава се на координатни почетак $O(0,0)$.

На основу услова $B=0$ и познатих тригонометријских идентитета важе следеће релације:

$$
\begin{aligned}
& A+C=a+c, \\
(14) \qquad & AC-B^2=AC=ac-b^2=\delta, \\
& ACf-CD^2-AE^2=acf-ae^2-b^2f+2bde-cd^2=\Delta,
\end{aligned}
$$

због чега се једначина (11) своди на облик:

$$
(15) \qquad \mathcal{K}_2: Ax^2+Cy^2+\frac{\Delta}{\delta}=0 .
$$

Специјално, за $d=e=0$, једначина (11) је еквивалентна једанчини (15).

Сада следи дискусија последње једначине. У ту сврху, због услова $\delta \neq 0$, разликоваћемо два основна случаја: $\delta>0$ и $\delta<0$.

Ако је $\delta>0$, онда једначина (15) представља:

- елипсу (реалну), акко је $AC>0 \ \wedge \ A \cdot \Delta<0$,
- празан скуп (имагинарну елипсу), акко је $AC>0 \ \wedge \ A \cdot \Delta>0$,
- тачку, акко је $AC>0 \ \wedge \ \Delta=0$.

Ако је $\delta<0$, онда једначина (15) представља:

- хиперболу ($y=y_0$ реална оса), акко је $AC<0 \ \wedge \ A \cdot \Delta<0$,
- хиперболу ($x=x_0$ реална оса), акко је $AC<0 \ \wedge \ A \cdot \Delta>0$,
- две праве које се секу, акко је $AC<0 \ \wedge \ \Delta=0$.

Такође, на основу прве од релација (14), под условом $\delta>0$ важи следећа релација

$$
A>0 \Leftrightarrow a+c>0 .
$$

Користећи наведене релације (14), дискусија једначине (15) "преводи" се на дискусију једначине (3), тј. може се закључити да крива $\mathcal{K}$, дата једначином (3) представља:

- елипсу (реалну), акко је $\delta>0 \ \wedge \ (a+c) \cdot \Delta<0$,
- празан скуп (имагинарну елипсу), акко је $\delta>0 \ \wedge \ (a+c) \cdot \Delta>0$
- тачку, акко је $\delta>0 \ \wedge \ \Delta=0$,
- хиперболу, акко је $\delta<0 \ \wedge \ \Delta \neq 0$,
- две праве које се секу, акко је $\delta<0 \ \wedge \ \Delta=0$.

Ако је $\delta > 0$ онда једначина (3) представља криву **елиптичког типа**, а ако је $\delta < 0$, једначина (3) представља криву **хиперболичког типа**.

Значи, ако је задата једначина било које централне криве, дегенерисане или недегенерисане, елиптичког или хиперболичког типа, израчунавањем детерминаната δ и Δ, једноставно се утврђује, који скуп тачака она представља.

Међутим, ако је потребно да се одреде још неке карактеристике те криве, као на пример: жиже, темена, асимптоте, директрисе, параметар и сл., нису довољне вредности ових двеју детерминаната. Тада треба користити описани алгоритам, који приказујемо и у примерима који следе.

Задатак 1. Анализирати криве другог реда представљене следећим једначинама:

1. $29x^2+144xy+71y^2-40x+30y-50=0$;
2. $4x^2+4xy+4y^2+11\sqrt{2}x+7\sqrt{2}y-4=0$?

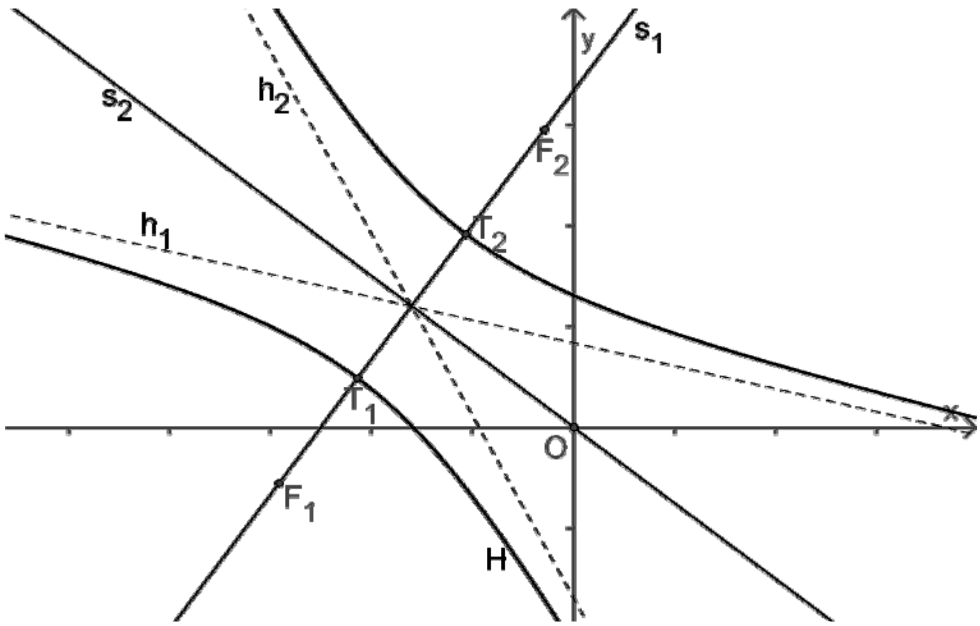
Одреди (ако постоје): полуосе, жиже, асимптоте, директрисе и параметар.

Решење. 1) Пошто је $\delta=-3125<0$, (значи и $\delta\neq 0$), дата једначина представља централну криву хиперболичког типа, а због $\Delta=78125\neq 0$, јасно је да се ради о хиперболи $\mathcal{H}$. Координате центра S, $x_0=-0.8$ и $y_0=0.6$, израчунавамо решавајући систем (4), који у овом случају гласи

$$29x+72y-20=0 \text{ и } 72x+35.5y+15=0.$$

Ротација ρ_O^{φ} дата са (7), за угао φ, одређен са (10), пресликава хиперболу $\mathcal{H}$, на хиперболу

$$\mathcal{H}_1: -x^2+5y^2-2x-2=0,$$



Слика 7.

а центар S хиперболе $\mathcal{H}$, на центар $S_1(x_{01}, y_{01}) = S_1(-1,0)$ хиперболе $\mathcal{H}_1$. Транслација $\tau_{\vec{v}}$, за вектор $\vec{v} = (-x_{10}, -y_{10})$, дата са (12), пресликава хиперболу $\mathcal{H}_1$, на хиперболу

$$\mathcal{H}_2 : -x^2 + 5y^2 = 1.$$

Прво се одређују тражене карактеристике хиперболе $\mathcal{H}_2$:

- полуосе и темена: $a = 1,\ b = \sqrt{5}/5,\ A_2\left(0, \sqrt{5}/5\right),\ B_2\left(0, -\sqrt{5}/5\right)$;
- жиже: $F_1''(0, c_2)$, $F_2''(0, -c_2)$, где је $c_2 = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{6/5}$;
- осе: $x = 0$ - реална и $y = 0$ - имагинарна;
- нумерички ексцентрицитет: $e = \sqrt{6}$;
- асимптоте: $\sqrt{5}\,x - 5y = 0$, $\sqrt{5}\,x + 5y = 0$;
- директрисе: $y = \sqrt{30}/30$, $y = -\sqrt{30}/30$;
- параметар: $p = a^2/b = \sqrt{5}$.

У следећем кораку композиција $\rho_O^{-\varphi} \circ \tau_{-\vec{v}}$, транслације за вектор $-\vec{v}$ и ротације $\rho_O^{-\varphi}$ око координатног почетка O за угао $-\varphi$, пресликава хиперболу $\mathcal{H}_2$, на хиперболу $\mathcal{H}$, а такође и жиже, темена, асимптоте, директрисе и реалну осу (y–осу) хиперболе $\mathcal{H}_2$, на жиже, темена, асимптоте, директрисе и реалну осу хиперболе $\mathcal{H}$. На тај начин имамо:

- темена: $A\left(\dfrac{-20+3\sqrt{5}}{25}, \dfrac{15+4\sqrt{5}}{25}\right)$, $B\left(\dfrac{-20-3\sqrt{5}}{25}, \dfrac{15-4\sqrt{5}}{25}\right)$;
- жиже:
  $F_1\left(\left(-4+3\sqrt{6/5}\right)/5, \left(3+4\sqrt{6/5}\right)/5\right), F_2\left(\left(-4-3\sqrt{6/5}\right)/5, \left(3-4\sqrt{6/5}\right)/5\right)$;
- осе: $4x - 3y + 5 = 0$ - реална и $3x + 4y = 0$ - имагинарна;
- асимптоте: $\left(3\sqrt{5}-4\right)x + \left(4\sqrt{5}+3\right)y = 3\sqrt{5}+4$, $\left(3\sqrt{5}+4\right)x + \left(4\sqrt{5}-3\right)y = 3\sqrt{5}-4$;
- директрисе: $18x + 24y = 18 + \sqrt{30}$, $18x + 24y = 18 - \sqrt{30}$.

Јасно је да полуосе, ексцентрицитет (линеарни и нумерички) и параметар, остају инваријантни. Решење задатка се може добити кликом на линк (4.2.8.ggb), покретањем апликације GeoGebra.

2) У овом случају је $\delta = 12 > 0$, $\Delta = -243 \neq 0$ и $(a+c)\Delta = -1944 < 0$ јасно је да се ради о елипси $\mathcal{E}$. Решавајући систем

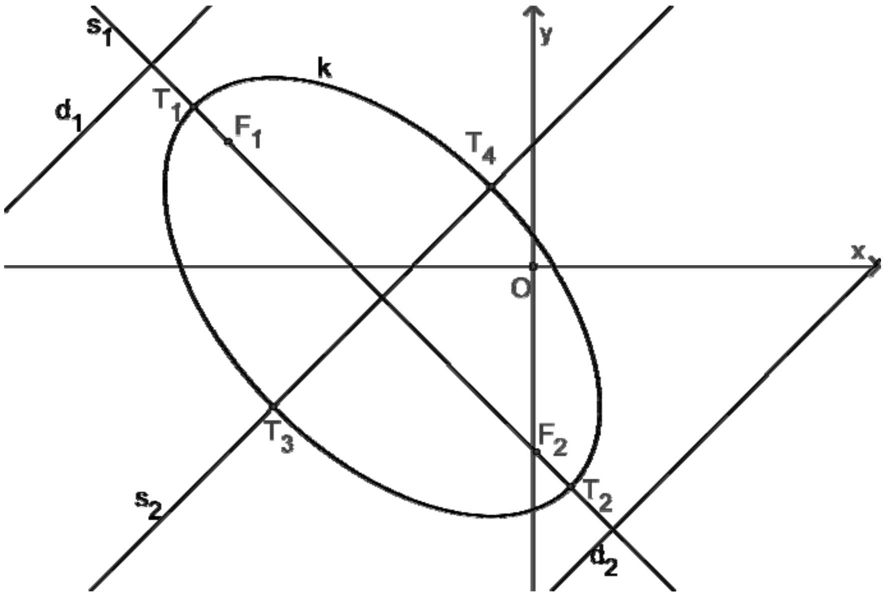
$$4x + 2y + 11\sqrt{2}/2 = 0 \quad \text{и} \quad 2x + 4y + 7\sqrt{2}/2 = 0,$$

налазимо центар елипсе $S\left(-5\sqrt{2}/4, -\sqrt{2}/4\right)$. Ротација ρ_O^{φ}, где је угао $\varphi = \pi/4$,

пресликава елипсу $\mathcal{E}$, на елипсу

$$\mathcal{E}_1 : x^2 + 3y^2 + 2x + 9y - 2 = 0,$$

а центар S елипсе $\mathcal{E}$, на центар $S_1(-1, -3/2)$ елипсе $\mathcal{E}_1$.



Слика 8.

Транслација $\tau_{\vec{v}}$, за вектор $\vec{v} = (1; 3/2)$, дата са (12), пресликава елипсу $\mathcal{E}_1$, на елипсу

$$\mathcal{E}_2 : x^2 + 3y^2 = 39/4.$$

Сада за елипсу $\mathcal{E}_2$ имамо:

- полуосе $a = \sqrt{39}/2$, $b = \sqrt{13}/2$;
- темена $A_2(a, 0)$, $B_2(-a, 0)$, $C_2(0, b)$, $D_2(0, -b)$;
- осе: $x = 0$ - главна и $y = 0$ - споредна;
- жиже $F_1''(0, c_2)$, $F_2''(0, -c_2)$, где је $c_2 = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{26}/2$;
- нумерички ексцентрицитет $e = \sqrt{2/3}$
- директрисе $x = 3\sqrt{26}/4$, $x = -3\sqrt{26}/4$;

- параметар $p = b^2 / a = \sqrt{13/12}$.

Композиција $\rho_O^{-\varphi} \circ \tau_{-\vec{v}}$, транслације за вектор $-\vec{v}$ и ротације $\rho_O^{-\varphi}$ пресликава елипсу $\mathcal{E}_2$, на елипсу $\mathcal{E}$, а такође и жиже, темена, асимптоте, директрисе и осе елипсе $\mathcal{E}_2$, на жиже, темена, асимптоте, директрисе и осе елипсе $\mathcal{E}$. Тако добијамо:

- темена

$$A\left(\sqrt{21}/6, \left(-9\sqrt{2}+\sqrt{21}\right)/6\right),\ B\left(-\sqrt{21}/6, -\left(9\sqrt{2}+\sqrt{21}\right)/6\right),$$

$$C\left(\left(-5\sqrt{2}+\sqrt{26}\right)/4, \left(-\sqrt{2}+\sqrt{26}\right)/4\right),\ D\left(\left(-5\sqrt{2}-\sqrt{26}\right)/4, \left(-\sqrt{2}-\sqrt{26}\right)/4\right);$$

- жиже

$$F_1\left(\left(-5\sqrt{2}+2\sqrt{13}\right)/4, \left(-\sqrt{2}-2\sqrt{13}\right)/4\right), F_1\left(\left(-5\sqrt{2}-2\sqrt{13}\right)/4, \left(-\sqrt{2}+2\sqrt{13}\right)/4\right);$$

- осе: $x + y = -1.5\sqrt{2}$ - главна и $x - y = -\sqrt{2}$ - споредна;

- директрисе $2x - 2y + 2\sqrt{2} - 3\sqrt{13} = 0$, $2x - 2y + 2\sqrt{2} + 3\sqrt{13} = 0$,

с тим што полуосе, ексцентрицитет (линеарни и нумерички) и параметар, остају инваријантни. Решење задатка се може добити кликом на линк (4.2.9.ggb), покретањем апликације GeoGebra.

Специјално (Пример 1.2)), ако је $a = c$, угао ротације је $\varphi = \pi/4$, због чега је у једначини (15) $A = a - b$ и $C = a + b$. Како је $\delta \neq 0$, то је $a \neq \pm b$, одакле је $A \neq 0$ и $C \neq 0$.

4.3.3. Криве без центра ($\delta = 0$)

б) Анализирамо сада случај $\delta = 0$, тј. крива (3) нема центар. Тада важи

$$\delta = 0 \Leftrightarrow ac = b^2 \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{c} \Leftrightarrow \text{ праве (4) су паралелне.}$$

Кликом на линк 4.2.10.ggb, покреће се генерички организатор, у програму GeoGebra, у коме се приказује однос детерминанте δ, правих (4) и криве (3).

Опет се прво врши ротација ρ_O^{φ} дата са (7), за угао φ, одређен са (10), којом се крива $\mathcal{K}$ пресликава на подударну криву

(16) $$\mathcal{K}': Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + f = 0,$$

где је

$$B = 0,$$

$$A = a\cos^2\varphi - 2b\sin\varphi\cos\varphi + c\sin^2\varphi,$$

$$C = a\sin^2\varphi + 2b\sin\varphi\cos\varphi + c\cos^2\varphi,$$

$$D = d\cos\varphi - e\sin\varphi,$$

$$E = d\sin\varphi + e\cos\varphi.$$

Пошто и у овом случају важе релације (14), онда из $\delta = 0$ и $B = 0$ следи $AC = 0$. Ако би важила једнакост $A = C = 0$, онда би било $b = 0$, што је супротно услову. Зато важи: или $C = 0$, или $A = 0$, тј. важи једна од следећих релација:

(17) $$C = 0 \Leftrightarrow \operatorname{ctg}\varphi = \frac{-a}{b} \quad \veebar \quad A = 0 \Leftrightarrow \operatorname{ctg}\varphi = \frac{c}{b}.$$

Нека је $a > 0$ и $\operatorname{ctg}\varphi = -\frac{a}{b}$. Тада једначина (16) постаје:

(18) $$\mathcal{K}_1': Ax^2 + 2Dx + 2Ey + f = 0,$$

где је $A = a + c$, $D = \frac{-(ad + be)}{\sqrt{b^2 + a^2}}$, $E = \frac{bd - ae}{\sqrt{b^2 + a^2}}$, и представља параболу чија оса је паралелна са $y-$осом, акко је $E \neq 0$, тј. акко је $bd - ae \neq 0$, што заједно са основним условом $\delta = 0$, значи

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} \neq \frac{d}{e},$$

тј. праве (6) нису конкурентне (прве две од њих су различите паралелне праве), а тај услов је испуњен акко је $\Delta \neq 0$.

Сада се врши транслација $\tau_{\vec{v}}$ криве (18),

$$(x, y) \xrightarrow{\tau_{\vec{v}}} (x_1, y_1) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x - x_0 \\ y_1 = y - y_0 \end{cases}$$

за вектор $\vec{v} = (-x_0, -y_0)$, којом се крива (18), пресликава на криву

$$\mathcal{K}_1'': Ax^2 + 2(Ax_0 + D)x + 2Ey + Ax_0^2 + 2Dx_0 + 2Ey_0 + f = 0.$$

Координате вектора $\vec{v}$ одређују се тако да важи

$$Ax_0 + D = 0 \text{ и } Ax_0^2 + 2Dx_0 + 2Ey_0 + f = 0,$$

одакле је $x_0 = -\frac{D}{A}$ и $y_0 = \frac{D^2 - Af}{2AE}$. С обзиром на то да је

$$\mathcal{K}_1'': Ax^2 + 2Ey = 0,$$

јасно је да тачка $T(x_0, y_0)$ представља теме, а права $x = -\frac{D}{A}$ - осу параболе (18).

Сада претпоставимо да је у једначини (18) $E=0$, тј. $bd-ae=0$, а како је $\delta=0$, то је и $\Delta=0$, због чега једначина (18) постаје

$$\left(Ax+D-\sqrt{D^2-Af}\right)\left(Ax+D+\sqrt{D^2-Af}\right)=0 .$$

Пошто је $D^2-Af=d^2+e^2-(a+c)f$, једначина (18) представља:

- две различите паралелне праве, акко је $d^2+e^2>(a+c)f$,
- једну праву, акко је $d^2+e^2=(a+c)f$,
- празан скуп (две имагинарне паралелне праве), акко је $d^2+e^2<(a+c)f$.

Задатак 2. Анализирати једначину $2x^2+4xy+2y^2-7x-12y-5=0$.

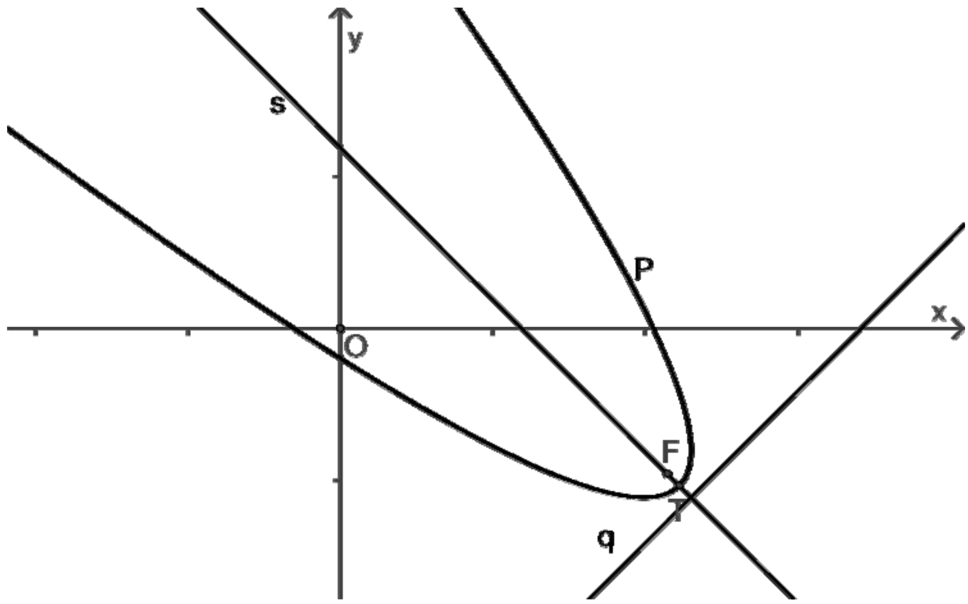
Решење. Како је $\delta=0$ а $\Delta=-12.5\neq 0$, то значи да дата једначина преставља параболу $\mathcal{P}$. Ротација ρ_O^{φ}, где је угао $\varphi=\operatorname{arctg}(-b/a)=-\pi/4$, пресликава параболу $\mathcal{P}$, на параболу

$$\mathcal{P}_1 : 4\sqrt{2}x^2-19x-5y-5\sqrt{2}=0,$$

чије теме је $T_1\left(19\sqrt{2}/16,-52.1\sqrt{2}/16\right)$. Транслација $\tau_{\vec{v}}$, дата са (12), за вектор $\vec{v}=\left(-19\sqrt{2}/16;52.1\sqrt{2}/16\right)$, пресликава параболу $\mathcal{P}_1$, на параболу

$$\mathcal{P}_2 : 4\sqrt{2}x^2-5y=0,$$

за коју је: оса симетрије y–оса, теме $O(0,0)$, параметар $p=5\sqrt{2}/16$, жижа $F\left(0,5\sqrt{2}/32\right)$, а директриса $y=-5\sqrt{2}/32$.



Слика 9.

Композиција $\rho_O^{-\varphi} \circ \tau_{-\vec{v}}$, транслације за вектор $-\vec{v}$ и ротације $\rho_O^{-\varphi}$ пресликава параболу $\mathcal{P}_2$, на параболу $\mathcal{P}$, а такође и осу, теме, жижу и директрису параболе $\mathcal{P}_2$, пресликава на одговарајуће елементе параболе $\mathcal{P}$, за коју је:

- оса симетрије $8x+8y=19$,
- теме $T(71.1/16;-33.1/16)$,
- директриса $8x-8y=54.6$,
- жижа $F(68.6/16;-30.6/16)$,
- параметар је $p=5\sqrt{2}/16$.

Решење задатка се може добити кликом на линк (4.2.11.ggb), покретањем апликације GeoGebra.

Аналогно, ако је $a>0$ и $\mathrm{ctg}\varphi=\dfrac{c}{b}$, једначина (16) добија облик

(19) $$\mathcal{K}_2' : Cy^2+2Dx+2Ey+f=0,$$

где је $C=a+c$, $D=\dfrac{cd-be}{\sqrt{b^2+c^2}}$, $E=\dfrac{bd+ce}{\sqrt{b^2+c^2}}$, и представља параболу, са осом паралелном $x-$оси, акко је $D\neq 0$ тј. акко је испуњен услов $\Delta\neq 0$.

Сада се врши транслација $\tau_{\vec{v}}$ криве (19), за вектор $\vec{v}=(-x_0,-y_0)$:

$$(x,y)\xrightarrow{\tau_{\vec{v}}}(x_1,y_1)\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=x-x_0\\ y_1=y-y_0\end{cases}$$

којом се крива (19), пресликава на криву

$$\mathcal{K}_2'' : Cy^2+2Dx+2(Cy_0+E)y+Cy_0^2+2Dx_0+2Ey_0+f=0.$$

Координате вектора $\vec{v}$ одређују се тако да важи

$$Cy_0+E=0 \text{ и } Cy_0^2+2Dx_0+2Ey_0+f=0,$$

одакле је $x_0=\dfrac{E^2-Cf}{2CD}$ и $y_0=-\dfrac{E}{C}$. С обзиром на то да је тада

$$\mathcal{K}_2'' : Cy^2+2Dx=0,$$

јасно је да тачка $T(x_0,y_0)$ представља теме, а права $y=-\dfrac{E}{C}$ - осу параболе (19).

Аналогно, ако је $D=0 \Leftrightarrow cd-be=0$, уз услов $\delta=0$, важи $\Delta=0$, онда једначина (19) постаје

$$\left(Cy+E-\sqrt{E^2-Cf}\right)\left(Cy+E+\sqrt{E^2-Cf}\right)=0,$$

а пошто је $E^2-Cf=d^2+e^2-(a+c)f$, она представља:

- две различите паралелне праве, акко је $d^2+e^2-(a+c)f>0$,
- једну праву, акко је $d^2+e^2-(a+c)f=0$,
- празан скуп (две имагинарне паралелне праве), акко је $d^2+e^2-(a+c)f<0$.

И у овом случају ($\delta=0$), ако је у једначини (3) $a<0$, онда се после множења са -1, дискусија своди на напред изведену.

Напомена 1. Ако је $b=0$, тада једначина (3), има облик

$$ax^2+cy^2+2dx+2ey+f=0,$$

и у зависности од детерминанте δ, поступа се исто као са једначином (11), ако је $\delta\neq 0$, или као са једначином (16), ако је $\delta=0$.

4.3.4. Резиме

Резултат претходног излагања, може се приказати у следећој табели

<table>
<tr><td rowspan="3">$\delta>0$</td><td rowspan="2">$\Delta\neq 0$</td><td>$(a+c)\cdot\Delta<0$</td><td>елипса</td></tr>
<tr><td>$(a+c)\cdot\Delta>0$</td><td>празан скуп (имагинарна елипса)</td></tr>
<tr><td>$\Delta=0$</td><td colspan="2">тачка</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\delta<0$</td><td>$\Delta\neq 0$</td><td colspan="2">хипербола</td></tr>
<tr><td>$\Delta=0$</td><td colspan="2">две праве које се секу</td></tr>
<tr><td rowspan="4">$\delta=0$</td><td>$\Delta\neq 0$</td><td colspan="2">парабола</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$\Delta=0$</td><td>$d^2+e^2-(a+c)f>0$</td><td>две различите паралелне праве</td></tr>
<tr><td>$d^2+e^2-(a+c)f=0$</td><td>једна права (две идентичне праве)</td></tr>
<tr><td>$d^2+e^2-(a+c)f<0$</td><td>празан скуп (две имагинарне паралелне праве)</td></tr>
</table>

Следећи задатак илуструје свих девет случајева, а у генеричким организаторима, који се покрећу кликом на одговарајући линк, маркиран у загради, после сваког задатка дато је решење, у програму GeoGebra.

Задатак 3. Анализирати криве другог реда представљене следећим једначинама:

a) $x^2+4xy+4y^2+6x+12y+5=0$ 4.2.12.ggb

b) $x^2+4xy+4y^2-4x-8y+5=0$ 4.2.13.ggb

c) $x^2+4xy+4y^2-4x-8y+4=0$ 4.2.14.ggb

d) $x^2+4xy+4y^2-9x-9y-9=0$ 4.2.15.ggb

e) $x^2+6xy+y^2-8x-2=0$ 4.2.16.ggb

f) $2x^2+2xy+y^2-8x-4y+8=0$ 4.2.17.ggb

g) $2x^2+2xy+y^2-8x-4y+10=0$ 4.2.18.ggb

h) $14.5x^2+12xy+18y^2+16x-28y+17=0$ 4.2.19.ggb

i) $4x^2-12xy+3y^2+6x+24y-50=0$ 4.2.20.ggb

4.3. ТАНГЕНТА КРИВЕ ДРУГОГ РЕДА – ОПШТИ СЛУЧАЈ

На основу садржаја обрађених у одељку 4.1. и 4.2., обезбеђени су услови за одређивање тангенте криве другог реда у општем случају. Наиме, ако је дата крива другог реда $\mathcal{K}$ и тачка T, која не припада њеној унутрашњости, поступак за одређивање тангенте криве из дате тачке, је следећи:

1. Ротацијом ρ_O^{φ}, око координатног почетка за угао φ, одређен формулом (10), или (17), датом у одељку 4.4., крива $\mathcal{K}$ се пресликава на криву $\mathcal{K}'$, чије су осе (оса, у случају параболе) паралелне са координатним осама, а тачка T се пресликава на тачку T';

2. На један од начина, приказаних у одељку 4.1, одреде се тангенте t_1' и t_2' (тангента t', ако $T\in\mathcal{K}$) криве $\mathcal{K}'$, из тачке T';

2'. Одреди се полара l' пола T' у односу на криву $\mathcal{K}'$;

3. Ротацијом $\rho_O^{-\varphi}$, тангенте t_1' и t_2' (тангента t', ако $T\in\mathcal{K}$) криве $\mathcal{K}'$, пресликавају се на тражене тангенте t_1 и t_2 (тангенту t, ако $T\in\mathcal{K}$), криве $\mathcal{K}$.

3'. Ротацијом $\rho_O^{-\varphi}$, полара l' пола T' у односу на криву $\mathcal{K}'$, пресликава се на полару l пола T у односу на криву $\mathcal{K}$, која је сече у тачкама T_1 и T_2, а затим се одреде праве $t_1=p(T,T_1)$ и $t_2=p(T,T_2)$, тражене тангенте криве $\mathcal{K}$.

У примерима који следе биће представљен поступак који обухвата кораке 1., 2'. и 3'. За решавање сваког задатка биће формиран генерички организатор, који омогућује да варирањем коефицијената криве и координата дате тачке, проблем одређивања једначине тангенте криве другог реда, из тачке која не припада њеној унутрашњости, буде решен у потпуности.

Пример. Одредити једначине тангената дате криве $\mathcal{K}$, конструисаних из дате тачке T:

a) $\mathcal{K}: x^2+2xy+2y^2-10x-10y+8=0$, $T(-2,-4)$;

b) $\mathcal{K}: x^2+6xy+3y^2-10x-14y+21=0$, $T(-3,-3)$;

c) $\mathcal{K}: x^2+4xy+4y^2-18x-18y-9=0$, $T(-8,8)$.

Решење. а) Задатак се решава применом генеричког организатора који се покреће кликом на линк (4.3.1.ggb), активирањем апликације GeoGebra. Дакле, како је $\delta=1>0$, $\Delta=-17\neq 0$, $(a+c)\Delta=-51<0$, дата крива је елипса $\mathcal{E}$, чији центар (видети 4.2.1.) је тачка $S(5,0)$, пресек правих: $x+y=5$ и $x+2y=5$. Ротацијом (видети 4.2.2.), ρ_O^{φ}, око координатног почетка, за угао $\varphi=0.5\operatorname{arcctg}0.5$, елипса $\mathcal{E}$, пресликава се на елипсу $\mathcal{E}':\left(3-\sqrt{5}\right)(x-x_1)^2+\left(3+\sqrt{5}\right)(y-y_1)^2-34=0$, где је $x_1=\sqrt{12.5+2.5\sqrt{5}}$ и $y_1=\sqrt{12.5-2.5\sqrt{5}}$, центар $S(5,0)$ елипсе $\mathcal{E}$, на центар $S_1(x_1,y_1)$, елипсе $\mathcal{E}'$, а тачка $T(-8,8)$, на тачку

$$T'\left(-\sqrt{2+0.4\sqrt{5}}+\sqrt{8-1.6\sqrt{5}},-\sqrt{2-0.4\sqrt{5}}-\sqrt{8+1.6\sqrt{5}}\right).$$

Права

$$l':\left(3-\sqrt{5}\right)\left(4\sqrt{10\left(5-\sqrt{5}\right)}-7\sqrt{10\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)x-\left(3+\sqrt{5}\right)\left(7\sqrt{10\left(5-\sqrt{5}\right)}+4\sqrt{10\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)y+760=0$$

је полара тачке T', у односу на елипсу $\mathcal{E}'$, а ротацијом $\rho_O^{-\varphi}$ се пресликава на

полару

$$l:11x+15y-38=0$$

пола T, у односу на дату елипсу $\mathcal{E}$, и сече је у тачкама

$T_1\left(2\left(283-15\sqrt{510}\right)/137,2\left(-34+11\sqrt{510}\right)/137\right)$ и $T_2\left(2\left(283+15\sqrt{510}\right)/137,2\left(-34-11\sqrt{510}\right)/137\right)$.

Одатле су тражене тангенте

$$t_1:\left(240+11\sqrt{510}\right)x+15\left(-28+\sqrt{510}\right)y-1200+82\sqrt{510}=0,$$

$$t_2:\left(-240+11\sqrt{510}\right)x+15\left(28+\sqrt{510}\right)y+1200+82\sqrt{510}=0.$$

б) Кликом на линк (4.3.2.ggb) и активирањем апликације GeoGebra, покреће се генерички организатор, у коме се уочава да је $\delta=-6<0$, $\Delta=-40\neq 0$, тј. крива је хипербола $\mathcal{H}$, са центром $S(1;4/3)$, у пресеку правих: $x+3y=5$ и $3x+3y=7$.

Ротацијом ρ_O^{φ}, око координатног почетка, за угао $\varphi=\frac{1}{2}\operatorname{arcctg}\frac{1}{3}$, хипербола $\mathcal{H}$, пресликава се на хиперболу $\mathcal{H}':3\left(-2+\sqrt{10}\right)\left(x-x_1\right)^2-3\left(2+\sqrt{10}\right)\left(y-y_1\right)^2=20$, где је $x_1=\frac{2}{3}\sqrt{2-0.2\sqrt{10}}+\frac{1}{2}\sqrt{2+0.2\sqrt{10}}$ и $y_1=\frac{1}{2}\sqrt{2-0.2\sqrt{10}}+\frac{2}{3}\sqrt{2+0.2\sqrt{10}}$, центар $S(1;4/3)$ хиперболе $\mathcal{H}$, на центар $S_1(x_1,y_1)$, хиперболе $\mathcal{H}'$, а тачка $T(-3,-3)$, на тачку

$$T'\left(0.3\left(\sqrt{5\left(10-\sqrt{10}\right)}-\sqrt{5\left(10+\sqrt{10}\right)}\right),-0.3\left(\sqrt{5\left(10-\sqrt{10}\right)}+\sqrt{5\left(10+\sqrt{10}\right)}\right)\right).$$

Права

$$l':\left(-2+\sqrt{10}\right)\left(13\sqrt{10-\sqrt{10}}-12\sqrt{10+\sqrt{10}}\right)x+\left(2+\sqrt{10}\right)\left(12\sqrt{10-\sqrt{10}}+13\sqrt{10+\sqrt{10}}\right)y-240\sqrt{5}-174\sqrt{2}=0$$

је полара тачке T', у односу на хиперболу $\mathcal{H}'$, а ротацијом $\rho_O^{-\varphi}$ се пресликава на полару

$$l:17x+25y-57=0$$

пола T, у односу на дату хиперболу $\mathcal{H}$, коју сече у тачкама

$T_1\left(\left(609-25\sqrt{1830}\right)/529,\left(792+17\sqrt{1830}\right)/529\right)$ и $T_2\left(\left(609+25\sqrt{1830}\right)/529,\left(792-17\sqrt{1830}\right)/529\right)$.

Тангенте хиперболе $\mathcal{K}$ су праве

$$t_1:\left(2379+17\sqrt{1830}\right)x+\left(-2196+25\sqrt{1830}\right)y+549+126\sqrt{1830}=0,$$

$$t_2:\left(2379-17\sqrt{1830}\right)x-\left(2196+25\sqrt{1830}\right)y+549-126\sqrt{1830}=0.$$

в) За решавање овог задатка користи се генерички организатор који се покреће кликом на линк (4.3.3.ggb), активирањем апликације GeoGebra. Како је $\delta=0$, $\Delta=-81\neq 0$, крива је парабола $\mathcal{P}$, која се ротацијом ρ_O^{φ}, око координатног почетка, за угао $\varphi=\operatorname{arcctg}2$, дат са (17), пресликава на параболу

$$\mathcal{P}':\left(y-\frac{27}{25}\sqrt{5}\right)^2=2\frac{9\sqrt{5}}{25}\left(x+\frac{53}{25}\sqrt{5}\right)$$

са параметром $p=\frac{9\sqrt{5}}{25}$, жижом $F'\left(-\frac{44}{25}\sqrt{5},\frac{27}{25}\sqrt{5}\right)$ и теменом $T'\left(-\frac{53}{25}\sqrt{5},\frac{27}{25}\sqrt{5}\right)$, а тачка M на тачку $M'\left(-24/\sqrt{5},8/\sqrt{5}\right)$. Полара тачке M', у односу на параболу $\mathcal{P}'$ је права

$$l': 9\sqrt{5}x - 13\sqrt{5}y + 45 = 0,$$

која се ротацијом $\rho_O^{-\varphi}$ пресликава на полару

$$l: x - 7y + 9 = 0$$

пола M, у односу на параболу $\mathcal{P}$. Како полара l сече параболу $\mathcal{P}$ у тачкама

$$M_1\left(\left(38-7\sqrt{55}\right)\big/9, \left(17-\sqrt{55}\right)\big/9\right) \text{ и } M_2\left(\left(38+7\sqrt{55}\right)\big/9, \left(17+\sqrt{55}\right)\big/9\right)$$

следи да су тангенте из тачке M на параболу $\mathcal{P}$, праве

$$t_1 : \left(55+\sqrt{55}\right)x + \left(110-7\sqrt{55}\right)x - 440 + 64\sqrt{55} = 0,$$

$$t_2 : \left(55-\sqrt{55}\right)x + \left(110+7\sqrt{55}\right)x - 440 - 64\sqrt{55} = 0.$$

Важно је напоменути да, ако тачка припада кривој другог реда, тада је полара дате тачке (пола), тангента криве.

Пример. Одредити једначине тангената дате криве $\mathcal{K}$, конструисаних из дате тачке T:

a) $\mathcal{K}: 5x^2 + 4xy + 8y^2 - 14x - 20y - 19 = 0$, $T(-1,-3)$; (4.3.4.ggb)

b) $\mathcal{K}: 3x^2 - 4xy - 2x + 4y - 5 = 0$, $T(2,3)$; (4.3.5.ggb)

c) $\mathcal{K}: x^2 + 4xy + 4y^2 - 26x - 2y + 44 = 0$, $T(-2;2.5)$. (4.3.6.ggb)

4.4. СИСТЕМ ЈЕДНЕ КВАДРАТНЕ И ЈЕДНЕ ЛИНЕАРНЕ НЕЈЕДНАЧИНЕ СА ДВЕ НЕПОЗНАТЕ

Линеарне неједначине и системи линеарних неједначина решени су у тачки 3.4.7., а специјални случајеви квадратне неједначине, или система једне квадратне и једне линеарне неједначине, када су осе одговарајуће криве другог реда паралелне координатним осама, решени су у тачки 3.5.2. Сада, пошто је обрађена анализа опште квадратне једанчине, тј. када је извршена класификација кривих другог реда, створени су услови да, у општем случају, буде решен и систем једне квадратне и једне линеарне неједначине са две промењљиве.

У излагању које следи решава се систем неједначина

(1) $$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f \;\rho_1\; 0,$$

(2) $$Ax + By + C \;\rho_2\; 0,$$

где је $a,b,c,d,e,f,A,B,C \in \mathbb{R}$, $a^2+b^2+c^2 \neq 0$, $A^2+B^2 \neq 0$ и $\rho_1,\rho_2 \in \{<,\leq,>,\geq\}$, при чему, под одговарајућом кривом другог реда квадратне неједначине (1), подразумева се крива $\mathcal{K}$, дата једначином

(3) $$ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0,$$

а под одговарајућом правом линеарне неједначине (2), подразумева се права l, дата једначином

(4) $$Ax+By+C=0.$$

Поступак за решавање је следећи:

1. Решава се линеарна неједначина (2);
2. Утврђује се врста одговарајуће криве, дате квадратне неједначине;
3. Решава се квадратна неједанчина (1);
4. Разлаже се крива другог реда на унију две функције;
5. Решава се систем одговарајућих једначина (3) и (4);
6. Одређује се пресек скупова решења датих неједначина.

Примери који следе решени су тако што се за прва три корака наведеног поступка формирају генерички организатори у програму GeoGebra, а за кораке 5. и 6. у програму Mathematica. Извршавање четвртог корака своди се на решавање квадратне једначине (3), по промењивој y.

Пример. Решити системе неједначина

а) $x^2+2xy+3y^2-4x+6y-5<0 \;\wedge\; x+y-3>0$,

б) $x^2+6xy+3y^2-10x-14y+21<0 \;\wedge\; x+2y-3>0$,

в) $2x^2+4xy+2y^2-7x-12y-5<0 \;\wedge\; 2x-y-3>0$.

Решење а) Покретањем генеричког организатора, кликом на линк (4.4.1.ggb), добија се решење линеарне неједначине, а то је отворена полураван, која не садржи координатни почетак, са ивицом $p: x+y-3=0$.

Пошто је $\delta=2>0$, $\Delta=-43\neq 0$, $(a+c)\Delta=-172<0$, одговарајућа крива квадратне неједначине је елипса, са центром $S(4.5,-2.5)$, што се добија кликом на линк (4.4.2.ggb), а решење квадратне неједначине је унутрашња областа елипсе.

Решавање квадратне једначине

$$x^2+2xy+3y^2-4x+6y-5=0$$

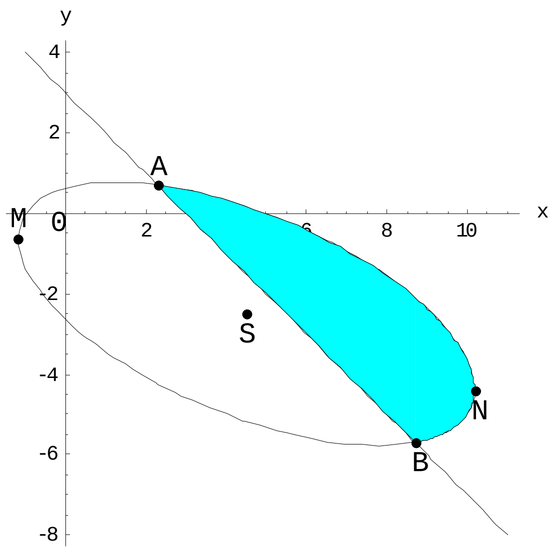
по промењивој y, разбија елипсу на два дела, на унију две функције

$$y=\left(-3-x-\sqrt{24+18x-2x^2}\right)\Big/3 \ \text{ и } \ y=\left(-3-x+\sqrt{24+18x-2x^2}\right)\Big/3,$$

чије заједничке тачке су

$$M\left(\left(9-\sqrt{129}\right)\Big/2,\left(-15+\sqrt{129}\right)\Big/6\right) \ \text{ и } \ N\left(\left(9+\sqrt{129}\right)\Big/2,\left(-15-\sqrt{129}\right)\Big/6\right).$$

Кликом на линк (4.4.3.nb) и активирањем апликације Mathematica, добија генерички организатор, који решава систем (конјункцију) линеарне и квадратне неједнаине, као пресек скупова решења сваке од неједначина,



Слика 10.

$$(x;y)\in\left(\left(\frac{1}{2}\left(11-\sqrt{41}\right),\frac{1}{2}\left(11+\sqrt{41}\right)\right]\times\left(-x+3;\frac{1}{3}\left(-x-3+\sqrt{24+18x-2x^2}\right)\right)\right)\cup$$

$$\cup\left(\left(\frac{1}{2}\left(11+\sqrt{41}\right),\frac{1}{2}\left(9+\sqrt{129}\right)\right]\times\left(\frac{1}{3}\left(-x-3-\sqrt{24+18x-2x^2}\right);\frac{1}{3}\left(-x-3+\sqrt{24+18x-2x^2}\right)\right)\right),$$

при чему је узето у обзир да решење система линеарне и квадратне једначине представљају пресечне тачке

$$A=\left(\frac{1}{2}\left(11-\sqrt{41}\right),\frac{1}{2}\left(-5+\sqrt{41}\right)\right) \ \text{ и } \ B=\left(\frac{1}{2}\left(11+\sqrt{41}\right),\frac{1}{2}\left(-5-\sqrt{41}\right)\right)$$

одговарајуће праве и елипсе, (Слика 10.).

б) Покретањем генеричког организатора, кликом на линк (4.4.1.ggb), добија се решење линеарне неједначине, а то је отворена полураван, која не садржи координатни почетак, са ивицом $p: x+2y-3=0$.

Пошто је $\delta=-6<0$, $\Delta=-40\neq0$, одговарајућа крива квадратне неједначине је хипербола, са центром $S(1;4/3)$, што се добија кликом на линк (4.4.4.ggb), а решење квадратне неједначине је унутрашња области хиперболе.

Решавање квадратне једначине

$$x^2+6xy+3y^2-10x-14y+21=0$$

по промењивој y, разбија хиперболу на унију две функције

$$y=\left(-3x+7-\sqrt{2\left(3x^2-6x-7\right)}\right)\Big/3 \quad \text{и} \quad y=\left(-3x+7+\sqrt{2\left(3x^2-6x-7\right)}\right)\Big/3,$$

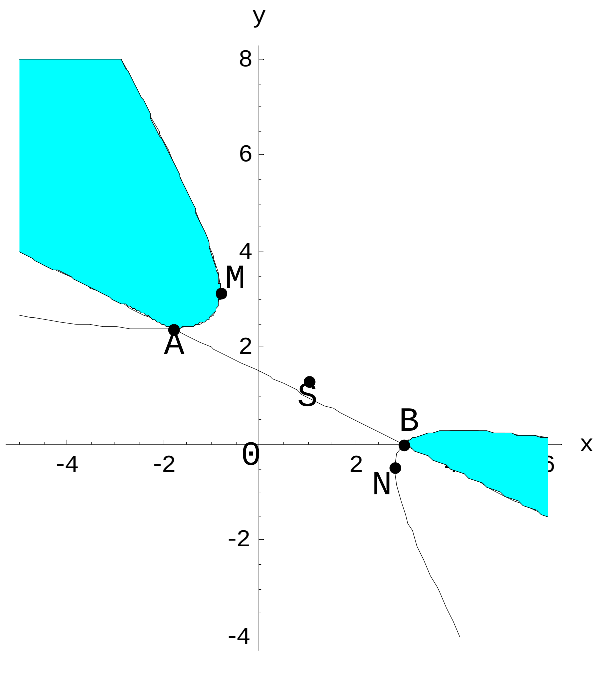
чије заједничке тачке су $M\left(\left(3-30\right)/3,\left(4+\sqrt{30}\right)/3\right)$ и $N\left(\left(3+30\right)/3,\left(4-\sqrt{30}\right)/3\right)$.

Кликом на линк (4.4.5.nb) и активирањем апликације Mathematica, добија генерички организатор, који решава систем (конјункцију) линеарне и квадратне неједнаине, као пресек скупова решења сваке од неједначина,

$$\left(x;y\right)\in\left(\left(-\infty;-\frac{9}{5}\right]\times\left(\frac{1}{2}\left(-x+3\right);\frac{1}{3}\left(-3x+7+\sqrt{2\left(3x^2-6x-7\right)}\right)\right)\right)\cup$$

$$\cup\left(\left(-\frac{9}{5};\frac{1}{3}\left(3-\sqrt{30}\right)\right)\times\left(\frac{1}{3}\left(-3x+7-\sqrt{2\left(3x^2-6x-7\right)}\right);\frac{1}{3}\left(-3x+7+\sqrt{2\left(3x^2-6x-7\right)}\right)\right)\right)$$

$$\cup\left(\left(3;\infty\right)\times\left(\frac{1}{2}\left(-x+3\right);\frac{1}{3}\left(-3x+7+\sqrt{2\left(3x^2-6x-7\right)}\right)\right)\right),$$



Слика 11.

при чему је узето у обзир да решење система линеарне и квадратне једначине представљају пресечне тачке

$$A=\left(-9/5,12/5\right) \text{ и } B=\left(3,0\right)$$

одговарајуће праве и хиперболе, (Слика 11.).

в) Покретањем генеричког организатора, кликом на линк (4.4.1.ggb), добија се решење линеарне неједначине, а то је отворена полураван, која не садржи координатни почетак, са ивицом $p: x+2y-3=0$.

Пошто је $\delta=0$, $\Delta=-21.5\neq 0$, одговарајућа крива квадратне неједначине је парабола, са жижом $F(343/80;-153/80)$ и теменом $T(711/160;-331/160)$, што се добија кликом на линк (4.4.6.ggb), а решење квадратне неједначине је унутрашња област параболе.

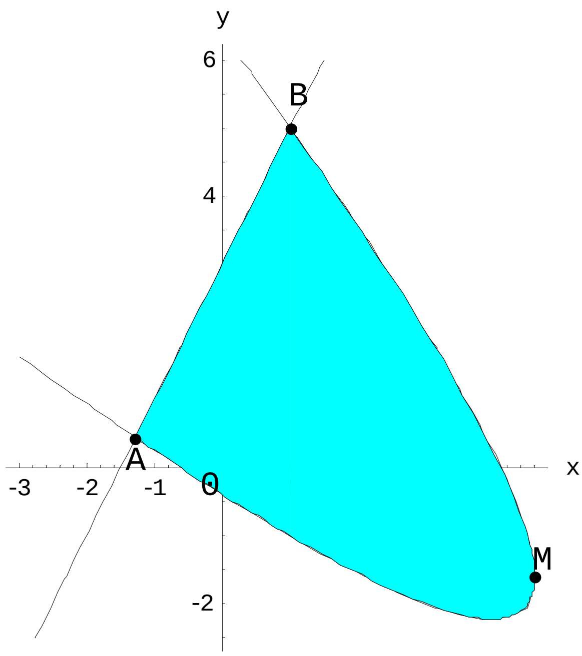
Решавање квадратне једначине

$$2x^2+4xy+2y^2-7x-12y-5=0$$

по промењљивој y, разбија параболу на унију две функције

$$y=-x+3-\sqrt{(23-5x)/2} \quad \text{и} \quad y=-x+3+\sqrt{(23-5x)/2},$$

које имају заједничку тачку $M(23/5,-8/5)$.



Слика 12.

Кликом на линк (4.4.7.nb) и активирањем апликације Mathematica, добија генерички организатор, који решава систем (конјункцију) линеарне и квадратне неједнаине, као пресек скупова решења сваке од неједначина

$$(x;y)\in\left(\left(-\frac{23}{18};1\right]\times\left(-x+3-\sqrt{\frac{23-5x}{2}};2x+3\right)\right)\cup$$

$$\cup\left(\left(1;\frac{23}{5}\right)\times\left(-x+3-\sqrt{\frac{23-5x}{2}};-x+3+\sqrt{\frac{23-5x}{2}}\right)\right)$$

при чему је узето у обзир да решење система линеарне и квадратне једначине представљају пресечне тачке

$$A=\left(-23/18\,,4/9\right) \text{ и } B=\left(1,5\right)$$

одговарајуће праве и параболе, (Слика 12.).

5. ПЕДАГОШКО ИСТРАЖИВАЊЕ

5.1. Увод

У раду је приказано истраживање, о могућностима примене рачунара у настави аналитичке геометрије, спроведено током другог полугодишта, у периоду јануар – април, 2013. године у гимназији „Јован Јовановић Змај“ у Новом Саду, и у периоду фебруар – мај, исте године у гимназији „Никола Тесла“ у Апатину. Истраживањем су обухваћена по два одељења трећег разреда, сваке од поменутих школа, укупно 94 ученика. Током истраживања, настава математике – аналитичке геометрије, извођена је: са експерименталним групама – у рачунарским учионицама и математичким кабинетима, а са контролним групама у математичким кабинетима. Рачунарске учионице су снабдевене са по 16 персоналних рачунара, пројектором и главним рачунаром.

За обраду наставних садржаја аналитичке геометрије, у експерименталној групи у свакој школи, коришћен је и постављен на све рачунаре, образовни софтвер GeoGebra.

Ово педагошко истраживање је спроведено уз велику и несебичну помоћ професора математике ове две школе. У гимназији „Јован Јовановић Змај“ у Новом Саду, истраживање је обављено у сарадњи са професорицама математике Маријетом Самарџијевић и Херминoм Љуштина, а у гимназији „Никола Тесла“ у Апатину у сарадњи са професорима математике Костадином Мићовићем и Бранком Родићем.

5.2. Проблем истраживања

Међу циљевима наставе математике у гимназији у Републици Србији [70], нарочито се истичу: оспособљавање ученика за овладавање методама и техникама ефикаснијег самосталног учења и стицања знања, као и за примену стечених знања у свакодневном животу. Овако постављени циљеви, као и развој математике и информационе технологије, указују на потребу сталног осавремењавања наставе математике. То подразумева, између осталог, **да се настава усмерава на процес стицања знања, квалитет знања и могућност примене стечених знања, а не на усвајање готових чињеница и на њихову количину**, што и представља суштину **проблема истраживања**, који се приказује у раду. Решавање овог проблема подразумева стално усклађивање наставних садржаја са најновијим достигнућима у математици и науци уопште, и стално осавремењавање методике наставе математике.

У реализацији градива математике, током истраживања, примењује се настава уз помоћ рачунара (примена рачунара у настави, компјутерска настава, и сл.). Овај дидактички систем, у коме ученик преузима потпуно нову улогу – постаје активни субјект у наставном процесу, може да представља један од могућих путева који воде ка решавању проблема истраживања.

5.3. Предмет истраживања

Имајући у виду назначени проблем, **предмет** овог истраживања се може идентификовати као примена дидактичког система – настава уз помоћ рачунара, што подразумева примену рачунара и савременог образовног рачунарског софтвера, као и утицај истих на образовни учинак у настави аналитичке геометрије у трећем разреду гимназије. Свакако, један овакав дидактички систем подразумева, уважавање одговарајућих дидактичких принципа и инплементацију примерених наставних метода.

Примена рачунара у настави математике и њен утицај на образовне резултате, предмет су многих, до сада спроведених истраживања. Испитиван је утицај наставе уз помоћ рачунара на општа математичка постигнућа, на вештину решавања проблема, на потребно време да се савлада градиво. Многа истраживања су посвећена упоређивању ефикасности различитих типова образовног софтвера.

Студија о ефикасности наставе математике уз помоћ рачунара [127], представља мета-анализу седамдесет два ранија истраживања прикупљена из објављених студија, ERIC[1] докумената и дисертација. Укупни резултати мерења ефикасности показују да, за ученике основних и средњих школа, настава уз помоћ рачунара има умерен позитиван ефекат на математичка постигнућа, а благи позитиван ефекат на вештину решавања проблема и ставове према настави математике. Мета-анализа 254 студије [126], које обухватају различите узрасте и профиле ученика, организованих по одговарајућим групама, показала је да ученици, који похађају наставоу уз помоћ рачунара, повећавају успех из математике, у односу на ученике који похађају традиционалну наставу, за 50% - 62%. Позитиван ефекат наставе уз помоћ рачунара, огледа се и у чињеници да ученици који је похађају, троше за трећину времена мање, на савладавање градива. Продужена примена наставе уз помоћ рачунара утиче да ученици постижу боље резултате.

У истраживању [133], аутор, уочавајући манипулативни и когнитивни аспект примене рачунара у развијању концепта функције, закључује да само усклађен однос оба аспекта може бити основа ефикасне наставе. Истраживање [120] се бави питањима ефикасне инплементације рачунара и образовног софтвера CAS (компјутерски алгебарски системи) у наставу математике, као и проблемима који је прате. Истраживање спроведено у средњим школама северозападног Охаја [131] указује на недовољну засатупљеност рачунара у настави, а у школама у којима се примењују, не дају статистички значајне образовне ефекте. С тим у вези препоручује се школама, да развију заједнички модел, који укључује: софтвер, програме обуке наставног особља и време за тренинг.

---

[1] **ERIC** - Education Resources Information Center (http://eric.ed.gov/)

Током истраживања [122], спроведеног у 10. разреду једне државне гимназији у округу Мајами (Флорида), као основни извор градива математике коришћен је софтвер Carnegie Learning Geometry Curriculum (2002). Резултати теста из математике FCAT[2], спроведеног у 10. разреду ове школе, на крају истраживања, показује статистички значајан утицај наставе уз помоћ рачунара и наведеног софтвера на коначан успех. Аутори у [124] закључују да се примена рачунара у настави математике најчешће своди на репродуктивну активност. Ученици често науче како да **користе софтвер и савладају га, али то не значи да су савладали основне појмове**. Будућа истраживања о утицају наставе уз помоћ рачунара на образовне ефекте треба фокусирати на апликације и софтвер, а не на употреби самог рачунара [123]. Резултати истраживања ових аутора показују да употреба **интерактивног** софтвера у настави уз помоћ рачунара, подиже процес учења на виши когнитивни ниво, развија способност решавања проблема, као и да интерактивност треба да буде третирана као принцип, приликом дизајнирања образовног софтвера. Мета-анализа [129] која синтетизује истраживања, спроведена на Тајвану, показује статистички значајне ефекте наставе уз помоћ рачунара на постигнућа ученика у настави математике. Такође, истраживање [124] приказује, статистички значајне ефекте, примене наставе уз помоћ рачунара на коначан успех разредног испита из математике на крају 10. разреда у једној средњој школи у Масачусетсу.

У истраживању [130], аутори скрећу пажњу на оне ученике, који у својој посвећености да савладају образовни софтвер, не успевају да овладају математичким концептима и њиховом применом. С друге стране, велика упоредна анализа више истраживања [128], која обухватају више од 36 000 ученика, показала је статистички значајне позитивне ефекте наставе уз помоћ рачунара, на математичка постигнућа ученика завршних разреда гимназије. У истраживању [121] спроведеном у једној турској гимназији, на узорку од 60 ученика, подељеном у две групе по 30 ученика, обрађивани су садржаји из области „релације, функције, операције“. У раду са експерименталном групом у настави уз помоћ рачунара примењен је програм Flash MX. На тесту из математике, ученици експерименталне групе постигли су значајно бољи успех од ученика контролне групе, а погледу „ставова ученика према математици“ групе се не разликују.

Овај кратки приказ резултата ранијих истраживања показује да, је у некима од њих, у већој или у мањој мери, остварен статистички значајан ефекат примене рачунара у настави математике. У неким истраживањима, као на пример [125], [130], [131], то није случај. Анализа резултата ових истраживања, као и закључци и корисне сугестије истраживања, на пример, у радовима [123] и [133], представљају неке од основних разлога да ово истраживање буде спроведено на овакав начин. При томе, опредељење аутора је, да неки од недостатака, који су идентификовани као узроци ослабљеног ефекта примене рачунара, буду отклоњени.

Ово истраживање се заснива на педагошко – дидактичким основама наставе уз помоћ рачунара и примене савременог образовног рачунарског софтвера GeoGebra на реализацију наставних садржаја аналитичке геометрије, у трећем разреду гимназије. У свим фазама наставног процеса, рачунар и образовни софтвер GeoGebra представљају наставно средство. Реализација наставних

[2] Florida Competency Achievement Test

садржаји аналитичке геометрије, предвиђених наставним програмом М3, за трећи разред гимназије природно-математичког смера, одвијала се уз уважавање дидактичких принципа (научности, систематичности, поступности, сазнајности, индивидуализације, очигледности, визуализације...). Избор наставних метода условљен је и примерен типу часа, наставним садржајима, облику рада, нивоу савладаности градива и нивоу оспособљености ученика за коришћење рачунара и образовног софтвера GeoGebra. У ту сврху, примењиване су наставне методе, примерене овом дидактичком систему: објашњавачко-показивачка, репродуктивна, проблемска и истраживачка, [27], [21].

5.4. Циљ истраживања

У складу са проблемом, истакнутим у уводу, и предметом истраживања, циљ овог истраживања је експериментална провера и анализа утицаја примене рачунара и погодно одабраног образовног софтвера на образовни учинак у настави аналитичке геометрије у трећем разреду гимназије. Резултати истраживања треба да покажу, да ли постоје педагошко – дидактички предуслови, за примену рачунара у настави математике у гимназији, којом се повећава образовни учинак и ученици оспособљавају за самостално учење и стицање знања, као и за примену стечених знања.

Утицај независно – променљиве (примена рачунара и образовног софтвера у настави) на зависно – променљиву (образовни учинак) показаће резултати које ученици постижу у решавању задатака, а који се односе, на:

- квалитет и количину знања,
- оспособљеност за самостално решавање задатака,
- стваралачке способности ученика,
- трајност знања.

5.5. Задаци истраживања

У складу са предметом истраживања и постављеним циљевима могу се поставити следећи **задаци истраживања**:

1. Утврдити разлике у погледу квалитета и количине знања ученика, стечених у настави уз помоћ рачунара и знања стечених у традиционалној настави, на основу резултата постигнутих на тесту знања из наставног подручја – аналитичка геометрија.
2. Утврдити разлике у погледу оспособљености за решавање проблемских задатака, стечених у настави уз помоћ рачунара и у традиционалној настави, на основу резултата постигнутих на тесту знања из наставног подручја – аналитичка геометрија.
3. Утврдити разлике у погледу трајности знања, стечених у настави уз помоћ рачунара и у традиционалној настави, на основу резултата постигнутих на тесту знања из аналитичке геометрије, поновљеном четири недеље после главног теста.

Постављени циљ и задаци истраживања треба да буду претпоставка за извођење закључака:

а) о могућностима примене рачунара у настави математике у гимназији,

б) о образовном учинку применом рачунара у настави математике у гимназији.

5.6. Хипотезе истраживања

На основу утврђеног циља, а у складу са сваким од постављених задатака истраживања, формирају се следеће хипотезе истраживања ([20], [39], [61], [80]):

1. Нулта-хипотеза H_0 : нема разлике у погледу квалитета и количине знања ученика, стечених у настави уз помоћ рачунара и знања стечених у традиционалној настави.

Тада **алтернативна хипотеза** H_1 гласи: у погледу квалитета и количине знања ученика, настава уз помоћ рачунара знатно је ефикаснија од традиционалне наставе.

То значи, да, евентуално, бољи успех ученика из математике (аналитичке геометрије) у настави уз помоћ рачунара, нижи од прага значајности 0,05, може се сматрати стицајем случајних околности, а не утицајем примене рачунара у настави, као експерименталног фактора, а у супротном праг значајности већи или једнак 0,05, значиће **одбацивање нулте-хипотезе**.

С обзиром на то да је примена рачунара у настави према досадашњим сазнањима потврђена као ефикасан и продуктиван дидактички систем, може се претпоставити да ће она утицати на значајно повећање укупног образовног учинка у настави математике у гимназији.

Под укупним образовним учинком подразумевамо:

- успех у знању, односно укупан резултат на тесту знања из наставне области: аналитичка геометрија,
- успех у решавању проблемских задатака из исте области (што треба да представља и могућност примене стечених знања),

а обе наведене компоненте јесу основа и садржајни оквир утицаја експерименталног фактора.

2. У оквиру наведених хипотеза (нулте - H_0 и алтернативне - H_1) поставићемо и подхипотезе, које се односе на **оспособљеност за решавање проблемских задатака**, тј. насупрот нулте хипотезе H'_0: нема разлике у погледу оспособљености за решавање проблемских задатака, стечене у настави уз помоћ рачунара и у традиционалној настави, имамо алтернативну хипотезу H'_1: настава уз помоћ рачунара, даје боље резултате у оспособљавају за решавање проблемских задатака и примену стечених знања, него традиционална настава.

3. Примењени експериментални поступак омогућује проверу још једне хипотезе, која се односи на трајност стечених знања, као још једне од компонената укупног образовног учинка и квалитета васпитно-образовног процеса.

Провера ове хипотезе обавља се поновљеним мерењем образовног учинка еквивалентним тестом након одређеног времена. Резултати поновљеног мерења треба да утврде:

- задржавање раније обрађених наставних садржаја,
- стабилност стечених знања из аналитичке геометрије, као и примену алгоритама, чињеница и информација.

И овде насупрот нулте хипотезе H_0: нема разлике у погледу трајности знања, стечених у настави уз помоћ рачунара и у традиционалној настави, формирамо алтернативну хипотезу H_1: знања стечена у процесу наставе уз помоћ рачунара показују већу стабилност и трајност од оних која су стечена, у традиционалном наставом процесу, при чему мора бити задовољен услов да између завршног и поновљеног мерења мора проћи довољно дуг временски период.

Под трајношћу знања се подразумева фиксирање, задржавање и могућност репродукције стечених знања, али и оспособљеност ученика да располаже стеченим знањима, која ће се у новим наставним и животним ситуацијама укључити као елемент у новим сазнајним и практичним ситуацијама.

Провером постављених хипотеза истраживања (потврдом алтернативних хипотеза) треба да буду испуњени (решени) задаци истраживања, чиме би био постигнут и основни циљ истраживања.

5.7. Организација истраживања

5.7.1. Узорак истраживања

Узорак представљају 54 ученика трећег разреда гимназије „Јован Јовановић – Змај“ у Новом Саду, који су распоређени у две групе – контролној са 27 ученика и експерименталној групи са 27 ученика.

У гимназији „Јован Јованоовић – Змај“ у Новом Саду, за узорак су узети 54 ученика III_2 и III_4 одељења трећег разреда гимназије природно – математичког смера, где се настава математике изводи по Програму М3, са 5 часова недељно [70]. У контролној групи (К-група) било је 27 ученика III_2, а експериме-нталној групи (Е-група) било је 27 ученика III_4 одељења.

У гимназији „Никола Тесла“ у Апатину, узорак представља 39 ученика $\mathrm{III}a$ и $\mathrm{III}c$ одељења трећег разреда гимазије општег типа, где се настава математике изводи по Програму М1, са 4 часа недељно током све четири године школовања [70]. Контролна група је формирана од 20 ученика III_A, а експериментална од 19 ученика III_C одељења.

На доношење одлуке, из којег ће одељења трећег разреда ове две школе бити формирана експериментална, а из којег одељења контролна група, одлучујуће је утицао већи број ученика одељења који поседују персонални рачунар, или имају могућност да га свакодневно користе, током трајања истраживања.

Узорак припада категорији „пригодних, намерних узорака“ [61], пошто је реч о експерименту, који још увек није могуће извести у свакој школи, како због опремљености школа, тако и због оспособљености наставника и ученика за извођење наставе математике уз помоћ рачунара. То значи да овакав начин одређивања узорка не нарушава битно његов репрезентативни карактер у односу на део школске популације. Што се тиче величине, то је мали узорак, који задовољава критеријуме за експерименте интензивног типа, којима није циљ да обухвате велики број испитаника, већ потпуније сагледавање испитиваних елемената и резултата истраживања.

За уједначавање група, узета су у разматрање она обележја која карактеришу посматрани узорак, која директно или индиректно могу утицати на експерименталне резултате. Та обележја су:

- општи успех на крају првог полугодишта III разреда,
- успех из математике на крају првог полугодишта III разреда,
- резултати другог писменог задатка, обављеног после обрађених тема "Системи линеарних једначина", "Вектори", "Увод у аналитичку геометрију".

Последње обележје има посебан значај, јер успешно савладани наведени наставни садржаји, представљају неопходан услов и за успех у савлађивању градива аналитичке геометрије.

За анализу уједначености група по наведеним обележјима користи се Студентов тест и величине: аритметичка средина, стандардна девијација, t – вредност за $n_1 + n_2 - 2$ степени слободе, вредност p, где је $1 - p$ поузданост нивоа статистичког значаја разлике аритметичких средина, n_1 и n_2 обим сваке од група, а $t_{n_1+n_2-2,\alpha}$ критична вредност за $n_1 + n_2 - 2$ степени слободе и праг значајности α.

Следеће табеле показују наведене карактеристике узорка за сваку од школа у којима је обављено истраживање.

Табела 1. Уједначеност група - Гимназија „Јован Јовановић Змај“ Нови Сад

Обележја	Група	*n*	AS	STD	*t*	*p*
Општи успех I полугодиште	Е	27	4.48148	0.49966	1.47538	0,14614
	К	27	4.25926	0.58326		
Успех из математике I полугодиште	Е	27	3.51852	0.91774	0.88391	0.38081
	К	27	3.29630	0.89504		
II писмени задатак из математике	Е	27	2.35000	1.19478	0.71772	0.47664
	К	27	2.59259	1.06316		

Из Табеле1. за добијене вредности t и p, за свако од наведених обележја, важи

$$\max t_{52} < t_{52;\ 0.05} = 2.000 \text{ и } \min p > 0.05\,.$$

Табела 2. Уједначеност група - Гимназија „Никола Тесла“ Апатин

Обележја	Група	*n*	AS	STD	*t*	*p*
Општи успех I полугодиште	Е	19	3.68421	1.02867	1.10420	0,27645
	К	20	4.04761	0.99886		
Успех из математике I полугодиште	Е	19	3.26316	1.16267	0.17886	0.85900
	К	20	3.33333	1.24722		
II писмени задатак из математике	Е	19	3.47368	0.93856	1.07996	0.28697
	К	20	3.09524	1.19143		

Из Табеле2. за добијене вредности t и p, за свако од наведених обележја, важи

$$\max t_{38} < t_{30;\ 0.05} = 1.697 \text{ и } \min p > 0.05 .$$

Резултати успеха за свако обележје показују да разлике аритметичких средина (средњих оцена) експерименталне и контролне групе нису статистички значајне. По наведеним обележјима, у свакој од школа, контролна и експериментална група су уједначене, па се може сматрати да наведена обележја делују на исти начин у обема групама.

Резултати II писменог задатка из математике за ученике експерименталне и контролне групе, у обема школама, као обележје, има посебан значај, јер успешно савладани наставни садржаји: Системи линеарних једначина, Вектори, Увод у аналитичку геометрију, представљају неопходан услов и за успех у савлађивању градива аналитичке геометрије. Увид у наведене табеле показује да разлике средњих оцена на II писменом задатку из математике, између експерименталне и контролне групе у свакој школи, нису статистички значајне.

Важно је такође напоменути да узорак, у свакој од школа, не сачињавају сви ученици наведених одељења, него само наведени број, управо због могућности уједначавања експерименталне и контролне групе.

5.7.2. Спровођење истраживања

У гимназији „Јован Јовановић – Змај“ у Новом Саду, истраживање је спроведено у периоду од 21. јануара до 28. марта 2013. године, а у гимназији „Никола Тесла“ у Апатину, у периоду од 15. фебруара, до 29. априла 2013. године.

Наведени наставни програми М1 и М3, предвиђају обраду истих наставних целина, а разликују се једино по фонду часова, предвиђених за реализацију градива, који за Програм М1, износи 46 часова, а за Програм М3 – 50 часова, [70].

Ове чињенице упућују на закључак да се основне разлике међу програмима М1 и М3, остварују: приликом планирања (израде оперативног плана), приликом израде непосредне (дневне) припреме, као и приликом реализације истих планова на часовима наставе.

То даље има за последицу, да ће се разлике ова два програма огледати: у различитом нивоу обраде неких целина и наставних јединица (колико ће се детаљно обрађивати одређени наставни садржаји), у броју обрађених и нивоу тежине задатака, обрађених на часу и код куће.

У тексту који следи биће истакнута нека запажања, која се односе на саму реализацију наставе, у експерименталној и контролној групи, током спровођења истраживања у свакој од школа.

1. Напомене о реализацији наставе

Настава аналитичке геометрије, у свакој од школа, је реализована према Оперативним плановима наставе математике за трећи разред, које су израдили активи наставника математике. Пре почетка истраживања, начелно су усаглашени и наставни садржаји. Детаљно утврђивање садржаја сваке наставне јединице, примери задатака који су обрађивани на часу и домаћи задаци, у одељењима експерименталне групе, одређени у сарадњи са наставницима истих одељења у обема школама.

Градиво аналитичке геометрије, чија је настава извођена у гимназији „Јован Јованоовић – Змај" у Новом Саду током истраживања, обухвата следеће наставне садржаје:

Права

Разни облици једначине праве: једначина праве кроз две тачке 1.1.pdf, општи облик 1.2.pdf, једначина праве кроз једну тачку 1.3.pdf, експлицитни облик 1.4.pdf, сегментни облик 1.5.pdf, векторски и параметарски облик 1.6.pdf и нормални облик једначина праве 1.7.pdf. Тачка и права – растојање 1.8.pdf, две праве (пресек и паралелност две праве, углови између правих и нормалност) 1.9.pdf, симетрале дужи и углова 1.10.pdf, линеарне неједначине и системи неједначина 1.11.pdf.

Кружница

Једначина кружнице, однос према општој квадратној једначини 2.1.pdf, кружница описана око троугла, унутрашњост и спољашњост 2.2.pdf, кружница и права, услов додира, тангента у тачки кружнице 2.3.pdf, тангента из тачке ван кружнице 2.4.pdf, полара и пол у односу на кружницу, тангента 2.5.pdf, међусобни однос две кружнице 2.6.pdf, угао између праве (кружнице) и кружнице 2.7.pdf.

Елипса

Дефиниција, конструкција и једначина елипсе 3.1.pdf, унутрашња и спољашња област 3.2.pdf, својства: симетричност, центар, темена, одређеност једначине 3.3.pdf, ексцентрицитет, директрисе, параметар 3.4.pdf, елипса и права, услов додира, тангента у тачки елипсе 3.5.pdf, тангента из тачке ван елипсе, полара и пол 3.6.pdf, угао између праве (и однос криве) и елипсе 3.7.pdf

Хипебола

Дефиниција, конструкција и једначина хиперболе 4.1.pdf, унутрашња и спољашња област 4.2.pdf, својства: симетричност, центар, темена, асимптоте, одређеност једначине 4.3.pdf, ексцентрицитет, директрисе и параметар 4.4.pdf, хипербола и права, услов додира, тангента у тачки хиперболе 4.5.pdf, тангента из тачке ван хиперболе, полара и пол 4.6.pdf, угао између праве (и однос криве) и хиперболе 4.7.pdf.

Парабола

Дефиниција, конструкција и једначина параболе 5.1.pdf, положаји параболе, симетричност, теме, анализа једначине 5.2.pdf, унутрашња и спољашња област параболе 5.3.pdf, парабола и права, услови додира, тангента у тачки параболе 5.4.pdf, тангента из тачке ван параболе, полара и пол 5.5.pdf, заједничко својство кривих 5.6.pdf, угао између праве (и однос криве) и параболе 5.7.pdf.

Пресек равни и купе 6.pdf.

Покретањем маркираних хиперлинкова отварају се Word-документи у којима су приказани одговарајући наставни садржаји, обрађивани на часу са експерименталном групом. У сваком од формираних Word-докумената могу се, даље, путем хиперлинка активирати апликације у програму GeoGebra (неколико њих у програму Mathematica). Ове апликације треба да послуже за визуализацију приказаних објекта, обрађених математичких концепата и решених задатака. У приказаном облику су коришћене на часовима наставе у експерименталној групи.[3]

Наведени наставни садржаји, обрађивани су и на часовима наставе у контролној групи, али у „традиционалној форми“, применом традиционалне наставе.

У вези са релизацијом наставе у експерименталној или контролној групи могу се истаћи следећа запажања:

Концепт **поларе и пола у односу на кружницу**, обрађиван је на часу нешто детаљније, у обема групама. Осим излагања неопходног математичког апарата, за експерименталну групу су визализовани концепти поларе, пола, њихових међусобних односа, као и односа поларе и пола према тангентама и додирним тачкама.

О концептима **поларе и пола у односу на остале криве** (елипсу, хиперболу и параболу), у обе групе су, по аналогији са поларом и полом кружнице, само истакнуте њихове формуле и могућност примене на једноставнијим примерима. За ученике експерименталне групе, извршена је визуализација ових концепата, путем израде одговарајућих апликација у програму GeoGebra.

У обема групама, примена вектора, присутна је једино приликом обраде **векторског облика** једначине праве, што је реализовано информативно и односи се само на праву одређену двема тачкама. Циљ је, осим саме примене у аналитичкој геометрији, да се уочи веза између једног векторског и неких скаларних облика једначине праве. Визуализацијом концепта и погодно изабраних примера, ученицима експерименталне групе је дата могућност, да уоче и разумеју везе између коефицијената једначине праве, и координата вектора

[3] Овај наставни материјал је израдио и конципирао аутор докторске дисертације

правца, односно вектора нормале, праве, што се може сматрати битним за лакше уочавање положаја праве и односа са другим објектима.

Унутрашњост и спољашњост кружнице (елипсе, хиперболе и параболе) обрађени су у обема групама, искључиво анализом слике и положаја одговарајуће криве, са основним циљем да се ученик оспособи да графички решава неке типове једноставнијих квадратних неједначина (без члана bxy), или система једначина. За експерименталну групу визуализовани су концепти унутрашње и спољашње области сваке криве, примери неких квадратних неједначина и неки једноставнији системи линеарне и квадратне неједначине. Овде је циљ да слика концепта створи идеју о решењу проблема и изгради учениково „индивидуалну" дефиницију самог концепта.

У оквиру (неких) **заједничких својстава** кривих, извршена је, информативно, кратка систематизација **директоријалног својства** елипсе, хиперболе и параболе, а дат је и приказ **колинеарности средина паралелних тетива** криве – дијаметра криве. Са контролном групом, садржаји су приказани одговарајућим статичким цртежима. За експерименталну групу, урађене су апликације у програму GeoGebra, за визуализацију наведених садржаја, које, варирањем задатих елемената, пружају могућност формирања великог броја примера. Апликације додатно „провоцирају" ученика на самостално испитивање овог феномена (дијаметра), посебно код хиперболе и параболе.

Слично је и са особином **ортогоналности тангената параболе**, која је еквивалентна са инциденцијом њихове пресечне тачке и директрисе. У настави са обема групама решен је задатак где је та особина и доказана. Визуализација овог задатка омогућује кретање пресечне тачке ортогоналних тангената по директриси, што ученику пружа могућност потпунијег сагледавања концепта, учвршћивање знања и умење да се концепт примени у новој ситуацији.

У средњошколском курсу аналитичке геометрије, задатак, да се одреди једначина централне елипсе, односно хиперболе, ако су дате њене две тачке својим координатама, је неизоставан! **Одређеност једначине** елипсе и хиперболе се односи на питање: које услове треба да испуњавају координате датих двеју тачака, тако да оне једнозначно одређују централну елипсу, односно хиперболу. У раду са експерименталном групом, проблем је решен тако што је формиран генерички организатор, у коме се прво формира слика концепта, а на основу ње, постепено се изграђују особине и на крају се добија решење проблема..

Приликом анализе односа криве (кружнице, елипсе, хиперболе, параболе) и праве, са експерименталном групом је (информативно, без улажења у детаљније математичко разматрање проблема) третиран концепт **тангента, као гранични случај сечице**. Наиме, у програму GeoGebra, формирани су генерички организатори, у којима се променљива, заједничка, тачка сечице и криве, креће према утврђеној, заједничкој тачки, што условљава промену положаја сечице, промену угла који сечица образује са позитивним смером x-осе, тј. промену коефицијента правца сечице. Такође је наглашено да се разлика апсциса заједничких тачака смањује и „тежи ка нули“, да „сечица криве тежи ка тангенти“ у утврђеној тачки, да „коефицијент правца сечице, тежи ка коефицијенту правца тангенте“. То је прави пример, како се уз помоћ динамичког цртежа прво формира слика концепта, а на основу ње, постепено се изграђују особине, генерише се (поменута индивидуална) дефиниција и на крају се формира сам концепт. Такође, на овај начин се стварају услови за лакше разумевање концепта првог извода.

У контролној групи **конусни пресеци** су обрађени приказом цртежа, без могућности неког озбиљнијег сагледавања положаја жижа, као додирних тачака сфера, уписаних у конусну површ, и равни која сече површ. С друге стране, експериментална група је имала на располагању апликације у програму GeoGebra, које пружају могућност анимације, за успешно сагледавање: врсте пресека у зависности од положаја равни пресека према изводницама, положаја жижа и тачака криве, као и положаја жиже и директрисе параболе.

Раније наглашена разлика од 4 часа, између фонда часова програма М1 и фонда часова програма М3, значи да су, током спровођења истраживања у гимназији „Никола Тесла“ у Апатину, уз извесна ограночења мањег обима, реализовани сви наставни садржаји, као и у гимназији у Новом Саду.

Та ограничења се односе на обраду концепта, **полара и пол у односу на кружницу**, који су са обе групе изведена само информативно, без детаљнијих математичких доказивања, са навођењем типских примера примене, док су концепти **полара и пол у односу на елипсу (хиперболу, параболу)**, готово, само поменути, као и могућности које ови концепти пружају. У експерименталној групи, ови концепти су додатно визуализовани погодно конструисаним апликацијама у програму GeoGebra. Слично је и са колинеарношћу средина паралелних тетива криве.

2. Литература и други нставни материјал

Током наставе аналитичке геометрије, наставници и ученици обе групе, у обема школама, користили су литературу коју користе иначе [112], [42] и [59]. За реализацији градива у експерименталној групи, за припрему наставе, наставници су имали на располагању CD са садржајима наведеним у тачки 1. овог параграфа, датим у Прилогу докторској дисертацији – „Интерактивом уџбенику аналитичке геометрије“, као и готове апликације у програму GeoGebra. У контролној групи реализовани су исти садржаји, по истом наставном плану, у складу са праксом традиционалне наставе.

3. Припремање ученика за коришћење GeoGebre

Током истраживања, настава са контролном групом обеју школа извођена је у математичким кабинетима. За потребе примене рачунара у настави, са експерименталним групама у обема школама, настава је реализована у математичким кабинетима, који су били опремљени рачунаром и видео-пројектором, и у рачунарским учионицама[4].

Наставна целина Увод у аналитичку геометрију (Декартов правоугли координатни систем; тачка, дуж, подела дужи, површина троугла, предмет и метод аналитичке геометрије) обрађивана је непосредно пре почетка истраживања. Током обраде ове теме, ученицима експерименталне групе обеју школа, приказане су основне карактеристике и наредбе програма GeoGebra.

То је и остварено у рачунарским учионицама једне и друге школе, са циљем да ученици експерименталне групе, на самом почетку истраживања, буду припремљени да:

– користе (посматрају, манипулишу задатим параметрима, анализирају) апликације основних концепата аналитичке геометрије у програму GeoGebra, креиране унапред,
– да самостално креирају елементарне концепте, као што су: тачка (путем задатих координата), дуж, тачка која дели дуж у датој размери и сл.,
– сви задати елементи и све наредбе буду уношени искључиво коришћењем у **Polja za unos**.

Постепено, како је текло истраживање, ученици су успевали да самостално креирају и сложеније, такође елементарне концепте, као на пример: права (различити облици једначине), паралела, нормала, симетрала дужи, симетрала угла и сл.

У свим фазама истраживања, поштовано је основно начело примене рачунара у настави математике:

рачунар у настави математике не ослобађа ученика од учења математике!

То значи да су ученици експерименталне групе, радећи на рачунару, у свим фазама наставе аналитичке геометрије, били у обавези, да све задате елементе, све једначине, наредбе и сл., уносе, коришћењем **Polje za unos** у програму GeoGebra. Такође, као и ученици контролне групе, били су обавезни да у своје свеске уносе комплетан наставни садржај, обрађен на часу, и домаће задатке.

У каснијим фазама истраживања, могао се запазити напредак ученика у коришћењу софтвера GeoGebra. За већину ученика, уношење података и једначина у **Polje za unos**, и упоредо с тим, писмено решавање задатака у свесци, и уношење обрађеног наставног садржаја у свеску, постајало је уобичајено. На тај начин се не доводи у питање „учење математике“.

Наведени захтев је заснован на основним циљевима наставе аналитичке геометрије: „Основни циљ у реализацији ове теме јесте да ученици схвате суштину координатног метода и његову ефикасну примену. Посебно, на основу својстава праве и кривих линија другог реда, ученици треба да умеју формирати њихове једначине и испитивати међусобне односе тих линија. Потребно је указати и на целисходну примену аналитичког апарата при решавању одређених задатака из геометрије” (Објашњење садржаја програма М-1 и М-3, [70]).

[4] Аутор докторске дисертације је реализовао део наставе у експерименталној групи обеју школа

У складу са наведеним циљем, апликације у програму GeoGebra, представљене у тачки 1, тако су конципиране да ученик, отварајући одређена поља за потврду, отвара текстуална поља, у којима је математичким језиком, у писаној форми, представљен сваки корак у креирању неког концепта, или у решењу неког задатка.

По завршетку истраживања, са ученицима експерименталне групе спроведена је анонимна анкета, упитник - **Коришћење рачунара у настави и учењу**.

Коришћење рачунара у настави и учењу – упитник

Школа: ____ разред/одељење _____

1. Поседујеш ли рачунар?

Да Не

2. Користиш ли рачунар свакодневно?

Да Не

3. Да ли користиш Интернет?

Да Не

4. Колико времена, дневно, проведеш за рачунаром?

____

5. Користиш ли рачунар за савладавање градива (учење)?

Да Не

6. Да ли користиш рачунар за учење математике?

Да Не

7. Који софтвер користиш?

____

8. Од када?

____

9. Да ли ти коришћење рачунара и наведеног софтвера ___________ помаже да:

а) боље разумеваш математичке појмове

Да Не

б) боље уочаваш особине математичких објеката

Да Не

в) лакше уочаваш везе међу математичким објектима

Да Не

г) лакше провераваш претпоставке

Да Не

д) лакше истражујеш?

Да Не

10. Да ли коришћење рачунара и наведеног софтвера ___________ у учењу математике повећава твој интерес за математику?

Да Не

11. Да ли сматраш да шира употреба рачунара у настави и учењу математике може да помогне да ученици лакше и успешније савладавају градиво?

Да Не

Циљ ове анкете је био да се добије што потпунија иформација о томе: да ли, и колико, ученици експерименталне групе користе рачунар; да ли користе неки образовни софтвер и колико га користе у учењу математике и у учењу уопште; да ли им коришћење рачунара и образовног софтвера олакшава учење и сл.

На прва три питања, која се односе на поседовање рачунара, његово свакодневно коришћење и коришћење интернета, скоро сви ученици су одговорили потврдно, осим једног ученика, који је одговорио одречно на питање: да ли свакодневно користи рачунар.

На 4. питање, о дневно проведеном времену за рачунаром, одговори су веома различити: 1 сат дневно – проводе 4 ученика, 2 – 3 сата – 8 ученика, 3 – 4 сата – 7 ученика, 6 сати – 5 ученика, 8 сати – 2 ученика.

У одговору на 5. питање: 22 ученика се изјаснило да користи рачунар за учење, док га 5 не користи, а за учење математике (6. питање) – 16 ученика користи, а 11 не користи рачунар.

На 7. питање – који софтвер користе, 25 ученика су одговорили да користе GeoGebru, док два не користи ни један софтвер, а на 8. питање – од када: већина, њих 15 су одговорили – 2 месеца (значи од почетка истраживања), 2 – од 2008, 5 – од 2011. године, 2 – током трећег разреда, док троје нису дали одговор.

На питање број 9, о томе, да ли му коришћење рачунара и (наведеног) софтвера GeoGebra, помаже да:

а) боље разуме математичке појмове: 16 ученика је одговорило потврдно, 10 – одречно,
б) боље уочава особине математичких објеката: 22 – потврдно, 4 – одречно,
в) лакше уочава везе међу математичким објектима: 23 - потврдно, 3 - одречно,
г) лакше проверава претпоставке: 23 – потврдно, 3 – одречно,
д) лакше истражује: 22 – потврдно, 4 – одречно,

при томе на свако потпитање, један, али увек други, ученик није дао одговор.

Коришћење рачунара и софтвера GeoGebra, у учењу математике, повећава интерес за математику код 19 ученика, не повећава интерес код 7 ученика, док 1 ученик није дао одговор на питање број 10.

Одговарајући на 11. питање, 22 ученика сматрају „да шира употреба рачунара у настави и учењу математике, може да помогне да ученици лакше и успешније савладавају градиво“, док 5 ученила не дели то мишљење.

Одговори на питања, постављена у упитнику, не могу се генерализовати, али ипак упућују на следећа размишљања.

На пример, одговори на прва четири питања показују да сви анкетирани ученици, свакодневно користе рачунар и интернет, што значи и да су, кроз досадашње образовање, стекли елементарну информатичку писменост, неопходну за живот и рад у информатичком друштву. Ови подаци нису карактеристика само експерименталне групе. Они су својствени највећем делу средњошколске популације.

С друге стране, не сме се пренебрегавати податак, да више од половине анкетираних ученика, за рачунаром проводи свакодневно више и од 4 сата!

Повољан утисак остављају одговори дати на питања број 5, 9 и 10, где:

- већина анкетираних ученика користи рачунар за учење, па и за учење математике,
- већини анкетираних ученика, коришћење рачунара и софтвера GeoGebra, помаже у разумевању математичких појмова, особина и веза међу математичким објектима, у проверавању претпоставки и истраживању, као и у развијању интересовања за математику.

Највећу пажњу привлаче одговори на питања број 7 и 8, „који софтвер користиш“ и „од када“. Већина анкетираних ученика је одговорила да користи GeoGebra, и то у последњих 2 месеца.

Добијени одговори, уз одговоре на питања број 9 и 10, показују да су се током реализације истраживања стварали елементарни услови за примену рачунара и програма GeoGebra, у раду са експерименталном групом. Другим речима, обезбеђени су услови за примену експерименталног фактора.

5.7.3. Мерни инструменти

У реализацији овог истраживања примењени су одређени мерни инструменти. Њихова основна намена је, да у складу са постављеним циљем и задацима, као и карактером истраживања, пруже потребне, објективне и поуздане податке о променама које настају под утицајем примене рачунара у настави, као експерименталног фактора. Да би се ова функција могла остварити, проценили смо да су најпогоднији били ови мерни инструменти:

- Финални тест из аналитичке геометрије, урађен непосредно након реализације наставне теме "Аналитичка геометрија у равни"
- Поновљени тест (ретест) из аналитичке геометрије, урађен четири недеље после Финалног теста, са задацима из исте наставне теме.

Значајно је напоменути да су ученици обе групе имали на располагању математичке таблице са формулама, које карактеришу односе и објекте аналитичке геометрије.

На Финалном тесту дато је 6 задатака (видети [42], [59]) од којих су 2 задатка (4. и 5. задатак) проблемског карактера вредновани са по 20 бодова, а остала 4 задатка вредновани су са по 10 бода, што укупно износи 80 бода. Систем бодовања омогућује да сваки решени део задатка, или делимично решени задтак, буду вредновани одређеним бројем бодова, што ће бити приказано у одељку 5.8. Статистичка обрада и анализа резултата.

С обзиром на постављени циљ, задатке и хипотезе истраживања, основна функција **финалног** и **поновљеног** теста – тестова знања, са аспекта истраживања јесте к**онтролна функција**.

Свакако, функција финалног теста је да се утврди степен остварености наставних циљева, ниво ученичког постигнућа, квантитет и квалитет знања. Ова фукција је значајна за наставника јер на основу појединачних резултата постигнутих на тесту, он може да контролише напредовање сваког ученика. Међутим, са аспекта овог истраживања, на основу резултата експерименталне, односно контролне групе, постигнутих на тесту, наставник контролише и оцењује ефекте свог рада, који се огледају у примењеним наставним методама, наставним средствима и облицима наставног рада.

С обзиром на чињеницу да су предметни наставници вршили анализу теста и успеха на тесту, тест свакако има и инструктивну функцију.

Тест је, у свакој од школа, састављен од шест задатака отвореног типа (класичних текстуалних задатака), при чему су два од њих задаци проблемског карактера. Сваки задатак је састављен од неколико елементарних корака (задатака), што обезбеђује да садржи захтеве различите тежине и нивоа когнитивне комплексности.

Успех решавања сваког задатка, као и резултати теста у целини, треба да покажу три нивоа образовних постигнућа: основни, средњи и напредни, како из појединих целина, тако из теме аналитичка геометрија у целини [135].

Основни ниво одговарао би нивоу репродукције и разумевања наставних садржаја, средњи – нивоу примене стечених знања, а напредни – нивоу стваралачког решевања проблема, нивоу креативности. Јасно је да сваки следећи ниво подразумева да је ученик савладао знања и вештине претходног нивоа.

Задаци дати на овом тесту обухватају (покривају) целокупно градиво из наставне теме – аналитичка геометрија [42], [59]. Тест обухвата следеће целине: права (једначина – разни облици, међусобни односи две праве, углови између две праве, паралелност, нормалност, одстаојања), криве другог реда (елипса (кружница), хипербола и парабола), односе праве и криве, услове додира праве и криве, тангента криве, пресеке фигура, углове пресека и ортогоналност кривих, елементарни проблеми минимума и максимума. На наведеним наставним садржајима, заснива се део Стандарда постигнућа ученика, који се односи на наставну област аналитичка геометрија. [135]

Уобичајено је да се током обраде и вежбања наставног садржаја аналитичке геометрије на часу, у контролној групи користе одговарајуће слике на табли, а у експерименталној групи и апликације у програму GeoGebra. Оба облика репрезентације пружају могућност за стицање знања и искустава која се могу примењивати у истим, сличним или новим ситуацијама. Рачунар и програм GeoGebra, путем апликација интерактивног карактера, додатно омогућују „истраживања", развој визуалног мишљења, детаљније сагледавање и разумевање концепата и односа међу објектима, учвршћују знања, умења и навике, обогаћују искуство и поспешују квалитетну примену стечених знања и искустава.

Стога се подразумева да ученици, током решавања задатака на тесту, користе скице и цртеже, као и да им у решавању значајну помоћ, наравно, осим стечених знања, представљају и искуства, стечена коришћењем цртежа (контролна група), или интерактивних апликација у програму GeoGebra (експериментална група), током обраде и вежбања наставног садржаја.

1. Финални тест из аналитичке геометрије

Гимназија „Јован Јовановић Змај“ у Новом Саду – 28.3.2013.
(Време за рад 90 минута) FT 1.pdf

1. Тачка $M(2, y)$ припада правој $p: x-3y+1=0$. Одредити једначину праве q која садржи тачку M и са правом p образује угао $\varphi = 45^\circ$.
2. Одредити једначине правих, паралелних правој $p: 2x-y-5=0$, на растојању $2\sqrt{5}$ од тачке $A(1,-2)$.
3. Одредити једначину кружнице, која садржи тачке $A(-2,-5)$ и $B(0,1)$, ако је права $t: 2x+y+c=0$ њена тангента у тачки B.
4. Дате су тачке $A(3,11)$ и $B(-5,7)$. На параболи $y^2 = 4x$ наћи тачку C, тако да површина троугла ΔABC износи 30. Да ли је C тачка параболе, најближа правој $p(A,B)$? Шта закључујеш о површини троугла ΔABC?
5. У тачки $M(x,-3)$, за $x>0$, кружница сече хиперболу $3x^2-4y^2=12$ под правим углом. Одреди једначину кружнице, ако је њен центар на x- оси.
6. Тангента елипсе $x^2+4y^2=16$, је нормална на праву $p: 3x-2y+18=0$. Одредити њену једначину.

У **првом задатку**, осим уочавања инциденције тачке и праве, и примене: разних облика једначине праве (имплицитног, експлицитног, једначине праве кроз једну тачку), коефицијента правца праве, углова које образују две праве, потребно је успешно применити одређени (врло једноставан) математички апарат за решавање једначине са једном непознатом, која се појављује у имениоцу разломка.

Други задатак је дат са очекивањем да ће у његовом решавању бити коришћен један од (бар) два поступка: први – који се заснива на одстаојању тачке од праве, и други – који се заснива на одређивању тангенти кружнице, датог центра и полупречника, паралелних са датом правом. Први се поступак, показао као доминантан. За разумевање проблема од велике помоћи је било искуство стечено током обраде једначине праве: *различите реалне вредности слободног члана, у имплицитном облику једначине праве, условљавају формирање фамилије паралелних правих*. За одређивање две тражене од тих правих, треба применити одговарајућу формулу за одстојања тачке од праве, са непознатим слободним чланом, у изразу под знаком апсолутне вредности. За њено решавање поребна је и успешна примена врло једноставног математичког апарата.

И **трећи задатак** је одабран као задатак, који је, после налажења непознатог коефицијента у једначини дате тангенте, могуће решити на два начина. Један начин (когнитивно-визуални) заснован је на налажењу центра тражене кружнице, као пресека симетрале тетиве, одређене датим тачкама кружнице, и нормале на дату тангенту у једној од тих тачака. Полупречник је једнак растојању од центра до једне од датих тачака. Други начин (формално-логички) огледа се у решавању система три квадратне једначине (две су услови да дате тачке припадају траженој кружници, а једна је услов додира) са три непознате (координате центра и полупречник). Овај систем се елиминацијом квадрата полупречника трансформише систем једне линеарне (веза међу координатама центра – симетрала тетиве) и једне квадратне једначине. Очекивање, да ће више ученика експерименталне групе применити први, а више ученика контролне групе други начин, показало се оправданим.

Четврти и **пети задатак** су проблемски задаци, задати са циљем да се утврди ниво оспособљености за решавање проблема.

У првом делу решења **четвртог задатка** треба формирати једначину одређену детерминантом површине троугла и датом мером површине. Применом услова да тражена тачка припада параболи, једначина постаје квадратна са непознатим координатама, под знаком апсолутне вредности. У следећем кораку се решава ова једначина и налази тражено треће теме троугла. **Проблемска ситуација** настаје, када чињеница да је тражено теме једнозначно одређено, не даје одговор на питање о његовом одстојању од праве одређене датим тачкама. Такође, ни оцена изведена на основу упоређивања одстојања коначног броја тачака параболе, од исте праве, није довољна за доношење коначног закључка. Очекује се једно од следећих решења проблема. Прво (когнитивно-визуално) решење почива на чињеници да је тангента у добијеној тачки параболе, паралелна датој правој, а све тачке дате праве и тачке параболе, изузев додирне (трећег темена троугла), су са разних страна тангенте, због чега је додирна тачка најближа датој правој. Друго решење (формално-логички поступак) се своди на налажење минимума (квадратне) функције одстојања произвољне тачке параболе од дате праве.

Решење **петог задатка**, такође проблемског има неколико етапа. На почетку треба одредити координате пресечне тачке хиперболе и тражене кружнице, као и полуосе хиперболе. **Проблемска ситуација** настаје када се уочи да је од елемената који могу да одреде тражену кружницу, позната само једна њена тачка – пресечна тачка хиперболе и кружнице. До решења проблемске ситуације долази провером претпоставки, заснованих на ранијем (визуалном) искуству: прве – о углу под којим се секу две криве, који представља угао између тангенти наведених кривих у пресечној тачки, друче – да центар кружнице припада нормали на тангенту кружнице и треће – да је та нормала, управо тангента дате хиперболе. У следећој етапи, формира се једначина тангенте хиперболе и у пресеку са датом правом одређује се центар тражене кружнице. Њен полупречник је једнак растојању између центра и пресечне тачке.

У **шестом задатку**, прво је потребно, из експлицитног облика једначине праве одредити коефицијент правца, а из канонског облика једначине елипсе, полуосе елипсе. Из услова нормалности правих, добија се коефицијент правца тражене тангенте. Применом ових израчунатих вредности и услова додира праве и елипсе, добија се непотпуна квадратна једначина, по непознатом одсечку тангенте, на ординати. Њена два решења са одређеним коефицијентом правца тангенте, дају једначине две, међусобно паралелне, тангенте елипсе у експлицитном облику, које су нормалне на дату праву.

Гимназија „Никола Тесла“ у Апатину – 29. 4. 2013.

(Време за рад 90 минута) FT 2.pdf

1'. Одредити једначине правих, паралелних правој $p: 2x - y - 5 = 0$, на растојању

$2\sqrt{5}$ од тачке $A(1,-2)$.

2'. Одредити једначину кружнице, полупречника $r=\sqrt{5}$, која додирује праву $t: x-2y=1$ у тачки $M(3,y_0)$.

3'. Одредити углове под којима се секу права $s: y=x+2$ и елипса $x^2+3y^2=12$.

4'. Дате су тачке $A(-7,4)$ и $B(-5,8)$. На елипси $x^2+2y^2=18$ наћи тачку C, тако да површина троугла ΔABC буде минимална. Колико износи та површина? Постоји ли троугао максималне површине?

5'. Одреди једначине тангенти параболе $y^2=4x$ које са правом $p: 3x-y+3=0$ образују угао $\varphi=45^\circ$. Одредити пресек тангенти и угао који образују. Шта примећујеш?

6'. Тангента хиперболе $x^2-0.25y^2=9$, је нормална на праву $p: 2x+5y+11=0$. Одредити њену једначину.

Први задатак је идентичан другом задатку који је решаван на тесту у гимназији „Ј. Ј. Змај“, док се у **шестом задатку** траже једначине тангенти хиперболе, које су нормалне на дату праву, за разлику од елипсе у шестом задатку теста у гимназији „Ј. Ј. Змај“.

Као и за решење првог и за решење **другог задатка**, могућа су бар два, са аспекта сваке од група, „равноправна“ поступка. Прво треба, на основу инциденције са датом правом, одредити непознату координату додирне тачке те праве и тражене кружнице, а затим, применом услова нормалности саставити једначину нормале у датој тачки на дату праву, којој припадају (са разних страна дате праве) центри тражених кружница. Сада постоје два могућа пута ка решењу. Један поступак (когнитивно-визуални) заснован је на „конструкцији“ кружнице са центром у датој тачки и датим полупречником, и налажењу њених пресечних тачака са нормалом, решавањем одговарајућег система, једне квадратне и једне линеарне једначине. Добијени парови решења јесу координате центара двеју тражених кружница са задатим полупречником.

Други поступак (формално-логички) састији се у коришћењу услова додира праве и тражене кружнице за добијање квадратне једначине, односно унији две линеарне једначине, које представља везу између координата њеног центра. Комбинација сваке од ових једначина са условом да дата додирна тачка припада траженој кружници, добијају се два пара решења, координата центара две тражене кружнице.

Како свака од линеарних једначина, представља везу међу координатама оних тачака равни, које су са исте стране дате праве на одстојању од ње једнаком полупречнику, тј. представљалу паралелне праве, овај други пут, у суштини, „замењује“ још један когнитивно-визуални поступак.

У **трећем задатку**, прво је потребно одредити координате пресечних тачака дате праве и дате елипсе, решавањем одговарајућег система, једне квадратне и једне линеарне једначине. После налажења полуоса елипсе, треба саставити једначине тангенти, у свакој од пресечних тачака, и коефицијенте праваца тангенти и дате сечице. Тада се применом познатих формула добијају тангенси углова пресека, тј. и сами углови пресека.

У **четвртом**, проблемском, **задатку**, после формирања једначине праве кроз дате тачке и закључка да та права и елипса немају заједничких тачака, настаје **проблемска ситуација**. Тада наступа дилема, како лоцирати тачку елипсе која задовољава постављени критеријум. Тада је потребно „довести у везу“, сталност површине троугла константне основице, и праву паралелну основици, којој припада промењљиво (!) треће теме троугла. Такво размишљање упућује на скуп свих правих паралелних са основицом, које са датом елипсом имају бар једну заједничку тачку. Међу њима, као најближа и најудаљенија, „издвајају се“ две тангенте, чије додирне тачке имају најмање и највеће одстојање од праве, одређене основицом, тј. крајње тачке најмање и највеће висине. Једначине тангенти се одређују применом коефицијента правца основице и квадрата полуоса, у услову додира, налажењем одсечака на ординати. У следећем кораку се одређују координате заједничких тачака тангената и елипсе. На један од познатих начина (детерминанте, полупроизвод основице и висине) одређују се површине тражених троуглова.

У **петом задатку**, такође проблемском, прво треба, применом коефицијента правца дате праве у познатом обрасцу за тангенс угла између правих, одредити коефицијенте два могућа правца правих, које са датом образују дати угао. Затим, применом услова додира праве и параболе, треба одредити одсечке на ординати, сваке од тангенти, чиме су одређене и њихове једначине. Угао између тангенти одређује се применом коришћеног обрасца, а пресек тангенти решавањем система одговарајућих једначина. **Проблемска ситуација** настаје у оном тренутку када се поставља питање шта се може приметити. Потребно је закључити, на основу апсцисе пресека (ортогоналних) тангенти да се оне секу на директриси. Налажењем апсцисе пресека произвољне две ортогоналне тангенте, чије су тангенте дате у експлицитном облику, може се дати уопштење закључка о положају њихове пресечне тачке, што би представљало комплетирање решења.

На поновљеном тесту задата су 4 задатка, (видети [42], [59]), а сваки је вреднован са по 10 бодова.

2. Поновљени тест из аналитичке геометрије

Гимназија „Јован Јоваановић Змај“ у Новом саду – 25. 4. 2013.

(Време за рад 45 минута) PT 1.pdf

1. Одредити једначину кружнице, полупречника $r=\sqrt{2}$, која садржи тачку $M(3,4)$, ако је права $t: x-y-1=0$ њена тангента.
2. Одреди једначине тангенти хиперболе $4x^2-y^2=36$, нормалних на праву $p: 2x+5y+11=0$.
3. Одреди угао под којим се види парабола $y^2=8x$ из тачке $P(-2,3)$.
4. Тангента елипсе $x^2+2y^2=12$, одсеца два пута већи одсечак на позитивном делу x - осе, него на позитивном делу y - осе. Одреди њену једначину.

Гимназија „Никола Тесла“ у Апатину – 21. 5. 2013.

(Време за рад 45 минута) PT 2.pdf

1. Одредити вредности параметра k, за које права $y=kx$: сече кружницу $x^2+y^2-10x+16=0$, додирује је, нема заједничких тачака са њом.
2. Одреди једначине тангенти хиперболе $4x^2-y^2=36$, паралелних са правом $p: 5x-2y+11=0$.

1. Одреди угао под којим се види парабола $y^2 = 8x$ из тачке $P(-2,3)$.
2. Тангента елипсе $x^2 + 2y^2 = 12$, одсеца два пута већи одсечак на позитивном делу x - осе, него на позитивном делу y - осе. Одреди њену једначину.

5.8. Статистичка обрада и анализа резултата

При статистичкој обради и интерпретацији резултата коришћени су:

- аритметичка средина узорка (означавамо је и са AS): $\overline{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$, где је x_i број бодова i - тог ученика, n - обим узорка;
- стандардна девијација узорка (STD): $\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}$;
- проценат успешности (PU): $p_E = \frac{\overline{x}}{N} \cdot 100\%$, N укупан број бодова на тесту;
- $t-$ вредност за $n_1 + n_2 - 2$ степени слободе:

$$t_{n_1+n_2-2} = \frac{\overline{x} - \overline{y}}{\sqrt{n_1 \cdot \sigma_x^2 + n_2 \cdot \sigma_y^2}} \sqrt{\frac{n_1 \cdot n_2 \cdot (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}},$$

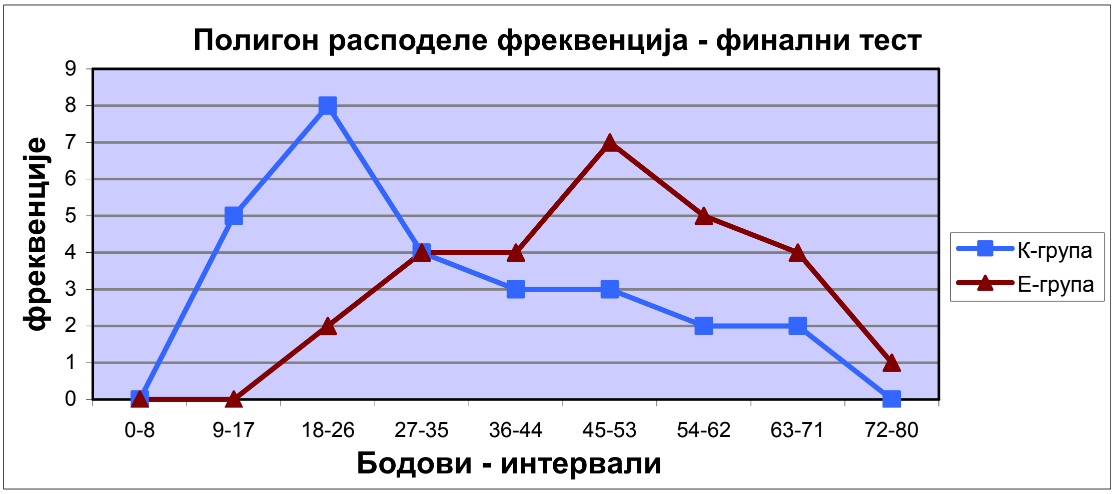
  где је n_1 и n_2 обим сваке од група;
- $t_{n_1+n_2-2,\alpha}$: критична вредност за $n_1 + n_2 - 2$ степени слободе, са прагом значајности α (чита се из таблица датих у [20], [39], [61], [80]);
- $p = P\left\{\left|t_{n_1+n_2-2}\right| \geq t_{n_1+n_2-2,\alpha}\right\} = \alpha$: вероватноћа догађаја $\left|t_{n_1+n_2-2}\right| \geq t_{n_1+n_2-2,\alpha}$, једнака је α, ако се претпостави да је тачна нулта хипотеза H_0;
- $1 - p$: поузданост нивоа статистичког значаја разлике аритметичких средина.

За мале вредности n_1 и n_2, ($n_1 < 30$ и $n_2 < 30$) $t-$ вредност има Студентову Т – расподелу са $n_1 + n_2 - 2$ степени слободе. Наведену статистику $t_{n_1+n_2-2}$ користићемо за тестирање хипотезе о једнакости математичких очекивања m_1 и m_2, обележја X и Y у двема популацијама, при чему се подразумева да обележја имају Нормалну расподелу са истом дисперзијом. Ако је $X : \mathcal{N}\left(m_1, \sigma_1^2\right)$ и $Y : \mathcal{N}\left(m_2, \sigma_2^2\right)$, тестирамо хипотезу $H_0\left(m_1 = m_2\right)$ против хипотезе $H_1\left(m_1 \neq m_2\right)$, када је $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$. (Овде је на пример: обележје X – образовни учинак у процесу наставе уз помоћ рачунара, обележје $Y-$ образовни учинак у традиционалном наставном процесу, а две одговарајуће популације су: ученици обухвћени једним или другим наставним процесом) (видети [20], [39], [61], [80]).

5.8.1. ГИМНАЗИЈА „ЈОВАН ЈОВАНОВИЋ – ЗМАЈ“ У НОВОМ САДУ

5.8.1.1. Општи образовни учинак – финални тест

Финални тест знања из аналитичке геометрије, представљен у одељку 5.7.3. решавало је по 27 ученика експерименталне и контролне групе. У складу са првим задатком, утврђене су разлике у погледу количине знања ученика, стечених у настави путем рачунара и знања стечених у традиционалној настави, на основу резултата постигнутих на тесту. Крива расподеле фреквенција експерименталне групе, лоцирана десно у односу на криву расподеле фреквенција контролне групе, у област већих бодовних резултата (Слика 1.) указује на боље резултате ученика експерименталне групе.



Слика 1.

Анализа остварених резултата ученика експерименталне и контролне групе на Финалном тесту, приказана у Табели 1. показује да експериментална група има бољи резултат у погледу просечног броја освојених бодова по ученику, тј. разлика аритметичких средина је $d(\bar{x},\bar{y}) = 12.963$ бодова, у корист Е – групе.

Табела 3. Резултати Финалног теста из аналитичке геометрије

	Група	*n*	PU	AS	STD	*t*	*p*
Гимназија „J.J.Змај“ Нови Сад	Е	27	61.62%	49.2963	14.9761	3.013755	0.00398
	К	27	45.42%	36.3333	16.0233		

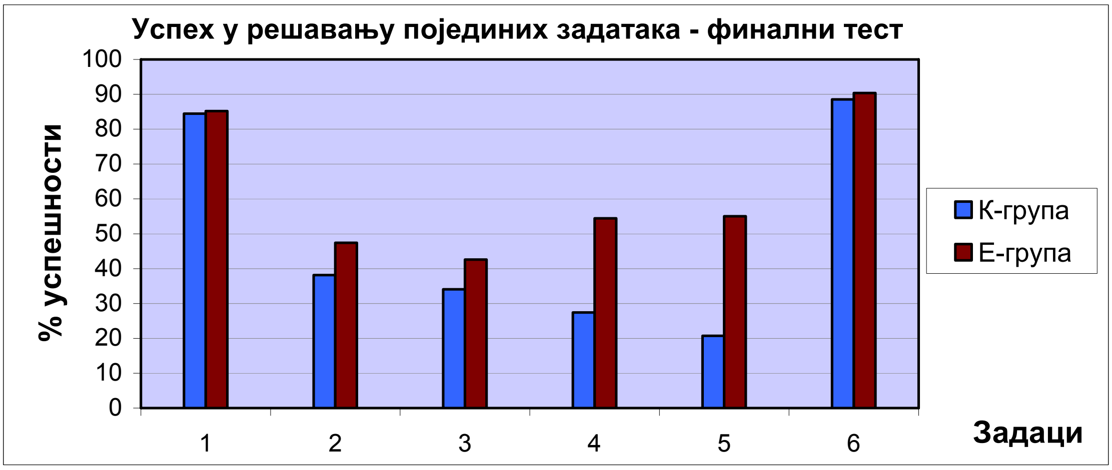
Експериментална група је успешнија, не само по просечном броју освојених бодова по ученику, већ и у погледу укупно остварених бодова, (укупно решеног теста), тј. $p_E = 61.620\%$, а $p_K = 45.4167\%$. Из Табеле 1. се види

$$t_{52} = 3.013755 > t_{52;\ 0.05} = 2.000 \text{ и } p = 0.003981551 < 0.05$$

$$t_{52} = 3.013755 > t_{52;\ 0.01} = 2.660 \text{ и } p = 0.003981551 < 0.01$$

где су $t_{52;\ 0.01} = 2.660$ и $t_{52;\ 0.05} = 2.000$, критичне вредности, а $\alpha = 0.05$ и $\alpha = 0.01$ праг значајности. С тога се са прагом значајности од $\alpha = 0.01$ (са ризиком мањим од 1 %, са сигурношћу већом од 99%) закључује: разлика аритметичких средина од 12.963 бодова, између експерименталне и контролне групе је **статистички значајна**. Такође, нулта хипотеза H_0 се може одбацити, тј. потврђена је алтернативна хипотеза H_1: **у погледу квалитета и количине знања ученика, настава уз помоћ рачунара знатно је ефикаснија од традиционалне наставе**. Успех експерименталне групе потврђује ефикасност примењених средстава, метода и облика рада наставе уз помоћ рачунара, тј. афирмише позитиван утицај експерименталног фактора.

Са хистограма успеха у решавању појединих задатака на Финалном тесту, види се да су у четири задатка (2, 3, 4, 5.), ученици експерименталне групе били успешнији, док су у задацима 1. и 6. ученици обе групе постигли готово идентичан резултат.

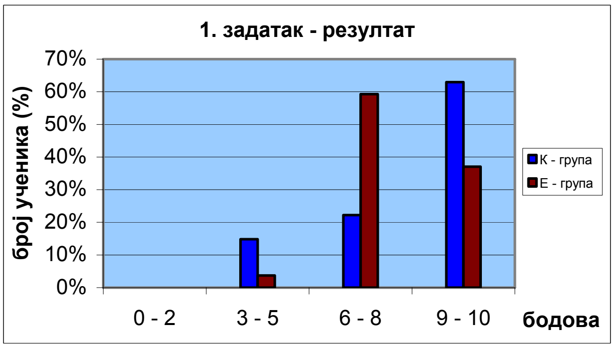


Следи детаљнија анализа резултата сваког задатака Финалног теста, посебно. У ту сврху, за сваки задатак је дата табела, која приказује:

- колико је процената ученика експерименталне, односно контролне, групе освојило: 0 – 2, 3 – 5, 6 – 8, 9 – 10, поена по задатку, што се види и са хистограма резултата истог задатка,
- аритметичке средине освојених бодова по групи,
- стандардну девијацију освојених бодова по групи,
- t – вредност, која треба да покаже, да ли је разлика аритметичких средина од значаја, за успех постигнут у некој од група.

1. zadatak

	K - grupa	E - grupa
0 - 2	0%	0%
3 - 5	15%	4%
6 - 8	22%	59%
9 - 10	63%	37%
Xsr =	8.444444	8.518519
σ =	2.182987	1.474986
t =	0.143364	

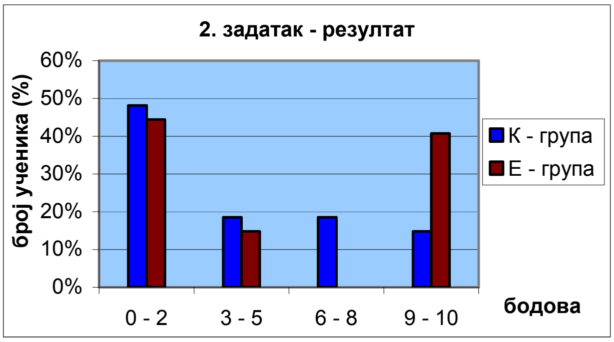


Табела и хистограм резултата 1. задатка показују: да су задатак коректно решили 63% ученика контролне и 37% ученика експерименталне групе (то је вредновано са 10 бодова). 22% ученика контролне и 59% ученика експериментални групе, тачно су одредили коефицијент правца бар једне праве и једначину само једне тражене праве. 15% ученика контролне и 5% ученика експерименталне групе одредили су тачно другу координату тачке, која садржи тражене праве, написали формулу - једначину праве кроз једну тачку, и (или) поставило формулу (без икаквог резултата) о углу између две праве, са намером да нађе коефицијент правца (3 -5 бодова). Скицу (цртеж) са задатим елементима и две тражене праве приказала је већина ученика који су оцењени максималним бројем поена, док је већина осталих ученика приказала само једну праву као могуће решење.

t- вредности резултата успеха у решавању 1, 2, 3. и 6. задатака показују да разлике просечног броја остварених бодова експерименталне и контролне групе ниу статистички значајне.

2. zadatak

	K - grupa	E - grupa
0 - 2	48%	44%
3 - 5	19%	15%
6 - 8	19%	0%
9 - 10	15%	41%
Xsr =	3.814815	4.740741
σ =	3.672087	4.477041
t =	0.815377	



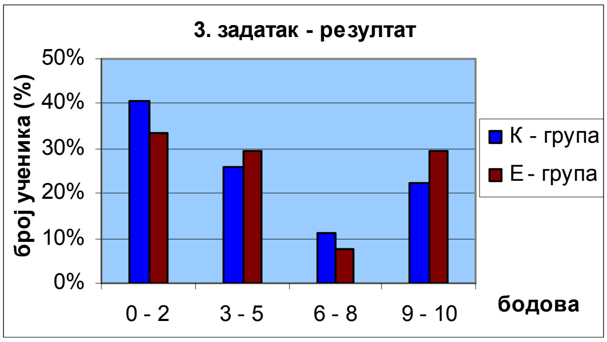
Са хистограма резултата 2. задатка се види да више од 40% ученика обеју група није дало готово никакав допринос решењу задатка: или нису решавали задатак, или су приказали неки непотпун цртеж, или су (неки од ових ученика) покушали да пиши неке формуле које са задатком немају везе. Већина од 19% ученика контролне и 15% ученика експерименталне групе (3–5 бодова), приказали су нешто бољи цртеж (неки са обе тражене паралелне праве), и (или) наводили једначину праве, која се од једначине дате праве разликује једино по (промењљивом) слободном члану. Озбиљнијем решавању, уз солидно урађен цртеж и формуле за одстојање тачке од праве, приступило је 34% ученика контролне и 41% ученика експерименталне групе.

При томе, 19% ученика експерименталне групе, није правилно применило знак апсолутне вредности, због чега су углавном израчунавали само једну вредност за непознати слободни члан у једначини праве, (6-8 бодова). Остали ученици (15% из контролне и 41% из експерименталне групе) су коректно решили цео задатак (10 бодова).

При решавању 3. задатка, од 41% ученика контролне и 33% ученика експерименталне групе, по 7 њих (око 25%), нашли су само непознати коефицијент, у једначини тангенте, кроз једну од две дате тачке, тражене кружнице (2 бода), док остали (16% ученика контролне и 8% ученика експерименталне групе) нису решили ништа, на чему би зарадили поене. Ученици (26% из контролне и 30% из експерименталне групе) који су освојили (3-5 поена), уз наведени непознати коефицијент, поставили су једну, две, или све три једначине система (услов додира праве и кружнице, једна, односно друга, тачка припада кружници), без неког успеха у решавању истог.

3. zadatak

	K - grupa	E - grupa
0 - 2	41%	33%
3 - 5	26%	30%
6 - 8	11%	7%
9 - 10	22%	30%
Xsr =	4.259259	4.851852
σ =	3.767233	3.396117
t =	0.595744	



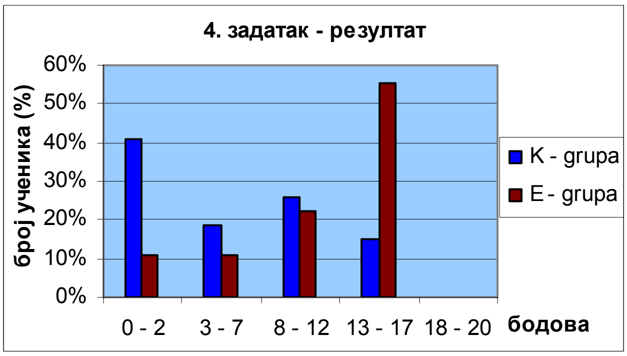
Елиминацију непознатог полупречника, чиме је добијена веза (линеарна) међу координатама центра кружнице (и ништа више), успешно су остварили 11% ученика контролне и 7% ученика експерименталне групе (6 бодова). Даљи покушаји, да се добијена једначина симетрале тетиве комбинује са двема квадратним једначинама, уз налажење једне координате центра оцењивани су са 8 бодова. Задатак су коректно решили (неки, уз по неколико неуспешних покушаја) 22% ученика контролне и 30% ученика експерименталне групе, углавном без икаквог цртежа. Такође, 8 ученика из експерименталне групе нацртали су коректан цртеж: са задатим елементима, симетралом тетиве и нормалом у додирној тачки. Њих петоро су после налажења везе међу координатама центра успешно искористили нормалу у додирној тачки, за одређивање центра тражене кружнице, док осталих троје нису отишли даље од налажења симетрале.

Свега 3 ученика (1 из контролне и 2 из експерименталне групе), нацртали цртеж, али само са задатим елементима, без симетрале тетиве, или нормале у додирној тачки.

Задатак 4, задат као проблемски, нико није решио у потпуности, тј. нико није извео коначан закључак о минимуму (максимуму) површине троугла, чија су два темена, утврђене, унапред задате тачке, а треће теме је тачка дате параболе. 19% ученика контролне и 11% ученика експерименталне групе, формирали су линеарну једначину (задата површина троугла и апсолутна вредност детерминанте), (3-7 бодова). Ученици (26% контролне и 22% експерименталне групе), који су без знака апсолутне вредности формирали једну једначину и тако добили тачно решење, без цртежа или са цртежом, оцењени су са 8-12 бодова.

4. zadatak

	K - grupa	E - grupa
0 - 2	41%	11%
3 - 7	19%	11%
8 - 12	26%	22%
13 - 17	15%	56%
18 - 20	0%	0%
Xsr =	5.814815	11.11111
σ =	6.006398	5.78205
t =	3.239207	



Комбинујући сваку од две једначине (генерисане апсолутном вредношћу), са једначином параболе, добијају се два система једначина, од којих једна има двоструко решење – тражено теме троугла, а друга нема решења. Од 15% ученика контролне и 56% ученика експерименталне групе, са 15 бодова су оцењени они који су поставили и решили тачно оба система, а са 17 бодова су оцењени они, који су уз то, одредили одстојање добијеног трећег темена од основице (праве одређене задатим двема тачкама) и „закључили" (без озбиљније анализе) да је оно најближе правој, или су формирали једначину тангенте у траженој тачки и установили да је тангента паралелна са њом.

Када је задат овај задатак, сматрало се да ће одговори на постављена питања уследити после констатације да је тангента у тачки параболе (трећем темену троугла) паралелна са основицом, а како та права и парабола немају заједничких тачака, да су онда она и парабола са разних страна тангенте. Такође, било је могуће, да постављена два питања буду сведена на питање екстремне вредности квадратне функције – функције одстојања произвољне тачке параболе од основице троугла. Пошто за t - вредност важи

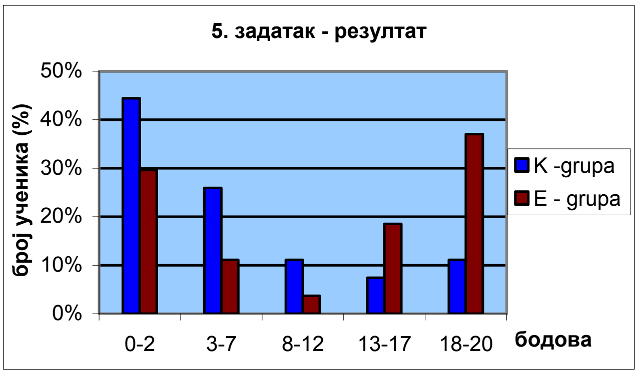
$$t_{52} = 3.2392 > t_{52;\ 0.01} = 2.660 \text{ и } p = 0.002091252 < 0.01$$

што значи да разлика просечног броја остварених бодова на 4. задатку статистички значајна, са прагом значајности $\alpha = 0.01$.

Задатак 5, такође проблемски као и претходни, решили су у потпуности 11% ученика контролне и 37% ученика експерименталне групе. При томе, сви ови ученици су приказали цртеж са задатим, помоћним и траженим објектима. 44% ученика контролне и 30% ученика експерименталне групе, уопште нису решавали задатак, и нису нацртали цртеж. Са 3-7 бодова оцењени су 26% ученика контролне и 11% ученика експерименталне групе, који су одредили непознату координату пресечне тачке хиперболе и тражене кружнице, и у тој тачки саставили једначину тангенте хиперболе.

5. zadatak

	K - grupa	E - grupa
0-2	44%	30%
3-7	26%	11%
8-12	11%	4%
13-17	7%	19%
18-20	11%	37%
Xsr =	5.148148	11.03704
σ =	6.575508	8.530909
t =	2.787824	



По 1 ученик сваке групе који је, уз то, и нацртао цртеж, оцењен је са 7 поена. У следећем кораку за одређивање тангенте кружнице, тј. за одређивање њених коефицијената, требало је користити услов нормалности (тангената), једначину праве кроз једну тачку. Уз раније наведене и урађене елементе, овај део задатка су решили 11% ученика контролне и 4% ученика експерименталне групе, а оцењени су са 8-12 бодова.

Покретање поступка налажења једначине тангенте кружнице и израчунавање њених коефицијената, са циљем налажења центра, упућује на закључак да се ученици „крећу“ по алгоритму који води решењу проблема. Ученици који су, уз то, закључили да је центар кружнице пресечна тачка тангенте хиперболе (нормале на тангенту кружнице) и апсцисе, и одредили га (7% из контролне и 19% из експерименталне групе), практично су решили проблем и за своје резултате су оцењени са 13-17 бодова. Пошто за t - вредност важи

$$t_{52} = 2.7878 > t_{52;\ 0.01} = 2.660 \text{ и } p = 0.007393737 < 0.01,$$

значи да разлика просечног броја остварених бодова на 4. задатку статистички значајна, са прагом значајности $\alpha = 0.01$.

Задатак 6, испоставило се – најлакши, решило је 74% ученика контролне и 85% ученика експерименталне групе. При томе сви ови ученици су нацртали коректну слику, на којој су приказана оба решења, тангенте елипсе нормалне на дату праву. 15% ученика контролне групе, и поред солидног цртежа, нису добили тачне (или оба) резултате, јер су углавном грешили у одређивању непознатог коефицијента *n* (одсечка на *y*-оси), из услова додира праве и елипсе (6–8 бодова).

6. zadatak

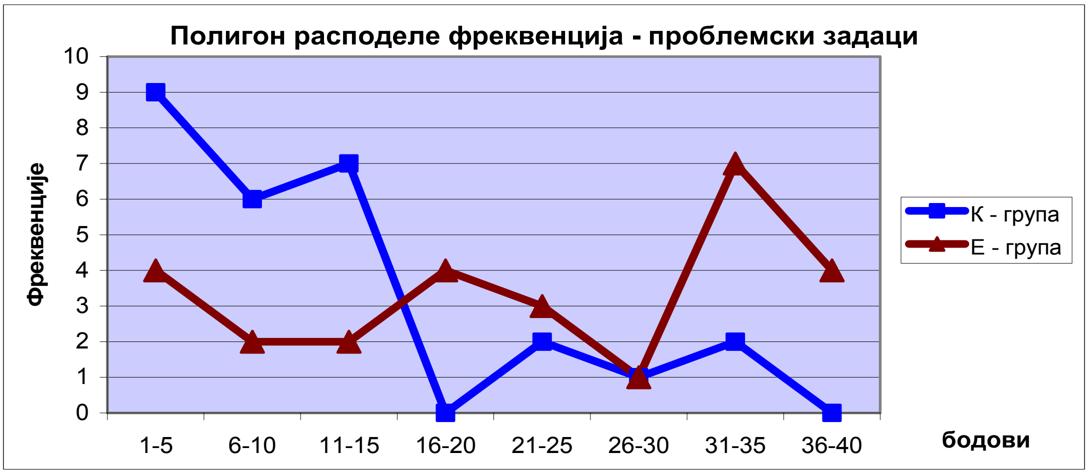
	K - grupa	E - grupa
0 - 2	4%	4%
3 - 5	7%	11%
6 - 8	15%	0%
9 - 10	74%	85%
Xsr =	8.851852	9.037037
σ =	2.137907	2.348861
t =	0.2973	

Са 3 – 5 бодова оцењени су 7% ученика контролне и 11% ученика експерименталне групе, који су само одредили полуосе елипсе и коефицијент правца дате праве, али нису одредили ни коефицијент правца тангенти нити су користили услов додира. По 4% ученика обе групе нису урадили ништа више од непотпуног цртежа (једна тангента).

5.8.1.2. Успех у решавању проблемских задатака

Успех у решавању проблемских задатака (задаци 4. и 5.) је детаљно анализиран у тачки 5.8.1.2. Преглед постигнутих резултата у експерименталној и контролној групи је приказан на Слици 2.

На Полигону расподеле фреквенција, уочава се положај криве расподеле фреквенција експерименталне групе, чије су веће вредности лоциране десно од већих вредности криве расподеле фреквенција контролне групе. То упућује на закључак да су ученици Е – групе били успешнији од ученика К – групе, у решавању проблемских задатака.



Слика 2.

Анализа података из Табеле 2, показује бољи успех експерименталне групе у решавању проблемских задатака, и на основу просечног броја освојених бодова (разлика аритметичких средина освојених бодова за Е – групу и К – групу износи $d(\overline{x},\overline{y}) = 11.185$ бодова) и у погледу укупно остварених бодова, (задаци 4. и 5.), тј. $p_E = 55.37\%$, а $p_K = 27.41\%$.

Табела 4. Успех у решавању проблемских задатака

	Група	*n*	PU	AS	STD	*t*	*p*
Гимназија „J.J.Змај“ Нови Сад	Е	27	55.37%	22.1482	12.4177	3.627493	0.000652
	К	27	27.41%	10.9630	9.6436		

На основу података у Табели 2. за t – вредност важе релације:

$$t_{52} = 3.627493 > t_{52;\ 0.05} = 2.000 \text{ и } p = 0.000652412 < 0.05$$

$$t_{52} = 3.627493 > t_{52;\ 0.01} = 2.660 \text{ и } p = 0.000652412 < 0.01$$

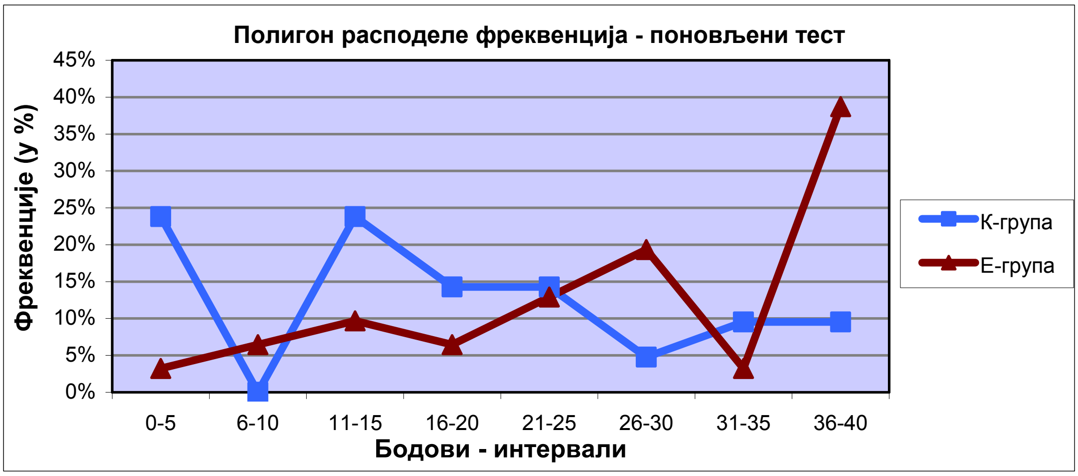
где су $t_{52;\ 0.01} = 2.660$ и $t_{52;\ 0.05} = 2.000$, критичне вредности. Одавде следи да се са прагом значајности од $\alpha = 0.01$ (са ризиком мањим од 1 %, са сигурношћу већом од 99%) може закључити да је разлика аритметичких средина од 11.185 бодова, између експерименталне и контролне групе **статистички значајна**. Такође, нулта подхипотеза H'_0 може одбацити, тј. потврђује се алтернативна потхипотеза H'_1: настава уз помоћ рачунара, даје боље резултате у оспособљавају за решавање проблемских задатака и примену стечених знања, него традиционална настава. Бољи успех експерименталне групе у решавању проблемских задатака, **показује предности наставе путем рачунара у односу на традиционалне наставне системе и када су могућност примене стечених знања у питању**.

На основу напред изнетих анализа (у тачкама 1.1. и 1.2.) може се закључити да је основна хипотеза потврђена: **Настава путем рачунара, као нов наставни**

систем, значајно утиче на повећање укупног образовног учинка у настави математике у гимназији.

5.8.1.3. Успех на Поновљеном тесту

Поновљени тест, приказан у одељку 5.7.3, одржан је након 4 недеље, радио је 27 ученика експерименталне и 25 ученика контролне групе. Њиме је обухваћена већина најбитнијих садржаја аналитичке геометрије. На овом тесту нису посебно задати задаци проблемског карактера. Крива расподеле фреквенција експериме-нталне групе, лоцирана је десно у односу на одговарајућу криву контролне групе, тј. постиже веће вредности је у зони већих бодовних резултата, што показује и њен бољи успех.



Слика 3.

Статистички параметри овог теста приказани у Табели 3, показују да је Е - група постигла бољи резултат на поновљеном тестирању. Разлика аритметичких средина освојених бодова $d(\bar{x},\bar{y})=9.88$, показује бољи успех Е – групе у односу на К – групу на основу просечног броја освојених бодова.

Табела 5. Резултати Поновљеног теста из аналитичке геометрије

	Група	*n*	PU	AS	STD	*t*	*p*
Гимназија „J.J.Змај“ Нови Сад	Е	27	68.63%	27.45161	11.61711	2.897399	0.005571
	К	25	43.93%	17.57143	12.14034		

Експериментална група је успешнија и на основу укупно остварених бодова, тј. $p_E = 68.63\%$, а $p_K = 43.93\%$. У овом случају за $t-$ вредност имамо

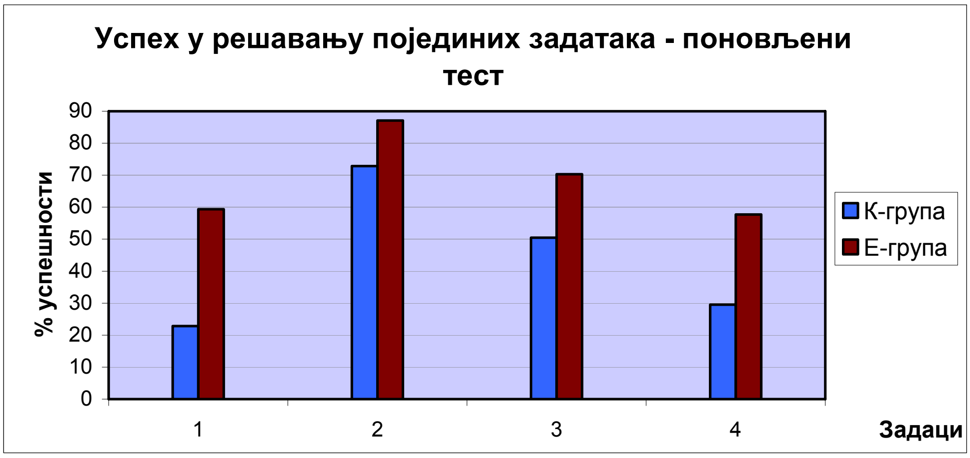
$$t_{50} = 2.897399 > t_{50;\ 0.05} = 2.000 \text{ и } p = 0.005570977 < 0.05$$

$$t_{50} = 2.897399 > t_{50;\ 0.01} = 2.660 \text{ и } p = 0.005570977 < 0.01,$$

где су критичне вредности $t_{50;\ 0.01} = 2.660$ и $t_{50;\ 0.05} = 2.000$. Са прагом значајности $\alpha = 0.01$, може се закључити, да је разлика $d(\bar{x},\bar{y})=9.88$ аритметичких средина Е – групе и К – групе, статистички значајна. То такође значи да се нулта хипотеза H_0 може одбацити и важи алтернативна хипотеза H_1: **знања стечена у процесу наставе путем рачунара показују већу стабилност и трајност, од знања стечених у традиционалној настави**.

Са хистограма успеха у решавању појединих задатака на Поновљеном тесту, види се да су у решавању свих задатака, ученици експерименталне групе били знатно успешнији.

Тај успех се посебно огледа у решавању 1. и 4. задатка, што је детаљно приказано у следећим табелама. Добијене $t-$ вредности показују да је разлика постигнутог просечног успеха, у решавању 1. задатка значајна за бољи успех експерименталне групе.

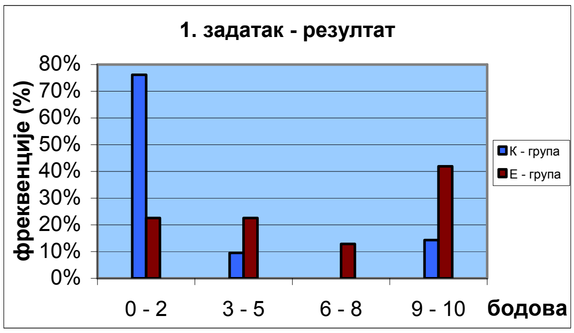


Анализа резултата решавања сваког појединачног задатка, представљена је табелом и хистограмом успеха. Заснована је на систему бодовања, по коме је сваки решени корак задатка вредновани одређеним бројем бодова.

Код оцењивања првог задатка, цртеж и једначина тангенте сведена на експлицитни облик вредновани су са 2 бода, а услов додира сведен на две линеарне једначине са непознатим координатама центра доноси још 3 бода.

1. zadatak

	K - grupa	E - grupa
0 - 2	76.19%	22.58%
3 - 5	9.52%	22.58%
6 - 8	0.00%	12.90%
9 - 10	14.29%	41.94%
Xsr =	2.2857	5.9355
σ =	3.1944	3.8432
t =	3.5221	



Анализа услова, оног услова који не даје решење и оног који даје оба решења (приказана у канонском облику) доносе 2, односно 3 бода. Пошто за t - вредност важи

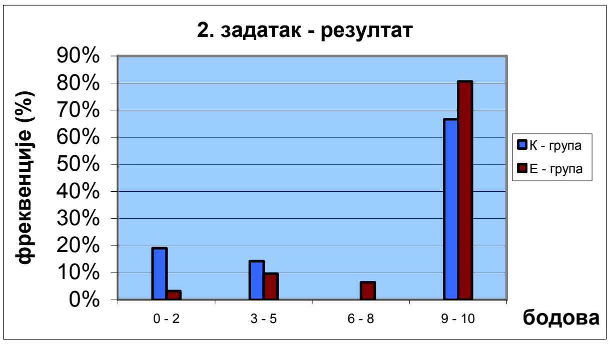
$$t_{50} = 3.5221 > t_{50;\ 0.01} = 2.660 \text{ и } p = 0.000924406 < 0.01,$$

значи да је разлика просечног броја остварених бодова на 1. задатку статистички значајна, са прагом значајности $\alpha = 0.01$.

Код оцењивања 2. задатка, уз 2 бода за коректан цртеж, свођење једначина: праве на експлицитни облик – 1 бод и хиперболе на канонски облик - 1 бод. Одређени непознати коефицијенти (само по 1) из услова додира - нова 2 бода, формирана (само једна) једначина тангенте још 2 бода, а комплетно решен задатак - 10 бодова. t- вредност показује да разлика просечног броја остварених бодова на 2. задатку није статистички значајна.

2. zadatak

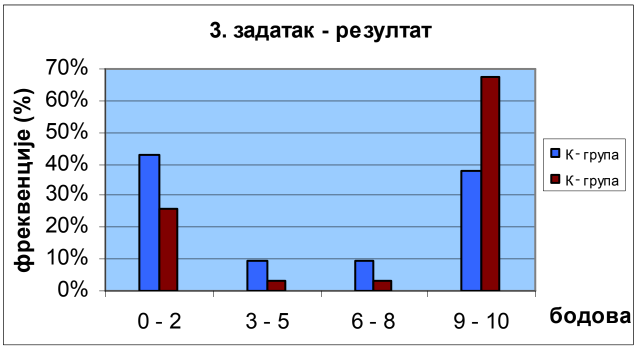
	K - grupa	E - grupa
0 - 2	19.05%	3.23%
3 - 5	14.29%	9.68%
6 - 8	0.00%	6.45%
9 - 10	66.67%	80.65%
Xsr =	7.2857	8.7097
σ =	3.9778	2.6542
t =	1.5182	



У трећем задатку, цртеж је оцењен са 2 бода а израчунат параметар параболе доноси још 1 бод. Постављен услов додира са укљученим параметром вреди још 1 бод, а услов да тачка припада правој (линеарна једначина) такође 1 бод. Решен систем (одређени коефицијенти правца) 3 бода, а решен задатак (одређен угао између тангенти) свих 10 бодова. t - вредност показује да разлика просечног броја остварених бодова на 3. задатку није статистички значајна.

3. zadatak

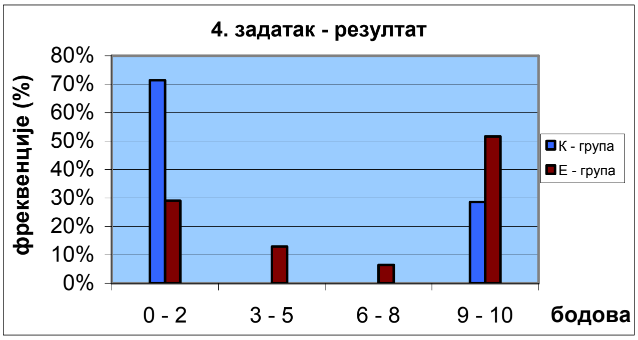
	K - grupa	E - grupa
0 - 2	42.86%	25.81%
3 - 5	9.52%	3.23%
6 - 8	9.52%	3.23%
9 - 10	38.10%	67.74%
Xsr =	5.0476	7.0323
σ =	4.4666	4.3067
t =	1.5750	



У 4. задатку, цртеж и једначина праве сведена на сегментни, или експлицитни облик вреднују се са 3 бода. Примена датог услова (одређен коефицијент правца) коришћењем једноћ од ових облика вреднује се са нова 2 бода, а налажење одсечка на ординати са нова 3 бода. Одређена (тачно једна!) једначина вреднује се са преостала 2 бода. Одређене једначине, без прецизирања, која испуњава задати услов, вреднује се са укупно 8 бодова.

4. zadatak

	K - grupa	E - grupa
0 - 2	71.43%	29.03%
3 - 5	0.00%	12.90%
6 - 8	0.00%	6.45%
9 - 10	28.57%	51.61%
Xsr =	2.9524	5.7742
σ =	4.1916	4.5558
t =	2.2189	



У 4. задатку за t - вредност важи

$$t_{50} = 2.2189 > t_{50;\ 0.05} = 2.000 \text{ и } p = 0.031063343 < 0.05,$$

што значи да је разлика просечног броја остварених бодова на 4. задатку статистички значајна, са прагом значајности $\alpha = 0.05$.

Из претходних резултата следи закључак: **знања стечена у процесу наставе путем рачунара показују већу стабилност и трајност од оних која су стечена, у традиционалном наставом процесу**.

Узимајући у обзир чињеницу да су експериментална и контролна група у старту уједначене на основу важних и релевантних елемената, сматрамо да је разлика настала под утицајем експерименталног фактора, тј. обрадом наставних садржаја аналитичке геометрије у процесу наставе путем рачунара. Зато се нулта хипотеза може одбацити.

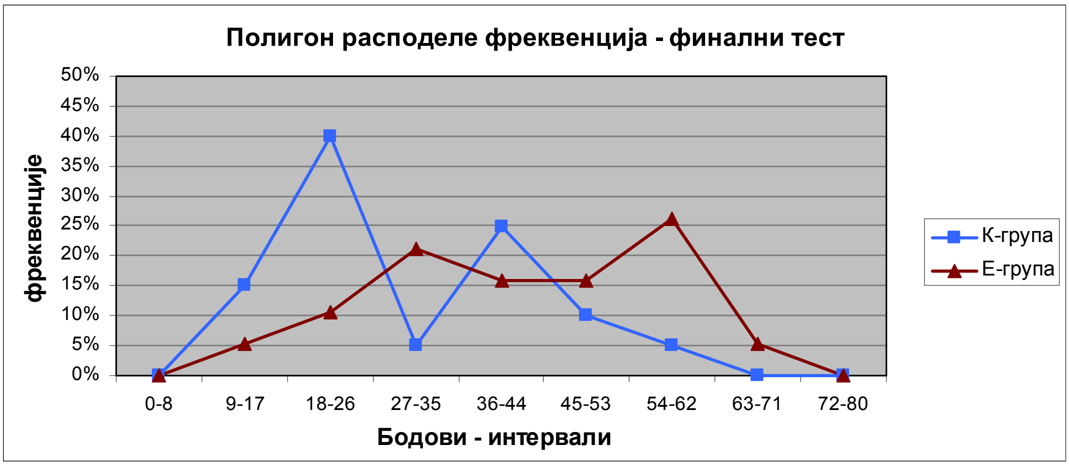
Успех експерименталне групе настао је као резултат ефикасности примене наставе путем рачунара, што омогућује бољи образовни учинак (успех) у настави аналитичке геометрије. Према томе, у овом експерименту настава путем рачунара

показује значајну предност, над традиционалним начином рада на општем нивоу знања, због чега можемо да закључимо да је основна хипотеза потврђена.

5.8.2. ГИМНАЗИЈА „НИКОЛА ТЕСЛА" У АПАТИНУ

5.8.2.1. Општи образовни учинак – финални тест

Слично анализи у 5.7.1, у складу са првим задатком истраживања, утврђене су разлике у погледу количине знања ученика, стечених у настави уз помоћ рачунара и у традиционалној настави, на основу резултата постигнутих на Финалном тесту. Тест суешавали 19 ученика експерименталне и 20 ученика контролне групе. На Слици 4. крива расподеле фреквенција експерименталне групе, померена је у област у којој се налазе већи бодовни резултати, десно у односу на криву расподеле фреквенција контролне групе.



Слика 4.

Анализа остварених резултата са Финалног теста, приказана у Табели 4. показује да експериментална група има бољи резултат, тј. разлика аритметичких средина (просечног броја) освојених бодова по једном ученику експерименталне и контролне групе износи $d(\overline{x},\overline{y})=12.68$ бодова.

Табела 4. Резултати Финалног теста из аналитичке геометрије

	Група	*n*	PU	AS	STD	*t*	*p*
Гимназија „Н. Тесла" Апатин	Е	19	53.36%	42.68421	14.19063	2.820313	0.007667
	К	20	37.5%	30.0	13.16435		

Експериментална група је успешнија и у погледу укупно остварених бодова, (укупно решеног теста), јер је $p_E = 53.36\%$, а $p_K = 37.50\%$. Познато је (видети Таблице вредности Студентове t – расподеле, на пример [20], [39], [108]) да, при истом прагу значајности, табличне вредности опадају, са повећањем броја степени слободе, што значи да важе следеће релације

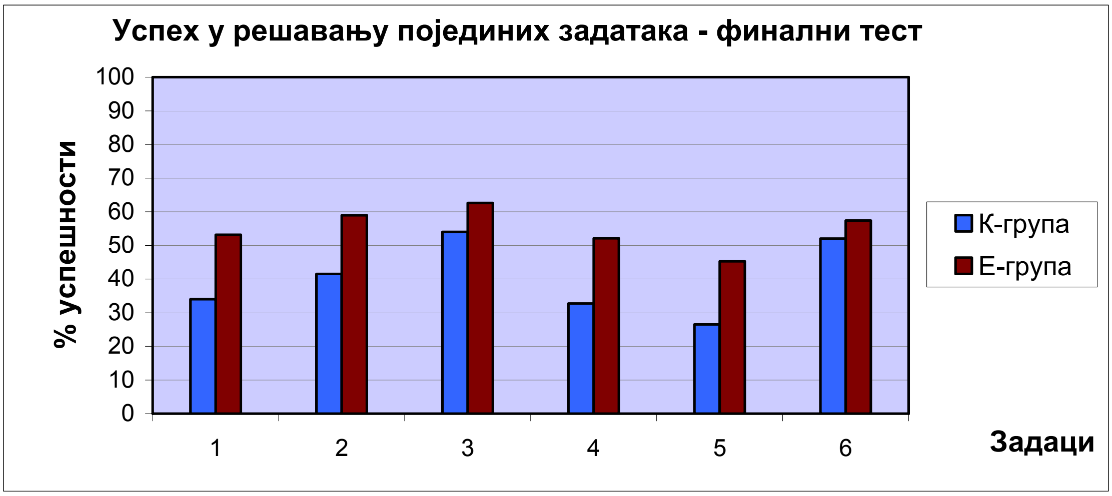
$$t_{30;\ 0.05} > t_{37;\ 0.05} \text{ и } t_{30;\ 0.01} > t_{37;\ 0.01}.$$

Тада Табеле 4. показује да важи:

$$t_{37} = 2.8203 > t_{30;\ 0.05} = 2.043 > t_{37;\ 0.05} \text{ и } p = 0.007666679 < 0.05$$

$$t_{37} = 2.8203 > t_{30;\ 0.01} = 2.750 > t_{37;\ 0.01} \text{ и } p = 0.007666679 < 0.01,$$

где су $t_{37;\ 0.05}$ и $t_{37;\ 0.01}$, критичне (табличне) вредности за број степени слободе 37 и праг значајности $\alpha = 0.05$, односно $\alpha = 0.01$. С тога се са ризиком мањим од 1 %, (са сигурношћу већом од 99%) закључује: разлика аритметичких средина од 12.61 бодова, између експерименталне и контролне групе је **статистички значајна**. Такође, нулта хипотеза H_0 се може одбацити, тј. потврђена је алтернативна хипотеза H_1: **у погледу квалитета и количине знања ученика, настава уз помоћ рачунара је ефикаснија од традиционалне наставе**.



Успех експерименталне групе потврђује ефикасност примењених средстава, метода и облика рада наставе уз помоћ рачунара, тј. афирмише позитиван утицај експерименталног фактора.

Са хистограма успеха у решавању појединих задатака на Финалном тесту, види се да су у четири задатка (1, 2, 4, 5.), ученици експерименталне групе били успешнији, док су у задацима 3. и 6. ученици обе групе постигли приближно једнак резултат.

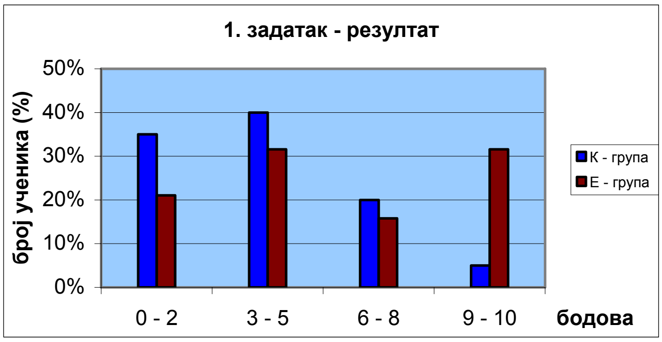
Следи детаљнија анализа резултата сваког задатака Финалног теста, посебно. У ту сврху, за сваки задатак је дата табела, која приказује:

- колико је процената ученика експерименталне, односно контролне, групе освојило: 0 – 2, 3 – 5, 6 – 8, 9 – 10, поена по задатку, што се види и са хистограма резултата истог задатка,
- аритметичке средине освојених бодова по групи,
- стандардну девијацију освојених бодова по групи,
- *t* – вредност, која треба да покаже, да ли је разлика аритметичких средина од значаја, за успех постигнут у некој од група.

У 1. задатку, коректан цртеж са обе тражене паралелне праве је вреднован са 2 бода, а наведена тражена једначина праве, која се од дате једначине разликује једино по (променљивом) слободном члану, са нова 2 бода. Постављена формула за одстојање дате тачке од ове праве, носи такође нова 2 бода, а налажење оба њена решења вреднује се са још 3 бода, обе једначине тражених правих са укупно 10 бодова. Неправилна примена знака апсолутне вредности и израчуната само једна тачна вредност непознатог слободног члана и једначина једне праве, вреднује се са 7 бодова.

1. задатак

	K - grupa	E - grupa
0 - 2	35%	21%
3 - 5	40%	32%
6 - 8	20%	16%
9 - 10	5%	32%
Xsr =	3.4	5.315789
σ =	2.956349	3.742398
t =	1.732349	

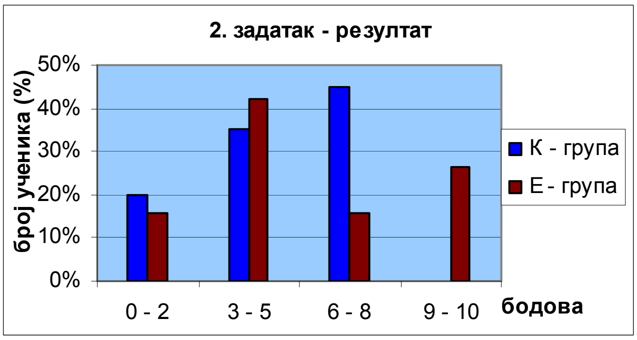


На основу добијене t- вредности резултата успеха у решавању 1, 2, 3. и 6. задатака следи да разлике просечног броја остварених бодова експерименталне и контролне групе ниу статистички значајне.

Код оцењивања 2. задатка, цртеж и непозната координата заједничке тачке оцењени су са 2, а једначина тангенте сведена на експлицитни облик са још једним бодом. Услов додира сведен на две линеарне једначине са непознатим координатама центра доноси још 3 бода. Примена сваке од ових једначина и услова да дата тачка припата кружници, и налажење оба решења (приказана у канонском облику) доносе 4 бода.

2. задатак

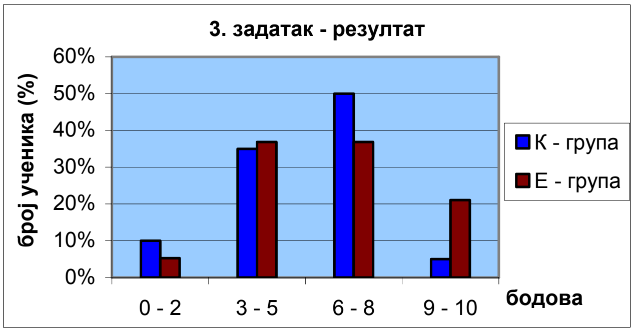
	K - grupa	E - grupa
0 - 2	20%	16%
3 - 5	35%	42%
6 - 8	45%	16%
9 - 10	0%	26%
Xsr =	4.15	5.894737
σ =	2.434646	3.110166
t =	1.90521	



У 3. задатку, коректан цртеж и израчунате полуосе елипсе оцењене су са 2 бода. Одређене координате пресечних тачака праве и елипсе оцењене су са 3 бода, а тангентеу тим тачкама носе један бод.

3. задатак

	K - grupa	E - grupa
0 - 2	10%	5%
3 - 5	35%	37%
6 - 8	50%	37%
9 - 10	5%	21%
Xsr =	5.4	6.263158
σ =	2.289105	2.769041
t =	1.035525	

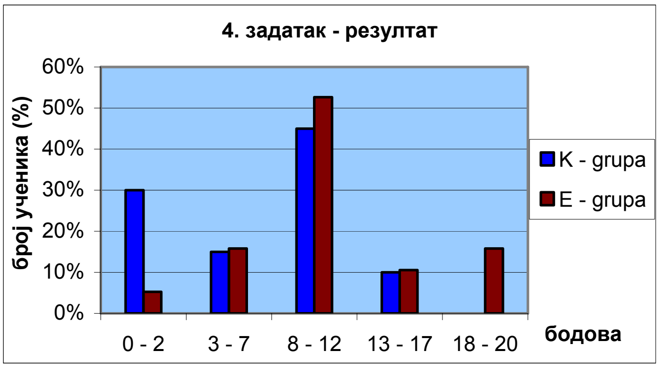


Угао између сваке од тангената и сечице оцењује се са по 2 бода.

У решењу задатка 4 (проблемски задатак), коректан цртеж (из кога се „назире“ да се елипса простире у појасу између две тангенте паралелне са правом одређеном датим тачкама) треба да буде оцењен са 3 бода, закључак да свака од две дате тачке припада спољашњости елипсе са 2 бода, као и једначина праве одређене овим тачкама. Налажење једначина поменутих тангената треба да буде оцењено је са 6 бодова укупно, а одређивање додирних тачака са елипсом 3 бода. Површине оба троугла и закључак, треба да буду оцењени су са 4 бода

4. задатак

	K - grupa	E - grupa
0 - 2	30%	5%
3 - 7	15%	16%
8 - 12	45%	53%
13 - 17	10%	11%
18 - 20	0%	16%
Xsr =	6.55	10.42105
σ =	4.944441	4.782818
t =	2.418532	



Како овај задатак нико од ученика обе групе није решио у потпуности, сваки од наведених предвиђених корака оцењиван је делимично.

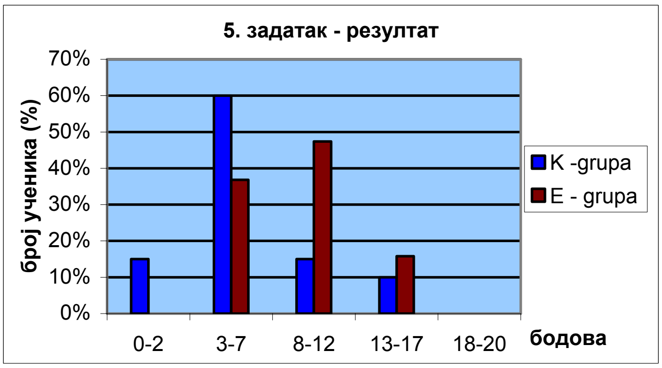
За t - вредност важи

$$t_{37} = 2.418532 > t_{30;\ 0.05} = 2.043 > t_{37;\ 0.05} \text{ и } p = 0.020620889 < 0.05$$

што значи да је разлика просечног броја остварених бодова на 4. задатку статистички значајна, са прагом значајности $\alpha = 0.05$.

5. задатак

	K - grupa	E - grupa
0-2	15%	0%
3-7	60%	37%
8-12	15%	47%
13-17	10%	16%
18-20	0%	0%
Xsr =	5.3	9.052632
σ =	4.112177	3.379095
t =	3.024072	



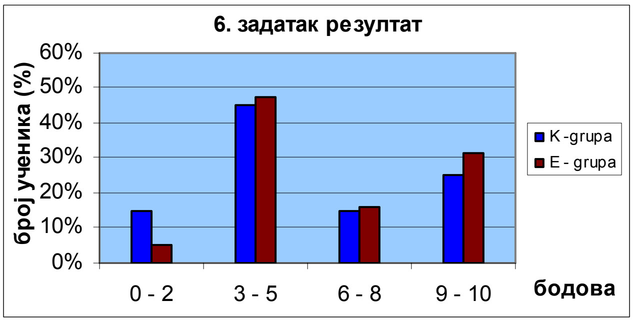
Приликом оцењивања 5. задатка, цртеж са задатим елементима и две тражене праве оцењен је са 2 бода, а одређен параметар параболе са 1 бод. Постављање формуле за налажење коефицијената правца обеју тангенти оцењује се са 2 бода, а одређена оба коефицијента са по 3 бода. Свака од једначина тангенти оцењује се са 2 бода. Закључак да су тангенте међусобно нормалне оцењује се једним бодом. Са 2 бода треба вредновати налажење пресечне тачке тангенти, а са 2 бода закључак да она припада директриси.Задатак 6, испоставило се – најлакши, решило је 74% ученика контролне и 85% ученика експерименталне групе. За t - вредност важи

$$t_{37} = 3.024 > t_{30;\ 0.01} = 2.750 > t_{37;\ 0.01} \text{ и } p = 0.004513902 < 0.01,$$

што значи да је разлика просечног броја остварених бодова на 5. задатку статистички значајна, са прагом значајности $\alpha = 0.01$.

6. задатак

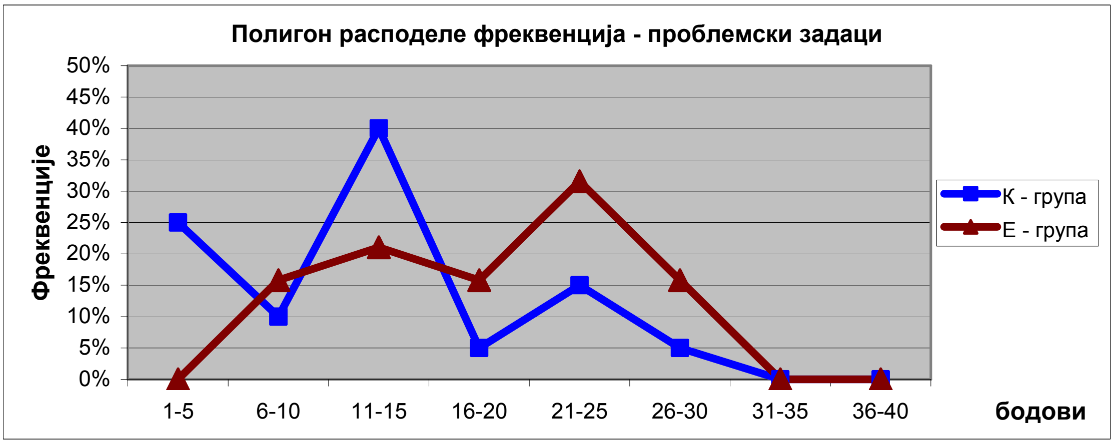
	K - grupa	E - grupa
0 - 2	15%	5%
3 - 5	45%	47%
6 - 8	15%	16%
9 - 10	25%	32%
Xsr =	5.2	5.736842
σ =	3.155947	3.126156
t =	0.519567	



За 6. задатак, уз 2 бода за коректан цртеж, свођење једначина: праве на експлицитни облик, хиперболе на канонски облик вреди по 1 бод. Одређени непознати коефицијенти (само по 1) из услова додира - нова 2 бода, формирана (само једна) тангенте још 2 бода, а комплетно решен задатак - 10 бодова. t-вредност показује да разлика просечног броја остварених бодова на 6. задатку није статистички значајна..

5.8.2.2 Успех у решавању проблемских задатака

Резултати постигнути у решавању проблемских задатака (задаци: 4. и 5.) ученика Е - групе су знатно бољи од резултата ученика К - групе. Полигон расподеле фреквенција приказан је на Слици 5.



Слика 5.

У Табели 5. дата је анализа резултата ученика експерименталне и контролне групе, постигнутих на сету задатака проблемског карактера.

Табела 5. Успех у решавању проблемских задатака

	Група	*n*	PU	AS	STD	*t*	*p*
Гимназија „Н.Тесла“ Апатин	E	19	48.68%	19.47368	6.66782	3.088033	0.003809
	K	20	29.63%	11.85	8.22359		

Експериментална група има бољи резултат у решавању проблемских задатака, тј. разлика аритметичких средина освојених бодова за Е – групу и К –

групу износи $d(\bar{x},\bar{y}) = 7.62$ бодова. Експериментална група је успешнија и у погледу остварених бодова, тј. $p_E = 48.68\%$, а $p_K = 29.63\%$. Из Табеле 5. за t - вредност важи:

$$t_{37} = 3.088 > t_{30;\ 0.05} = 2.043 > t_{37;\ 0.05} \text{ и } p = 0.003809028 < 0.05$$
$$t_{37} = 3.088 > t_{30;\ 0.01} = 2.750 > t_{37;\ 0.01} \text{ и } p = 0.003809028 < 0.01,$$

где су $t_{37;\ 0.05}$ и $t_{37;\ 0.01}$, критичне (табличне) вредности за 37 степени слободе и праг значајности $\alpha = 0.05$, односно $\alpha = 0.01$. Одатле следи да се са сигурношћу већом од 99% (са ризиком мањим од 1%) нулта потхипотеза може одбацити, тј. потврђује се алтернативна потхипотеза.

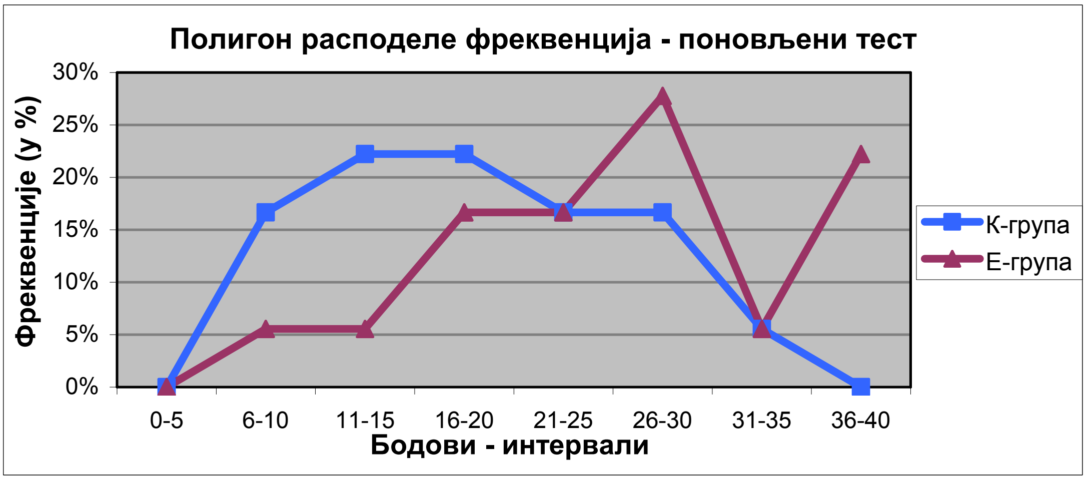
И овде се бољи успех експерименталне групе у решавању проблемских задатака, може тумачити као предност наставе уз помоћ рачунара у односу на традиционалну наставу, када је у питању могућност примене стечених знања.

На основу напред изнетих анализа (у тачкама 2.1 и 2.2) може се закључити

да је основна хипотеза потврђена: **Настава уз помоћ рачунара, као нов наставни систем, значајно утиче на повећање укупног образовног учинка у настави математике у гимназији**.

5.8.2.3. Успех на поновљеном тесту

Поновљени тест, приказан у одељку 5.7.3, одржан је након 4 недеље, решавало је по 18 ученика експерименталне и контролне групе. Њиме је обухваћена већина најбитнијих садржаја аналитичке геометрије. Резултати поновљеног теста, приказани су на Слици 6. и у Табели 6.



Разлика аритметичких средина освојених бодова за Е – групу и К – групу износи $d(\bar{x},\bar{y}) = \bar{x} - \bar{y} = 7.56$ бодова. Експериментална група је успешнија и у погледу остварених бодова, тј. $p_E = 65.28\%$, а $p_K = 46.39\%$.

Табела 6. Резултати Поновљеног теста из аналитичке геометрије

	Група	*n*	PU	AS	STD	*t*	*p*
Гимназија „Н.Тесла“ Апатин	Е	18	65.28%	26.11111	8.45832	2.781274	0.008767
	К	18	46.39%	18.55556	7.34259		

У овом случају за $t-$ вредност имамо

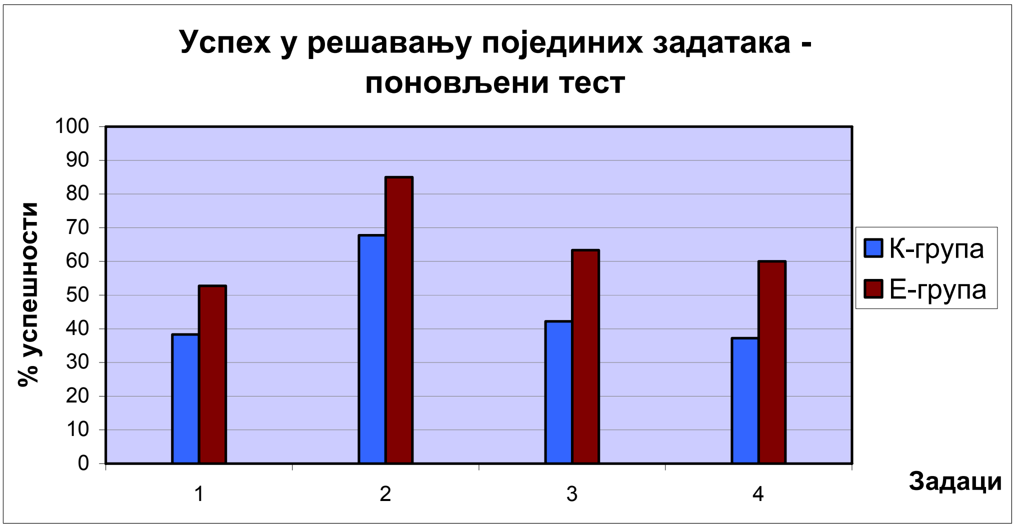
$$t_{34} = 2.78127 > t_{30;\ 0.05} = 2.043 > t_{34;\ 0.05} \text{ и } p = 0.008766844 < 0.05$$

$$t_{34} = 2.78127 > t_{30;\ 0.01} = 2.750 > t_{34;\ 0.01} \text{ и } p = 0.008766844 < 0.01,$$

где су $t_{34;\ 0.05}$ и $t_{34;\ 0.01}$, критичне (табличне) вредности за 34 степена слободе и праг значајности $\alpha = 0.05$, односно $\alpha = 0.01$. Са прагом значајности $\alpha = 0.01$, може се закључити, да је разлика аритметичких средина Е – групе и К – групе, статистички значајна.

Из добијених резултата (као и у 5.8.1.) следи закључак: знања стечена у процесу наставе уз помоћ рачунара показују већу стабилност и трајност од оних која су стечена, у традиционалном наставом процесу.

Са хистограма успеха у решавању појединих задатака на Поновљеном тесту, види се да су у свим задацима ученици експерименталне групе били знатно успешнији.

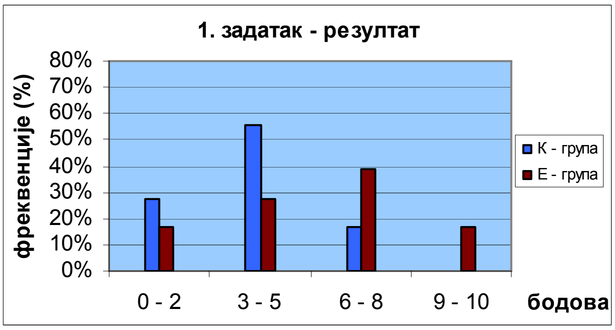


Следи детаљна анализа резултата Поновљеног теста, за сваки задатак посебно.

Приликом оцењивања 1. задатка (и свих осталих), скициран коректан цртеж вреднован је са 2 бода, постављене формуле које карактеришу однос кружнице и праве вреднован је са нова 3 бода, решена једначина (услов додира) нова 2 бода, а решене и обе неједначине (услов за сечицу и услов да су права и кружница дисјунктни скупови) нова 3 бода, што је укупно 10 бодова.

1. zadatak

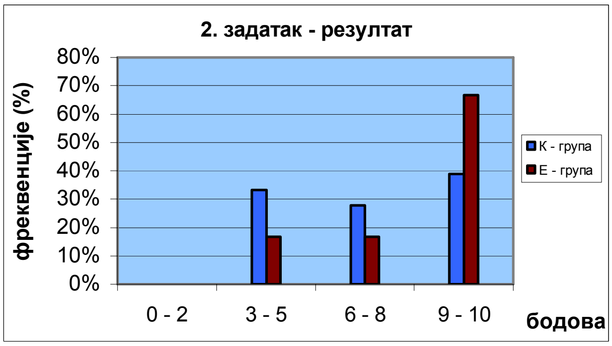
	K - grupa	E - grupa
0 - 2	27.78%	16.67%
3 - 5	55.56%	27.78%
6 - 8	16.67%	38.89%
9 - 10	0.00%	16.67%
Xsr =	3.8333	5.2778
σ =	1.6073	3.0877
t =	1.7109	



Добијена t- вредност показује да разлика просечног броја остварених бодова на 1. задатку није статистички значајна

2. zadatak

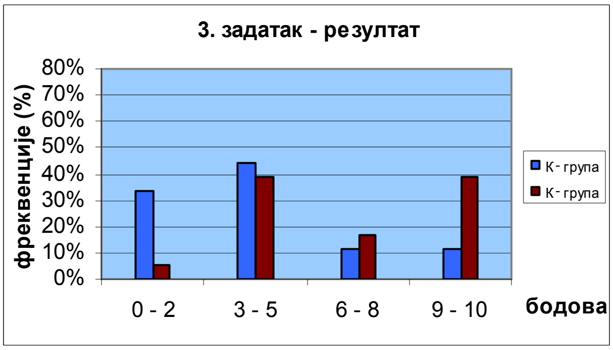
	K - grupa	E - grupa
0 - 2	0.00%	0.00%
3 - 5	33.33%	16.67%
6 - 8	27.78%	16.67%
9 - 10	38.89%	66.67%
Xsr =	6.7778	8.5000
σ =	2.8782	2.2913
t =	1.9302	



Код оцењивања 2. задатка, уз 2 бода за коректан цртеж, свођење једначина: праве на експлицитни облик – 1 бод и елипсе на канонски облик - 1 бод. Одређени непознати коефицијенти (само по 1) из услова додира - нова 2 бода, формирана (само једна) тангенте још 2 бода, а комплетно решен задатак - 10 бодова. И овде t- вредност показује да разлика просечног броја остварених бодова на 2. задатку није статистички значајна.

3. zadatak

	K - grupa	E - grupa
0 - 2	33.33%	5.56%
3 - 5	44.44%	38.89%
6 - 8	11.11%	16.67%
9 - 10	11.11%	38.89%
Xsr =	4.2222	6.3333
σ =	2.4394	3.4319
t =	2.0673	



У трећем задатку, цртеж је оцењен са 2 бода а израчунат параметар параболе доноси још 1 бод. Постављен услов додира са укљученим параметром вреди још 1 бод, а услов да тачка припада правој (линеарна једначина) такође 1 бод. Решен систем (одређени коефицијенти правца) 3 бода, а решен задатак (одређен угао између тангенти) свих 10 бодова. t - вредност показује да разлика просечног броја остварених бодова на 3. задатку није статистички значајна.

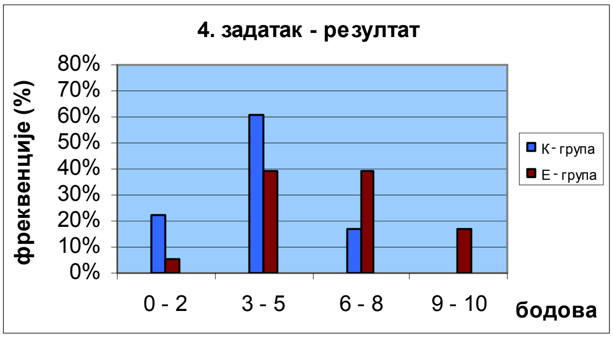
За t - вредност важи

$$t_{34} = 2.0673 > t_{30;\ 0.05} = 2.043 > t_{34;\ 0.05} \text{ и } p = 0.046386946 < 0.05$$

што значи да је разлика просечног броја остварених бодова на 3. задатку статистички значајна, са прагом значајности $\alpha = 0.05$.

4. zadatak

	K - grupa	E - grupa
0 - 2	22.22%	5.56%
3 - 5	61.11%	38.89%
6 - 8	16.67%	38.89%
9 - 10	0.00%	16.67%
Xsr =	3.7222	6.0000
σ =	1.8501	2.4944
t =	3.0240	



У 4. задатку, цртеж и једначина праве сведена на сегментни, или експлицитни облик вреднују се са 3 бода. Примена датог услова (одређен коефицијент правца) коришћењем једноћ од ових облика вреднује се са нова 2 бода, а налажење одсечка на ординати са нова 3 бода. Одређена (тачно једна!) једначина вреднује се са преостала 2 бода. Одређене једначине, без прецизирања, која испуњава задати услов, вреднује се са укупно 8 бодова. t - вредност показује да је разлика просечног броја остварених бодова на 4. задатку статистички значајна.

За t - вредност важи

$$t_{34} = 3.0240 > t_{30;\ 0.01} = 2.750 > t_{34;\ 0.01} \text{ и } p = 0.004722199 < 0.01$$

што значи да је разлика просечног броја остварених бодова на 4. задатку статистички значајна, са прагом значајности $\alpha = 0.01$.

Такође као и у 5.8.1. закључујемо, да је успех експерименталне групе резултат ефикасаности примене наставе уз помоћ рачунара, што омогућује бољи образовни учинак (успех) у настави аналитичке геометрије.

5.8.3. ЗБИРНИ РЕЗУЛТАТИ

За анализу збирних резултата сагледава се успех на нивоу обе школе, тако што се посматрају две групе ученика: група 46 ученика који су обухваћени наставом уз помоћ рачунара (E_0 – група) и група 47 ученика обухваћених традиционалном наставом (K_0 – група). У ту сврху приказани су збирни резултати финалног теста, са посебним освртом на проблемске задатке, као и резултати поновљеног теста.

5.8.3.1. Финални тест

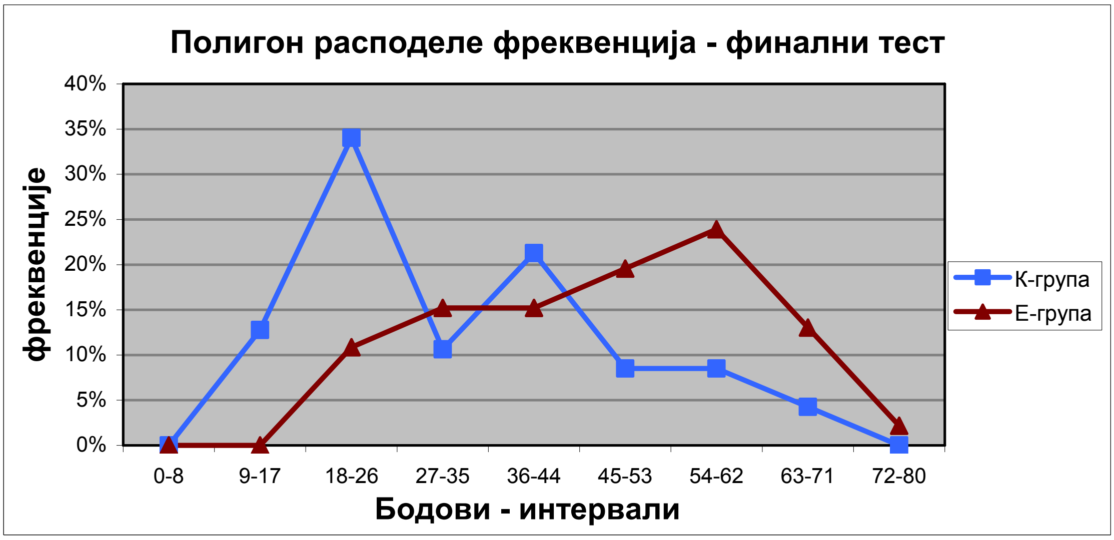
Збирни резултати Финалног теста, показују бољи резултат E_0 – групе по просечном броју освојених поена по ученику: $\overline{x}_E = 46.56522$ и $\overline{y}_K = 33.6383$, тј. разлика аритметичких средина освојених бодова по једном ученику E_0 – групе и K_0 – групе износи $d\left(\overline{x}_E, \overline{y}_K\right) = 12.927$ бодова.

Табела 10. Збирни резултати Финалног теста

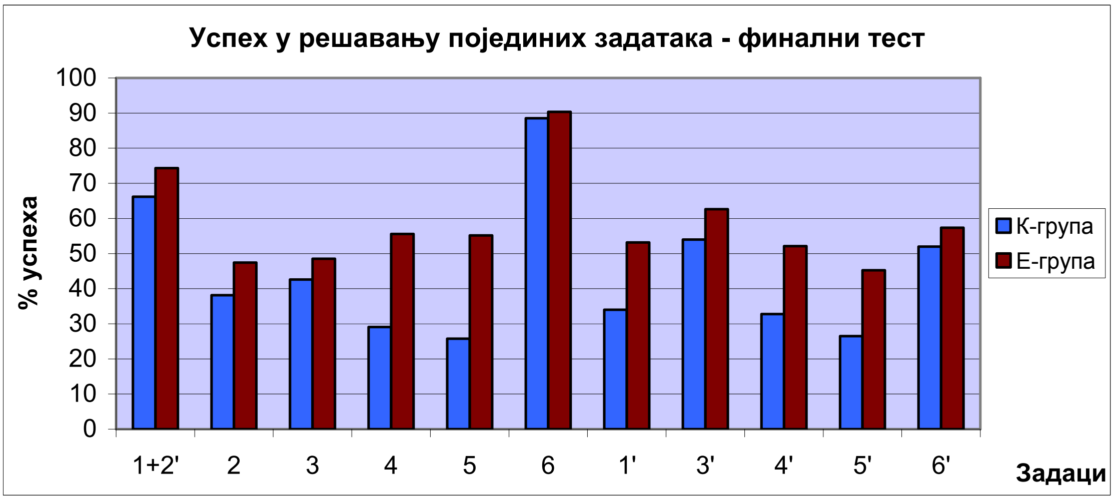
	Група	*n*	PU	AS	STD	*t*	*p*
$\mathrm{E}_0 + \mathrm{K}_0$	E_0	46	58.21%	46.56522	15.01398	4.080806	0.000962
	K_0	47	42.05%	33.6383	15.19998		

Експериментална група је успешнија, не само на основу просечног броја освојених бодова по једном ученику, већ и на основу укупно остварених бодова, (укупно решеног теста), тј. $p_E = 58.21\%$, а $p_K = 42.05\%$. Успех експерименталне групе потврђује ефикасност примењених средстава, метода и облика рада наставе уз помоћ рачунара, тј. афирмише позитиван утицај експерименталног фактора.

Такође, као и у сваком појединачном случају, крива расподеле фреквенција E_0 – групе, померена је у област у којој се налазе већи бодовни резултати, десно у односу на криву расподеле фреквенција K_0 – групе. Успех у решавању појединих задатака детаљно је анализиран у тачакама: 5.8.1 и 5.8.2. Овде је дат један комбиновани хистограм успеха у решавању појединих задатака на Финалном тесту.



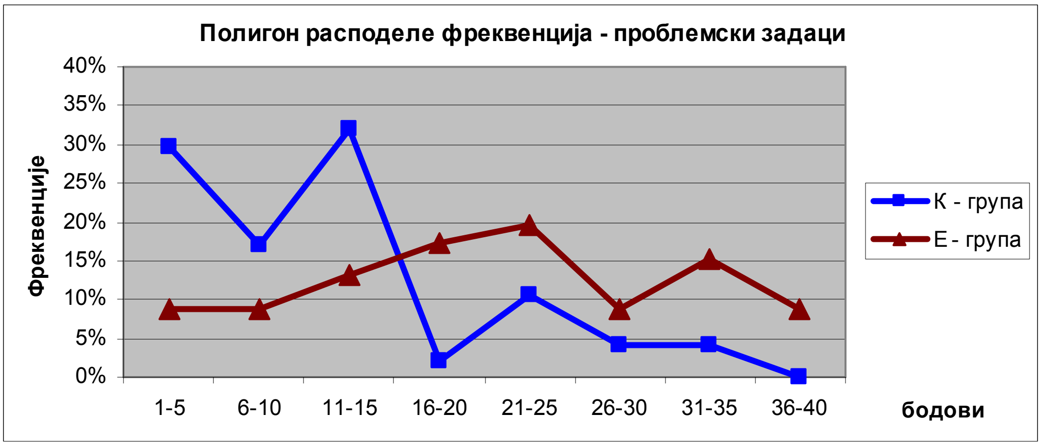
Како је наведено у 5.7.3. задаци 1, 2, 3, 4, 5. и 6, су решавани на финалном тесту у гимназији „Јован Јовановић Змај“ у Новом Саду а задаци 1', 2', 3', 4', 5' и 6' у гимназији „Никола Тесла“ у Апатину.



Из наведених података је јасно да збирни резултати финалног теста незнатно одступају од одговарајућих резултата појединачно за сваку школу.

5.8.3.2. Проблемски задаци

Успех у резултату решавања проблемских задатака приказан је на Полигону расподеле фреквенција броја освојених бодова, где је крива расподеле фреквенција E_0 – групе, значајно померена у десно, у односу на криву расподеле фреквенција K_0 – групе. То показује да је, у решавању проблемских задатака, знатно већи број „бољих резултата“ припао ученицима E_0 – групе него ученицима K_0 – групе.



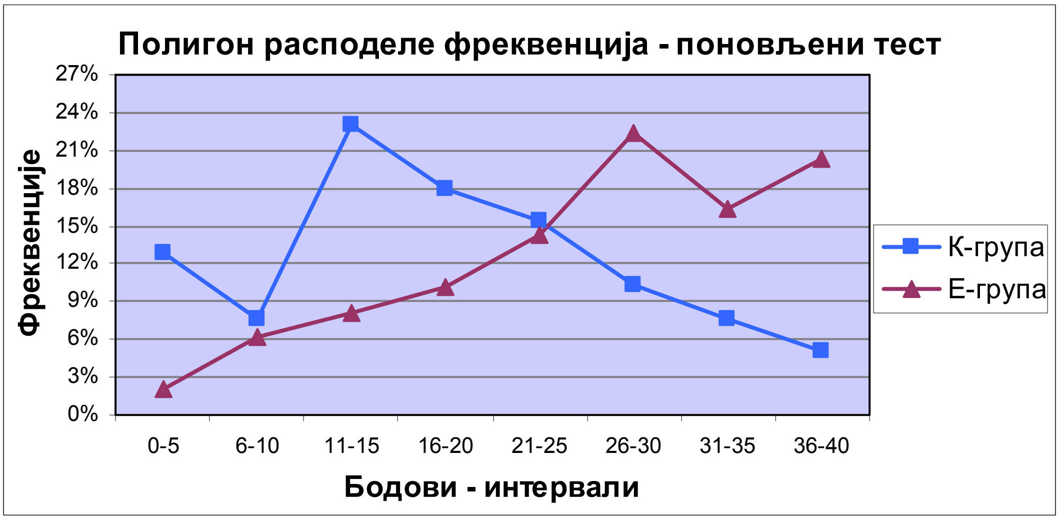
Такође, E_0 – група успешнија и по просечном броју освојених поена по ученику у решавању проблемских задатака: $\overline{x}_E = 21.04348$ и $\overline{y}_K = 11.34043$, и по броју укупно остварених бодова на проблемским задацима, тј. $p_E = 52.61\%$, а $p_K = 28.35\%$, што је приказано у Табели 11.

Табела 11. Збирни резултати - проблемски задаци

	Група	*n*	PU	AS	STD	*t*	*p*
$E_0 + K_0$	E_0	46	52.61%	21.04348	10.51698	4.714658	0.0000869
	K_0	47	28.35%	11.34043	9.077156		

5.8.4.3. Поновљени тест

Збирни резултати поновљеног теста, такође показују успех E_0 – групе у односу на K_0 – групу. Наиме, на Полигону расподеле фревенција броја освојених бодова, уочава се да је је крива расподеле фреквенција E_0 – групе, значајно померена у десно, у односу на криву расподеле фреквенција K_0 – групе, тј. и у овом случају је знатно више „бољих резултата“ припало ученицима E_0 – групе него ученицима K_0 – групе.



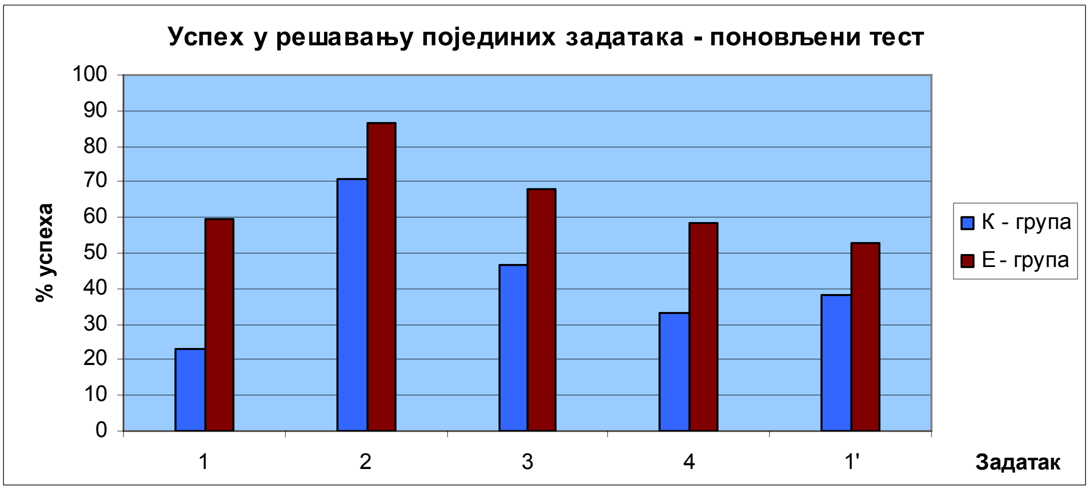
На Поновљеном тесту, E_0 – група успешнија по просечном броју освојених поена по ученику $\overline{x}_E = 26.95918$ и $\overline{y}_K = 18.02564$.

Табела 12. Збирни резултати Поновњеног теста

	Група	*n*	PU	AS	STD	*t*	*p*
$E_0 + K_0$	E_0	45	67.40%	26.95918	10.58678	3.947085	0.00016
	K_0	43	45.06%	18.02564	10.22186		

Слично је са бројем укупно освојених бодова, тј. $p_E = 67.40\%$, а $p_K = 45.06\%$, што је приказано у Табели 12.

Са хистограма успеха у решавању појединих задатака на Поновљеном тесту, види се да су ученици експерименталне групе били успешнији од ученика контролне групе у свим задацима.



5.9. Резиме

У малом броју школа постоје кадровски услови, услови простора и опремљености, расположење наставника математике, као и осталих наставника у колективу, за спровођење једног оваквог истраживања.

Често се дешава да, ако је школа солидно опремљена, онда наставници, или нису обучени за увођење рачунара у наставу, или то не желе, иако су обучени.

На срећу, ово истраживање нису пратили проблеми ове врсте, већ напротив, постојали су солидни услови за спровођење истраживања, како у погледу позитивног односа, искусних и веома оспособљених наставника математике, тако и у погледу опремљености обеју школа, и коначно, расположења њихових директора да истраживање буде успешно спроведено.

Педагошка истраживања, која подразумевају да претходно треба обучити чланове експерименталне групе, за успешно увођење експерименталног фактора, веома су обимна и сложена, а њихово спровођење често прате и неке отежавајуће околности. Тако је било и са овим истраживањем.

На пример, мали број ученика, мање од четвртине, користили су образовни софтвер GeoGebra, пре почетка истраживања, а то значи да је знатно мање оних ученика који су могли њиме успешно и да се служе. То је свакако проблем чије је превазилажење захтевало додатни напор. Било је потребно:

- прилагођавање наставних садржаја аналитичке геометрије новим условима наставе и нивоу обучености ученика, да користе унапред припремљене апликације у програму GeoGebra,
- успешно обрађивати наставне садржаје, са којима се ученици сусрећу по први пут,
- упоредо с тим, у ходу, постепено обучавати ученике за успешну визуализацију сложенијих математичких концепата, креирањем одговарајућих апликација у програму GeoGebra.

С тим у вези, уложен је велики труд, од стране свих учесника у истраживању, на његовој коректној реализацији. Посебна пажња је посвећена дидактичком принципу визуализације, и примени наставних метода – објашњавачко-илустративне и репродуктивне.

Резултати које су постигли ученици у решавању задатака, анализирани у 5.8, упућују на закључак да су постављени циљ и задаци овог педагошког истраживања реализовани у потпуности.

На основу реализације постављеног циља и постављених задатака истраживања створени су услови за извођење следећих закључака:

- Потврђено је да постоје педагошко – дидактички предуслови за успешну примену наставе уз помоћ рачунара у реализацији наставних садржаја аналитичке геометрије у гимназији,
- Потврђено је повећање образовног учинка, у настави уз помоћ рачунара, у односу на традиционалну наставу, који се огледа у оспособљености ученика за самостално учење и стицање знања, за примену стечених знања, као и у погледу трајности стечених знања.

То значи да је настава уз помоћ рачунара наставни систем у коме се успешно реализују наведени циљеви савремене наставе математике.

6. ЗАКЉУЧАК

На основу изложеног у претходним главама ове докторске дисертације и наставних садржаја аналитичке геометрије у равни, презентованих у прилогу – интерактивном уџбенику, као и на основу спроведеног педагошког истраживања, могу се извести следећи закључци:

1. Успешно је реализована методичка трансформација научних у наставне садржаје аналитичке геометрије у равни, у наставном систему настава уз помоћ рачунара, што потврђују успешно испуњени следећи задаци:

   а) део садржаја аналитичке геометрије, обрађен је у Глави 3. (одељци: 3.4, 3.5. и 3.6.) и Глави 4. докторске дисертације, израдом одговарајућих апликација и генеричких организатора у програмима GeoGebra и Matheamtica,

   б) тема „Општа квадратна једначина и крива другог реда", **обрађена је на потпуно нов начин** – изометријским трансформацијама саме криве у истом координатном систему, а не трансформацијом координатног система – поступком уобичајеним, и у актуелној, и у традиционалној уџбеничкој литератури (видети такође [76]),

   в) израђен је интерактивни уџбеник аналитичке геометрије, прилагођен настави уз помоћ рачунара, применом образовног софтвера GeoGebra и Matheamtica, снабдевен са преко 250 апликација и генеричких организатора разних дефиниција, особина и решња задатака,

   г) наставно градиво изложено у уџбенику, предвиђено је актуелним наставним програмом за обраду у редовној и додатној настави, а неки садржаји у прилогу погодни су и за израду матурских радова,

   д) у одељку 3.6, Главе 3. докторске дисертације и у интерактивном уџбенику, применом програма GeoGebra анимирани су елементарни екстремални проблеми и примењени у обради оптичког својства кривих другог реда, са неким значајним применама (у вези с тим видети такође [73], [74], [75], [76], [77] а), [77] б) , [77] в)),

   е) у одељцима 3.5. и 3.6, Главе 3, у Глави 4. докторске дисертације и у одељку 7.2. Додатка интерактивног уџбеника, применом програма GeoGebra и Matheamtica, успешно су презентоване изометријске и афине трансформације и примењене у анализи наставних метода и у решавању неких важних задатака;

2. У одељцима 3.1, 3.2. и 3.3, Главе 3, детаљано је теоријски обрађен дидактички систем настава уз помоћ рачунара, реализацијом следећих задатака:

   а) анализом међусобне зависности фактора наставе,

   б) анализом дидактичких принципа, заступљених у настави уз помоћ рачунара, са посебним нагласком на принцип индивидуализације и принцип визуелизације,

   в) класификацијом и приказом наставних метода коришћењем подесно формираних генеричких организатора у програмима GeoGebra и Mathematica,

   г) анализом образовног софтвера (посебно GeoGebra и Matheamtica), који представља **потребан услов** за успешну реализацију наставе уз помоћ рачунара,

   д) анализом места, улоге и суштинског утицаја наставних средстава – рачунара и образовног софтвера, на карактер наставе математике, а посебно

      – на карактер наставних метода,

      – на дидактичке принципе,

   чиме је још једном потврђена њихова улога у настави математике и чињеница да рачунар и образовни софтвер представљају (четврти) фактор наставе, тј. **доказује се да је настава уз помоћ рачунара – посебан дидактички систем**;

3. **Резултати педагошког истраживања,** приказани у Глави 5., потврђују да су постављени циљ и задаци овог педагошког истраживања реализовани у потпуности, одакле непосредно следи:

   а) потврђено је повећање образовног учинка, у настави уз помоћ рачунара, у односу на традиционалну наставу, што се огледа у бољој оспособљености ученика за самостално учење и стицање знања, за успешнију примену стечених знања, као и већу трајност стечених знања,

   б) потврђено је да постоје педагошко – дидактички предуслови за успешну примену наставе уз помоћ рачунара у реализацији наставних садржаја аналитичке геометрије у гимназији,

   в) резултати два истраживања, од наведена три, делимично су публиковани на 12. српском математичком конгресу, (у вези с тим видети [75])

Из наведеног следи да су постављени циљеви докторске дисертације успешно реализовани у потпоности.

На основу изложене реализације постављених циљева и задатака докторске дисертације, нужно је да се нагласи да оно што представља основне вредности дидактичког систеам – настава уз помоћ рачунара, и што га чини парадигматичним у настави математике, огледа се у:

1. **Могућности визуелизације наставних садржаја**

Визуелизација наставних садржаја у овом дидактичком систему је **дидактички принцип**. Визуелизација је у свакој наставној методи овог наставног система, значи – није метод. (Без овог принципа, настава уз помоћ рачунара била би настава уз помоћ доброг дигитрона).

2. **Могућности изградње генеричких организатора**

Генерички организатори као средина за развијање и примену математичких концепата, представљају идеалне услове за когнитивно – визуелни приступ у разумевању и усвајању математичких садржаја, идеално средство за визуелизацију наставног садржаја.

3. **Могућности примене савремених наставних метода**

Настава уз помоћ рачунара, показала се као дидактички систем у коме се могу успешно примењивати савремене наставне методе, посебно проблемска и истраживачка. Ове методе, између осталог, обезбеђују дубоко улажење у суштину изучаваног проблема, повишено лично ангажовање и интересовање за учење сваког ученика, што има за последицу развијање стваралачких способности ученика.

4. **Могућности индивидуализације наставе**

У овом наставном систему, постоје сви услови за успешну индивидуализацију наставе и индивидулизацију активности ученика. Индивидуализована настава математике **мотивише ученика на активност**, тиме што му оставља могућност да ради на оном нивоу који је за њега увек могућ и достижан.

То значи да је **настава уз помоћ рачунара дидактички систем у коме се успешно реализују наведени циљеви савремене наставе математике: развијање стваралачког мишљења, стицање математичких знања и умења, неопходних за разумевање законитости у природи и друштву и примену у свакодневном животу.**

На крају, на основу напред изведених закључака, може се констатовати да је **постављени основни циљ докторске дисертације остварен у потпуности, тј. ова докторска дисертација треба да допринесе унапређењу теорије и праксе методике наставе математике (аналитичке геометрије) у гимназији, уз могућност адекватног избора, артикулације и трансформације наставних садржаја и њихове дидактичке обраде у оквиру дидактичког система**

настава уз помоћ рачунара, чиме се настава математике усмерава на процес стицања знања и могућност примене знања.

На тај начин резултати докторске дисертације представљају значајан допринос решавању основног и увек **актуелног** проблема – проблема унапређења наставе математике.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Апатова, Н. В.: Дидактические аспекты компьютерного обучения, УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ТНУ Выпуск N 3(42) http://www3.crimea.edu/tnu/magazine/scientist/edition3/n03016.html

[2] Апатова Н.В. Информационные технологии в школьном образовании. М.: издво РАО., 1994.- 228 с

[3] Акопян, А.В., Заславский, А.А.: Геометрические свойства кривых второго порядка, Издательство МЦНМО, Москва, 2007.

[4] Analytic Geometry (in a plane) http://www.ping.be/~ping1339/Pana.htm

[5] Анђић, М.: Методичка трансформација и модели проблемске наставе теорије бројева у настави математике у гимназијама (докторска дисертација), ПМФ у Новом Саду, 2005.

[6] Arnhajm, R.: *Novi eseji o psihologiji umetnosti*, Beograd, SKC Beograd, Knjižara Book War i Univerzitet umetnosti Beograd, 2003.

[7] Арсовић, Б.: Образовни софтвер у савременој настави, Педагошка стварност LII, 7-8 (2006), Нови Сад

[8] Баковљев, М.: Дидактика, Научна књига, Београд, 1998.

[9] Бандић, И., Илић-Дајовић, М., Математика за III разред гимназије природно-математичког смера, Завод за уџбенике и наставна средства, Београд, 1975.

[10] Батлер, Ч. Х., Врен, Ф. Л.: Настава математике у средњој школи. В. Караџић, Београд 1967.

[11] Беклемишев, Д. В.: Курс аналитеческой геометрии и ленейной алгебри. - 10-е изд., ФИЗМАТЛИТ, 2005.

[12] Башмаков М. И., Поздняков С. Н., Резник Н. А.:Информационная среда обучения,Свет,1997, http://www.bookshunt.ru/b543_informacionnaya_sreda_obucheniya

[13] Беклемишева, Л. А., Петрович, А. Ю., Чубалов, И. А.:Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре, Издание второе переработаное, ФИЗМАТЛИТ МОСКВА 2001

[14] Бел, Э. Т.: Творцы математики, Пособие для учителей, Под редакцией и дополнениями С.Н.Киро, "Просвещение" Москва 1979.

[15] Buzan, T. : Koristite obe hemisfere mozga, Finesa, Beograd, 2001. http://www.scribd.com/doc/35887981/Koristite-Obe-Hemisfere-Mozga

[16] Буланова-Топоркова М.В., Духавнева А.В., Столяренко Л.Д. и др. Педагогика и психология высшей школы / Серия "Учебники и учебные пособия". - Ростов-на-Дону: "Феникс", 1998.

[17] Васильев, Н. Б., Гутенмахер, В. Л.: Прямые и кривые, "Наука", Москва, 1978.

[18] Виноградова Л.В.: Методика преподавания математики в средней школе. "Феникс", Ростов на Дону, 2005 г.

[19] Вилейтнер, Г.: История математики от Декарта до середини XIX столетия Перевод с немецкого под редакцией А. П. Юшкевича государственное издательство физикоматематической литературы, Москва 1960

[20] Vukadinović, S.: Elementi teorije verovatnoće i matematičke statistike, Privredni pregled, Beograd, 1973.

[21] Данилов, М. А. и др. (1975), Дидактика средней школы - некоторые проблемы современной дидактики, *Под редакцией М. А. Данилова и М. Н. Скаткина*, Просвещение, Москва; Retrieved March 1, 2014 from http://elib.gnpbu.ru/text/didaktika-sredey-shkoly_1975
[22] Гельфанд, И. М. и др.: Метод координат. Наука, Москва 1968.
[23] Даан-Дальмедико, А., Пейффер, Ж.: Пути и лабиринты, очерки по истории математики (Перевод с французского А-А. Бряндинцкой) Москва «МИР» 1986
[24] Далингер, В.А.: Когнитивно-визуельный подход и его особенности в обучении математике Вестник Омского государственного педагогического университета» Выпуск 2006 ▪ www.omsk.edu
[25] Декарт, Ренэ: Геометрия с приложением изабранных работ П. Ферма и переписки Декарта, (перевод, примечания и статья А. П. Юшкевича), Государственное обьединенное научно-техническое издательство НКТП СССР, Редакция техникотеоретической литературы, Москва - Ленинград 1938.
[26] Делоне, Б. Н., Райков, Д. А.: Аналитическая геометрия. ОГИЗ, Москва, 1948.
[27] Лернер, И.Я., Скаткин, М.Н.: О методах обучения. Сов. Педагогика, Москва, № 3, 1965.
[28] Дорофеева, А.: Ренэ Декарт и его "Геометрия". Журнал Квант, номер 9. 1987. kvant.mccmo.ru Квант.mccmo.ru http://kvant.mirror1.mccme.ru/
[29] Дорфман, А.Г.: Оптика конических сечений. ФИЗМАТГИЗ, Москва, 1959.
[30] Дьяченко, С. А.: Использование интегрированной символьной системы Mathematica при изучении курса высшей математики в вузе, Автореферат диссертации - теория и методика обучения математике, Орел, 2000. www.exponenta.ru/educat/news/avtoref/2.asp
[31] Ђорђевић, Ј.: Савремена настава - организација и облици. Научна књига, Београд 1981
[32] Ђорђевић, Ј..: Иновације у настави, Просвета, Београд, 1986.
[33] Ђорђевић, Ј.: Избор наставних метода и ефикасност образовања, Настава и васпитање, 1-2(2000), 150-159.
[34] Ђукић, М.: Дидактичке иновације као изазов и избор, Савез педагошких друштава Војводине, Нови Сад, 2003.
[35] Ефимов, Н. В.: Краткий курс аналитической геометрии. Учебн. пособие. - 13-е изд, ФИЗМАТЛИТ, 2005.
[36] Заславский, А.А.: Геометрические преобразования, МЦНМО, Москва, 2004.
[37] Зимина, О.В.: От компьютерной поддержки к новому объекту обучения. “Математика. Компьютер. Образование”. Сборник научных трудов. Москва–Ижевск: R&C Dynamics, 2003. С. 65—76. http://www.mce.su/rus/
[38] Зинченко В.П., Вергилес Н.Ю. Формирование зрительного образа. Исследование деятельности зрительной системы. М.: Изд-во МГУ, 1969 http://psychlib.ru/mgppu/ZOd-1997/ZOd-1961.htm
[39] Ивковић, З.А.: Математичка статистика, Научна књига, Београд, 1980.
[40] Илюшин, С. А., Собкин, Б. Л.: Персональные ЭВМ в учебном процессе. М.,1992.
[41] Јукић, С.: Логичке методе у настави, Зборник радова, Учитељски факултет, Јагодина, 1998.

[42] Кечкић, Ј.: Математика са збирком задатака, за III разред средње школе, Научна књига Београд и Завод за уџбенике Нови Сад, 1992.
[43] Клетеник, Д. В. и др.: Сборник задач по аналитеческой геометрии. Наука, Москва, 1967.
[44] Колягин, Ю. М., Оганесян, В.А. и др.: Методика преподавания математики в средней школе, "Просвещение", Москва, 1977.
[45] Кркљуш, С.: Образовна технологија и савремена настава, Мисао, Нови Сад, 1986.
[46] Куписевич, Ч.: Основы общей дидактики. М.,1986
[47] Курант, Р., Робинс Х.: Шта је математика? Научна књига, Београд, 1973.
[48] Курепа, Ђ. и др.: Аналитичка геометрија. Школсака књига, Загреб 1965.
[49] Лаврентьев, Г.В., Лаврентьева, Н.Б., Неудахина, Н.А.: Иновационные обучающие технологии в професиональной подгатовке специалистов, 2002. www2.asu.ru
[50] Лекић, Ђ.: Методологија педагошког истраживања, Завод за издавање уџбеника, Београд 1980.
[51] Лернер И.Я. Дидактические основы методов обучения. М., 1981.
[52] Липковски, А.: Линеарна алгебра и аналитичка геометрија. Научна књига, Београд 1995.
[53] Лопшиц, А. М.: Аналитическая геометрия. Для педагогических институтов, УЧПЕДГИЗ, Москва, 1948.
[54] Мандић, П., Пејић, М.: Примена савремених компјутера у педагошком раду. Иновације у настави, бр. 3. Београд, 1984.
[55] Мандић, Д.: Дидактичко-информатичке иновације у настави, Медиа-граф, Београд, 2003.
[56] Мандић, П.,: Индивидуална комплексност и образовање, Научна књига, Београд, 1995.
[57] Мамузић, З. П.: Детерминанте, матрице, вектори, аналитичка геометрија. Грађевинска књига, Београд 1977.
[58] Маркушевич, А. И.: Замечательные кривые, Государственное издательство технико – теоретической литературы, Москва – Ленинград, 2007.
[59] Огњановић, С., Ивановић, Ж.: Збирка задатака, за III разред гимназије, Круг, Београд
[60] Моденов, П.С., Пархоменко, А.С.: Сборник задач по аналитической геометрии. - М., Физматлит, 1976.
[61] Мужић, В.: Методологија педагошког истраживања, Завод за издавање уџбеника, Сарајево 1973.
[62] Николић, М.М.: Уводне теме у методику математичког образовања, Младо поколење, Београд, 1967.
[63] Pavleković, M., Kolar, R.: Računalo u nastavi matematike, Poučak, 5(2001), 47-50.
[64] "Педагогика". Под редакцией Ю. К. Бабанского."Просвещение", Москва, 1983 г. OCR Detskiysad.Ru http://www.detskiysad.ru/ped/ped142.html
[65] Пенавин, В.: Структура и класификација метода у настави аритметике и алгебре, Београд: Завод за издавање уџбеника СРС, 1966
[66] Пољак, В.: Дидактика, Школска књига, Загреб 1970.
[67] Понарин, Я. П.: Алгебра комплексных чисел в геометрических задачах, МЦНМО, 2004.
[68] Постников, М. М.: Аналитическая геометрия. Наука, Москва 1979.

[69] Правилник о плану образовања и васпитања за гимназију и програму образовања и васпитања за I разред, Службени гласник СРС - Просветни гласник, бр. 5/90. http://www.mp.gov.rs/propisi/kategorija.php?id=12
[70] Правилник о плану и програму образовања и васпитања за гимназију, Службени гласникк Републике Србије - Просветни гласники, бр. април 1991. године, http://www.mp.gov.rs/propisi/kategorija.php?id=12
[71] Прасолов, В.В., Тихомиров, В.М.: Геометрия.- М.: МЦНМО, 2007.
[72] Prensky, M.: Changing Paradigms from "being taught" to "learning on your own with guidance", Educational Technology, July-Aug, 2007. http://www.marcprensky.com/writing
[73] Прентовић, Б.: Неке дефиниције и конструкције кривих другог реда које се ређе користе, Педагошка стварност LIII, 9-10 (2007), Нови Сад.
[74] Прентовић, Б.: Рачунар у настави аналитичке геометрије – примери примене, Зборник радова 12. СРПСКОГ МАТЕМАТИЧКОГ КОНГРЕСА, Нови Сад, 2008.
[75] Прентовић, Б.: Рачунар у настави аналитичке геометрије – педагошко истраживање, Зборник радова 12. СРПСКОГ МАТЕМАТИЧКОГ КОНГРЕСА, Нови Сад, 2008.
[76] Прентовић, Б., Херцег, Д.: Анализа опште квадратне једначине – применом рачунара, Педагошка стварност LVI, 10 (2009), Нови Сад
[77] а) Прентовић, Б., Херцег, Д. Рачунар у функцији визуализације наставног садржаја, Зборник радова ТИО VII, 20. и 21. септембар, Филозофски факултет у Бања Луци, 2013. (рад позитивно рецензиран, у штампи)
б) Prentović, B. Računar u funkciji individualizacije nastave matematike, Metodički obzori, Pula, Republika Hrvatska (rad pozitivno recenziran, u štampi)
в) Прентовић, Б. Рачунар у функцији развијања појмова о скупу и природном броју, Зборник ВШССОВ Кикинда, година VIII број 1, Кикинда 2013.
[78] Presmeg, N.C.: Visualisation and mathematical giftedness http://www.springerlink.com/content/r13w63997755h611/
[79] Привалов, И. И.: Аналитическая геометрия. Физматгиз, Москва, 1962.
[80] Продановић, Т., Лекић, Ђ., Дамјановић, В., Стефановић, В.: Истраживање у настави, (методолошки приручник за школе и наставнике), Раднички универзитет "Радивој Ћирпанов", Нови Сад, 1972.
[81] Продановић, Т., Ничковић, Љ.: Дидактика. Завод за уџбенике и наставна средства, Беогеад 1974.
[82] Протасов, В.Ю.: Максимумы и мимимумы в геометрии, Издательство Московского центра непреривного математического образованија • Москва • 2005.
[83] Рашајски, Б. Н.: Аналитичка геометрија. Грађевинска књига, Београд 1968.
[84] Резник Н.А. «Методические основы обучения математике в средней школе с использованием средств развития визуального мышления» Автореферат на соискание степени доктора педагогических наук по специальности 13.00.02 - теория и методика обучения и воспитания математике, Москва-1997. http://www.vischool.rxt.ru/avtoref/rez_aref.htm

[85] Резник Н.А. Технология визуельного мышления // Информационная среда обучения. СПб.: Свет, 1997.
[86] Резник Н.А. Визуализация учебного контента в современном информационном пространстве, Визуальная школа, МГПУ, 2007. http://www.vischool.rxt.ru/index.htm
[87] Розенфельд, Б. А.: Аполоний Пергский, МЦНМО, Москва, 2004.
[88] Садовская, И. Л.: К вопросу о классификации и структуре методов обучения http://sci.informika.ru/text/magaz/pedagog/pedagog_11/kvok.html
[89] Suhodolski, B.: Tri pedagogije, BIGZ, Beograd, 1974.
[90] Стојаковић, З. и Херцег, Д.: Линеарна алгебра и аналитичка геометрија. Завод за издавање уџбеника, Нови Сад, 1982.
[91] Stein, Sherman: Calculus and Analytic Geometry. McGraw-Hill Book Co, New York 1977.
[92] Skemp, R. R.: The Psychology of Learning Mathematics, Pelican, London, 1971.
[93] Такачи, Ђ., Радовановић, Ј.: Улога рачунара у испитивању тока функције, Педагошка стварност LII, 1-2 (2006), Нови Сад
[94] Tall, D.: Using computer graphics as generic organisers for the concept image of differentiation, Proceedings of PME 9(1985), Holland, 1, 105-110.
[95] Tall, D.: Visualising calculus concepts using a computer, The Influ-ence of Computers and Informatics on Mathematics and its Teaching: Document de Travail, I.C.M.I., Strasbourg, 203-212, 1985.
[96] Tall, D.: 1993.Using the computer as an environment for building and testing mathematical concepts: A Tribute to Richard Skemp www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall
[97] Tall, D.: 1989. 'Concept Images, Generic Organizers, Computers, and Curriculum Change' For the Learning of Mathematics, 9, 3, 37 – 42.
[98] Tall, D., Sheath, G.: Visualizing higher level mathematical concepts using computer graphics, Proceedings of the Seventh International Conference for the Psychology of Mathematics Education, Israel, 357-362, 1983.
[99] Tall, D.: 1986.Lies, Damn Lies ... and Differential Equations www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall
[100] D. Tall: Concept Image and Concept Definition in Mathematicswith particular reference to Limits and Continuity, Published in Educational Studies in Mathematics, 12, 151-169, (1981).
[101] Tall, D.: 1990.Using Computers Environments to Conceptualize Mathematical Ideas www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall
[102] Tall, D., Intuition and rigour: the role of visualization in the calculus, Visualization in Mathematics (ed. Zimmermann & Cunningham), M.A.A., Notes No. 19(1991), 105-119.
[103] Tall, D., Simpson, A.: Computers and the Link between Intuition and Formalism. In Proceedings of the Tenth Annual International Conference on Technology in Collegiate Mathematics. Addison-Wesley Longman, 417–421(1998).
[104] Tall, D.: 1991. Recent developments in the use of the computer to visualize and symbolize calculus concepts www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall
[105] Tall, D., Soo Duck, C., Aspects of the construction of conceptual knowledge: the ca-se of computer aided exploration of period doubling, Proce-edings of BSRLM Conference, 5th June, St Martin's Lancaster, 13-18(1999).

[106] TIMSS 2003. у Србији, Институт за педагошка истраживања, Београд 2005.
[107] Hartop, B., Farrell, S., Interaktivne nastavne metode, Obrazovna tehnologija, 2(2001), 9-23.
[108] Хаџић, О., Николић – Деспотовић, Д.: Вероватноћа и математичка статистика за III разред средњег образовања, Завод за издавање уџбеника Нови Сад, 1992.
[109] Херцег, Д.: Како научити језик математике путем нових уџбеника, Мисао, 12/13 (470/471), II (XXIX), 10-11.
[110] Херцег, Д.: Математика и рачунари у настави, НаРа 2002, Зборник радова по позиву, З. Будимац, М. Ивановић, eds., Природно-математички факултет, Департман за математику и информатику, Нови Сад, 2002, 163-167.
[111] Херцег, Д., Недић, Ј., Радека, И.: Кроз математику са Mathematica-om, Институт за математику, Природно-математички факултет, Нови Сад, 2001.
[112] Херцег, Д., Херцег, Ђ.: Математичке формуле, Змај, 2000.
[113] Херцег, Д., Херцег,Ђ.: GeoGebra – у настави математике http://www.dms.org.rs/seminars/seminar_2009/papers/D.Herceg%20Dj.Herceg.pdf
[114] Hohenwarter, M.: GeoGebra - ein Softwaresystem für dynamische Geometrie und Algebra der Ebene. Diplomarbeit, Universität Salzburg, 2002.
[115] Hohenwarter, M.: GeoGebra - dynamische Geometrie und Algebra. Ин: Der Mathematikunterricht 4 / 2003, 33-40, 2003.
[116] Choquet, G., Nastava geometrije, Školska knjiga, Zagreb, 1974.
[117] Wolfram, S.: The Mathematica book, Cambridge University Press-Cambridge 1996.
[118] Шаль, Мишель: Исторический обзор происхождения и развития геометрических методов, переводчикъ В.Я. Цингеръ http://ru.wikisource.org/wiki/Мишель_Шаль
[119] Šoljan, N.: Programirana nastava i nastava uz pomoć kompjutera, Naučna knjiga, Beograd, 1997.

[120] Artigue, M. (2001) Learning Mathematics in a CAS Environment: The Genesis of a Reflection about Instrumentation and the Dialectics between Technical and Conceptual Work Université Paris 7 Denis Diderot & IREM, CAME Symposium 2001.
[121] Bayturan, S., Kesan, C., (2012), The effect computer assisted instruction on the achievement and attitudes towalds mathematics of students in matehemetics education, International Journal of Global Education - 2012, volume 1, issue 2
[122] Clark, D. L. (2004). The effects of using computer-assisted instruction of assist high school geometry students achieve higher levels of success on the Florida Competency Achievement Test (fcat), Doctoral dissertation, Union Institute and University, Cincinnati, Ohio
[123] Chuang, T., Chen, W. (2009). Effect of computer-based video games on children: An experimental study. *Educational Technology & Society*, *12*(2), 1-10. Retrieved March 1, 2014 from http://www.ifets.info
[124] Hannafin, R., Foshay, W. (2008). Computer-based instruction's (CBI) rediscovered role in K-12: An evaluation case study of one high school's use of

CBI to improve pass rates on high-stakes tests. *Educational Technology Research & Development, 56*(2), 147-160.

[125] Hennessy, S., Ruthven, K., & Brindley, S. (2005). Teacher perspectives on integrating ICT into subject teaching: commitment, constraints, caution, and change. *Journal of Curriculum Studies*, VOL.37, NO. 2, 155–192; Retrieved March 1, 2014 from http://www.tandf.co.uk/journals

[126] Kulik,C.-L.C., Kulik, J. A. (1991) Effectiveness of computer-based instruction: An updated analysis, Computers in Human Behavior, Volume 7, Issues 1–2, Pages 75–94

[127] Lee, W.-C. (1990), The effectiveness of computer-assisted instruction and computer programming in elementary and secondary mathematics: A meta-analysis (January 1, 1990). *Electronic Doctoral Dissertations for UMass Amherst.* Paper AAI9022709; Retrieved March 2, 2014 from http://scholarworks.umass.edu/dissertations/AAI9022709

[128] Li, Q., Ma, X. (2010). A Meta-Analysis of the Effects of Computer Technology on School Students' Mathematics Learning. *Educational Psychology Review, 22*(3), 215-243. Retrieved February 1, 2014 from http://www.editlib.org/p/51880

[129] Liao, Y.-k. C. (2007) Effects of computer-assisted instruction on students' achievement in Taiwan: A meta-analysis, February 2007, Computers & Education, Volume 48, Issue 2, Pages 216–233

[130] Reed, H.C., Drijvers, P., Kirschner, P.A. (2010).Effects of Attitudes and Behaviours on Learning Mathematics with Computer Tools. *Computers & Education, 55*(1), 1-15. Retrieved January 28, 2014 from http://www.editlib.org/p/66608

[131] Muir-Herzig, R. G. (2004) Technology and its impact in the classroom, Computers & Education, Volume 42, Issue 2, February 2004, Pages 111–131

[132] Ruthven, K. (2002) Instrumenting Mathematical Activity: Reflections on Key Studies of the Educational Use of Computer Algebra Systems, International Journal of Computers for Mathematical Learning 10-2002, Volume 7, Issue 3, pp 275-291

[133] vom Hofe, R. (2001), Investigations into students' learning of applications in computer-based learning environments Teaching Mathematics and its Applications, Oxford University Press, Volume 20, Number 3, September 2001 , pp. 109-120(12)

[134] Thomas, M., & Tall, D. (1998). Longer-term conceptual benefits from using a computer in Algebra teaching. *Proceedings of the 12th Conference of PME*, Budapest, 601-608.

[135] Правилник о општим стандардима постигнућа за крај општег средњег образовања и средњег стручног образовања у делу општеобразовних предмета ("Сл. гласник РС", бр. 117/2013)

Интернет адресе

[1] www.a-geometry.narod.ru

[2] http://e.math.hr/index.html

[3] http://www3.interscience.wiley.com/journal/118532949/home

[4] Journal of Computer Assisted Learning

[5] http://www.math.hr/mfl/
[6] www.exponenta.ru
[7] http://www.problems.ru/
[8] http://www.emis.de/journals/index.html
[9] http://kvant.mirror0.mccme.ru/
[10] http://eqworld.ipmnet.ru/indexr.htm
[11] www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/downloads
[12] http://www.komal.hu/info/bemutatkozas.e.shtml
[13] http://mathworld.wolfram.com/
[14] http://www.geogebra.org/
[15] http://www.dynamicgeometry.com
[16] www.cabri.com
[17] http://zirkel.sourceforge.net/doc_en/index.html
[18] http://cinderella.de
[19] http://www.ofset.org/drgeo
[20] www.dynageo.de
[21] www.geonext.de
[22] http://www.chartwellyorke.com/derive.html
[23] http://www.maplesoft.com/products/maple/
[24] http://www.wolfram.com/
[25] http://www.geogebra.at.
[26] http://naukoved.ru/content/view/1079/44/
[27] http://www.home-edu.ru/user/f/00000568/zpt/head.htm
[28] http://www.eunnet.net/mif/
[29] http://mozg.by/content/
[30] http://school-collection.edu.ru/
[31] http://www.pisa.oecd.org
[32] http://www.eidos.ru/
[33] http://www.mce.su/rus/
[34] http://www.fransvanschooten.nl
[35] http://portal.ncvvo.hr/index.php?option=com_content&task=view&id=26&Itemid=1
[36] http://gym1517.ru/index.php?page=edu
[37] mf.grsu.by/Kafedry/kaf001/academic_process/033/lek2.doc
[38] http://psylist.net/pedagogika/
[39] http://www.ido.tsu.ru/ss/?unit=223&page=648
[40] http://www.geometrix.co.uk/
[41] http://webmath.exponenta.ru/dnu/lc/ag_b.html

БРАНКО ПРЕНТОВИЋ
- кратка биографија -

Рођен сам 03.02.1954. године у Српској Црњи, општина Нова Црња. У Војвода Степи сам завршио Основну школу 1968. године, а Гимназију у Српској Црњи 1972. године. На Институту за математику, Природно-математичког факултета у Новом Саду, дипломирао сам 1985. године и стекао стручни назив: дипломирани математичар. Период од јула 1980. године, до јула 1981. године, провео сам на одслужењу војног рока у тадашњој ЈНА.

Специјалистичке студије из научне области нумеричка математика, завршио сам када сам децембра 1999. године, на Институту за математику, Природно – математичког факултета у Новом Саду, где сам одбранио специјали-стички рад под насловом „Неке варијанте директног решавања дискретних аналогона обичних диференцијалних једначина“.

Магистарске студије из исте научне области нумеричка математика, завршио сам на Департману за математику Природно - математичког факултета, Универзитета у Новом Саду, где сам јуна 2003. године, одбранио магистарску тезу под насловом „Нумеричко решавање сингиларно пертурбованих проблема са нелокалним контурним условима“.

Од 1. септембра 1978. године, радим у Оџацима, у тадашњој ЗСШ „Јован Јовановић Змај“, која касније прераста у СШЦ „25. мај“, као професор математике. По његовом укидању и формирању ССШ – „Техничке школе“ Оџаци, у истој радим од септембра 1990. године, до новембра 2000. године, када прелазим у гимназију „Јован Јовановић Змај“ у Оџацима, такође на послове професора математике, а током школске 2002/03. и 2003/04, предавао сам и предмет Информатика и рачунарство. Августа 2004. године изабран сам за директора Гимназије, и на тим пословима сам радио до краја октобра 2005. године.

Након избора у звање вишег предавача за предмет: Методика развијања почетних математичких појмова, радим од 01.11.2005. године на Вишој школи за образовање васпитача у Кикинди. Ова школа на основу Закона о Високом образовању (2005.), постаје Висока школа струковних студија за образовање васпитача у Кикинди на којој настављам да радим у истом својству предавача за предмет Методика развијања почетних математичких појмова.

Током протеклог периода, излагањем саопштења, учествовао сам у раду:

- XIV Конференције из примењене математике ПРИМ 2000, Суботица,
- 12. Српског математичког конгреса, Нови Сад, 2008.
- XVIII Conference on Applied Mathematics – PRIM 2009. Суботица
- Међународна научно-стручна конференција МЕТОДИЧКИ ДАНИ [са темом] Компетенције васпитача за друштво знања, 25. маја 2013. ВШССОВ Кикинда
- Седми међународни симпозијум ТЕХНОЛОГИЈА, ИНФОРМАТИКА И ОБРАЗОВАЊЕ [са темом] Стање и проблеми, циљеви и могућности, промене и перспективе, 20. и 21. септембар 2013., Филозофски факултет у Бања Луци

У истом периоду, настали су и следећи радови:

1. Б. Прентовић: *Неке дефиниције и конструкције кривих другог реда које се ређе користе* (примена рачунара), Педагошка стварност LIII, 9-10, Нови Сад, 2007.
2. Б. Прентовић.: *Природни бројеви у теорији и у почетном математичком образова-њу*, Педагошка стварност, LIV, 5 – 6, Нови Сад, 2008.
3. Прентовић, Б.: *Рачунар у настави аналитичке геометрије* – педагошко истраживање, Зборник радова 12. Српског математичког конгреса, Нови Сад, 2008.
4. Прентовић, Б.: *Рачунар у настави аналитичке геометрије* – примери примене, Зборник радова 12. Српског математичког конгреса, Нови Сад, 2008.
5. Прентовић, Б.: *Неки критеријуми дељивости природних бројева*, Зборник ВШССОВ у Кикинди, година IV број 2, Кикинда, 2008.
6. Прентовић, Б., Херцег Д.: *Анализа опште квадратне једначине-применом рачунара*, Педагошка стварност, LV, 9 – 10, Нови Сад, 2009.
7. Прентовић, Б. *Мисаоно логичке операције и развијање почетних математичких појмова*, Зборник ВШССОВ у Кикинди, година VII број 2, Кикинда, 2012.
8. Прентовић, Б. Р*ачунар у функцији развијања појмова о скупу и природном броју*, Зборник ВШССОВ Кикинда, година VIII број 1, Кикинда 2013.
9. Прентовић, Б., Херцег, Д. *Рачунар у функцији визуализације наставног садржаја*, Зборник радова ТИО VII, 20. и 21. септембар, Филозофски факултет у Бања Луци, 2013. (рад позитивно рецензиран, у штампи)
10. Prentović, B. *Računar u funkciji individualizacije nastave matematike*, Metodički obzori, Pula, Republika Hrvatska (rad pozitivno recenziran, u štampi)

Као резултат рада на реализацији наставних садржаја из предмета Методика развијања почетних математичких појмова, на Вишој школи за образовање васпитача, односно на Високој школи струковних студија за образовање васпитача у Кикинди, настао је и уџбеник:

1. Прентовић, Б., Прентовић, Р.: *Методика развијања почетних математичких појмова*, Дидакта – Нови Сад, 2011.

Пошто сам сав досадашњи радни стаж провео у настави, сигурно је, да је методика наставе математике једна од најважнијих сфера мог стручног и научног усавршавања у дугом временском периоду. Резултат дугогодишњег рада је и ова Докторска дисертација – Рачунар у настави аналитичке геометрије у гимназији, чију тему је одобрило Наставно – научновеће ПМФ у Новом Саду, 19. новембра 2009. године, а Сенат Универзитета у Новом Саду 17. децембра 2009.

у Оџацима, 20.05.2014. г.

/ мр Бранко Прентовић /

ПРИЛОГ ДОКТОРСКОЈ ДИСЕРТАЦИЈИ

мр БРАНКО ПРЕНТОВИЋ

АНАЛИТИЧКА ГЕОМЕТРИЈА У РАВНИ

(ИНТЕРАКТИВНИ УЏБЕНИК)

Нови Сад, 2014.

САДРЖАЈ

ПРЕДГОВОР

Значај и место аналитичке геометрије у наставном програму математике, свакако детерминишу: циљеви, задаци, могућност примене стечених знања и сл. Основни циљ у реализацији аналитичке геометрије у трећем разреду гимназије природно–математичког смера, јесте разумевање суштине координатног метода и овладавање његовом ефикасном применом.

Осим овог основног, могу се истаћи и следећи циљеви и задаци:

- овладавање техникама формирања једначина геометријских места тачака
- успешно налажење геометријског места тачака, које одговара датој једначини
- испитивање међусобних односа геометријских места тачака
- инсистирање на целисходној примени аналитичког апарата при решавању појединих типова задатака из геометрије
- продубљивање и проширивање знање о системима линеарних једначина
- упознавање системе линеарних неједначина са две непознате, као и суштине проблема линеарног програмирања
- коришћење математичког апарата (једначина) при решавању задатака.

С друге стране, наставни садржаји аналитичке геометрије су веома **погодни садржаји за примену рачунара у настави**, тј. за реализацију у дидактичком систему настава уз помоћ рачунара.

Примена рачунара у настави математике, препоручена је и у Правилнику о наставном плану и програму за гимназију – Објашњења садржаја програма математике, [66], где је, између осталог, наглашено: "Ради осавремењивања наставе математике и ефикаснијег усвајања садржаја, пожељно је да се обезбеди и присуство рачунарске подршке у настави математике (у почетној фази у фронталном облику рада и уз коришћење узорних демонстрационих програмских апликација, уколико нема услова за масован индивидуални рад ученика на рачунару у оквиру наставе математике)".

Дакле, велике могућности за примену рачунара, које пружају наставни садржаји аналитичке геометрије, и увођење информационе технологије у наставу, данас и у будућности, иду у прилог тези о значају и месту наставних садржаја аналитичке геометрије у наставном програму математике у гимназији.

С друге стране, у свим средњошколским програмима у којима се изучава аналитичка геометрија, у већој или мањој мери, традиционално се изучавају следећи садржаји:

растојање две тачке, подела дужи у датој размери, површина троугла, права, (разни облици једначине праве, међусобни односи две праве, угао између две праве, растојање тачке од праве); криве линије другог реда: кружница, елипса, хипербола и парабола (једначине, међусобни односи праве и кривих другог реда, услов додира, тангента; заједничка својства).

Такође, у оквиру теме аналитичка геометрија у гимназији, обрађују се, као важна примена:

системи линеарних неједначина са две непознате, њихова графичка интерпретација и појам линеарног програмирања.

Наведени фактори (циљеви, задаци, наставни садржаји, могућност примене рачунара) одредили су садржај и форму овог Прилога, који као интерактивни уџбеник, представља саставни део докторске дисертације Рачунар у настави аналитичке геометрије у гимназији, аутора мр Бранка Прентовића.

Садржај Прилога је подељен у седам глава: Декартов правоугли координатни систем, Метод аналитичке геометрије, Права, Криве другог реда (кружница, елипса, хипербола, парабола), Крива другог реда и општа квадратна једначина, Конусни пресеци, Прилози (1. Вектори, 2. Геометријске трансформације, 3. Историјски преглед развоја аналитичке геометрије).

За обраду и интерпретацију наведених садржаја и израду задатака, израђено је више од 250, генеричких организатора, у програмима GeoGebra и Mathematica. С друге стране, приликом писања Уџбеника, водило се рачуна да се у обради сдаржаја аналитичке геометрије, кад год је то могуће, користити и вектор. За овакав приступ постоји неколико разлога: почев од координатног представљања вектора и могућности које пружа примена вектора у обради и интерпретацији геометријских садржаја, па све до значаја појма вектор, у готово свим математичким дисциплинама, у инфорамтици, у економији и т.д., у науци – уопште. Због наведених разлога, и због комплетности, у Уџбеник је укључен Прилог 1.

Такође, тема – Крива другог реда и општа квадратна једначина, обрађена је применом трансформација подударности (ротација и транслација), на саму криву, а не на координатни систем, за шта је коришћено координатно представљање ових трансформација. Разлози за ово почивају на следећим претпоставкама:

– на овај начин се проширује сет проблема геометрије, који се на једноставан начин могу решавати методама аналитичке геометрије,

– долази до изражаја директна примена принципа аналитичке геометрије, на познате изометријске трансформације: ротацију и транслацију, као и могућности које он пружа;

– проширују се и утврђују знања из геометрије;

– овакво представљање геометријских трансформација, подесно је за интерпретацију путем рачунара, чиме се стварају услови за лакшу примену рачунара у настави.

У оквиру теме Криве другог реда, посебно за сваку криву, обрађени су: дијаметри, полара, пол и оптичко својство, а за кружницу: полара, пол, потенција тачке и прамен кружница. Наведени садржаји, као и садржаји Прилога 2. и 3.- геометријске трансформације (подударност, сличност, афине трансформације), Историјски преглед развоја аналитичке геометрије и сл., погодни су за обраду на часовима додатне наставе, или као потенцијалне теме за израду матурских радова.

У Оџацима 20.5.2014. мр Бранко Прентовић

УВОД

Велику улогу у развоју геометрије одиграла је примена алгебре у изучавању својстава геометријских фигура, чиме су стварани услови за изграђивање једне нове самосталне науке – аналитичке геометрије. Појава аналитичке геометрије, свакако је повезана са открићем методе координата, као основном методом нове науке.

Координатама тачке називају се бројеви, који одређују положај тачке на датој правој, или у датој равни, или пак у простору. Тако је и положај тачке на површини земље одређен, ако су познате њене географске координате – ширина и дужина.

Основна карактеристика методе координата огледа се у представљању геометри-јских фигура формулама, што омогућује да се средствима алгебре обављају геометријска истраживања и решавају геометријски задаци.

Дајући геометријским истраживањима алгебарски карактер, метода координата преноси на геометрију једну од најважнијих карактеристика алгебре – једнобразност метода решавања задатака. Захваљујући томе, изучавање геометријских објеката, у већини случајева се своди на изучавање одговарајућих формула.

Иначе, рад на испитивању формула – једначина, могуће је реализовати, како методама алгебре, тако и методама математичке анализе. На тај начин се и геометрија развија, како у смеру аналитичке геометрије, тако и у смеру диференцијалне геометрије.

1. ДЕКАРТОВ ПРАВОУГЛИ КООРДИНАТНИ СИСТЕМ

1.1. КООРДИНАТЕ НА ПРАВОЈ

Из еуклидске геометрије је познато [17], да постоји бијекција (обострано једнозначна кореспонденција) са скупа реалних бројева на скуп тачака праве. За реализацију ове бијекције на правој p уочавамо тачку O која, као што је познато, дели скуп тачака праве p на два подскупа (полуправе) и на једноме од њих уочавамо тачку E. Тачки O придружићемо број 0, а тачки E број 1. Дуж $[OE]$, чија је дужина $d(O,E)=1$, представља јединицу мерења (јединичну дуж) на правој p. За позитиван смер на правој p узимамо онај, који је исти као и смер полуправе $[OE)$ [1] и обично га означавамо стрелицом, а њему супротан смер тада сматрамо негативним. Праву код које је један смер утврђен као позитиван зовемо *оса*.

Уз наведене претпоставке о оси p, применом аксиома непрекидности у еуклидској геометрији се доказаују следећа тврђења, која наводимо без доказа:

1. Ако је задата јединична дуж $[OE]$, онда за сваку тачку $A \in [OE)$ постоји тачно један број $r \in \mathbb{R}^+ \bigcup \{0\}$, тако да је $r = d(O,A)$, тј. свакој тачки A, придружујемо тачно један реалан број r;
(Ако је $A–O–E$ [2], онда постоји тачка A_1, таква да је $A-O-A_1$ и $[OA] \cong [OA_1]$. Тада постоји тачно један број $r \in \mathbb{R}^+ \bigcup \{0\}$, тако да је $r = d(O,A_1)$, тј. тачки A_1, придружујемо реалан број r, а тачки A реалан број $-r$);

2. Ако је задата јединична дуж $[OE]$, онда за сваки број $r \in \mathbb{R}^+$ постоји тачно једна тачка $A \in [OE)$, тако да је $d(O,A) = r$.
(Ако је $r < 0$, онда постоји тачно једна тачка $A_1 \in [OE)$, тако да је $d(O,A_1) = |r| > 0$, што значи да постоји тачно једна тачка A, таква да $A-O-A_1$ и $[AO] \cong [OA_1]$).

[1] $[OE)$ - затворена полуправа, са почетном тачком O, која садржи тачку E

[2] $A–O–E$ - тачка O је између тачака A и E

Ови закључци су доказ да постоји бијекција са скупа реалних бројева на скуп тачака осе, тј. сваком реалном броју одговара једна тачка на оси и свакој тачки осе одговара један реалан број - *координата*.

Чињеницу, да је положај било које тачке A на правој једнозначно одређен реалним бројем a, њеном координатом, обележавамо на следећи начин

$$A(a).$$

Оса, овако снабдевена бројевима, зове се *координатна оса*, а тачка O, којој је придружен број 0, зове се *координатни почетак*. Тачке координатне осе називају се *координатне тачке*.

Идеја да се свакој тачки придружује број (координата), представља један од принципа аналитичке геометрије.

1.2. ДЕКАРТОВ ПРАВОУГЛИ КООРДИНАТНИ СИСТЕМ У РАВНИ

Сада смо у прилици да одредимо положај тачке у равни помоћу две координате, које можемо изабрати на различите начине. Један од начина је формирање Декартовог правоуглог координатног система.

Дефиниција 1. Декартов правоугли координатни систем xOy у равни, је скуп од две међусобно нормалне (једна хоризонтална и једна вертикална) координатне осе x и y, које се секу у тачки O, заједничком координатном почету сваке од оса са једнаким јединичним дужима. Тачка O зове се координатни почетак; оса x је обично хоризонтална и назива се $x-$*оса*, или *апсциса*; оса y је обично вертикална и зове се $y-$*оса*, или *ордината*.

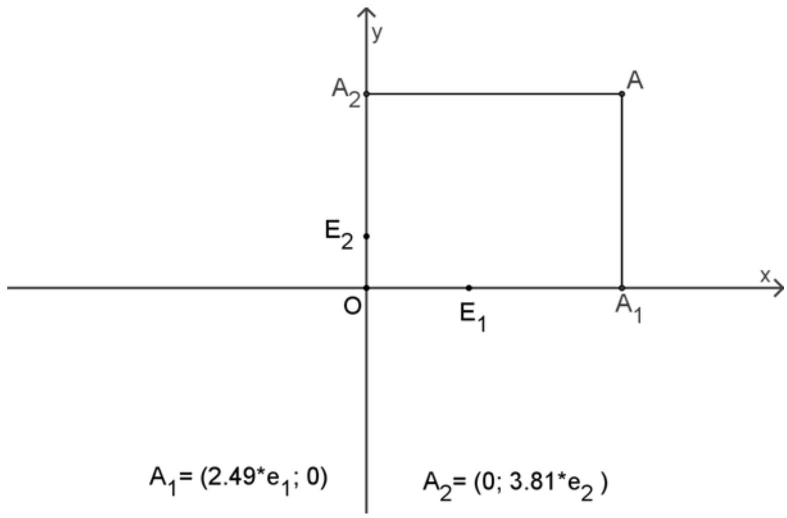
1.2.1. Тачка у равни

Теорема 1. *Ако је у равни дат Декартов правоугли координатни систем xOy, онда свакој тачки A у равни, одговара тачно један уређени пар реалних бројева $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ и обрнуто, сваком уређеном пару реалних бројева $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$, одговара тачно једна тачка A у равни.*

Доказ. Нека је A произвољна тачка у равни, која не припада ниједној од координатних оса. Означимо са A_1 подножје нормале из тачке A на $x-$*осу*, а са A_2 подножје нормале из тачке A на $y-$*осу* (Слика 1.). Пошто је нормала из тачке на праву једнозначно одређена, то је и њено подножје једнозначно одређена тачка, што значи да су и тачке $A_1 \in x$ и $A_2 \in y$, као и њихове координате a_1 и a_2, једнозначно одређене, тј. $A_1(a_1)$ и $A_2(a_2)$. Значи да на овај начин тачки A равни, одговара тачно један уређени пар реалних бројева $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$. За илустрацију покренути апликацију 1.1.a.ggb, у програму GeoGebra.

Ако тачка A припада оси x, онда је прва координата a_1, број који јој одговара, а друга координата је $a_2 = 0$, тј. тада тачки A одговара уређени пар

$(a_1, 0)$.Слично, ако тачка A припада оси y, онда је друга координата a_2, број који јој одговара, а прва координата је $a_1 = 0$, тј. тада тачки A одговара уређени пар $(0, a_2)$.



Слика 1.

Обрнуто, ако је дат уређени пар реалних бројева $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$, тада на координатним осама постоје једнозначно одређене тачке $A_1 \in x$, чија је координата a_1 и $A_2 \in y$, чија је координата a_2. Кроз тачку $A_1 \in x$ постоји једнозначно одређена нормала на осу x и кроз тачку $A_2 \in y$ постоји једнозначно одређена нормала на осу y, које се секу у тачки A, која је једнозначно одређена. Ако је задат уређени пар $(a_1, 0) \in \mathbb{R}^2$, онда је $A = A_1 \in x$, а ако је задат уређени пар $(0, a_2) \in \mathbb{R}^2$, онда је $A = A_2 \in y$. За илустрацију покренути апликацију 1.1.b.ggb, у програму GeoGebra ■

Напомена 1. Чињеницу да постоји бијекција са скупа тачака равни на $\mathbb{R}^2$, тј. чињеница да је произвољна тачка A равни одређена координатама a_1 и a_2, у аналитичкој геометрији се записује са

$$A(a_1, a_2).$$

Радијус вектор тачке

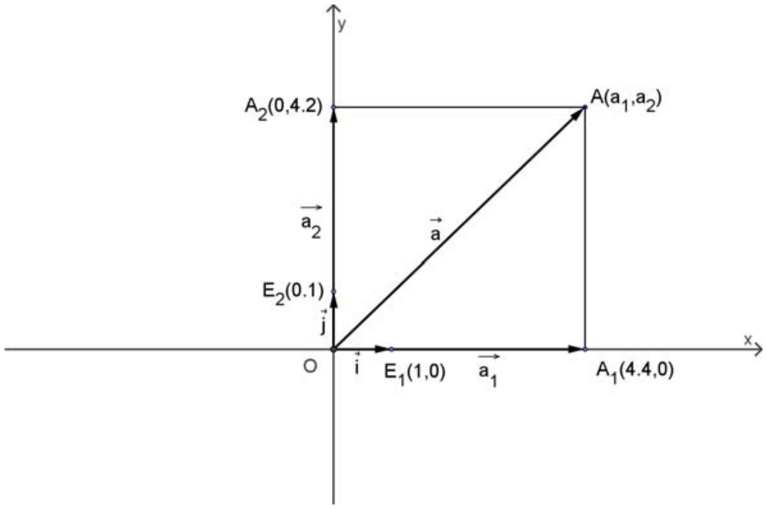
На основу закључака изведених у 1.1. и у доказу Теореме 1., може се успоставити бијекција, између тачака равни и вектора. За илустрацију покренути апликацију 1.2.ggb, у програму GeoGebra.

Наиме, ако је дата тачка $A(a_1, a_2)$ равни, онда постоји вектор (оријентисана дуж) $\overrightarrow{OA}$, представник вектора $\vec{a}$, тј. $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, где је тачка O координатни почетак, (Слика 2.). Тада нормалне пројекције $A_1(a_1, 0)$ и $A_2(0, a_2)$ тачке A на координатне осе (апсцису и ординату) представљају завршне тачке вектора

$$\overrightarrow{OA_1} = pr_x \overrightarrow{OA} \quad \text{и} \quad \overrightarrow{OA_2} = pr_y \overrightarrow{OA}.$$

Ако за тачке E_1 и E_2 важи $E_1\left(1,0\right)$ и $E_2\left(0,1\right)$, тј. $\overrightarrow{OE_1}=\vec{i}$ и $\overrightarrow{OE_2}=\vec{j}$, онда је $\overrightarrow{OA_1}=a_1\cdot\vec{i}$ и $\overrightarrow{OA_2}=a_2\cdot\vec{j}$, одакле следи

$$\vec{a}=\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}=a_1\cdot\vec{i}+a_2\cdot\vec{j}=\left(a_1,a_2\right).$$



Слика 2.

Обрнуто, ако је дат вектор $\vec{a}=\left(a_1,a_2\right)$, онда у равни постоји један његов предста-
вник $\overrightarrow{OA}$, где је тачка O координатни почетак, а за алгебарске вредности његових пројекција важи

$$\overline{pr_x\vec{a}}=\overline{pr_x\overrightarrow{OA}}=\overline{OA_1}=a_1 \quad \text{и} \quad \overline{pr_y\vec{a}}=\overline{pr_y\overrightarrow{OA}}=\overline{OA_2}=a_2,$$

где су A_1 и A_2 подножја нормала из тачке A на координатне осе, одакле је $A_1\left(a_1,0\right)$ и $A_2\left(0,a_2\right)$, што значи да је $A\left(a_1,a_2\right)$.

Вектор $\overrightarrow{OA}$, зове се *радијус–вектор* (*вектор положаја*) тачке A. Координатне осе Декартовог правоуглог координатног система деле раван на четири *квадранта* (Слика 3.).

Слика 3.

Тачка $A\left(x,y\right)$ припада: првом квадранту ако је $x>0$ и $y>0$; другом квадранту ако је $x<0$ и $y>0$; трећем квадранту ако је $x<0$ и $y<0$; четвртом квадранту ако је $x>0$ и $y<0$.

Као што је на почетку овог одељка речено, Декартов правоугли координатни систем је само један од начина да се одреди положај тачке у равни. Наиме, ако се из Дефиниције 1. изостави услов којим се захтева нормалност координатних оса, онда говоримо о *Декартовом косоуглом координатном систему* у равни.

1.3. ДУЖ И ТРОУГАО

У претходном одељку, обрађен је положај тачке у Декартовом правоуглом координатном систему. Наш задатак је, да у овом одељку утврдимо дужину дужи, координате тачке која дели дуж у датој размери, као и координате произвољне тачке дужи, тј. једначину дужи, све под условом да су задате координате крајњих тачака дужи.

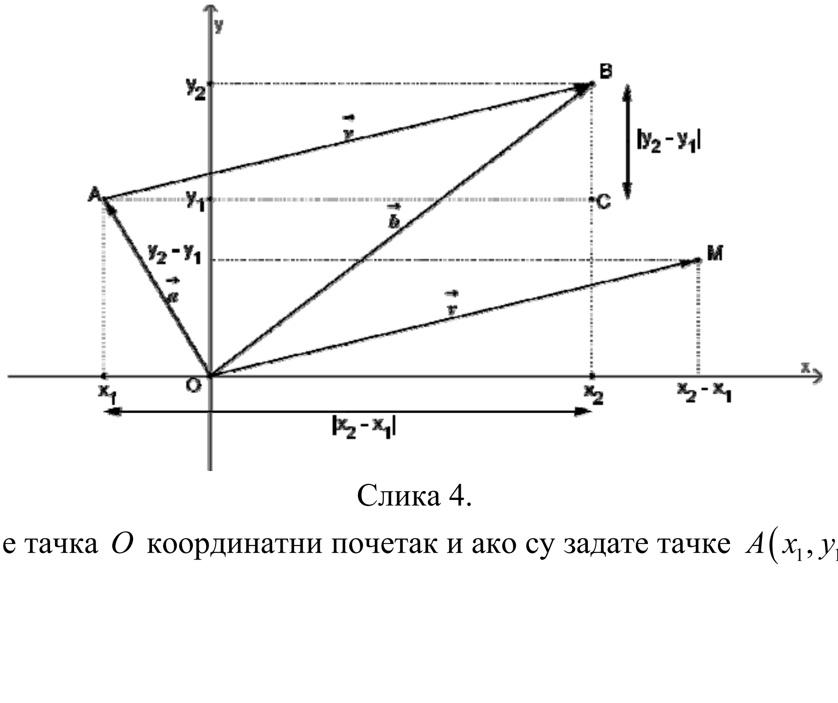
1.3.1. Дужина дужи

Наш задатак је да израчунамо дужину дужи $[AB]$, ако су задате њене крајње тачке преко својих координата: $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$.

Решавајући овај задатак полазимо од дефиниције дужи у еуклидској геометрији где се дуж $[AB]$ дефинише као скуп свих тачака *између* тачака A и B, укључу-јући и тачке A и B. Одатле, дужина дужи $[AB]$ представља растојање тачака A и B. С друге стране и интензитет вектора $\overrightarrow{AB}$ једнак је растојању тачака A и B

$$d(A,B) = \left|\overrightarrow{AB}\right|,$$

тј. израчунавање дужине дужи, своди на израчунавање интензитета вектора. За илустрацију покренути апликацију 1.3.ggb, у програму GeoGebra.



Слика 4.

Ако је тачка O координатни почетак и ако су задате тачке $A(x_1, y_1)$ и

$B(x_2, y_2)$, онда се координате вектора $\overrightarrow{AB}$ могу одредити на основу дефиниције одузимања вектора (Слика 4.)

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_2, y_2) - (x_1, y_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1) = \overrightarrow{OM} .$$

На основу Теореме 15. из одељка 3.1.2.5., интензитет вектора $\vec{v}$ једнак је

$$|\vec{v}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} ,$$

а одатле, на основу напред наведеног важи следећа

Теорема 2. *Растојање* $d(A,B)$, *тачака* $A(x_1, y_1)$ *и* $B(x_2, y_2)$, *једнако је*

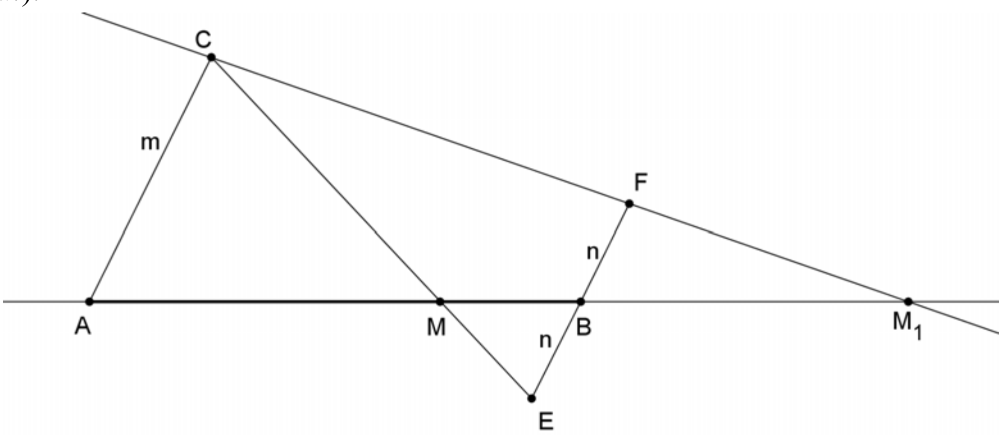
$$d(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} . \qquad \blacksquare$$

Напомена 2. До истог резултата може се доћи и без примене вектора, тј. применом Питагорине теореме на правоугли троугао ΔABC.

1.3.2. Подела дужи у датој размери

У еуклидској геометрији познат је проблем поделе дужи у датој размери, тј. познат је поступак конструкције тачке T, која дели дату дуж $[AB]$ у размери двеју датих дужи, чије су дужине m и n. За илустрацију покренути апликацију 1.4.ggb, у програму GeoGebra.

Такође је познато да, у општем случају, кад је $m \neq n$ постоје две такве тачке T и T_1 (Слика 6.), а за $m = n$ реч је о средини дужи (једнозначно одређена тачка!).



Слика 6.

У првом случају, тачка T врши унутрашњу, а тачка T_1 спољашњу поделу дужи $[AB]$ у размери $m:n$, где су m и n дужине двеју датих дужи. Наш следећи задатак је, да ако су задате крајње тачке $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$, дужи $[AB]$, одредимо координате тачке T (тачака T и T_1) која је дели у размери $\lambda \in \mathbb{R} \backslash \{-1\}$.

Решење овог задатка даје следећа теорема

Теорема 3. *Ако тачка* $T(x, y)$ *дели дуж* $[AB]$ *у односу* $\lambda \in \mathbb{R} \backslash \{-1\}$, *онда је*

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda} \text{ и } y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},$$

где су $A(x_1,y_1)$ *и* $B(x_2,y_2)$ *крајње тачке дужи* $[AB]$.

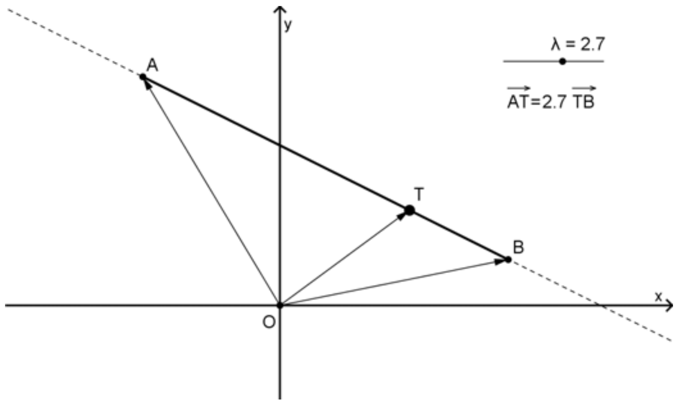
За илустрацију покренути апликацију 1.5.a.ggb, у програму GeoGebra.

Доказ. Нека је дата дуж $[AB]$ координатама својих крајњих тачака и нека је тачка $T(x_T,y_T)$ дели у односу $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, тј. нека важи (Слика 7.)

$$\overrightarrow{AT}=\lambda\cdot\overrightarrow{TB}.$$

Из последње једнакости очигледно је да важи:

1. $\overrightarrow{AT}\uparrow\uparrow\overrightarrow{TB}$, тј. $A-T-B$, ако и само ако је $\lambda>0$,
2. $\overrightarrow{AT}\uparrow\downarrow\overrightarrow{TB}$, тј. $\neg(A-T-B)$, ако и само ако је $\lambda\in(-\infty.-1)\cup(-1,0)$,
3. $T=A$ ако и само ако је $\lambda=0$.



Слика 7.

Специјално, за $\lambda=1$ тачка T је средина дужи (за $\lambda=-1$ тачка T не постоји).

На основу једнакости $\overrightarrow{AT}=\overrightarrow{OT}-\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{TB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OT}$, последња релација даје

$$\overrightarrow{OT}-\overrightarrow{OA}=\lambda\cdot\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OT}\right),$$

одакле је

(*) $$(1+\lambda)\cdot\overrightarrow{OT}=\overrightarrow{OA}+\lambda\cdot\overrightarrow{OB}.$$

Координатним представљањем радијус вектора $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OT}$ имамо

$$(1+\lambda)\cdot(x,y)=(x_1,y_1)+\lambda\cdot(x_2,y_2),$$

одакле, под условом $\lambda\neq-1$, имамо да за координате тачке $T(x,y)$, која дели дуж

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda} \text{ и } y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.$$

Ако је $\lambda=1$, тј. ако је $T=S$ средина дужи, онда су њене координате

$$x_s=\frac{x_1+x_2}{2} \text{ и } y_s=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

Да се вратимо на почетак, на случај да тачка $T(x,y)$ дели дату дуж $[AB]$ у размери $m:n$ двеју датих дужи, чије су дужине m и n, тј. $\lambda=\frac{m}{n}\neq-1$, 1.5.b.ggb.

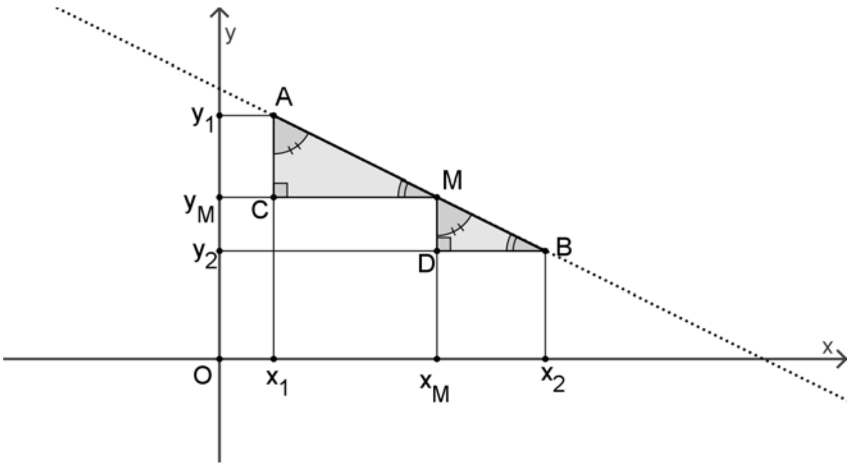
Тада за координате тачке $T(x,y)$ важи

$$x=\frac{nx_1+mx_2}{m+n} \quad \text{и} \quad y=\frac{ny_1+my_2}{m+n}.$$

И овај проблем могуће је решити без примене вектора, применом сличности троуглова. За илустрацију покренути апликацију 1.6.ggb, у програму GeoGebra. Нека су задате крајње тачке $A(x_1,y_1)$ и $B(x_2,y_2)$ и тачка $T(x,y)$ чије координате тражимо, која је дели дуж $[AB]$ у размери $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ (Слика 8.).

Пошто је $d(A,M):d(M,B)=\lambda$, а по конструкцији је $\Delta\, AMC \sim \Delta\, MBD$, онда је

$$d(A,C):d(M,D)=d(M,C):d(B,D)=\lambda,$$



Слика 8.

тј.

$$\frac{y_1-y}{y-y_2}=\lambda=\frac{x-x_1}{x_2-x}$$

одакле је

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda} \quad \text{и} \quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},$$

што је и требало да се докаже. ■

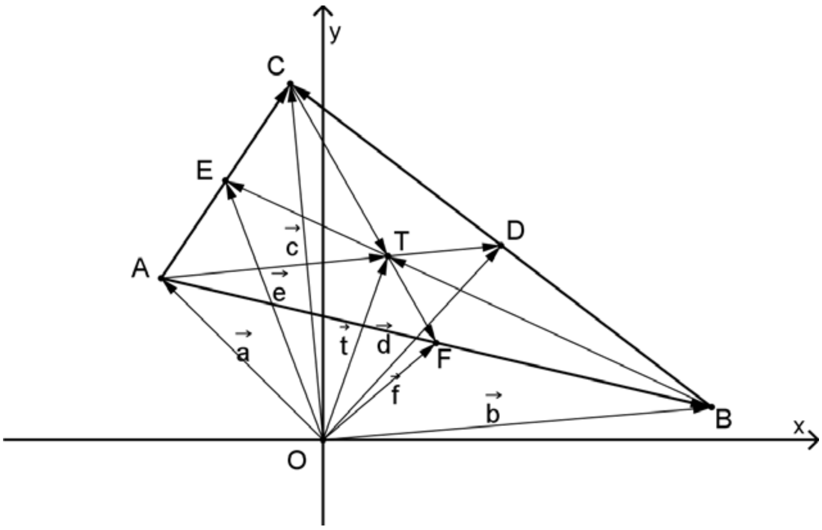
Сада, као илустрацију претходне теореме, дајемо још један доказ познате особине о тежишту троугла.

Теорема 4. *Тежишне линије троугла секу се у једној тачки (тежишту троугла), која сваку од њих дели у размери* $2:1$.

Доказ Нека је дат троугао $\Delta\, ABC$ (Слика 9.), са радијус-векторима темена троугла $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$ и $\vec{c}=\overrightarrow{OC}$ и средина његових страница $\vec{d}=\overrightarrow{OD}$, $\vec{e}=\overrightarrow{OE}$ и $\vec{f}=\overrightarrow{OF}$, 1.7.ggb. Тада је

$$\vec{d}=\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)=\frac{1}{2}\left(\vec{b}+\vec{c}\right), \quad \vec{e}=\overrightarrow{OE}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\right)=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{c}\right),$$

$$\vec{f}=\overrightarrow{OF}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}\right).$$



Слика 9.

Нека је P тачка, која дели тежишну линију $[AD]$ у размери $2:1$, тј. нека је

$$\overrightarrow{AP} = 2 \cdot \overrightarrow{PD},$$

одакле је

$$\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = 2\left(\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OP}\right).$$

Тада за радијус-вектор тачке P важи

$$\vec{p} = \overrightarrow{OP} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + 2 \cdot \overrightarrow{OD}\right) = \frac{1}{3}\left(\vec{a} + 2\vec{d}\right) = \frac{1}{3}\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right).$$

Аналогно, ако су Q и R тачке које деле, редом, тежишне линије $[AE]$ и $[AF]$ у размери $2:1$, онда за одговарајуће радијус-векторе $\overrightarrow{OQ}$ и $\overrightarrow{OR}$ важи

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{3}\left(\vec{b} + 2\vec{e}\right) = \frac{1}{3}\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right) \text{ и } \overrightarrow{OR} = \frac{1}{3}\left(\vec{c} + 2\vec{f}\right) = \frac{1}{3}\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right).$$

То значи да су радијус вектори тачака T, T_1 и T_2 једнаки, тј.

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OR},$$

одакле следи да је $P = Q = R$ заједничка тачка тежишних линија, која сваку од њих дели у односу $2:1$, а зовемо је тежиште троугла и обележавамо је са T.

Одавде такође закључујемо, ако су темена троугла $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ и $C(x_3, y_3)$, а тежиште $T(x_T, y_T)$, онда је

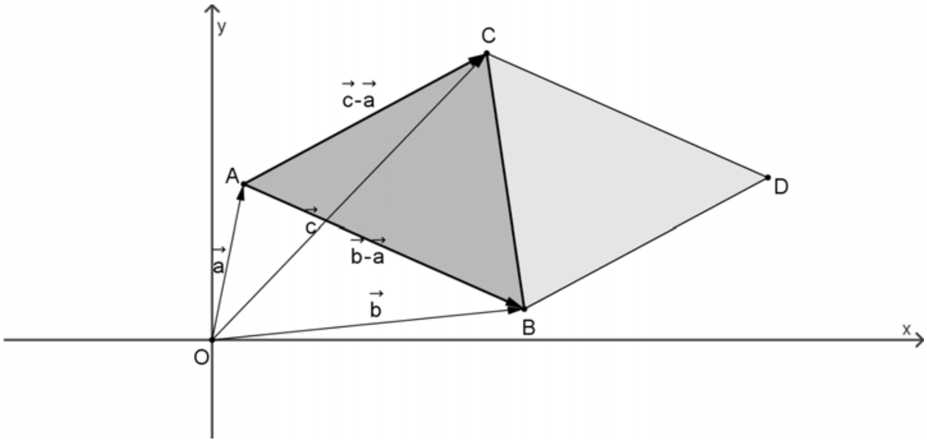
$$x_T = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3), \quad y_T = \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3) \qquad \blacksquare$$

1.3.3. Површина троугла

Следећи важан задатак је: израчунавање површине троугла ΔABC, чија су темена $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ и $C(x_3, y_3)$. У ту сврху уочимо радијус-векторе темена троугла $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ и $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ (Слика 10.). Тада је

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} P_{\square ABDC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\left|\left(\vec{b}-\vec{a}\right)\times\left(\vec{c}-\vec{a}\right)\right|,$$

што се добија и покренутањем апликације 1.8.ggb, у програму GeoGebra.



Слика 10.

Како је

$$\left(\vec{b}-\vec{a}\right)\times\left(\vec{c}-\vec{a}\right) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & 0 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} \cdot \vec{k},$$

онда је

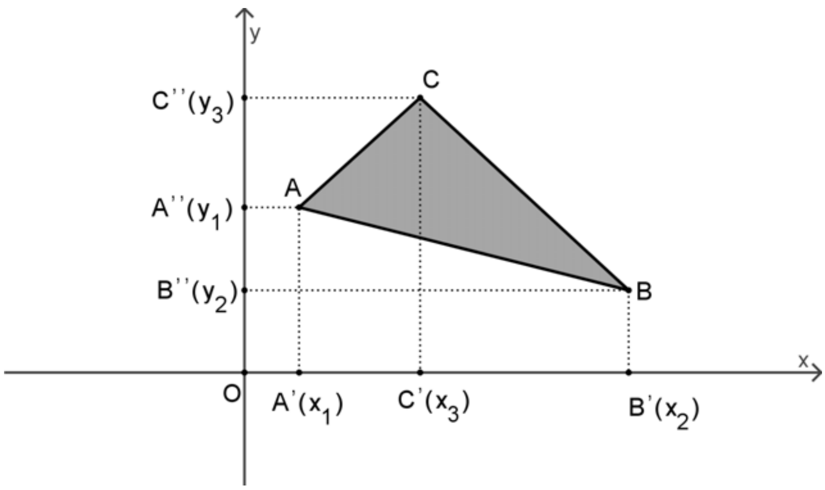
$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|D_1\right|, \text{ где је } D_1 = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}.$$

Врло често су у употреби и следећи обрасци

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|x_1\left(y_2 - y_3\right) - x_2\left(y_1 - y_3\right) + x_3\left(y_1 - y_2\right)\right|,$$

или

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|D\right|, \text{ где је } D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$



Слика 11.

И овај задатак се може решити без употребе вектора, на тај начин што се од површине правоуглог трапеза $B''BCC''$, одузме збир површина правоуглих трапеза $B''BAA''$ и $A''ACC''$, (Слика 11.). Одатле је

$$P_{\Delta ABC}=\left|\frac{1}{2}(x_2+x_3)(y_3-y_2)-\frac{1}{2}(x_2+x_1)(y_1-y_2)-\frac{1}{2}(x_1+x_3)(y_3-y_1)\right|.$$

Поступак се добија покретањем апликације 1.9.ggb, у програму GeoGebra. Сада се лако добија већ познати резултат

$$P_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|x_1(y_2-y_3)-x_2(y_1-y_3)+x_3(y_1-y_2)\right|.$$

1.4. ЗАДАЦИ

1. Израчунати дужину дужи AB, ако је: 1.ggb
   a) $A(-4,2)$, $B(3,5)$; 1a.ggb
   b) $A(-4,-3)$, $B(3,0)$;
   c) $A(a-1,b+2)$, $B(a-3,b+4)$; 1c.ggb
   d) $A(a\cos t, a\sin t)$, $B(a\sin t, a\cos t)$. 1d.ggb
2. Израчунати обим троугла ΔABC, где је $A(2,7)$, $B(5,7)$, $C(5,11)$. 2.ggb
3. Одреди на x- оси тачку, једнако удаљену од тачака $A(3,5)$ и $B(7,4)$.
   3.1.ggb 3.ggb
4. Одреди на y-оси тачку, једнако удаљену од тачака $A(-3,6)$ и $B(4,5)$.
   4.1.ggb 4.ggb
5. Одреди координате тачке, једнако удаљене од тачака $A(3,-3)$, $B(5,11)$, $C(-9,13)$. 5.ggb
6. Испитати да ли је троугао ΔABC, где је $A(1,1)$, $B(2,5)$, $C(-6,7)$, правоугли.
   6.ggb
7. Наћи темена B и D, квадрата $\square ABCD$, ако је $A(0,3)$ и $C(-1,4)$. 7.ggb
8. Одреди координате тачке T, која дели дуж AB, у датом односу $m:n$, где је:
   a) $A(-1,4)$, $B(3,1)$ и $m:n=1:2$ 8.ggb
   b) $A(-1,4)$, $B(3,1)$ и $m:n=2:1$
   c) $A(-1,4)$, $B(3,1)$ и $m:n=-1:2$
   d) $A(a+5,b-6)$, $B(a+7,b+4)$ и $m:n=-2:5$ 8.d.ggb
9. Ако је $A(0,3)$ и $B(-1,4)$, одреди координате тачке C, тако да тачка B дели дуж AC у односу $3:2$. 9.ggb 9.1.ggb
10. Дат је троугао ΔABC, где је $A(-7,-3)$, $B(1,-5)$, $C(9,5)$. Одредити:

a) дужине тежишних линија;
b) координате тежишта;
c) тачку D, тако да четвороугао $ABDC$ буде паралелограм. 10.ggb

11. Израчунати површину троугла ΔABC, где је:
a) $A(1,1)$, $B(2,5)$, $C(-6,7)$; 11.a.ggb 11.ggb
b) $A(2,7)$, $B(5,7)$, $C(5,11)$. 11.b.ggb 11.ggb

12. Испитати колинеарност тачака: 12.ggb
a) $A(-3,0)$, $B(1,2)$, $C(5,4)$; 12.a.ggb
b) $A(3,2)$, $B(4,1)$, $C(6,-4)$. 12.b.ggb

2. МЕТОД АНАЛИТИЧКЕ ГЕОМЕТРИЈЕ

Познато је, да је уз помоћ координатног система установљен обострано-једно-значни однос (бијекција) међу геометријским објектима – тачкама и алгебарским објектима – бројевима. Прецизније, (видети [8], [23]) доказано је да, у односу на Декартов правоугли координатни систем, свакој тачки у равни, одговара тачно један уређени пар реалних бројева и обрнуто, сваком уређеном пару реалних бројева, одговара тачно једна тачка у равни.

Успостављени однос омогућује, да се изучавање геометријских односа међу тачкама своди на изучавање алгебарских односа, међу њиховим координатама, што у већини случајева упрошћава решавање геометријских проблема.

У следећој етапи успоставља се обострано-једнозначни однос између скупова тачака у равни и једначина са две промењљиве. И ова бијекција дозвољава да се изучавање својстава геометријских фигура у равни сведе на изучавање аналитичких својстава одговарајућих једначина. Иначе, у аналитичкој геометрији користимо и термин геометријско место тачака и под тим именом подразумевамо скуп тачака (геометријску фигуру) које поседују неко заједничко својство.

2.1. МЕТОД И ПРЕДМЕТ АНАЛИТИЧКЕ ГЕОМЕТРИЈЕ

Успостављање наведене бијекције и замена геометријских фигура одговарајућим формулама, јесте централна идеја на којој је заснована аналитичка геометрија. Наведена разматрања, илустроваћемо следећим примерима.

Пример 1. Нека је дата једначина

$$y = f(x),$$

где је f непрекидна, реална функција једне реалне промењљиве дефинисана над интервалом $[a,b]$. Пошто свакој вредности промењљиве $x \in [a,b]$, одговара тачно једна вредност $y \in \mathbb{R}$, онда сваком, тако одређеном уређеном пару $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, одговара нека тачка P у равни. Ако величина x, узима све вредности из $[a,b]$, онда тачка P, описује неку геометријску фигуру (линију) l у равни. Очигледно је да ће права, која садржи неку тачку из $[a,b]$, а паралелна је са осом Oy, сећи линију l у само једној тачки.

Пример 2. Нека је дата једначина две реалне промењљиве

$$F(x,y)=0,$$

при чему $x\in[a,b]$. Претпоставомо да, на основу ове једначине, свакој вредности променљиве $x\in[a,b]$, одговара једна, или више вредности из скупа $\{y_1,y_2,\ldots,y_n\}$ $\subset\mathbb{R}$ за величину y, тј. за свако $x\in[a,b]$ постоји један или више уређених парова из скупа $\{(x,y_1),(x,y_2),\ldots,(x,y_n)\}\subset\mathbb{R}^2$, једна или више тачака из скупа $\{P_1,P_2,\ldots,P_n\}$ у равни. Ако величина x, узима све вредности из $[a,b]$, онда наведене тачке описују неку геометријску фигуру – линију l у равни. Такође, права, која садржи неку тачку из $[a,b]$, а паралелна је са осом Oy, сече линију l у једној или више тачака.

Претходна два примера показују да се свака од наведене две једначине може тумачити, помоћу појма координата, као линија у равни, тј. као скуп тачака у равни који задовољава следеће услове:

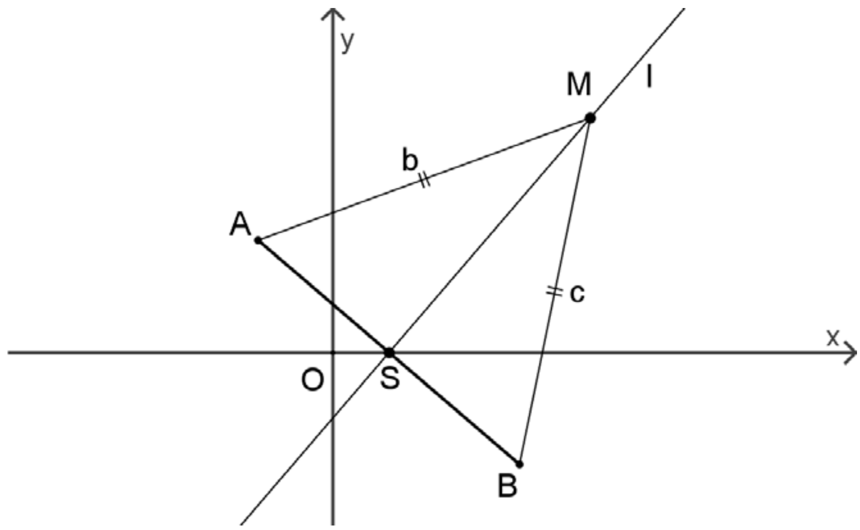
1. координате произвољне тачке линије (скупа тачака), задовољавају дату једначину;
2. свака тачка равни, чије координате задовољавају дату једначину, припада линији (скупу тачака).

Такође, пошто геометријско место тачака представља скуп тачака (геометријску фигуру) које поседују неко **заједничко својство**, а свакој тачки тог скупа придру-жујемо уређени пар реалних бројева (x,y), њене координате, тада **заједничко својство** обезбеђује могућност повезивања бројева x и y неком једначином, например

$$F(x,y)=0,$$

где је $F(x,y)$, реална функција две реалне променљиве.

Пример 3. Саставити једначину геометријског места тачака (линије) l у равни, са особином да су њихова растојања, од тачака $A(1,3)$ и $B(5,-3)$, једнака.



Слика 12.

Решење. Дакле, поменуто геометријско место тачака, линија l, (Слика 12.) је скуп тачака $M(x,y)$, таквих да важи $d(M,A)=d(M,B)$, тј.

$$l=\{M : d(M,A)=d(M,B)\}.$$

Одатле је

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-3)^2}=\sqrt{(x-5)^2+(y+3)^2},$$

а после сређивања, добијамо једначину

(1) $$2x-3y-6=0,$$

на основу чега изводимо следећи закључак: ако тачка $M(x,y)$ припада линији l, онда њене координате задовољавају једначину $2x-3y-6=0$, тј.

$$M(x,y)\in l \ \Rightarrow\ l: 2x-3y-6=0.$$

Да би проблем био решен у потпуности, треба још да се докаже да само координате тачака линије l задовољавају једначину (1), тј. да ако тачка не припада линији l, онда њене координате не задовољавају једначину (1), што је еквивалентно са импликацијом: ако координате x и y, тачке M, задовољавају једначину (1), онда тачка $M(x,y)$ припада линији l, или записано математичким језиком

$$l: 2x-3y-6=0 \ \Rightarrow\ M(x,y)\in l.$$

Дакле, ако координате x и y тачке M задовољавају једначину $2x-3y-6=0$, онда је $M(x,y)=M\left(x,\frac{2}{3}x-2\right)$. Тада важи

$$d(M,A)=\sqrt{(x-1)^2+\left(\frac{2}{3}x-2-3\right)^2}=\sqrt{\frac{13}{9}x^2-\frac{26}{3}x+26}=\sqrt{(x-5)^2+\left(\frac{2}{3}x-2+3\right)^2}=d(M,B)$$

што значи да тачка M припада линији l. Очигледно је да линија l представља симетралу дужи $[AB]$. За илустрацију покренути апликацију 2.1.ggb, у програму GeoGebra. □

Значи, ако је $F(x,y)$ реална функција две реалне промењиве x и y, онда једначина

(2) $$F(x,y)=0$$

дефинише геометријско место тачака (линију), $\mathcal{F}$ у равни, које сачињавају тачке $M=M(x,y)$, чије координате задовољавају једначину (2), тј.

$$\mathcal{F}=\{M \mid M=M(x,y)\wedge F(x,y)=0\}.$$

Из напред наведених разматрања, може се закључити да се **метод аналитичке геометрије** заснива на следеће две чињенице:

1. Придруживање координата – уређеног пара реалних бројева (x,y), свакој тачки датог геометријског места тачака $\mathcal{F}$, у одређеном

координатном систему, омогућује да се на основу заједничког својства тачака из $\mathcal{F}$, координате x и y повежу једначином

(3) $$F(x, y) = 0,$$

коју зовемо једначина геометријског места тачака $\mathcal{F}$, тако да важи релација

$$M = M(x, y) \in \mathcal{F} \Leftrightarrow F(x, y) = 0$$

при чему је $F(x, y)$, реална функција две реалне променљиве;

2. Испитујући једначину (3) и дајући геометријску интерпретацију њеним особинама, испитују се особине геометријског места тачака $\mathcal{F}$ и црта се његов график у координатном систему.

У највећем делу средњошколског курса аналитичке геометрије, геометријско место тачака $\mathcal{F}$ у равни, је линија l (права или крива). У свим тим случајевима једначина (3) је једначина линије l.

Ако је функција $F(x, y)$ полином (цела рационална функција) $n-$тог степена, онда се линија l, зове **алгебарска линија $n-$тог реда**.

Линија која није алгебарска зове се **трансцендентна** линија.

Предмет аналитичке геометрије јесу **алгебарске линије првог реда** (праве), или алгебарске линије другог реда, које чешће називамо **криве другог реда**. Алгебарске линије вишег реда су предмет изучавања посебне математичке дисциплине – **алгебарске геометрије**, а трансцендентне линије се углавном изучавају у **математичкој анализи**.

Приликом изучавања алгебарских линија, често се јавља потреба за трансформисањем Декартовог координатног система. Начелно говорећи, у различитим Декартовим координатним системима, једначине једне исте линије се разликују. Међутим, може се доказати, да класификација алгебарских линија, на основу реда алгебарске линије, као и класификација свих линија уопште, на алгебарске и трансцендентне, не зависи од избора Декартовог координатног система. Ово питање регулише следећа теорема, коју наводимо без доказа. (Доказ се може наћи у [8], или у [23].)

Теорема 5. При трансформцији Декартових координата, ред алгебарске криве се не мења. ■

2.2. НЕКЕ ЗНАЧАЈНЕ ПРЕТПОСТАВКЕ

С обзиром на чињеницу, да су линије у равни скупови тачака, односи међу линијама регулисани су правилима која важе за скупове. Како се односи међу линијама рефлектују на односе међу једначинама линија, питање је на које се може дати одговор поштовањем правила математичке логике и теорије скупова, тј. довођењем у везу скуповних релација: подскуп и једнакост, са импликацијом и еквиваленцијом, а операције: пресек и унија доводе се у везу са логичким операцијама конјункција и дисјункција. Дакле, не упуштајући се у доказивања доле наведених закључака, јер су они предмет математичке логике и теорије скупова, веза између линија и њихових међусобних релација и операција, с једне стране, и операциаја над одговарајућим једначинама, с друге стране, регулише се следећим тврђењима, која су дата у форми претпоставки .

Претпоставка 1. *Ако су* $F_{\mathcal{S}}(x,y)=0$ *и* $F_{\mathcal{T}}(x,y)=0$ *једначине геометријских места тачака* $\mathcal{S}$ *и* $\mathcal{T}$ *и ако је* $\mathcal{S}\subseteq\mathcal{T}$ *, онда важи импликација*

$$F_{\mathcal{S}}(x,y)=0 \;\Rightarrow\; F_{\mathcal{T}}(x,y)=0 .$$

Претпоставка 2. *Геометријска места тачака* $\mathcal{S}$ *и* $\mathcal{T}$ *, чије су једначинае* $F_{\mathcal{S}}(x,y)=0$ *и* $F_{\mathcal{T}}(x,y)=0$*, једнака су (поклапају се), тј.* $\mathcal{S}=\mathcal{T}$ *, ако и само ако важи еквиваленција*

$$F_{\mathcal{S}}(x,y)=0 \;\Leftrightarrow\; F_{\mathcal{T}}(x,y)=0 .$$

Претпоставка 3. *Ако су* $F_{\mathcal{S}}(x,y)=0$ *и* $F_{\mathcal{T}}(x,y)=0$ *једначине геометријских места тачака* $\mathcal{S}$ *и* $\mathcal{T}$ *, онда је једначина њиховог пресека* $\mathcal{S}\cap\mathcal{T}$ *, систем (конју-нкција) једначина* $F_{\mathcal{S}}(x,y)=0 \;\wedge\; F_{\mathcal{T}}(x,y)=0$.

Претпоставка 4. *Ако су* $F_{\mathcal{S}}(x,y)=0$ *и* $F_{\mathcal{T}}(x,y)=0$ *једначине геометријских места тачака* $\mathcal{S}$ *и* $\mathcal{T}$ *, онда је једначина њихове уније* $\mathcal{S}\cup\mathcal{T}$ *, дата са*

$$F_{\mathcal{S}}(x,y)\cdot F_{\mathcal{T}}(x,y)=0 .$$

2.3. Задаци

1. Испитај да ли дате тачке припадају датим линијама:
   a) $A(2,3)$, $B(-3,-2)$, $C(4,-5)$, $x-y+1=0$;
   b) $A(4,3)$, $B(-3,4)$, $C\left(-1,2\sqrt{6}\right)$, $x^2+y^2=25$;
   c) $A(1,1)$, $B(-2,-3/4)$, $C(3,-7)$, $y=2^x-1$.
2. Израчунај непознату координату тачке, тако да она припада датој линији:
   a) $2x-y+3=0$, $M(3,y)$;
   b) $x^2-y^2=4$, $M(x,4)$;
   c) $x^2+(y-1)^2=5$, $M(x<0,2)$.
3. Одреди вредност параметра m , тако да дата тачка припада датој кривој:
   a) $x+my-3=0$, $M(1,2)$;
   b) $(x+1)^2+y^2=m$, $M(3,-3)$.
4. Одреди пресек датих линија:
   a) $y=x^2$ и $y=x+2$;

b) $y = x^2$ и $y = 2x - 5$;

c) $x - 2y + 14 = 0$ и $5x + y + 4 = 0$;

d) $x^2 + y^2 = 5$ и $x + 3y - 5 = 0$.

5. Нађи вредности параметара a и b, тако да пресек линија $ax + by + 1 = 0$ и $ax - by - 3 = 0$, буде тачка $M(1,2)$.

6. Одреди једначине ГМТ које имају особину:
   a) да су једнако удаљене од координатних оса;
   b) да је свака тачка за 2 удаљенија од x-осе, него од y-осе;
   c) да је збир растојања сваке тачке од координатних оса једнак 4.

3. ПРАВА

3.1. ЈЕДНАЧИНЕ ПРАВЕ

У Еуклидској геометрији, познати су услови да права буде једнозначно одређена. У овом одељку биће одређена једначина праве на неколико различитих начина, и у векторском и у скаларном облику, управо коришћењем ових услова. Пре тога доказаћемо једну значајну теорему.

3.1.1. Општи (имплицитни) облик једначине праве

Теорема 1. *Свака линеарна једначина са две промењљиве, је једначина праве и обрнуто, свака једначина праве је линеарна једначина са две промењљиве.*
(За илустрацију покренути апликацију 3.1.ggb, у програму GeoGebra.)
Доказ. Нека је дата линеарна једначина

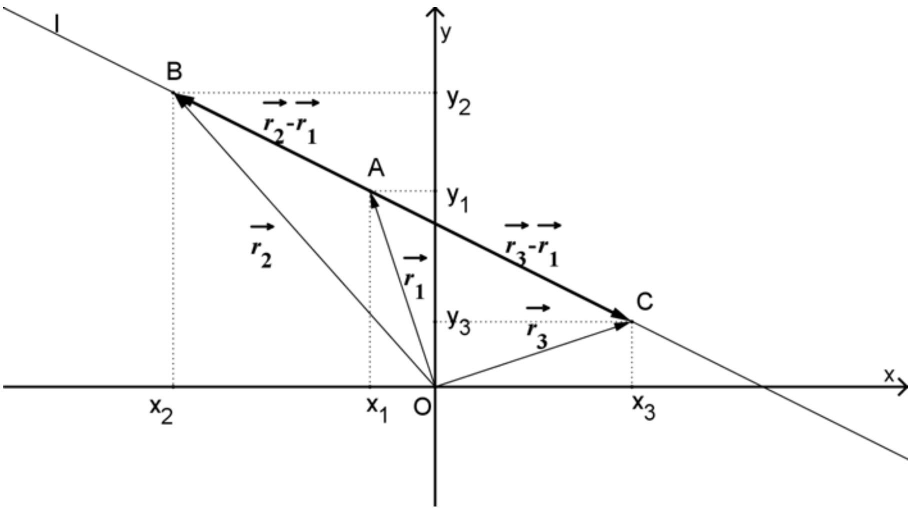
(1) $$ax + by + c = 0$$

са промењљивим x и y, где је $a, b, c \in \mathbb{R}$ и $a^2 + b^2 \neq 0$ ($a \neq 0$ или $b \neq 0$). Пошто ова једначина има бесконачно много решења, изаберимо, например, три од њих: (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) и приметимо да тада важи

$$ax_1 + by_1 + c = 0, \; ax_2 + by_2 + c = 0, \; ax_3 + by_3 + c = 0.$$

Одузимајући прву од друге и треће једначине добијамо следеће две једначине

(2) $$a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) = 0, \quad a(x_3 - x_1) + b(y_3 - y_1) = 0.$$



Слика 1

С друге стране, три напред наведена уређена пара (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), у Декартовом правоуглом координатном систему у равни, представљају три тачке, например $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ са радијус векторима $\overrightarrow{OA} = \vec{r}_1 = (x_1, y_1)$, $\overrightarrow{OB} = \vec{r}_2 = (x_2, y_2)$, $\overrightarrow{OC} = \vec{r}_3 = (x_3, y_3)$, (Слика 1), одакле је

$$\overrightarrow{AB} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (x_2 - x_1, y_2 - x_1) \text{ и } \overrightarrow{AC} = \vec{r}_3 - \vec{r}_1 = (x_3 - x_1, y_3 - x_1).$$

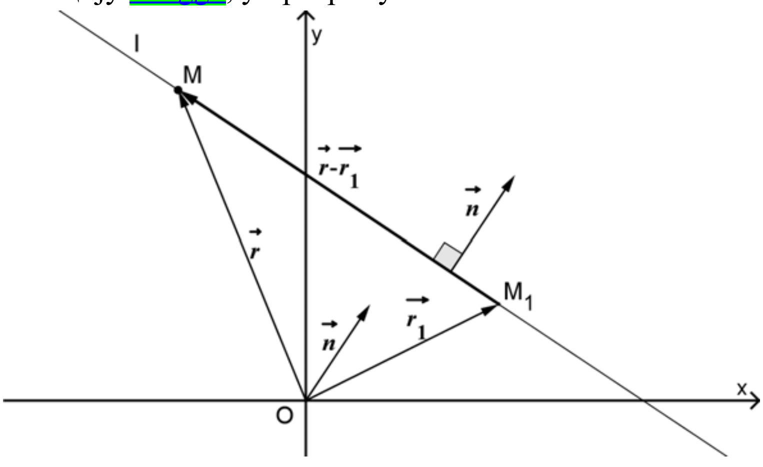
Формирајмо векторски производ $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ и претпоставимо да је $a \neq 0$:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & 0 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} \cdot \vec{k} = \frac{1}{a} \begin{vmatrix} a(x_2 - x_1) & y_2 - y_1 \\ a(x_3 - x_1) & y_3 - y_1 \end{vmatrix} \cdot \vec{k}$$

$$= \frac{1}{a} \begin{vmatrix} a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) & y_2 - y_1 \\ a(x_3 - x_1) + b(y_3 - y_1) & y_3 - y_1 \end{vmatrix} \cdot \vec{k} = \frac{1}{a} \begin{vmatrix} 0 & y_2 - y_1 \\ 0 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} \cdot \vec{k} = 0 \cdot \vec{k} = \vec{0},$$

што значи да су вектори $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ колинеарни. Другим речима, произвољне три тачке $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ и $C(x_3, y_3)$, чије координате задовољавају једначину (1), колинеарне су, тј. јесу три тачке једне праве l.

Обрнуто, познато је да у равни постоји тачно једна права l, која садржи дату тачку M_1 и нормална је на праву $p(O, N)$, тј. на вектор $\vec{n} = \overrightarrow{ON}$. Нека су, дакле, у равни, у којој је дат Декартов правоугли координатни систем xOy, дати тачка $M_1(x_1, y_1)$ и вектор $\vec{n} = (a, b) \neq \vec{0}$, тј. $a^2 + b^2 \neq 0$. За илустрацију се може покренути апликацију 3.2.ggb, у програму GeoGebra.



Слика 2

Ако је $M(x, y)$ произвољна тачка, тако одређене праве l и ако су $\vec{r}_1$ и $\vec{r}$ радијусвектори тачака M_1 и M, (Слика 2), онда очигледно важи

$$\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_1) = 0,$$

или

$$(a, b) \cdot (x - x_1, y - y_1) = 0,$$

одакле је

$$a(x-x_1)+b(y-y_1)=0,$$

што представља везу између координата x и y било које тачке M праве l, тј. представља једначину праве l. Последња једначина може се написати у облику

$$l: ax+by-ax_1-by_1=0,$$

или

$$l:\ ax+by+c=0,$$

где је $c=-ax_1-by_1$ реална константа, што је линеарна једначина са две променљиве, чиме је теорема доказана. ■

Дефиниција 1. Линеарна једначина са две променљиве дата са (1), зове се **општи (имплицитни) облик једначине праве**.

Познато је, да се множењем једначине, реалним бројем различитим од нуле, добија еквивалентна једначина. Стога на основу Претпоставке 2. из одељка 3.1.5. можемо констатовати да важи следећа теорема.

Теорема 2. А*ко је једначина (1), једначина праве* l *и константа* $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ *онда је и*

$$\lambda\cdot ax+\lambda\cdot by+\lambda\cdot c=0$$

једначина је исте праве l. ■

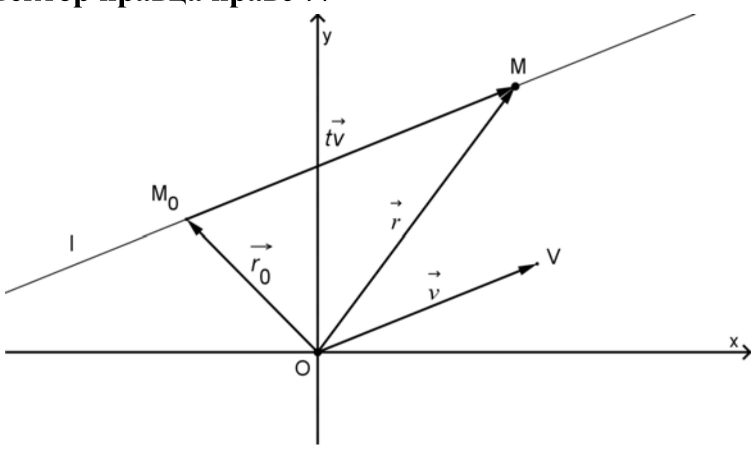
Напомена Пошто скуп решења једначине

$$ax+by=0$$

садржи уређени пар $(0,0)$, за свако $a,b\in\mathbb{R}$, јасно је да једначина (1), за $c=0$, представља праву која садржи координатни почетак.

3.1.2. Једначина праве одређене тачком и вектором правца

Нека је дата тачка $M_0(x_0,y_0)$ и вектор $\vec{v}=(p,q)$, $\vec{v}\neq\vec{0}$ (или $p^2+q^2\neq 0$), 3.3.ggb. Тада постоји тачно једна права l која садржи тачку M_0 и паралелна је са вектором $\vec{v}$, тј. права l и вектор $\vec{v}$ имају исти правац (Слика 3.), због чега вектор $\vec{v}$ називамо, **вектор правца праве** l.



Слика 3

Ако је $M(x,y)$ произвољна тачка праве l, различита од тачке M_0, тада постоји $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ тако да важи векторска једнакост

$$\overrightarrow{M_0M} = t \cdot \vec{v}\,.$$

Ако је $\vec{r} = (x,y)$ радијус-вектор произвољне тачке $M(x,y)$ праве l, а $\vec{r}_0 = (x_0, y_0)$ радијус-вектор дате тачке $M_0(x_0, y_0)$, онда се последња векторска једнакост може приказати на следећи начин

(3) $$l : \vec{r} - \vec{r}_0 = t \cdot \vec{v}\,,$$

што представља **векторску параметарску једначину** праве l, одређене тачком $M_0 \in l$, чији је радијус-вектор $\vec{r}_0$ и вектором правца $\vec{v}$, праве l.

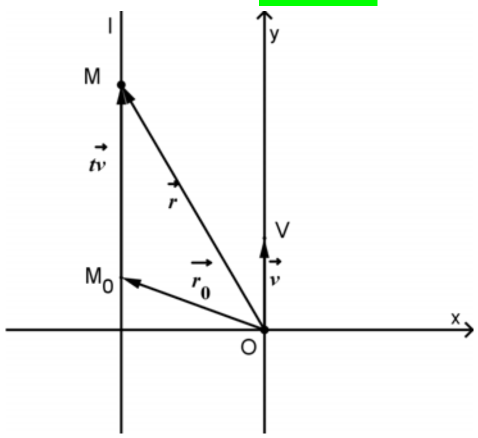
Увођењем одговарајућих координата вектора $\vec{r}_0$, $\vec{r}$ и $\vec{v}$ у једначину (3) добијамо систем

(4) $$\begin{aligned} x - x_0 &= t \cdot p \\ y - y_0 &= t \cdot q \end{aligned}$$

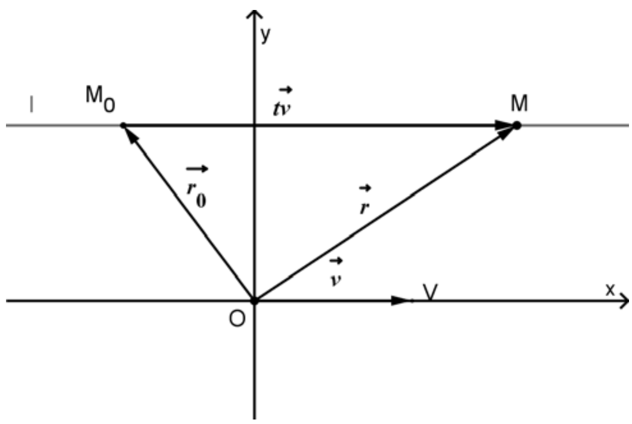
који зовемо **скаларне параметарске једначине** праве. Елиминацијом параметра t, добијамо **скаларну једначину праве** l, одређене тачком $M_0(x_0, y_0)$ и вектором правца $\vec{v} = (p,q)$

(5) $$l : \ \frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q}\,.$$

Ако је $p = 0$, тј. $\vec{v} = (0,q)$, онда вектор $\vec{v}$ и оса Oy имају исти правац, због чега је права l паралелна са Oy осом, (Слика 4.а), а пошто $M_0(x_0, y_0) \in l$, права l сече осу Ox у тачки x_0, 3.4.a.ggb.



Слика 4.а



Слика 4.б

До истог резултата можемо доћи и на други, "скаларни" начин. Наиме, ако је $p = 0$, систем (4) постаје

$$x = x_0 \quad \wedge \quad y = y_0 + t \cdot q\,, \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

што значи да је прва координата произвољне тачке $M(x,y)$ константна, тј. $x = x_0$, а друга координата "пролази" скупом $\mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$. Другим речима произвољна тачка $M(x, y)$ описује праву l, паралелну са Oy осом, а сече осу Ox у тачки x_0, и тада једначина праве l гласи

(6) $$l: \ x = x_0 .$$

Аналогним поступком закључујемо, 3.4.b.ggb, ако је $q = 0$, тј. ако је вектор правца праве l, истог правца као и оса Ox, тј. $\vec{v} = \left(p, 0\right)$ (Слика 4.б), онда је права l паралелна са Ox осом и сече Oy осу у тачки y_0, а једначина праве l гласи

(7) $$l: \ y = y_0 .$$

Обрнуто, ако посматрамо једначине (5), (6) и (7), очигледно је да су оне линеарне, што значи, на основу Теореме 1. да је свака од њих једначина праве. Овим је доказана следећа теорема.

Теорема 3. *Ако је права l одређена својом тачком $M_0(x_0, y_0)$ и вектором правца $\vec{v} = \left(p, q\right)$, при чему је $p^2 + q^2 \neq 0$, онда једначина праве гласи*

1. $l: \ \vec{r} - \vec{r}_0 = t \cdot \vec{v}, \ \ t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, *(векторски облик)*
2. $l: \begin{cases} x - x_0 = t \cdot p \\ y - y_0 = t \cdot q \end{cases}, \ \ t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, *(параметарски облик)*
3. $l: \ \dfrac{x - x_0}{p} = \dfrac{y - y_0}{q}$ *(скаларни облик).*

Специјално

1. $q = 0 \Rightarrow \ l : x = x_0$,
2. $p = 0 \ \Rightarrow \ l : y = y_0$. ■

Пример 1. Саставити једначине координатних оса. ($Ox: \ y = 0$; $Oy: \ x = 0$).

3.1.3. Једначина праве одређене тачком и коефицијентом правца

Посматрајмо поново праву l, одређену тачком $M_0(x_0, y_0)$ и вектором правца $\vec{v} = \left(p, q\right)$ и нека је $p \neq 0$, 3.5.ggb.

Позитивни смер Ox осе образје са правом l, оријентисани угао α, (почетни крак је позитивни смер Ox осе: $\vec{x}$) једнак оријентисаном углу $\angle\left(\vec{x}, \vec{v}\right)$, (Слика 5). Из правоуглог троугла $\Delta \ OPV$ следи

$$\frac{q}{p} = \operatorname{tg} \angle\left(\vec{x}, \vec{v}\right) = \operatorname{tg}\alpha = k .$$

Број $k \in \mathbb{R}$, тангенс оријентисаног угла који образују позитивни смер Ox осе и права l, зове се **коефицијент правца праве**.

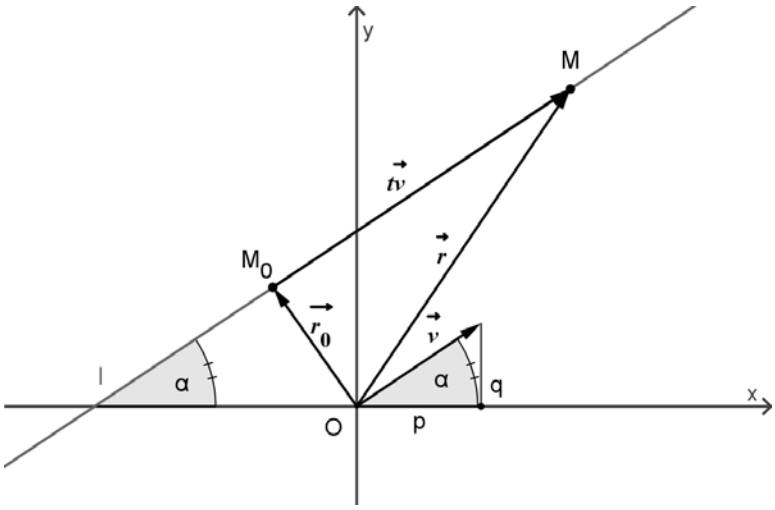
Пошто из система (4), за $p \neq 0$ имамо једначину

$$y - y_0 = \frac{q}{p}\left(x - x_0\right),$$

увршћујући коефицијент правца добијамо

(8) $$l:\ y-y_0=k\left(x-x_0\right),$$

што представља **једначину праве одређене тачком и коефицијентом правца**, облик који се "популарно" назива **једначина праве кроз једну тачку**. Ако је $k=0$ (због $p\neq 0$ мора бити $q=0$), једначина (8) своди се на већ анализирани облик $y=y_0$. У посебном одељку ћемо утврдити да једначина (8) представља једначину **прамена правих** са центром у тачки $S(x_0,y_0)$.



Слика 5

Ако, као и у Теореми 3. претпоставимо обрнуто, тј. да је дата једначина (8), коју можемо записати и на следећи начин

$$kx-y-kx_0+y_0=0,$$

што је линеарна једначина са две променљиве, тада на основу Теореме 2. важи следећи закључак.

Теорема 4. *Једначина праве* l*, која је одређена тачком* $M_0(x_0,y_0)$ *и коефицијентом правца* k*, гласи*

$$l:\ y-y_0=k\left(x-x_0\right). \qquad \blacksquare$$

Напомена 1. Нека је права l дата једначином у имплицитном облику

$$l:\ ax+by+c=0.$$

Познато је (Теорема 1.), да је вектор $\vec{n}=\left(a,b\right)$ нормалан на праву l, а вектор $\vec{v}=\left(-b,a\right)$, (који је нормалан на $\vec{n}$, јер је $\vec{n}\cdot\vec{v}=0$), је вектор правца праве l. Сагласно претходним разматрањима, тада је коефицијент правца праве l

$$k=-a/b,$$

а ако је позната једна тачка $M_0(x_0,y_0)$ је њена једначина

(8.1) $$y-y_0=-\frac{a}{b}\left(x-x_0\right). \qquad \blacksquare$$

Напомена 2. Ако је права l дата једначином у имплицитном облику

$$ax+by+c=0$$

и ако је $M_0(x_0, y_0)$ једна њена тачка, тј. ако важи

$$ax_0 + by_0 + c = 0,$$

одузимањем друге од прве једнакости имамо

$$a\left(x - x_0\right) = -b\left(y - y_0\right),$$

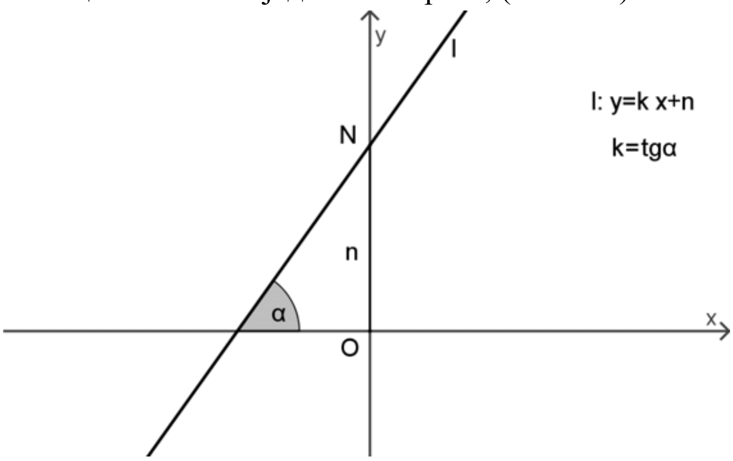
одакле непосредно следи (8.1) ■

3.1.4. Експлицитни облик једначине праве

Нека је права l дата једном својом тачком $N\left(0, n\right)$ и коефицијентом правца $k \in \mathbb{R}$, што представљаља специјални случај претходне теореме, 3.6.ggb. Тада се једначина праве l може представити у облику

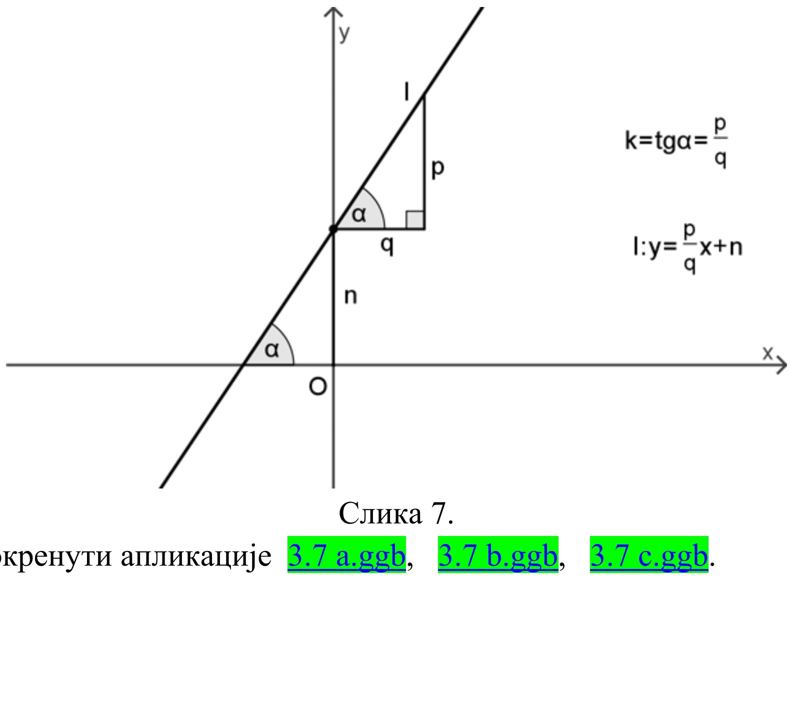
(9) $$l: \;\; y = kx + n,$$

који се зове **експлицитни облик** једначине праве, (Слика 6).



Слика 6

Пример Представити у Декартовом координатном систему праве, задате следећим једначинама: 1) $a: y = 2x + 3$; 2) $b: y = \dfrac{3}{4}x - 2$; 3) $c: 2x + 3y = 3$.



Слика 7.

Решење Покренути апликације 3.7 a.ggb, 3.7 b.ggb, 3.7 c.ggb.

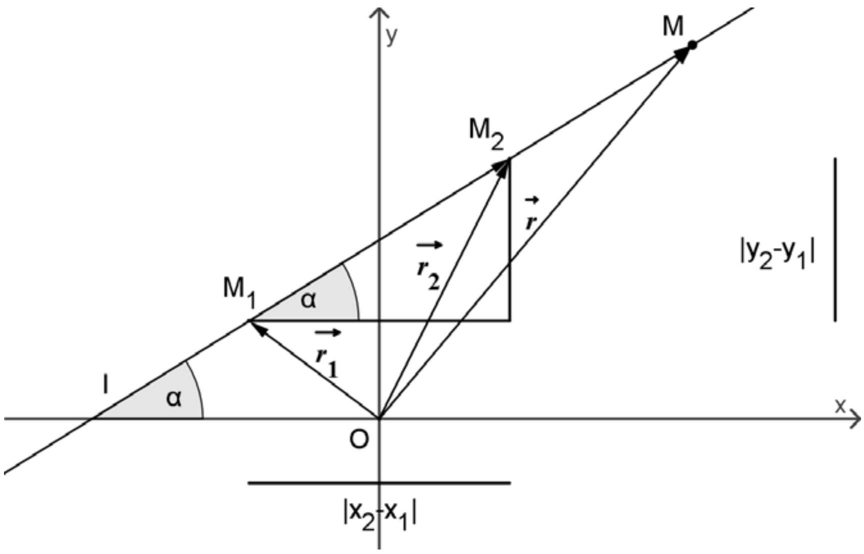
3.1.5. Једначина праве кроз две тачке

На основу једне од аксиома Еуклидске геометрије, познато је да за сваке две различите тачке $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, постоји једна и само једна права l, која их садржи. Полазећи од ове аксиоме доказаћемо теорему.

Теорема 5. *Ако је права l одређена двема различитим тачкама $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$,* 3.8.ggb, *онда једначина праве гласи*

1. $l: \ \vec{r} = \vec{r}_1 + t\cdot(\vec{r}_2 - \vec{r}_1), \ \ t \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, (*векторски облик*)
2. $l: \begin{cases} x = x_1 + t\cdot(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t\cdot(x_2 - x_1) \end{cases}, \ \ t \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, (*параметарски облик*)
3. $l: \ \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$ (*скаларни облик*).

Доказ Нека је l права, одређена двема датим различитим тачкама $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ (Слика 8.).



Слика 8

Ако је $M(x, y)$ произвољна тачка праве l, различита од тачака M_1 и M_2, тада постоји $t \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, тако да важи векторска једнакост

$$\overrightarrow{M_1M} = t\cdot\overrightarrow{M_1M_2}.$$

Ако је $\vec{r} = (x, y)$ радијус-вектор произвољне тачке $M(x, y)$ праве l, а $\vec{r}_1 = (x_1, y_1)$ $\vec{r}_2 = (x_2, y_2)$ радијус-вектори датих тачака M_1 и M_2, онда се последња векторска једначина може приказати на следећи начин

(10) $$l: \ \vec{r} = \vec{r}_1 + t\cdot(\vec{r}_2 - \vec{r}_1),$$

за $t \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, што представља **векторску параметарску једначину** праве l, кроз две тачке $M_1, M_2 \in l$. Увођењем одговарајућих координата вектора $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ и $\vec{r}$ у једначину (10) добијамо систем

(11) $$l: \begin{cases} x = x_1 + t \cdot (x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t \cdot (x_2 - x_1) \end{cases}$$

за $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, који зовемо **скаларне параметарске једначине** праве кроз две тачке. Елиминацијом параметра t, добијамо **скаларну једначину праве** l, кроз две тачке

(12) $$l: \ \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1},$$

или

(13) $$l: \ y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1),$$

што је у аналитичкој геометрији у равни чешће у употреби.

Пошто су тачке M_1 и M_2 различите, могућа је само једна од једнакости

$$x_1 = x_2 \ \text{ или } \ y_1 = y_2.$$

Сличним резоновањем као и у 3.1.6.1.2. може се закључити да једначина праве тада има једначине

$$l: \ x = x_1, \ \text{ за } \ x_1 = x_2,$$

$$l: \ y = y_1, \ \text{ за } \ y_1 = y_2.$$

Ако, претпоставимо да је дата једначина (12), или (13) које су очигледно линеарна једначина са две променљиве, тада је на основу Теореме 2. то једначина праве l, чиме је теорема доказана. ■

Напомена 1. Ако тачке $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ одређују праву l и ако је $x_1 \neq x_2$. онда за коефицијент правца праве l важи

(*) $$k = \operatorname{tg}\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Примењујући овај резултат на једначину праве одређене тачком и коефицијентом правца (8), директно се добија једначина праве кроз две тачке (13). ■

Напомена 2. До овог облика једначине праве могуће је доћи и на други начин. Наиме произвољна тачка $M(x, y)$ припада правој l, одређеној са две различите тачке $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, другим речима три тачке M, M_1, M_2 су колинеарне, ако и само ако је површина троугла $\Delta\, MM_1M_2$ једнака нули, тј.

$$\pm 2P_{\Delta M_1 M_2 M} = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x - x_1 \\ y_2 - y_1 & y - y_1 \end{vmatrix} = 0,$$

одакле је

$$(x_2 - x_1)(y - y_1) - (x - x_1)(y_2 - y_1) = 0,$$

што је еквивалентно са једначином (13). ■

Напомена 3. Ако права l, дата једначином у експлицитном облику ($l: \ y = kx + n$), садржи две различите тачке $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, при чему је например $x_1 \neq x_2$, онда важи

$$y_1 = kx_1 + n \ \text{ и } \ y_2 = kx_2 + n,$$

одакле одузимањем, прве од друге једнакости имамо

$$y_2 - y_1 = k\left(x_2 - x_1\right).$$

Дељењем са $x_2 - x_1$, јер је $x_1 \neq x_2$, добијамо коефицијент правца праве l

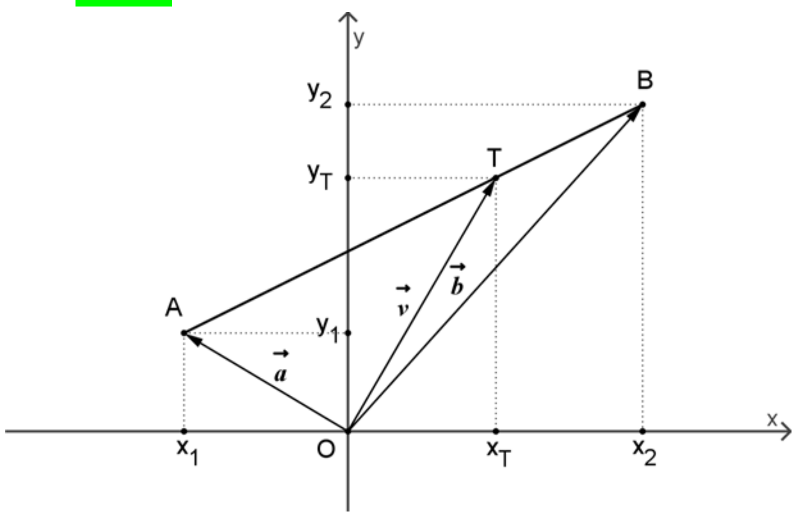
$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

који примењујемо у једначину (8) и директно добијамо (13). ■

3.1.6. Једначина дужи

Следећи, врло интересантан задатак, који се сада може решити, јесте да се утврди које услове треба да испуњавају координате тачке $T\left(x, y\right)$, да би она припадала дужи $\left[AB\right]$?

У ту сврху посматра се дуж $\left[AB\right]$, која је задата координатама својих крајњих тачака: $A\left(x_1, y_1\right)$ и $B\left(x_2, y_2\right)$ и нека је $T\left(x, y\right)$ произвољна тачка дужи $\left[AB\right]$ (Слика 9.), 3.9.ggb.



Слика 9.

Тада очигледно важи следећа релација

$$\overrightarrow{AT} = k \cdot \overrightarrow{AB} \quad \Leftrightarrow \quad k \in \left[0,1\right].$$

Специјално, ако је $k = 0$, онда је $T = A$, а ако је $k = 1$, онда је $T = B$. Пошто је $\overrightarrow{AT} = \overrightarrow{OT} - \overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$, из последње релације имамо

$$\overrightarrow{OT} - \overrightarrow{OA} = k \cdot \left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right),$$

одакле је

$$\overrightarrow{OT} = (1-k)\cdot\overrightarrow{OA} + k\cdot\overrightarrow{OB}.$$

Координатним представљањем радијус вектора тачака A, B и T имамо

$$(x,y) = (1-k)\cdot(x_1,y_1) + k\cdot(x_2,y_2),$$

што је еквивалентно са конјункцијом

$$x = (1-k)x_1 + kx_2 \text{ и } y = (1-k)y_1 + ky_2.$$

Дакле, одговор на постављено питање даје следећа теорема:

Теорема 6. *Тачка $T(x,y)$ припада дужи $[AB]$, где је $A(x_1,y_1)$ и $B(x_2,y_2)$, ако за њене координате важи*

$$x = (1-k)x_1 + kx_2 \wedge y = (1-k)y_1 + ky_2 \Leftrightarrow k \in [0,1],$$

што представља параметарску једначину дужи, или (после елиминације параметра k)

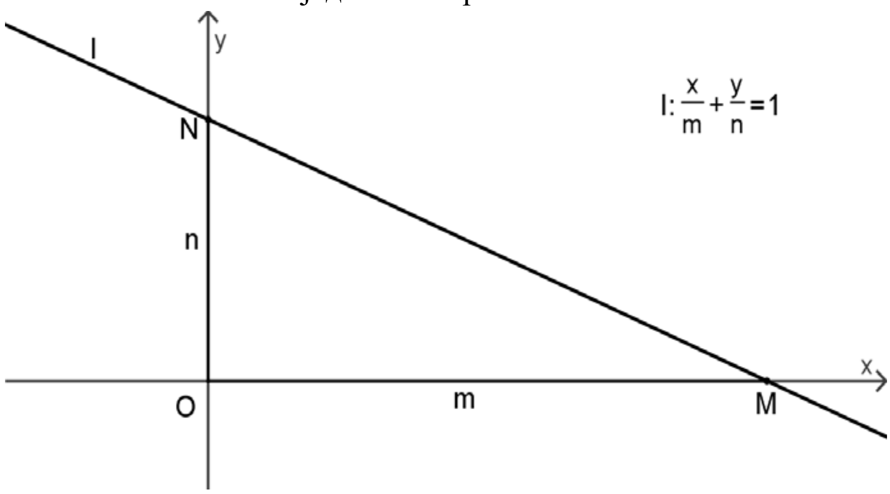
$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} \in [0,1]. \qquad \blacksquare$$

3.1.7. Сегментни облик једначина праве

Нека је права l одређена двема различитим тачкама $M(m,0)$ и $N(0,n)$, за $m \neq 0$ и $n \neq 0$, (Слика 10.), 3.10.ggb. То је специјални случај претходне теореме. Тада се једначина праве l може представити у облику

(14) $$l:\ \frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1,$$

који се зове **сегментни облик** једначине праве.



Слика 10.

3.1.8. Нормални облик једначина праве

Посматрајмо поново праву l, дату једначином $l:\ ax + by + c = 0$, где је $a \neq 0$ или $b \neq 0$, која не садржи координатни почетак ($c \neq 0$). У равни је иста права једнозначно одређена једном својом тачком, например $M_1(x_1, y_1)$ и једним, на њу нормалним, вектором $\vec{n}$, $\vec{n} \neq \vec{0}$.

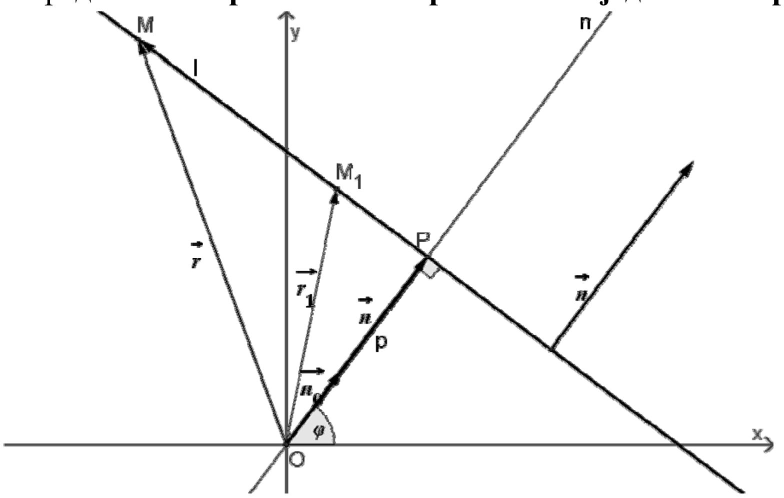
У теореми 1. утврђено је да за вектор $\vec{n}$ важи

$$\vec{n} = (a, b)$$

при чему је $a \neq 0$ или $b \neq 0$. Нека је $M(x, y)$ произвољна тачка праве l, а $\vec{r}$ и $\vec{r}_1$ радијус вектори тачака M и M_1. Како су вектори $\vec{r} - \vec{r}_1$ и $\vec{n}$ нормални (Слика 11.), онда је

(15) $$l:\ (\vec{r} - \vec{r}_1) \cdot \vec{n} = 0.$$

Ова једначина представља **нормални векторски облик једначине праве**.



Слика 11.

Ако у једначину (15) уведемо координате за векторе $\vec{n}$ и $\vec{r}_1$, онда последња једначина постаје

$$l:\ \vec{r} \cdot \vec{n} + c = 0,$$

где је $c = -\vec{r}_1 \cdot \vec{n} = -ax_1 - by_1$. Уместо вектора $\vec{n}$, у једначину (15), може се увести и његов јединични вектор $\vec{n}_0$, тј.

$$\vec{n}_0 = \frac{1}{|\vec{n}|}\vec{n}$$

одакле добијамо једначину праве

(16) $$l:\ (\vec{r} - \vec{r}_1) \cdot \vec{n}_0 = 0,$$

или

(17) $$l:\ \vec{r} \cdot \vec{n}_0 = \frac{-c}{|\vec{n}|},$$

при чему једначина (16) представља **Хесеов нормални векторски облик једначине праве** l.

Да бисмо дали геометријску интерпретацију претходних векторских једначина, обележимо са $d(O, l) = p > 0$, одстојање праве l од координатног почетка и приметимо да важи

(19) $$\vec{r}\cdot\vec{n}_0=\left|\vec{n}_0\right|\cdot\overline{pr}_{\vec{n}_0}\vec{r}=\pm p\,.$$

То значи да је апсолутна вредност скаларног производа $\vec{r}\cdot\vec{n}_0$ константна и једнака p, 3.11.ggb, без обзира на положај тачке M (чији је радијус вектор $\vec{r}$) на правој l, а знак скаларног производа $\vec{r}\cdot\vec{n}_0$ зависи од смера вектора $\vec{n}_0$ и вектора $\overrightarrow{OP}$, где је P подножје нормале из координатног почетка O на праву l, тј.

$$\vec{r}\cdot\vec{n}_0=\begin{cases} p, & \vec{n}_0\uparrow\uparrow\overrightarrow{OP} \\ -p, & \vec{n}_0\uparrow\downarrow\overrightarrow{OP}\end{cases}.$$

На основу (17) и (19) имамо

(20) $$\pm\vec{r}\cdot\vec{n}_0=\frac{-c}{\pm\left|\vec{n}\right|}=p>0\,,$$

а пошто за јединични вектор $\vec{n}_0$ важи

$$\vec{n}_0=\frac{1}{\left|\vec{n}\right|}\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(a,b\right)=\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right),$$

тада једначина (17) праве l, гласи

$$l:\ \frac{ax+by}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{-c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}\,,$$

или

$$l:\ \frac{ax+by+c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}=0\,,$$

где за знак испред корена, на основу (20), важи

$$c<0\ \Rightarrow\ l:\ \frac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}}=0\,,$$

$$c>0\ \Rightarrow\ l:\ \frac{ax+by+c}{-\sqrt{a^2+b^2}}=0\,.$$

Сада се једначина (16) може приказати и на следећи начин

(21) $$l:\ \frac{ax+by+c}{-\operatorname{sgn}c\cdot\sqrt{a^2+b^2}}=0\,,$$

што представља **Хесеов нормални скаларни облик једначине праве** l**.**

Даље, ако је $\angle\left(\vec{x},\overrightarrow{OP}\right)=\varphi$, угао између осе Ox и нормале $p\left(O,P\right)$ на праву l, онда је очигледно је да важе једнакости

$$\cos\varphi=\frac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}\,,\quad \sin\varphi=\frac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}\,,\quad p=\frac{-c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}\,,$$

а једначина (21) сада је**:**

(22) $$l:\ x\cos\varphi+y\sin\varphi-p=0\,,$$

што је такође **Хесеов нормални скаларни облик једначине праве** l**.**

Ако претпоставимо обрнуто, да је дата било која од две еквивалентне једначине (21), или (22), које су очигледно линеарне једначине са две променљиве, тада је на основу Теореме 2. свака од њих једначина праве l.

Претходна разматрања можемо закључити следећом теоремом

Теорема 6. *Нека је једначина праве l, дата у општем облику са*

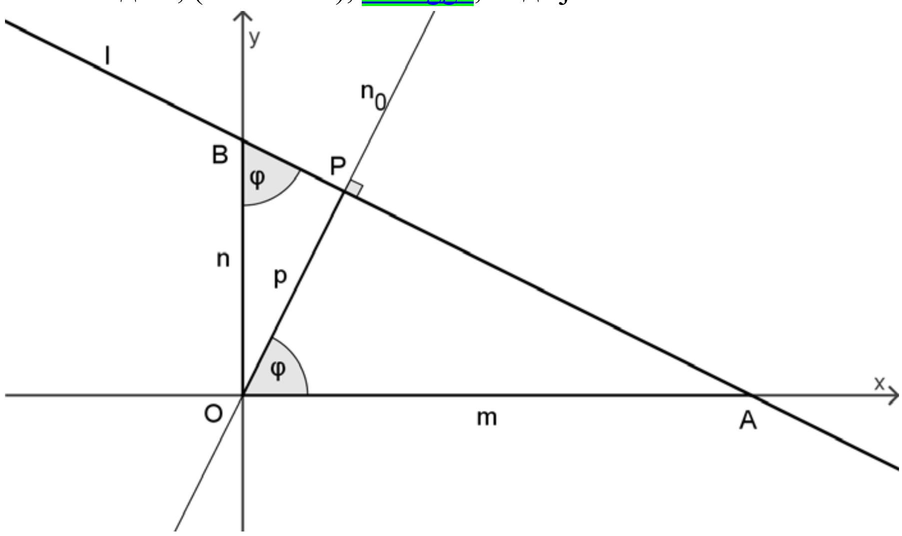
$$l:\ ax+by+c=0,$$

где је $a\neq 0$ или $b\neq 0$. Ако су $\vec{r}(x,y)$ и $\vec{r}_1(x_1,y_1)$ радијус вектори тачака $M\in l$ и $M_1\in l$, вектор $\vec{n}\perp l$, а $\vec{n}_0$ јединични вектор вектора $\vec{n}$, P подножје нормале из координатног почетка на праву l, $p=d(O,l)=\left|\overrightarrow{OP}\right|$ и угао $\angle\left(\vec{x},\overrightarrow{OP}\right)=\varphi$, онда се једначина праве l може приказати на сваки од следећа четири начина:

1. $l:\ (\vec{r}-\vec{r}_1)\cdot\vec{n}=0$, ***нормални векторски*** *облик*,
2. $l:\ (\vec{r}-\vec{r}_1)\cdot\vec{n}_0=0$, ***Хесеов нормални векторски*** *облик*,
3. $l:\dfrac{ax+by+c}{-\operatorname{sgn} c\cdot\sqrt{a^2+b^2}}=0$, ***Хесеов нормални скаларни*** *облик*,
4. $l: x\cos\varphi+y\sin\varphi-p=0$, ***Хесеов нормални скаларни*** *облик.* ■

Напомена Хесеов нормални скаларни облик једначине праве, може се добити и на други, "скаларни" начин.

Наиме, нека је дата права l, једначином $l:\ ax+by+c=0$, где је $a\neq 0$ или $b\neq 0$ и нека је P подножје нормале $n=p(O,P)$ из координатног почетка на праву l, при чему је $d(O,l)=d(O,P)=p$ и угао $\angle\left(\vec{x},\overrightarrow{OP}\right)=\varphi$. Јасно је, ако је $c=0$, права пролази кроз координатни почетак, тј. $P=O$ и $p=0$. Ако претпоставимо, такође, да права l сече координатне осе Ox и Oy, редом у тачкама A и B, различитим од O, (Слика 12.), 3.12.ggb, онда је $a\neq 0$ и $b\neq 0$.



Слика 12.

Ако је једначина праве l преведена на сегментни облик

$$l: \frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1,$$

где је $m = -c/a$, $n = -c/b$, а $A(m,0)$ и $B(0,n)$ пресечне тачке праве l са координатним осама, онда због сличности правоуглих троуглова $\Delta\, AOP \sim \Delta\, OBP$, следи

$$\sin\varphi = \frac{p}{m} \quad \text{и} \quad \cos\varphi = \frac{p}{n},$$

одакле за једначину праве l имамо

$$l: x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0\,.$$

Како се, на основу Теореме 2., две једначине једне исте праве могу разликовати само за константни чинилац, ова једначина је еквивалентна са једначином

$$l: \lambda\cdot ax + \lambda\cdot by + \lambda\cdot c = 0\,,$$

одакле је

$$\lambda\cdot a = \cos\varphi,\ \lambda\cdot b = \sin\varphi,\ \lambda\cdot c = -p < 0\,.$$

Из прве две једнакости, на основу основне тригонометријске идентичности, следи

$$\lambda^2\left(a^2 + b^2\right) = 1\,,$$

одакле је

$$\lambda = \frac{1}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}}\,,$$

а из треће релације следи да су констенте λ и c супротног знака. Сада непосредно следи једначина праве (21). ■

3.2. ТАЧКА И ПРАВА

Однос тачке и праве своди се на два случаја: или тачка припада правој, или тачка не припада правој. У првом случају координате тачке задовољавају једначину праве, а у другом случају је не задовољавају, што се уосталом користи и у оштем случају, када се утврђује да ли тачка припада, или не припада линији (геометријском месту тачака).

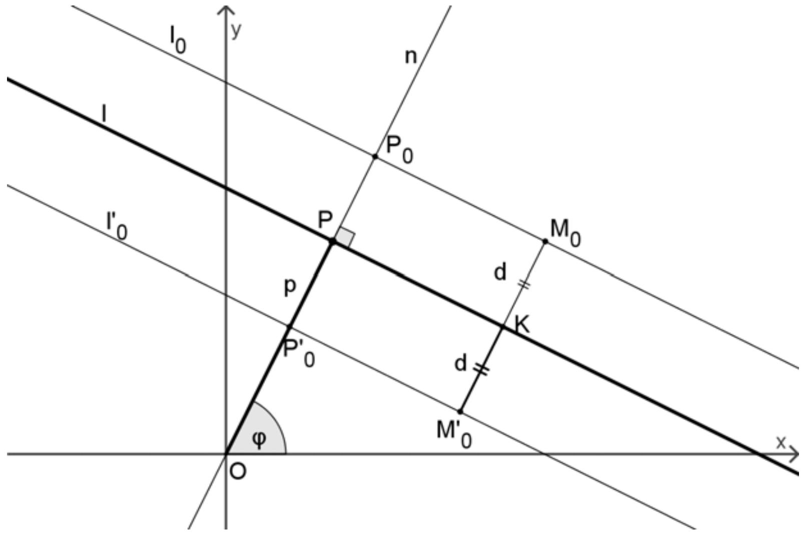
Осим овог, питања припадања тачке правој, интересантно је и питање положаја тачке и праве у координатном систему. За решавање оба ова проблема размотри-ћемо растојање од тачке до праве.

Теорема 11. *Растојање од тачке* $M_0(x_0, y_0)$ *до праве* $l: ax + by + c = 0$*, једнако је*

(23) $$d = d\left(M_0, l\right) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}\,,$$

где је $a \neq 0$ *или* $b \neq 0$.

Доказ. Нека је у Декартовом правоуглом координатном систему дата права l, једначином $l: ax + by + c = 0$, тачка $M_0(x_0, y_0)$, која не припада правој l (Слика 13. а.), 3.13 a.ggb, са оне стране праве l са које није координатни почетак O.



Слика 13. а.

Нека је даље права n, нормала из координатног почетка O, на праву l, при чему је тачка P подножје нормале, а растојање од координатног почетка до праве l, једнако је $d(O,P)=p$. На основу наведеног, једначина праве l, у нормалном облику је

$$l: x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0,$$

где је φ угао, који образује права n са позитивним смером Ox осе.

Нека је l_0 права, која садржи тачку M_0, чија је нормала (из координатног почетка) такође права n, а подножје нормале нека је P_0. Ако је растојање од координатног почетка до праве l_0, једнако $d(O,P_0)=p+d$, онда је $d=d(P_0,P)=d(M_0,l)$ тражено растојање од тачке M_0, до праве l.

С друге стране, ако је тачка M_0 са исте стране праве l као и координатни почетак O, на истом одстојању $d=d(M_0,l)$ од праве l, а l_0 права, која садржи тачку M_0, чија је нормала такође права n, а подножје нормале P_0, онда је растојање од координатног почетка до праве l_0, једнако $d(O,P_0)=p-d$.

На основу напред наведеног, једначина праве l_0, у нормалном облику, за оба положаја тачке M_0, гласи

$$l_0: x\cos\varphi + y\sin\varphi - (p \pm d) = 0,$$

где знак $"+"$ важи када су тачка M_0 и координатни почетак O, са разних страна праве l, а знак $"-"$ важи када су тачка M_0 и координатни почетак O, са исте стране праве l. Пошто тачка M_0 припада правој l_0, што је еквивалентно са једнакошћу

$$x_0\cos\varphi + y_0\sin\varphi - (p \pm d) = 0,$$

за растојање $d=d(M_0,l)$ важи

$$d = \pm\left(x_0 \cos\varphi + y_0 \sin\varphi - p\right).$$

Како је $d = d\left(M_0, l\right) > 0$, последња једнакост се може записати и на следећи начин

$$d = \left|x_0 \cos\varphi + y_0 \sin\varphi - p\right|,$$

одакле непосредно следи (23). ■

Нека је дата права l, једначином $l: ax + by + c = 0$, тачка $M_0\left(x_0, y_0\right)$, која не припада правој l и тачка $M_1\left(x_1, y_1\right)$ на правој l (Слика 13. б.), 3.13 b.ggb. Нека је вектор $\vec{n}$ нормалан на праву l и нека је тачка M_2 подножје нормале из тачке M_0 на праву l. Тада је $\vec{n} = \left(a, b\right)$ и $d\left(M_0, l\right) = \left|\overrightarrow{M_2 M_0}\right| = \left|\vec{d}\right|$.

На основу наведеног важи

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_1 M_2} = 0,$$

а пошто је $\overrightarrow{M_2 M_0} = \vec{d}$, имамо

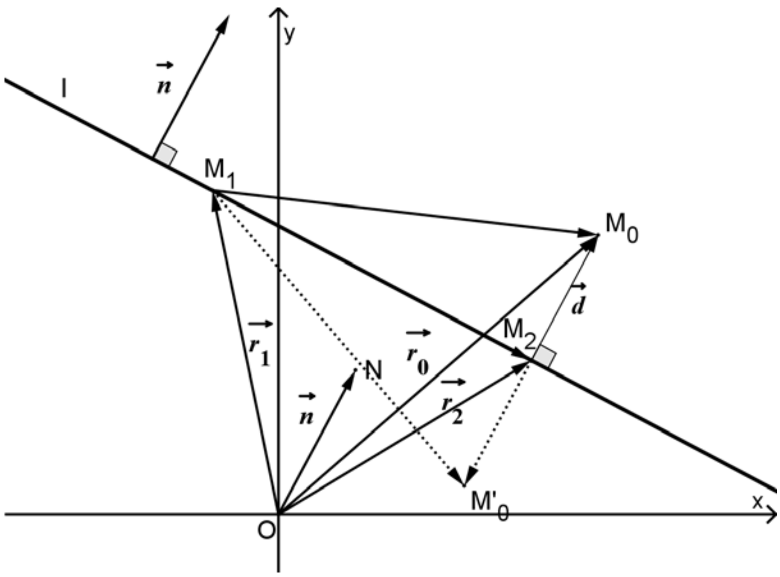
$$\vec{n} \cdot \left(\overrightarrow{M_1 M_0} - \vec{d}\right) = 0,$$

или

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_1 M_0} = \vec{n} \cdot \vec{d},$$

одакле због $\overrightarrow{M_1 M_0} = \vec{r}_0 - \vec{r}_1$, где је $\overrightarrow{OM_0} = \vec{r}_0$ и $\overrightarrow{OM_1} = \vec{r}_1$, важи

$$\vec{n} \cdot \left(\vec{r}_0 - \vec{r}_1\right) = \vec{n} \cdot \vec{d}.$$



Слика 13. б.

Како је $\vec{n} \parallel \vec{d}$, тј. $\vec{n} \cdot \vec{d} = \pm\left|\vec{n}\right| \cdot \left|\vec{d}\right|$, онда је

$$\left|\vec{n} \cdot \vec{r}_0 - \vec{n} \cdot \vec{r}_1\right| = \left|\vec{n} \cdot \vec{d}\right| = \left|\vec{n}\right| \cdot \left|\vec{d}\right|$$

тј.

$$\left|\vec{d}\right| = \frac{\left|\vec{n} \cdot \vec{r}_0 - \vec{n} \cdot \vec{r}_1\right|}{\left|\vec{n}\right|}.$$

Ако је $\left|\vec{d}\right| = d$, после увођења координата имамо

$$d = \frac{\left|ax_0 + by_0 - \left(ax_1 + by_1\right)\right|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{\left|ax_0 + by_0 + c\right|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

где је коришћен услов $M_1 \in l$, који је еквивалентан са $c = -\left(ax_1 + by_1\right)$.

3.3. ДВЕ ПРАВЕ

3.3.1. Пресек две праве и паралелност

Две праве l_1 и l_2 **у равни**, или се секу, или су паралелне (или немају заједничких тачака, или се поклапају). Нека су ове две праве дате својим једначинама у имплицитном облику

(24) $$l_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0 \text{ и } l_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0.$$

Њихов међусобни однос разматрамо тако, што на основу Претпоставке 3. из 3.1.5.2., прво одређујемо њихов пресек, решавајући систем који чине једначине правих, тј. решавамо систем две линеарне једначине са две непознате

(25) $$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y &= -c_1 \\ a_2x + b_2y &= -c_2 \end{aligned}\right\}.$$

У ту сврху уведимо следеће обележавање

$$D_s = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix},\ D_x = \begin{vmatrix} -c_1 & b_1 \\ -c_2 & b_2 \end{vmatrix},\ D_y = \begin{vmatrix} a_1 & -c_1 \\ a_2 & -c_2 \end{vmatrix}.$$

На основу Крамеровог правила, познато је

1. систем (25) има једно решење $\left(x_0, y_0\right)$, ако и само ако је $D_s \neq 0$ и важи
$$\left(x_0, y_0\right) = \left(\frac{D_x}{D_s}, \frac{D_y}{D_s}\right);$$
2. систем (25) нема решења, ако и само ако је $D_s = 0 \ \wedge\ (D_x \neq 0 \ \vee\ D_y \neq 0)$;
3. систем (25) има бесконачно много решења, ако и само ако је $D_s = 0 \ \wedge$ $D_x = 0$ (одатле следи да $D_y = 0$).

Услови $D_s = 0$, $D_x = 0$ и $D_y = 0$, (аналогно $D_s \neq 0$, $D_x \neq 0$ и $D_y \neq 0$) могу се записати и на следећи начин

$$a_1b_2 = a_2b_1,\ b_1c_2 = b_2c_1,\ a_1c_2 = a_2c_1 \ \text{ (аналогно } a_1b_2 \neq a_2b_1,\ b_1c_2 \neq b_2c_1,\ a_1c_2 \neq a_2c_1\text{)}$$

или

(26) $$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2},\ \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2},\ \frac{a_1}{a_2} = \frac{c_1}{c_2} \ \text{ (аналогно } \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2},\ \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2},\ \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{c_1}{c_2}\text{)}.$$

У складу с тим и са наведеном Претпоставком 3., можемо закључити

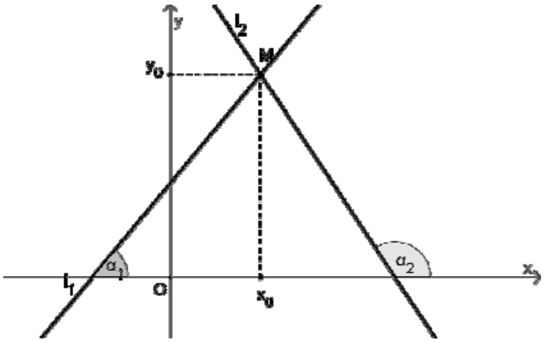
Теорема 7. З*а међусобни однос две праве* l_1 *и* l_2 *у равни, дате својим једначинама* (24)*, важи*

1. *праве* l_1 *и* l_2 *секу се у тачки* $(x_0, y_0) = \left(\dfrac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \dfrac{a_2c_1 - a_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1} \right)$*, ако и само ако је* $\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$*;*

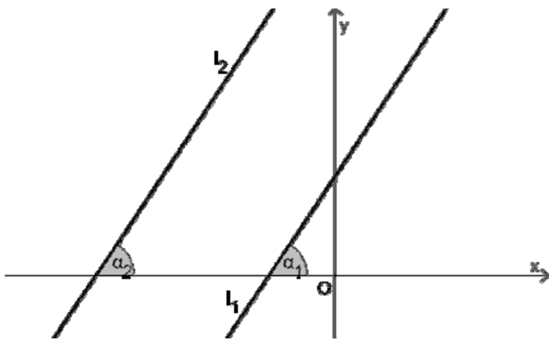
2. *праве* l_1 *и* l_2 *су паралелне и* $l_1 \neq l_2$*, ако и само ако је* $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$*;*

3. *праве* l_1 *и* l_2 *се поклапају, ако и само ако је* $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$. ■

Пошто се једначина праве у експлицитном облику користи веома често приликом решавања задатака, а посебно због његове добре прегледности, претходна теорема може се формулисати и коришћењем коефицијената експлицитног облика једначине праве. За доказ је довољно да се у текст доказа Теореме 7. уведе смена $a_1 = k_1$, $a_2 = k_2$ $b_1 = b_2 = -1$, $c_1 = n_1$, $c_2 = n_2$, тада су праве l_1 и l_2 предста-вљене у експлицитном облику и тврђење следи непосредно, (Слика 14.а и Слика 14.б), 3.14.ggb.



Слика 14.а



Слика 14.б

Теорема 7'. *За медусобни однос две праве* l_1 *и* l_2 *у равни, дате својим једначина-ма у експлицитном облику*

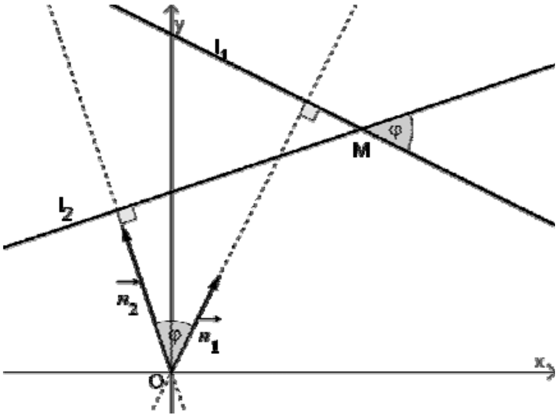
(27) $$l_1 : y = k_1x + n_1 \quad и \quad l_2 : y = k_2x + n_2$$

важи

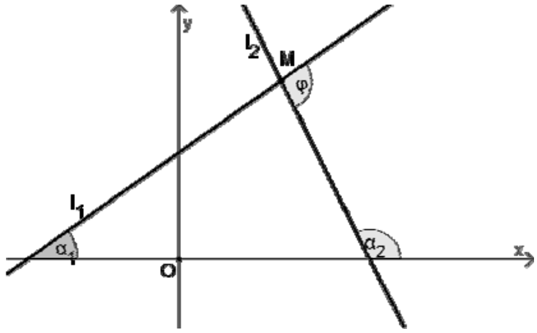
1. *праве* l_1 *и* l_2 *секу се у тачки* $(x_0, y_0) = \left(\dfrac{n_2 - n_1}{k_1 - k_2}, \dfrac{k_1n_2 - k_2n_1}{k_1 - k_2} \right)$*, ако и само ако је* $k_1 \neq k_2$*;*
2. *праве* l_1 *и* l_2 *су паралелне и* $l_1 \neq l_2$*, ако и само ако је* $k_1 = k_2 \ \wedge \ n_1 \neq n_2$*;*
3. *праве* l_1 *и* l_2 *се поклапају, ако и само ако је* $k_1 = k_2 \ \wedge \ n_1 = n_2$. ■

3.3.2. Углови између две праве и нормалност

Две праве које се секу, образују два пара унакрсних (међусобно подударних) углова. Ако је сваки од углова једног пара једнак φ, онда су углови њима унакрсног пара, једнаки $\varphi_1 = \pi - \varphi$, (Слика 15.а и Слика 15.б), 3.15 a.ggb и 3.15 b.ggb.



Слика 15.а



Слика 15.б

Теорема 8. *Ако су две праве* l_1 *и* l_2 *у равни, дате својим једначинама* (22), *онда за угао* φ, *један од два пара унакрсних углова, које оне образују, важи*

(28) $$\mathrm{tg}\varphi = \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{a_1 a_2 + b_1 b_2}.$$

Специјално, две праве l_1 *и* l_2 *једне равни су нормалне, ако и само ако је*

(29) $$a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0.$$

Доказ Ако су вектори $\vec{n}_1 = (a_1, b_1)$ и $\vec{n}_2 = (a_2, b_2)$ нормални на праве l_1 и l_2, дате једначинама (22), онда је оријентисани угао $\angle(\vec{n}_1, \vec{n}_2)$, по модулу једнак углу φ, (или $\varphi_1 = \pi - \varphi$),који образују праве l_1 и l_2.

На основу познатих особина скаларног и векторског производа вектора важи.

$$\cos\angle(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2}},$$

и

$$\sin\angle(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \frac{|\vec{n}_1 \times \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|a_1 b_2 - a_2 b_1|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2}},$$

одакле је

$$\mathrm{tg}\angle(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \frac{|a_1 b_2 - a_2 b_1|}{a_1 a_2 + b_1 b_2}.$$

Како је оријентисани угао $\angle(\vec{n}_1, \vec{n}_2)$, по модулу једнак углу φ, онда је

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{a_1 a_2 + b_1 b_2},$$

где φ представља један од два суплементна угла између правих l_1 и l_2. При томе, ако је вредност добијеног израза $\mathrm{tg}\varphi > 0$, онда је φ оштар, а $\varphi_1 = \pi - \varphi$ туп угао, и обрнуто, ако је $\operatorname{tg}\varphi < 0$, онда је φ туп, а $\varphi_1 = \pi - \varphi$ оштар угао.

Праве l_1 и l_2 су нормалне, ако и само ако су, на њих нормални вектори $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$, међусобно нормални, тј. ако и само ако је

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0,$$

или

$$a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0,$$

чиме је теорема доказана. ■

Теорема 8'. *Ако ни једна од правих l_1 и l_2 једне равни, датих једначинама* (27)*, није паралелна са Oy осом, онда за угао φ, један од два пара унакрсних углова, које оне образују, важи*

(30) $$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}.$$

Специјално, праве l_1 и l_2 једне равни су нормалне, ако и само ако је

(31) $$1 + k_1 k_2 = 0.$$

Доказ Нека су праве l_1 и l_2, дате једначинама (27), при чему ниједна од њих није паралелна са Oy осом, тј. $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ и нека је угао φ, један од два пара унакрсних углова, које оне образују, (сл. 15 б). Тада је

$$\varphi = \alpha_2 - \alpha_1,$$

одакле је

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\left(\alpha_2 - \alpha_1\right) = \frac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1 + \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$$

где су α_1 и α_2 углови које праве l_1 и l_2 образују са позитивним смером Ox осе, а k_1 и k_2, одговарајући коефицијенти праваца.

Праве l_1 и l_2 су нормалне, тј. $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ или $\varphi = \dfrac{3\pi}{2}$, ако и само ако је

$$1 + k_1 k_2 = 0.$$ ■

Напомена 1. Услови паралелности правих l_1 и l_2

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \text{ или } k_1 = k_2$$

непосредно следе и из претходне две теореме. ■

Напомена 2. Ако ни једна од правих l_1 и l_2, датих једначинама (24), није паралелна са Oy осом, тј. $b_1 \neq 0$ и $b_2 \neq 0$, онда се њихове једначине могу превести на експлицитни облик (27), где је

$$k_1 = -\frac{a_1}{b_1},\ n_1 = -\frac{c_1}{b_1},\ k_2 = -\frac{a_2}{b_2},\ n_2 = -\frac{c_2}{b_2}.$$

Скраћивањем разломка у (28) и дељењем једнакости (29) са $b_1 b_2$, добијамо да за један од углова између правих l_1 и l_2 , датих у експлицитном облику (27), важи

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2},$$

а да су праве l_1 и l_2 нормалне, ако и само ако је

$$1 + k_1 k_2 = 0. \qquad \blacksquare$$

3.3.3. Растојање паралелних правих

Проблем растојања паралелних правих, могуће је једноставно решити коришћењем растојања од тачке до праве. На ово питање даје одговор следећа теорема.

Теорема 10. *За растојање паралелних правих*

$$l_1 : ax + by + c_1 = 0 \quad \textit{и} \quad l_2 : ax + by + c_2 = 0$$

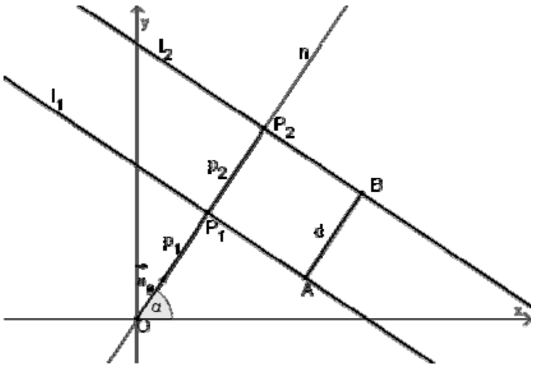
где је $a \neq 0$ *или* $b \neq 0$, *важи*

$$d(l_1, l_2) = \frac{|\, c_1 - c_2 \,|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

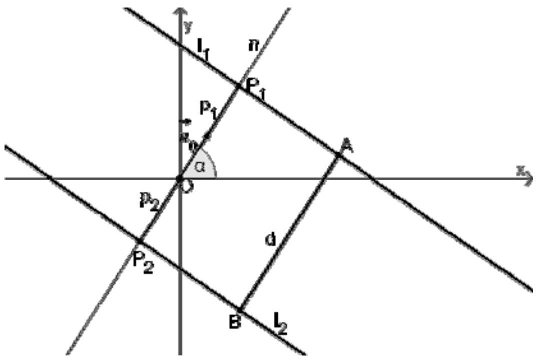
Доказ. Нека су дате паралелне праве

$$l_1 : ax + by + c_1 = 0 \quad \text{и} \quad l_2 : ax + by + c_2 = 0$$

где је $a \neq 0$ или $b \neq 0$ и нека су P_1 и P_2 подножја нормале n из координатног почетка O на праве l_1 и l_2, редом. Са $d(O, l_1)$ и $d(O, l_2)$ обележићемо растојања од координатног почетка до правих l_1 и l_2, редом. Да бисмо утврдили међусобно растојање $d(l_1, l_2)$, паралелних правих l_1 и l_2, разликујемо два случаја:



Слика 16.a



Слика 16.б

1. Праве l_1 и l_2 су са исте стране координатног почетка, (Слика 16.a), 3.16.ggb, тада је

$$d(l_1, l_2) = |d(O, l_1) - d(O, l_2)| = \left| \frac{c_1}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}} - \frac{c_2}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}} \right|,$$

а пошто су параметри c_1 и c_2 истог знака, важе импликације:

$$c_1 > 0 \text{ и } c_2 > 0 \quad \Rightarrow \quad d\left(l_1, l_2\right) = \left| \frac{c_1}{-\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{c_2}{\sqrt{a^2+b^2}} \right| = \frac{\left|c_1 - c_2\right|}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

$$c_1 < 0 \text{ и } c_2 < 0 \quad \Rightarrow \quad d\left(l_1, l_2\right) = \left| \frac{c_1}{\sqrt{a^2+b^2}} - \frac{c_2}{\sqrt{a^2+b^2}} \right| = \frac{\left|c_1 - c_2\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

2. Праве l_1 и l_2 су са разних страна координатног почетка, (Слика 16.б), 3.16.ggb, тада је

$$d\left(l_1, l_2\right) = \left| d\left(O, l_1\right) + d\left(O, l_2\right) \right| = \left| \frac{c_1}{\pm\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{c_2}{\pm\sqrt{a^2+b^2}} \right|,$$

а пошто су параметри c_1 и c_2 супротног знака, важе импликације:

$$c_1 > 0 \text{ и } c_2 < 0 \quad \Rightarrow \quad d\left(l_1, l_2\right) = \left| \frac{c_1}{-\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{c_2}{\sqrt{a^2+b^2}} \right| = \frac{\left|c_1 - c_2\right|}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

$$c_1 < 0 \text{ и } c_2 > 0 \quad \Rightarrow \quad d\left(l_1, l_2\right) = \left| \frac{c_1}{\sqrt{a^2+b^2}} - \frac{c_2}{\sqrt{a^2+b^2}} \right| = \frac{\left|c_1 - c_2\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}. \qquad \blacksquare$$

3.3.4. Оса симетрије две праве у равни. Симетрала угла

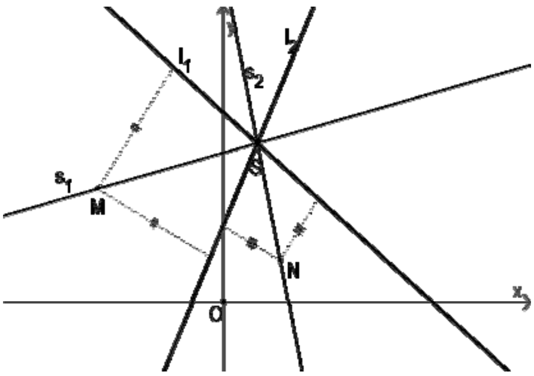
Познато је из еуклидске геометрије, да је симетрала угла, права у равни угла, са особином да су растојања сваке њене тачке од кракова угла једнака. Такође, и симетрала две паралелне праве је права, са истом особином. На основу тога следи тврђење.

Теорема 11. *Осе симетрије две праве* (Слике: 17.а и 17.б) 3.17 a.ggb и 3.17 b.ggb

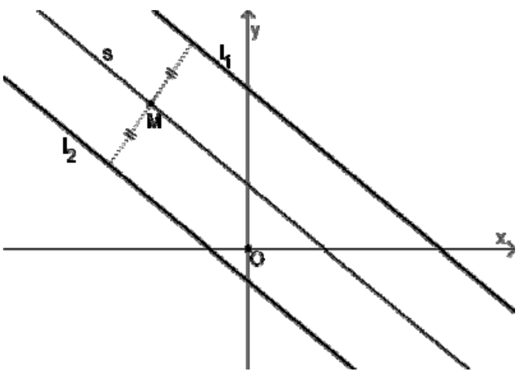
$$l_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad \text{и} \quad l_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

у равни, где је $a_1^2 + b_1^2 \neq 0$ *и* $a_2^2 + b_2^2 \neq 0$, *су праве* s_1 *и* s_1 *чије су једначине*

$$s_{1,2} : \frac{a_1x + b_1y + c_1}{-\operatorname{sgn} c_1 \cdot \sqrt{a_1^2 + b_1^2}} \mp \frac{a_2x + b_2y + c_2}{-\operatorname{sgn} c_2 \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2}} = 0.$$



Слика 17.а



Слика 17.б

Доказ. Тачка $T\left(x, y\right)$ припада оси симетрије s две праве l_1 и l_2, ако и само ако су њена растојања од тих правих једнака, тј. ако и само ако важи

$$\left|\frac{a_1x+b_1y+c_1}{-\operatorname{sgn}c_1\cdot\sqrt{a_1^2+b_1^2}}\right|=\left|\frac{a_2x+b_2y+c_2}{-\operatorname{sgn}c_2\cdot\sqrt{a_2^2+b_2^2}}\right|,$$

или

(32) $$\frac{a_1x+b_1y+c_1}{-\operatorname{sgn}c_1\cdot\sqrt{a_1^2+b_1^2}}=\pm\frac{a_2x+b_2y+c_2}{-\operatorname{sgn}c_2\cdot\sqrt{a_2^2+b_2^2}},$$

одакле непосредно следи тврђење. ■

Ако је $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$, тј. ако се праве l_1 и l_2 секу, онда су праве s_1 и s_2, симетрале два напоредна угла, које праве l_1 и l_2 образују.
Ако је $a_1b_2-a_2b_1=0$, тј. ако су праве l_1 и l_2 паралелне, онда постоји само једна њихова симетрала, а то је права s_2.

На основу 3.1.6.2., Теорема 11., знак "+" у релацији (32) значи, да су тачке T и O са исте стране, како праве l_1, тако и праве l_2, а знак "–" да су исте тачке са разних страна једне и друге праве. Ово надаље значи да симетрала s_1, дата у претходној теореми, припада ономе углу коме припада и координатни почетак, а симетрала s_2 напоредном углу.

3.3.5. Симетрала дужи

Симетралу дужи AB можемо дефинисати као геометријско место тачака s у равни, са особином да су њихова растојања, од тачака $A(x_1,y_1)$ и $B(x_2,y_2)$, једнака. Њену једначину добијамо уопштавајући Пример 3, из 2.1., тј. полазећи од наведене дефиниције према којој важи

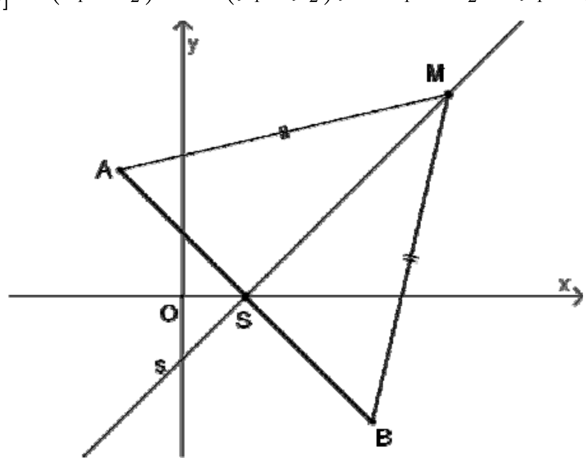
$$s_{[AB]}=\{M(x,y):d(M,A)=d(M,B)\}.$$

Одатле је 3.18.ggb

$$s_{[AB]}:\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}=\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2},$$

а после сређивања, добијамо једначину симетрале дужи AB

$$s_{[AB]}:2(x_1-x_2)x+2(y_1-y_2)y=x_1^2-x_2^2+y_1^2-y_2^2.$$



Слика 18.

3.4. ПРАМЕН ПРАВИХ

Под **праменом правих** у равни, као што је познато из еуклидске геометрије, подразумева се скуп свих правих равни, које садрже једну утврђену тачку, **центар прамена**, или скуп свих правих равни, паралелних једној датој правој.

Наш следећи задатак је, да у складу са овом дефиницијом, саставимо једначину прамена правих. У решавању овог задатка, полазимо од елемената који једнозначно одређују прамен правих.

1. Нека су у равни дате две различите праве својим једначинама

(33) $$l_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad \text{и} \quad l_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0,$$

где је $a_1^2 + b_1^2 \neq 0$ и $a_2^2 + b_2^2 \neq 0$. Њихова линеарна комбинација може се приказати као

(34) $$\alpha\left(a_1x + b_1y + c_1\right) + \beta\left(a_2x + b_2y + c_2\right) = 0,$$

или

(35) $$\left(\alpha a_1 + \beta a_2\right)x + \left(\alpha b_1 + \beta b_2\right)y + \alpha c_1 + \beta c_2 = 0$$

где су α и β произвољни реални параметри. Последња једначина представља једначину праве, ако и само ако је

$$\alpha a_1 + \beta a_2 \neq 0 \quad \text{или} \quad \alpha b_1 + \beta b_2 \neq 0.$$

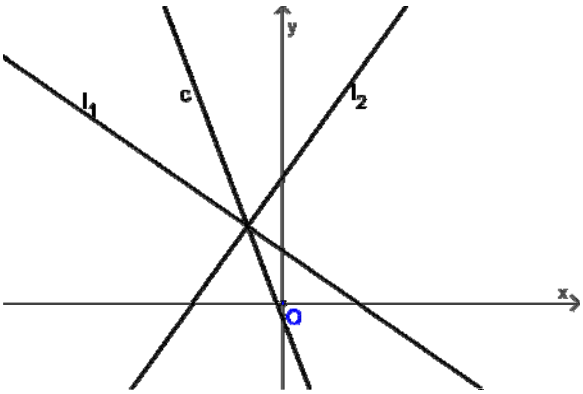
Ако се праве l_1 и l_2 секу (Слика 19.а), 3.19 a.ggb, онда је $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$, тј.

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

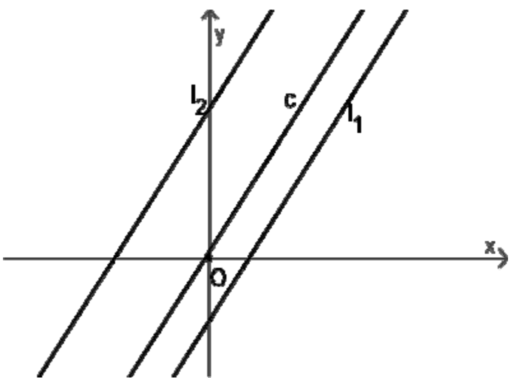
а пошто је D детерминанта хомогеног система

(36) $$\left.\begin{aligned} \alpha a_1 + \beta a_2 &= 0 \\ \alpha b_1 + \beta b_2 &= 0 \end{aligned}\right\},$$

исти има само тривијално решење, $\alpha = \beta = 0$.



Слика 19.а



Слика 19.б

Ако су праве l_1 и l_2 паралелне (Слика 19.б), 3.19 b.ggb, онда постоји $k \in \mathbb{R}$ тако да је $a_2 = ka_1$, $b_2 = kb_1$, због чега за решења система (36) важи $\alpha + k\beta = 0$.

Значи, одговор на питање, под којим условима једначина (34) представља праву је следећи:

- за $l_1 \cap l_2 \neq \varnothing$, једначина (34) представља праву, ако и само ако је $\alpha \neq 0$ или $\beta \neq 0$,
- за $l_1 \parallel l_2$, једначина (34) представља праву, ако и само ако је $\alpha + k\beta \neq 0$,

где је k, константа пропорционалности коефицијената паралелних правих.

Сада разматрамо случај када једначина (35) представља праву:

– Ако се праве l_1 и l_2 секу у тачки $T(x_0, y_0)$, онда свака права чија је једначина облика (35) садржи тачку пресека

$$T \in l_1 \iff a_1x_0 + b_1y_0 + c_1 = 0 \quad \text{и} \quad T \in l_2 \iff a_2x_0 + b_2y_0 + c_2 = 0,$$

одакле је

$$\alpha(a_1x_0 + b_1y_0 + c_1) + \beta(a_2x_0 + b_2y_0 + c_2) = 0,$$

тј.

$$(\alpha a_1 + \beta a_2)x_0 + (\alpha b_1 + \beta b_2)y_0 + \alpha c_1 + \beta c_2 = 0.$$

– Ако су праве l_1 и l_2 паралелне, тј. ако постоји $k \in \mathbb{R}$ тако да је $a_2 = ka_1$, $b_2 = kb_1$, одакле је

$$\alpha a_1 + \beta a_2 = (\alpha + k\beta)a_1 \quad \text{и} \quad \alpha b_1 + \beta b_2 = (\alpha + k\beta)b_1,$$

онда је права дата једначином (35) са њима паралелна.

Такође, за произвољну тачку $T(x_0, y_0)$, равни одређене правама l_1 и l_2, могуће је одредити нову праву прамена, тј. могуће је одредити вредност параметара α и β, тако да права дата једначином (35), садржи тачку T. У том случају параметри α и β задовољавају једначину

$$\alpha(a_1x_0 + b_1y_0 + c_1) + \beta(a_2x_0 + b_2y_0 + c_2) = 0,$$

одакле, ако је например $\alpha \neq 0$, имамо

(37)
$$\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{a_1x_0 + b_1y_0 + c_1}{a_2x_0 + b_2y_0 + c_2} = \lambda.$$

С друге стране, дељењем једначине (34) са $\alpha \neq 0$, добијамо еквивалентну једначину

(38)
$$a_1x + b_1y + c_1 + \lambda(a_2x + b_2y + c_2) = 0$$

где је λ одређено са (37), која као и једначина (34), или (35), представља једначину прамена правих, одређеног двема правама l_1 и l_2, 3.20 a.ggb и 3.20 b.ggb.

Ако су праве l_1 и l_2 дате једначинама у нормалном облику, онда једначина (38) значи да права прамена, која одговара одређеној вредности параметра λ, представља геометријско место тачака, чији је однос растојања од правих l_1 и l_2, једнак $|\lambda|$.

Такође, за позитивне вредности параметра λ, одговарајуће праве прамена припадају једном, а за негативне вредности параметра λ, другом пару унакрсних углова одређених правама l_1 и l_2.

Напред наведена разматрања, могу се исказати следећом теоремом.

Теорема 12. *Права* l *припада прамену, одређеном са две различите праве* l_1 *и* l_2*, дате једначинама* (33)*, ако и само ако је њена једначина дата у облику* (34) *или* (38) *где је* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*, а за* λ *важи* (37). ■

2. Прамен правих у равни, одређен је и када је одређен центар прамена, или, ако је прамен скуп паралелних правих у равни, када је одређена једна права прамена.

Ако је $S(x_0, y_0)$ центар прамена и параметар $k \in \mathbb{R}$, онда једначина

(39) $$y - y_0 = k(x - x_0)$$

представља једначину прамена, при чему свакој вредности параметра k, одговара коефицијент правца неке праве прамена.

Ако је дата једна права $l: y = kx + n$ прамена паралелних правих у равни, онда једначина (39) представља једначину тог прамена, при чему пар (x_0, y_0) представља тачку која одређује праву прамена, 3.21.ggb.

И претходни закључак се може исказати теоремом

Теорема 13. *Права* l *припада прамену правих у равни, који је одређен центром прамена, или, ако је одређена једна права прамена, када је прамен скуп паралелних правих у равни, ако и само ако је њена једначина дата у облику* (39) *где је* $S(x_0, y_0)$ *центар прамена и параметар* $k \in \mathbb{R}$. ■

3.4.1. Услов да три праве буду конкурентне

Нека су у равни дате три праве

(40) $$l_i:\ a_i x + b_i y + c_i = 0,$$

где је $a_i \neq 0$ или $b_i \neq 0$ и $i = 1,2,3$. Интересантно је питање, под којим условима су ове праве конкурентне. Одговор даје следећа теорема.

Теорема 14. *Три различите праве* l_1*,* l_2 *и* l_3*, дате једначинама* (40)*, међу којима ниједан пар нису паралелне праве, конкурентне су, ако и само ако је*

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0 .$$

Доказ На основу Теореме 12. закључујемо да, права l_3 припада прамену, одређеном правама l_1 и l_2, ако и само ако постоје реални бројеви $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, тави да је

$$l_3:\ \alpha(a_1 x + b_1 y + c_1) + \beta(a_2 x + b_2 y + c_2) = 0,$$

или

$$l_3: (a_1\alpha + a_2\beta)x + (a_1\alpha + a_2\beta)y + c_1\alpha + c_2\beta = 0 .$$

Праве l_1, l_2 и l_3 су три различите праве, због чега је $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$. У противном, очигледно је да ако је $\alpha = 0$, онда је $l_3 = l_2$, а ако је $\beta = 0$, онда је $l_3 = l_1$.

С друге стране, из (40) следи да постоји $\gamma \in \mathbb{R}$, тако да је

$$l_3 : \gamma a_3 x + \gamma b_3 y + \gamma c_3 = 0 .$$

Пошто се ради о истој правој l_3, хомогени систем

$$\begin{aligned} a_1\alpha + a_2\beta - \gamma a_3 &= 0 \\ b_1\alpha + b_2\beta - \gamma b_3 &= 0 \\ c_1\alpha + c_2\beta - \gamma c_3 &= 0 \end{aligned}$$

треба да има нетривијално решење, тј. важи тврђење теореме. ■

3.5. ПОЛУРАВАН, ЛИНЕАРНА НЕЈЕДНАЧИНА СА ДВЕ НЕПОЗНАТЕ

Познато је, наиме, да свака права у равни дели скуп свих тачака равни на два дисјунктна подскупа, две отворене полуравни. Прецизније, **отворена полураван** са ивицом l, која садржи тачку A, у ознаци $(l\alpha_A)$, представља скуп тачака равни α, које се налазе са исте стране праве l, каои тачка A. Унија отворене полуравни $(l\alpha_A)$и праве l је **затворена полураван** $[l\alpha_A)$. Приказ полуравни се може добити кликом на линк (3.22.ggb), активирањем апликације GeoGebra.

Дакле, нека је дата права $l: ax+by+c=0$, за $a,b,c \in \mathbb{R}$, на правој l тачка $A(x_0, y_0)$, због чега је $ax_0 + by_0 + c = \Omega_A$, као и тачка $T(1,0)$. Померањем тачке A, величина Ω_A узима разне вредности у скупу $\mathbb{R}$ и може се уочити следећа правилност: када $A \in l$, онда је $\Omega_A = 0$, а када тачка A, прелази из једне у другу полураван са ивицом l, Ω_A мења знак, што се може анализирати кликом на линк (3.23.ggb), активирањем апликације GeoGebra.

Користећи ове резултате можемо приступити решавању линеарне неједначине са две непознате

$$ax + by + c\rho 0$$

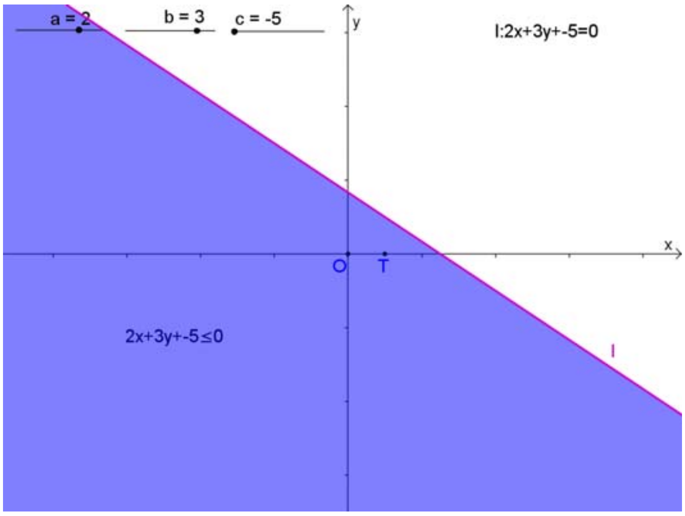
где је $a,b,c \in \mathbb{R}$, $a^2 + b^2 \neq 0$ и $\rho \in \{\geq, \leq, >, <\}$.

Другим речима то значи, да ако је $A \in [l\alpha_T) \Leftrightarrow \Omega_A \geq 0$, онда скуп свих тачака затворене полуравни $[l\alpha_T)$ представља скуп решења неједначине $ax + by + c \geq 0$, и скуп свих тачака затворене полуравни $[l\alpha'_T)$ представља скуп решења неједначине $ax + by + c \leq 0$, при чему је $[l\alpha_T) \cup [l\alpha'_T) = \alpha$. Такође, релација $A \in (l\alpha_T) \Leftrightarrow \Omega_A > 0$, значи да скуп свих тачака отворене полуравни $(l\alpha_T)$ представља скуп решења неједначине $ax + by + c > 0$, и скуп свих тачака отворене полуравни $(l\alpha'_T)$ представља скуп решења неједначине $ax+by+c<0$. Овај резултат се добија кликом на линк (3.24.ggb), активира-њем апликације GeoGebra.

Можемо закључити да решити неједначину $ax+by+c\ \rho\ 0$, значи одредити затворену, или отворену, полураван са ивицом $l: ax+by+c=0$, тако да координате тачака полуравни задовољавају дату неједначину

Пример 1. Реши неједначину $2x+3y-5\leq 0$.

Резултат: Кликом на линк (3.24.ggb) покренуће се апликација GeoGebra, Слика 20. Уређени пар координата сваке тачке затворене полуравни, одређене ивицом l, и координатним почетком, јесте решење неједначине, и можемо га приказати на следећи начин



Слика 20.

$$(-\infty<x<\infty)\wedge(-\infty<y\leq(-2x+5)/3)$$

или у облику

$$(x,y)\in(-\infty,\infty)\times\left(-\infty,(-2x+5)/3\right].$$ □

Претходно теоријско разматрање приказује поступак, у коме се полазећи од слике одређеног објекта, од слике полуравни, тестирањем већег броја примера процеса у акцији, уочавају одређене правилности које карактеришу тачке и ивицу полуравни, на основу којих се генерише сам концепт линеарне неједначине са две непознате и поступак за њено решавање.

Пример 1. илуструје примену овог поступка на решавање линеарне неједначине са две непознате, у програму GeoGebra.

Следећи пример илуструје примену истог поступка (слика као илустративно средство, прелази у средство које генерише математички концепт), на једном сложенијем примеру: решавању система линеарних неједначина са две непознате, коришћењем програмског пакета Matheamtica.

3.5.1. Системи линеарних неједначина са две непознате

Пример 2. Решити систем линеарних неједначина

$$\left.\begin{array}{r} x-2y+10\geq 0 \\ 3x-2y+5\leq 0 \\ 2x+3y-1>0 \end{array}\right\}.$$

Решење. На основу напред изложеног теоријског разматрања и Примера 1. можемо закључити да прва неједначина представља скуп тачака затворене полуравни са ивицом $a: x-2y+10=0$, која садржи координатни почетак, друга је скуп тачака затворене полуравни са ивицом $c: 3x-2y+5=0$, која не садржи координатни почетак, а трећа је скуп тачака отворене полуравни, са ивицом $b: 2x+3y-1=0$, која такође не садржи координатни почетак Решење прве неједначине се добија покретањем апликације Matheamtica, кликом на линк (3.25.nb), и оно гласи

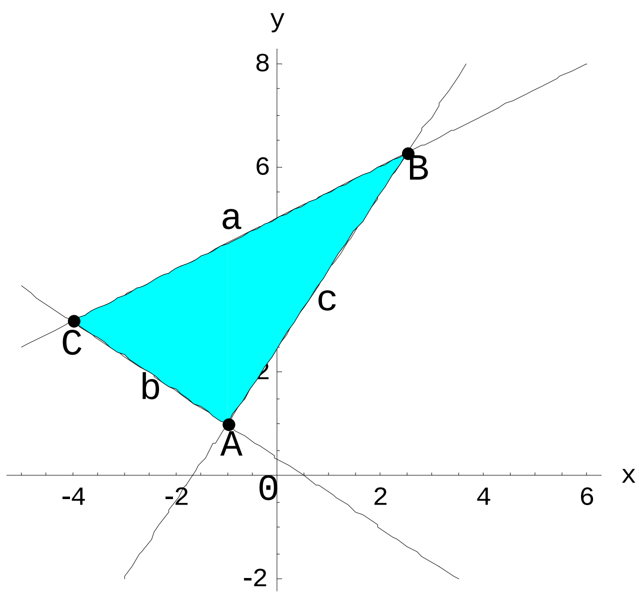
$$(x,y)\in(-\infty,\infty)\times\left(-\infty,\frac{x}{2}+5\right].$$

Кликом на линк (3.26.nb) и покретањем апликације Matheamtica, добија се решење система линеарних неједначина

$$\left.\begin{array}{r} x-2y+10\geq 0 \\ 3x-2y+5\leq 0 \end{array}\right\},$$

представља пресек прве две полуравни, са ивицама a и c, а оно износи

$$(x,y)\in\left(-\infty,\frac{5}{2}\right]\times\left[3x+5,\frac{x}{2}+5\right].$$



Слика 21.

Коначно, дати систем (конјункција) неједначина представља пресек све три наведене полуравни, тј. представља скуп тачака T троугла из кога су искључене тачке затворене дужи $[AC]$, (Слика 21.),

$$T(x,y) \in \Delta ABC \setminus [AC]$$

Решење датог система је

$$(x,y) \in \left((-4,-1] \times \left(-\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}, \frac{x}{2} + 5 \right] \right) \cup \left(\left(-1, \frac{5}{2} \right] \times \left[\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}, \frac{x}{2} + 5 \right] \right),$$

добија се кликом на линк (3.27.nb), покретањем апликације Matheamti-ca.

3.6. Задаци

1. Наћи бар један: 1) вектор правца; 2) вектор нормале, праве: 1.ggb
   а) $y = kx + n$;
   б) $ax + by + c = 0$.
2. Одредити бар један вектор нормалан на праву, која: 1.ggb
   а) има коефицијент правца k;
   б) је дата у имплицитном облику $Ax + By + C = 0$.
3. Записати једначину праве $l: x = 2 + 3t,\ y = 3 + 2t$, у имплицитном и експлицитном облику.
4. Записати једначину праве $l: 3x - 4y + 4 = 0$, у параметарском и канонском облику. 4.ggb
5. Саставити једначину праве, која садржи тачку $A(-3,4)$ и паралелна је правој:
   а) $x - 2y + 5 = 0$; 5.a.ggb
   б) $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3}$; 5.ggb
   в) $x = 2$; 5.v.ggb
   г) $y = -1$; 5.g.ggb
   д) $x = 3 + t,\ y = 4 - 7t$. 5.ggb
6. Саставити једначину праве одређене тачкама 6.ggb
   а) $A(-3,1)$ и $B(1,2)$;
   б) $A(0,-2)$ и $B(-1,0)$;
   в) $A(2,1)$ и $B(2,-5)$;
   г) $A(1,-3)$ и $B(3,-3)$.
7. Испитати међусобни однос правих, а за оне које се секу одреди тачку пресека:
   а) $x - 3y - 2 = 0$ и $2x + y - 1 = 0$; 7.ggb
   б) $x + 3y - 1 = 0$ и $2 - 2x - 6y = 0$;
   в) $x - y - 3 = 0$ и $3x + 3y + 1 = 0$;
   г) $x = 1 + 2t,\ y = 1 - t$ и $x = 2 - t,\ y = 2 + t$.

8. У зависности од параметра a, испитати међусобни однос правих $ax-4y=6$ и $x-ay=3$. 8.ggb
9. Одреди вредност параметра a, тако да праве $ax+y=1$, $x-y=a$ и $x+y=a^2$ имају једну заједничку тачку. 9.ggb
10. Саставити једначину праве, која садржи тачку $A(-3,4)$ и нормална је на праву:
    - а) $x-2y+5=0$; 10.a.ggb
    - б) $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}$; 10.b.ggb
    - в) $x=2$;
    - г) $y=-1$;
    - д) $x=3+t,\ y=4-7t$. 10.b.ggb
11. Саставити једначине правих, којима припадају странице паралелограма са центром $M(2,3)$, а свака од тачака: $P(2,1)$, $Q(4,-1)$, $R(-2,0)$ и $S(1,5)$, припада по једној правој. 11.ggb
12. Две тежишне линије троугла леже на правама $x+y=3$ и $2x+3y=1$, а тачка $A(1,1)$ је његово теме. Саставити једначине страница троугла. 12.ggb
13. Тачка $A(3,-2)$ је теме квадрата, а тачка $M(1,1)$ пресек дијагонала. Саставити једначине страница и наћи остала темена квадрата. 13.ggb
14. Дужина странице ромба с оштрим углом 60°, једнака је 2. Дијагонале ромба секу се у точки $M(1,2)$ при чему је већа диагонала паралелна x-оси. Саставити једначине страница ромба. 14.ggb
15. На правој $5x-3y-4=0$ наћи тачку, једнако удаљену од тачака $A(1,0)$ и $B(-2,1)$. 15.ggb
16. Наћи одстојање тачке $A(1,-2)$ од праве, задате једначином: 16.ggb
    - а) $2x-3y+5=0$;
    - б) $4x-3y-15=0$;
    - в) $4x=3y$;
    - г) $4x-3y-10=0$;
    - д) $x=7$;
    - е) $y=9$.
17. Наћи растојање између паралелних правих $y=kx+n_1$ и $y=kx+n_2$. 17.ggb
18. Саставити једначине правих, паралелних правој $-2x+y+5=0$, на растојању $\sqrt{20}$ од тачке $A(1,-2)$. 18.ggb
19. Одреди једначину праве која садржи пресек правих $p:2x-y-3=0$ и $q:3x-2y=8$, а паралелна је с правом $r:2x-3+4y=0$ 19.ggb

20. Одреди једначину и дужину тежишне линије повучене из темена B, троугла ABC $A(-5,3)$, $B(1,-5)$ и $C(5,1)$.

21. Одреди растојање тачке $T\left(-4,-2/3\right)$ од праве $p:\sqrt{3}x-3y-2=0$. 16.ggb

22. Одреди једначину праве који садржи пресек правих $p:2x+2y-3=0$ и $q:3x-2y=8$, а нормална је на праву $r:2x+4y=-15$ 22.ggb

23. Темена троугла су $A\left(-9,2\right)$, $B\left(3,-14\right)$, $C\left(-5,-10\right)$. Одреди дужину висине из темена C. 23.ggb

24. Одреди угао између правих $p:4x+3y-12=0$ и $q:5x+7y+35=0$. 24.ggb 24.a..ggb

25. Одреди једначину висине из темена A у троуглу $A\left(3,3\right)$, $B\left(11,6\right)$, $C\left(7,12\right)$. 25.ggb

26. Одреди једначину праве која се налази на растојању 4 од праве $p:8x-15y+51=0$. 26.ggb

27. Дат је троугао са теменима $A\left(-1,2\right)$, $B\left(5,7\right)$, $C\left(2,-3\right)$. Одреди:
    а) Тежишну линију и њену дужину, из темена A, 27.a.v.ggb
    б) Висину и њену дужину, из темена B, 27.b.g.ggb
    в) Угао под којим се секу тежишне линије из темена A и B, 27.a.v.ggb
    г) Координате тежишта и ортоцентра. 27.b.g.ggb

28. Дат је троугао са теменима $A\left(-3,-8\right)$, $B\left(3,0\right)$, $C\left(-3,8\right)$. Одреди: 28.ggb
    а) Симетрале унутрашњих углова,
    б) Центар S уписане кружнице,
    в) Полупречник уписане кружнице.

29. Странице троугла припадају правама $a:2x+y+10=0$ и $b:2x-y-2=0$, а тежишна линија $t_a:2x-7y+10=0$. Одреди: 29.ggb
    а) Симетралу s_γ,
    б) Темена троугла,
    в) Симетралу странице AB,
    г) Угао између правих из а. и в. питања.

30. Дат је троугао са теменима $A\left(1,-2\right)$, $B\left(5,4\right)$, $C\left(-2,0\right)$. Одреди:
    а) Висину и њену дужину, из темена A, 30.a.b.ggb
    б) Симетралу унутрашњег угла из темена A,
    в) Површину троугла. 30.v.ggb

31. Одредити углове које права $3x-2y+4=0$ заклапа са координатним осама.

32. Одредити једначину нормале праве $2x+3y-4=0$ која садржи пресек правих $x+y+1=0$ и $x-y=0$. 22.ggb

33. Дате су тачке $A\left(2,1\right)$ и $B\left(1,3\right)$. Одредити једначину прамена правих које садрже координатни почетак и пресецају дуж AB. 33.ggb

34. Одредити симетралу углова између правих $y = x - 2$ и $y = 3$. 34.ggb

35. Одредити једначину праве чији је коефицијент правца једнак -2 и која се налази на растојању 2 од координатног почетка. 35.ggb

4. КРИВЕ ДРУГОГ РЕДА

У одељку 2.2.1. наведено је да предмет аналитичке геометрије, између осталог, чине и алгебарске линије другог реда, које називамо и криве другог реда. Иначе, у Глави 3. обрађена је алгебарска линија првог реда – права.

Под алгебарском линијом другог реда (кривом другог реда) подразумева се геометријско место тачака $M(x,y)$, чије координате x и y задовољавају алгебарску једначину другог реда (општу квадратну једначину)

(1) $$ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0$$

где је $a,b,c,d,e,f\in\mathbb{R}$ и $a^2+b^2+c^2\neq 0$.

У овој глави обрадићемо: кружницу, елипсу, хиперболу и параболу, као посебне случајеве криве другог реда, а у Глави 5. обрадићемо општу теорију кривих другог реда.

4.1. КРУЖНИЦА

4.1.1. Једначина кружнице

У Еуклидској геометрији, дефинише се кружница на следећи начин

Дефиниција 1. Кружница $\mathcal{K}$, са центром S и полупречником r, у ознаци $\mathcal{K}(S,r)$, је скуп тачака равни α (где $S\in\alpha$) чија су растојања од центра константна и једнака полупречнику 4.1.1.ggb, тј.

$$\mathcal{K}(S,r):=\{M:M\in\alpha(S)\wedge d(S,M)=r\}.$$

Полазећи од дефиниције кружнице и услова под којима је она једнозначно одређена, у овом одељку ћемо се бавити питањем формирања једначине кружнце.

1. Скаларни облик Нека је у Декартовом правоуглом координатном систему, дат центар кружнице $\mathcal{K}(S,r)$, својим координатама, тј. $S(p,q)$.

Ако тачка $M(x,y)$ припада кружници онда је

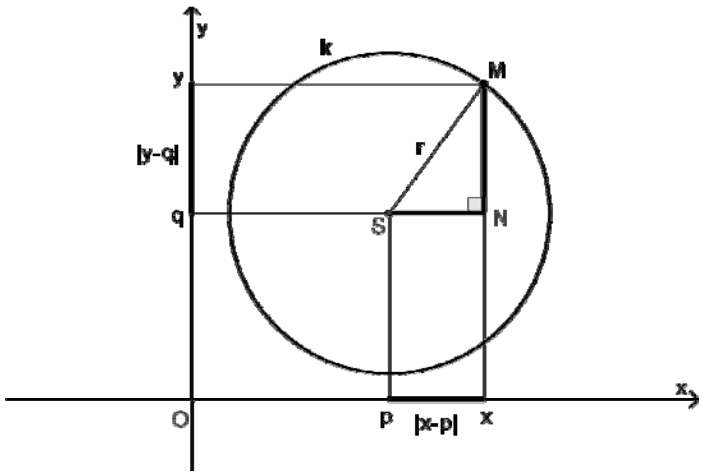
$$\sqrt{(x-p)^2+(y-q)^2}=r,$$

одакле је после квадрирања имамо

(2) $$(x-p)^2+(y-q)^2=r^2.$$

Обрнуто, ако координате тачке $M(x,y)$ задовољавају једначину (2) , онда важи

$$\left(d\left(S,M\right)\right)^2=r^2,$$



Слика 1.

одакле после кореновања, због $d\left(S,M\right)>0$ и $r>0$, имамо

$$d\left(S,M\right)=r,$$

што значи да $M\in\mathcal{K}\left(S,r\right)$. Овим је доказана теорема

Теорема 1. *Једначина* (2) *представља једначину кружнице.* ■

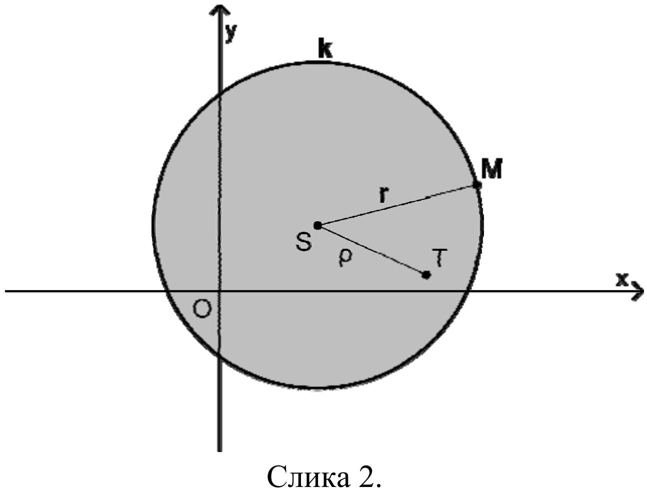
Једначина (2) зове се **канонски облик** једначине кружнице, што записујемо као

$$\mathcal{K}\left(S,r\right):\left(x-p\right)^2+\left(y-q\right)^2=r^2.$$

Специјално, ако је $S\left(p,q\right)=O\left(0,0\right)$ и полупречник r, тада је

$$\mathcal{K}\left(O,r\right):x^2+y^2=r^2.$$

Понекад, да бисмо истакли координате центра, симбол $\mathcal{K}\left(S,r\right)$, замењујемо симболом $\mathcal{K}\left(p,q,r\right)$.



Слика 2.

На основу напред наведеног јасно је да важе следеће релације 4.1.2.ggb

$$T\left(x_0,y_0\right)\in\mathcal{K}\left(p,q,r\right)\Leftrightarrow\left(x_0-p\right)^2+\left(y_0-q\right)^2=r^2,$$

и

$$T(x_0, y_0) \in \overline{\mathcal{K}}(p,q,r) \Leftrightarrow (x_0 - p)^2 + (y_0 - q)^2 \le r^2 .$$

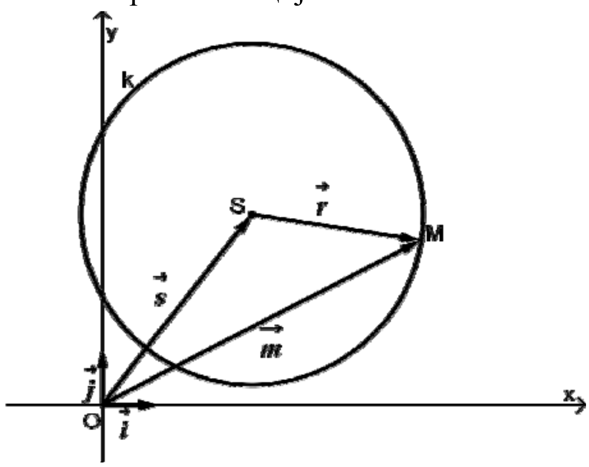
Ако је $\rho = d(S,T) > r$, онда тачка T припада спољашњости кружнице, тј тада важи

$$(x_0 - p)^2 + (y_0 - q)^2 > r^2 .$$

Пример 1. Испитати положај тачке: а) $T(5,1)$, б) $T(7,2)$, в) $T(3,-1)$, у односу на кружницу $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 16$.

Решење. Кликом на следећи линк 4.1.2.ggb активира се апликација GeoGebra, а затим се левим кликом миша на таку T, бира сваки од наведних положаја. Тако се добија следећи резултат, тачка T припада: а) унутрашњости кружнице, б) лежи на кружници, в) припада спољашњости кружнице. Исти резултат се добија заменом координата тачке T, у једначину кружнице. □

2. Векторски облик. Полазећи од чињенице да је кружница једнозначно одређена ако је познат њен центар и дужина полупречника, до једначине кружнице може се доћи и применом вектора, што се реализује кликом на линк 4.1.3.ggb, при чему се активира апликација GeoGebra.



Слика 3.

Нека је $\vec{s} = \overrightarrow{OS}$, радијус вектор центра $S(p,q)$, $\vec{m} = \overrightarrow{OM}$, радијус вектор тачке $M(x,y)$ и нека је $\vec{r} = \overrightarrow{SM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OS}$. Тада за сваку тачку $M(x,y) \in \mathcal{K}(S,r)$, вектор $\overrightarrow{SM}$ има константан интензитет, једнак полупречнику r, кружнице $\mathcal{K}(S,r)$, тј. за сваку тачку $M(x,y) \in \mathcal{K}(S,r)$, важи

$$\left|\overrightarrow{SM}\right| = r .$$

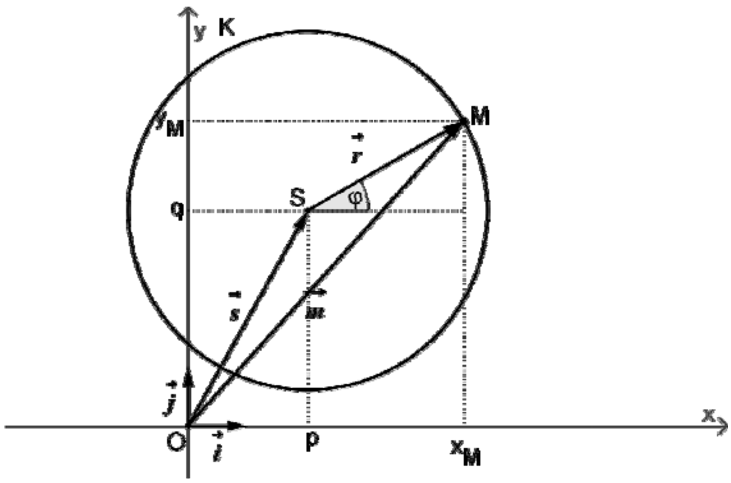
или, због $\overrightarrow{SM} = \vec{r} = \vec{m} - \vec{s}$, имамо

(3) $$(\vec{m} - \vec{s})^2 = r^2 .$$

што представља једначину кружнице $\mathcal{K}(S,r)$, у **векторском облику**, еквивалентну једначини (2), јер је $\vec{m}-\vec{s}=(x-p,y-q)$.

3. Параметарски облик. За утврђивање параметарског облика једначине кружнице $\mathcal{K}(S,r)$, користимо поступак сличан претходном, што се реализује кликом на линк 4.1.4.ggb. Дакле, ако је $\vec{s}=\overrightarrow{OS}$, радијус вектор центра $S(p,q)$, а $\vec{m}=\overrightarrow{OM}$, радијус вектор произвољне тачке $M(x,y)\in\mathcal{K}(S,r)$, онда за вектор $\overrightarrow{SM}$ важи

$$\overrightarrow{SM}=\vec{r}=\vec{m}-\vec{s}=(x-p,y-q).$$



Слика 4.

Такође, ако је $\varphi=\angle(\vec{i},\vec{r})$ оријентисани угао, $\varphi\in[0,2\pi)$ који образује вектор $\vec{r}$, са јединичним вектором $\vec{i}$, онда за координате вектора $\vec{r}$ важи

$$x-p=|\vec{r}|\cos\varphi=r\cos\varphi \quad \text{и} \quad y-q=|\vec{r}|\sin\varphi=r\sin\varphi.$$

Коначно, за координате произвољне тачке $M(x,y)\in\mathcal{K}(S,r)$ имамо

$$\left.\begin{aligned}x&=p+r\cos\varphi\\ y&=q+r\sin\varphi\end{aligned}\right\},$$

а то и јесу **параметарске једначине** кружнице $\mathcal{K}(S,r)$.

4. Однос једначине кружнице и једначине (1)

Сада се може утврдити, под којим условима једначина криве (1) представља једначину кружнице. У ту сврху полазимо од једначине (2), коју записујемо као

$$\mathcal{K}(S,r):x^2+y^2-2px-2qy+p^2+q^2-r^2=0.$$

Под претпоставком $a\neq 0$ и $c\neq 0$, на основу закључака из 2.2.2. имамо

$$b=0,\ a=c=\lambda,\ d=-\lambda p,\ e=-\lambda q,\ f=\lambda\left(p^2+q^2-r^2\right),$$

где је $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, коефицијент пропорционалности, одакле је

(4) $$b=0,\ \ c=a,\ \ p=-\frac{d}{a},\ \ q=-\frac{e}{a},\ \ r^2=\frac{d^2+e^2-af}{a^2}.$$

што уз услов

(5) $$d^2+e^2-af>0,$$

због $r^2>0$, представља критеријум да једначина (1) представља кружницу $\mathcal{K}(p,q,r)$. Такође, очигледно је да, ако је $a=0$ или $c=0$, једначине (1) и (2) не могу да представљају исту криву.

Ако је у једначини (1), $b=0$ и $c=a\neq 0$, дељењем са a, она се своди на **општи облик**

(6) $$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0,$$

где је: $D=2d/a$, $E=2e/a$, $F=f/a$. На основу услова (4) и (5), ова једначина представља једначину кружнице, ако је

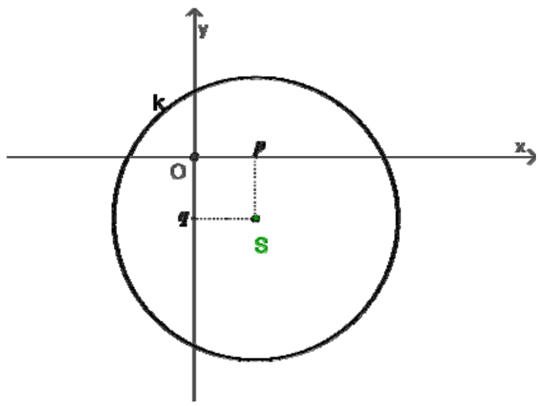
(7) $$D^2+E^2-4F>0,$$

при чему за координате центра и полупречник кружнице важи

(8) $$p=-\frac{D}{2},\ \ q=-\frac{E}{2},\ \ r=\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}.$$

Пример 2. Међу једначинама: (1) $x^2+y^2-2x+4y-20=0$, (2) $x^2+y^2-2x+4y+$ $+14=0$, (3) $x^2+y^2+4x-2y+5=0$, (4) $x^2+y^2+6x-4y+14=0$, пронаћи једначину кружнице, затим одредити координате центра и полупречник.

Решење. Прво анализирамо израз $\alpha=D^2+E^2-4F$, и добијамо: (1) $\alpha=100$; (2) $\alpha=-36$; (3) $\alpha=0$; (4) $\alpha=-4$, што значи да једначина (1) представља једначину кружнице, при чему су координате центра $p=1$, $q=-2$, а полупречник $r=5$.



Слика 5.

До истог резултата се долази ако се кликом на линк 4.1.5.ggb, активира одговарајућа апликација. □

5. Кружница описана око троугла

Познато је да се око сваког троугла може описати тачно једна кружница. Задатак да се састави једначина кружнице $\mathcal{K}(p,q,r)$ описане око троугла ΔABC, ако су његова темена дата својим координатама: $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, може се решити на неки од следећих начина:

1° Ако је (6) тражена једначина кружнице $\mathcal{K}$, тада је услов $A, B, C \in \mathcal{K}$, еквивалентан са системом линеарних једначина

$$x_i^2 + y_i^2 + Dx_i + Ey_i + F = 0, \quad i = 1,2,3,$$

чијим се решавањем добијају вредности коефицијената D, E, F, а одатле, применом обрасца (6), координате центра p, q и полупречник r.

2° Ако је једначина (2) тражена једначина, а познато је да је центар S кружнице $\mathcal{K}$, описане око троугла ΔABC, тачка једнако удаљена од сваког темена троугла, тада је:

$$\left(d\left(S,A\right)\right)^2 = \left(d\left(S,B\right)\right)^2 \;\wedge\; \left(d\left(S,A\right)\right)^2 = \left(d\left(S,C\right)\right)^2 \;\wedge\; \left(d\left(S,A\right)\right)^2 = r^2.$$

Одавде добијамо систем једначина

$$\begin{cases} 2\left(x_1 - x_2\right)p + 2\left(y_1 - y_2\right)q = x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2 \\ 2\left(x_1 - x_3\right)p + 2\left(y_1 - y_3\right)q = x_1^2 - x_3^2 + y_1^2 - y_3^2 \\ \qquad\qquad\qquad r^2 = \left(x_1 - p\right)^2 + \left(y_1 - q\right)^2 \end{cases}.$$

Решавањем прве две једначине, које представљају једначине симетрала страница AB и AC, добијамо координате центра:

$$p = \frac{\left(x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2\right)\left(y_1 - y_3\right) - \left(x_1^2 - x_3^2 + y_1^2 - y_3^2\right)\left(y_1 - y_2\right)}{2\left(x_1 - x_2\right)\left(y_1 - y_3\right) - 2\left(x_1 - x_3\right)\left(y_1 - y_2\right)},$$

$$q = \frac{\left(x_1 - x_2\right)\left(x_1^2 - x_3^2 + y_1^2 - y_3^2\right) - \left(x_1 - x_3\right)\left(x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2\right)}{2\left(x_1 - x_2\right)\left(y_1 - y_3\right) - 2\left(x_1 - x_3\right)\left(y_1 - y_2\right)},$$

а онда из треће једначине израчунавамо полупречник r, кружнице.

Важно је напоменути да задатак има решење (применом сваког од наведених поступака), ако и само ако су A, B, C три неколинеарне тачке, тј. ако и само ако је

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

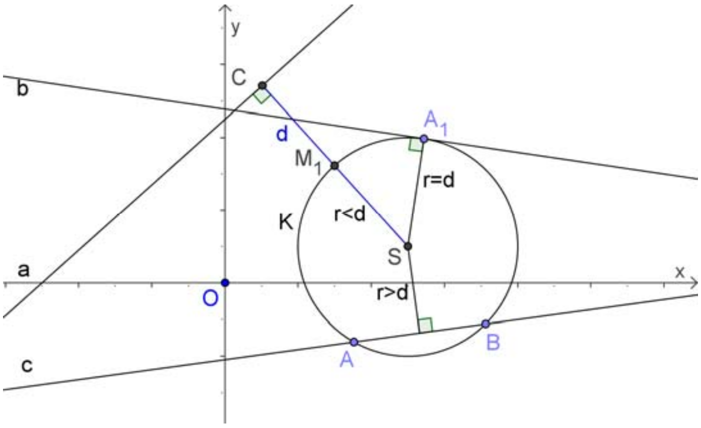
Пример 3. Написати једначину кружнице, одређене тачкама а) $A(-1,5)$, $B(3,5)$, $C(2,6)$; б) $A(5,4)$, $B(1,0)$, $C(-1,4)$; в) $A(-8,-4)$, $B(2,-6)$, $C(-4,3)$.

Резултат. Примењујући наведене процедуре, имамо а) $(x-1)^2 + (y-4)^2 = 5$; б) $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 10$; в) $(x-2.5)^2 + (y-2.5)^2 = 32.5$.

Решења и резултати задатка а) и б) могу се добити кликом на линк 4.1.6.nb и активирањем апликације Mathematica, а решење и резултат задатка в) добијају се кликом на линк 4.1.7.ggb и активирањем апликације GeoGebra. □

4.1.2. Кружница и права

1. Однос кружнице и праве прво анализирамо синтетички (геометријски). Нека су дате: кружница $\mathcal{K}\left(S,r\right)$ и права l. У зависности од растојања праве од центра $S\left(p,q\right)$, кружнице, утврђујемо и однос праве и кружнице, што је дато у апликацији GeoGebra, коју активирамо кликом на линк 4.1.8.ggb. На основу поменутог односа, јасно је да важи следећи закључак (Слика 7.):



Слика 7.

$$
(9) \qquad
\begin{aligned}
&\mathcal{K}\left(S,r\right)\cap c=\left\{A,B\right\}\Leftrightarrow d\left(S,c\right)<r \text{ - права је сечица кружнице},\\
&\mathcal{K}\left(S,r\right)\cap b=\left\{A\right\}\Leftrightarrow d\left(S,b\right)=r \text{ - права је тангента кружнице},\\
&\mathcal{K}\left(S,r\right)\cap a=\varnothing\Leftrightarrow d\left(S,a\right)>r \text{ - права и кружница су дисјунктни скупови}.
\end{aligned}
$$

Аналитички, проблем се решава решавањем система, једне квадратне и једне линеарне једначине

$$
(10) \qquad
\begin{aligned}
&\mathcal{K}\left(S,r\right):\left(x-p\right)^2+\left(y-q\right)^2=r^2\\
&l: y=kx+n.
\end{aligned}
$$

Заменом непознате y из једначине праве у једначину кружнице и сређивањем, добијамо квадратну једначину

$$
(11) \qquad \left(1+k^2\right)x^2+2\left(kn-p-kq\right)x+p^2+n^2+q^2-2nq-r^2=0,
$$

чија је дискриминанта

$$
D=4r^2\left(1+k^2\right)-4\left(k^2p^2+q^2+n^2+2knp-2kpq-2nq\right)=4r^2\left(1+k^2\right)-4\left(kp-q+n\right)^2.
$$

На основу познате особине, која се односи на дискриминанту и природу решења, квадратне једначине, јасно је да за решења x_1 и x_2, једначине (11) важи:

$$
\begin{aligned}
&x_1=\overline{x}_2\wedge x_1,x_2\in\mathbb{C}\Leftrightarrow r^2\left(1+k^2\right)<\left(kp-q+n\right)^2\\
&x_1=x_2\in\mathbb{R}\Leftrightarrow r^2\left(1+k^2\right)=\left(kp-q+n\right)^2\\
&x_1\neq x_2\wedge x_1,x_2\in\mathbb{R}\Leftrightarrow r^2\left(1+k^2\right)>\left(kp-q+n\right)^2.
\end{aligned}
$$

Решењима x_1 и x_2 једначине (11),

$$x_1 = \frac{p + kq - kn + \sqrt{D/4}}{1+k^2},\ x_2 = \frac{p + kq - kn - \sqrt{D/4}}{1+k^2},$$

одговарају решења

$$y_1 = \frac{kp + k^2q + n + k\sqrt{D/4}}{1+k^2},\ y_2 = \frac{kp + k^2q + n - k\sqrt{D/4}}{1+k^2},$$

тако да су парови (x_1, y_1) и (x_2, y_2), решења система (10). Ако су то парови реалних бројева (различити, или једнаки), права и кружница имају заједничке тачке $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$, (различите, или једнаке). Ако су пак, (x_1, y_1) и (x_2, y_2) парови комплексних бројева, права и кружница немају заједничких тачака. Овим је практично доказана следећа теорема

Теорема 2. *За кружницу* $\mathcal{K}(S, r)$ *и праву* l*, дате системом једначина* (10)*, важе следећи односи*:

$$\text{права и кружница су дисјунктни скупови} \Leftrightarrow r^2\left(1+k^2\right) < \left(kp - q + n\right)^2,$$

$$\text{(13)} \qquad \text{права је тангента кружнице} \Leftrightarrow r^2\left(1+k^2\right) = \left(kp - q + n\right)^2,$$

$$\text{права је сечица кружнице} \Leftrightarrow r^2\left(1+k^2\right) > \left(kp - q + n\right)^2. \qquad \blacksquare$$

Напред изведени закључци могу се добити кликом на линк 4.1.9.ggb и активирањем апликације GeoGebra,

Напомена 1. Доказ Теореме 2. може се извести и применом закључака датих са (9), пошто, због $r > 0$, важи

$$d(S,l)^2 = \frac{(kp - q + n)^2}{1+k^2} \begin{cases} > r^2 \text{ - } \mathcal{K} \cap l = \varnothing, \\ = r^2 \text{ - права је тангента кружнице,} \\ < r^2 \text{ - права је сечица кружнице.} \end{cases} \qquad \square$$

У примеру који следи анализирамо однос кружнице и праве, у светлу закључка изнетог у Теореми 2. и Напомени 1.

Пример 4. Испитати однос кружнице $\mathcal{K}$ и праве l и одреди њихове заједничке тачке: а) $\mathcal{K}: x^2 + y^2 + 6x + 6y + 13 = 0$, $l: x - 2y + 2 = 0$; б) $\mathcal{K}: x^2 + y^2 - 2x + 4y - 5 = 0$, $l: x - 3y + 9 = 0$; в) $\mathcal{K}: (x+3)^2 + (y-1)^2 = 4$, $l: 2x - y + 5 = 0$; г) Међу правама прамена $x + 5y - 22 + \lambda(x - 8y + 30) = 0$ одреди оне, на којима кружница $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 14 = 0$ одсеца тетиве дужине $m = 2\sqrt{3}$.

Решење. Применом наведених поступака имамо:

а) $\alpha = r^2\left(1+k^2\right) - \left(kp - q + n\right)^2 = 0$, $\mathcal{K} \cap l = \{A\}$, где је $A(-4, -1)$;

б) $\alpha = -52/3$ и $\mathcal{K} \cap l = \varnothing$;

в) $\alpha = 16$ и $\mathcal{K} \cap l = \{A, B\}$, где је $A(-3, -1)$, $B(-7/5, 11/5)$.

г) За растојање центра кружнице $S(1,-1)$ од тражене праве прамена $l:(1+\lambda)x+(5-8\lambda)y-22+30\lambda=0$, важи $d(S,l)^2=r^2-(m/2)^2$, тј. $2\lambda^2-3\lambda+1=0$, одакле је $\lambda_1=0.5$, $\lambda_2=1$. Тражене праве су $3x+2y-14=0$ и $2x-3y+7.95=0$.

Решење и резултат примера а), б), в) могу се добити кликом на линк 4.1.10.nb и активирањем апликације Mathematica, а решење и резултат примера г) могу се добити кликом на линк 4.1.11.ggb и активирањем апликације GeoGebra. □

Пример 5. Израчунати површину тетивног четвороугла, чија су темена заједничке тачке кружнице $\mathcal{K}:(x-3)^2+(y-1)^2=25$ и правих $a:x-y-1=0$ и $b:2x-y-5=0$.

Решење. За однос кружнице $\mathcal{K}$ и праве a, је $\alpha=49$, па је $\mathcal{K}\cap l=\{A,B\}$, где је $A(-2,1)$, $B(0,5)$, а за однос кружнице $\mathcal{K}$ и праве b, је $\alpha=25$, па је $\mathcal{K}\cap l=\{C,D\}$, где је $C(-1,-2)$, $D(6,5)$. Како је $P_{\square ABCD}=P_{\triangle ACB}+P_{\triangle ACD}$, применом формуле из 3.1.4.3. имамо $P_{\square ABCD}=26$.

Решење и резултат задатка могу се добити кликом на линк 4.1.12.nb и активирањем апликације Mathematica.

2. Тангента у тачки кружнице. Да бисмо саставили једначину тангенте кружнице, $\mathcal{K}(S,r):(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$ у њеној тачки $T(x_0,y_0)$, претпоставимо да је то права $t:y=kx+n$. Како из услова $T\in t$, следи

$$y_0=kx_0+n,$$

на основу услова (13) (права t је тангента кружнице $\mathcal{K}$), важи

$$r^2\left(1+k^2\right)=\left((y_0-q)-k(x_0-p)\right)^2,$$

одакле је

(14) $$\left(r^2-(x_0-p)^2\right)k^2+2(x_0-p)(y_0-q)k+r^2-(y_0-q)^2=0.$$

Такође из услова $T\in\mathcal{K}$, следи једнакост

(15) $$(x_0-p)^2+(y_0-q)^2=r^2,$$

чијом применом у (14), имамо квадратну једначину по k

$$(y_0-q)^2k^2+2(x_0-p)(y_0-q)k+(x_0-p)^2=0,$$

одакле је , за $y_0\neq q$, коефицијент правца тангенте

$$k=-\frac{x_0-p}{y_0-q}.$$

Његовом заменом у једначини тангенте t, датој са

(16) $$t:y-y_0=k(x-x_0),$$

иста једначина постаје

$$(x_0-p)(x-x_0)+(y_0-q)(y-y_0)=0.$$

Коришћењем услова (15), једначина тангенте добија коначну форму

(17) $$(x_0-p)(x-p)+(y_0-q)(y-q)=r^2.$$

Ако је $y_0=q$, једначина тангенте тада гласи

$$(x_0-p)(x-p)=r^2$$

и тангента је паралелна са Oy осом.

Напомена 2. Коефицијент правца k, тангенте t, у тачки $T(x_0,y_0)$, која припада датој кружници $\mathcal{K}(S,r)$, могуће је добити коришћењем коефицијента правца праве $p(S,T)$, која се зове **нормала** у тачки $T(x_0,y_0)$ кружнице.

3. Тангента из тачке ван кружнице. Поступак за налажење једначина тангенте кружнице у тачки $T(x_0,y_0)$, која не припада кружници

$$\mathcal{K}(S,r):(x-p)^2+(y-q)^2=r^2,$$

изводи се аналогно поступку, када тачка припада кружници, с тим што се не користи услов (15). Наиме, налажење коефицијента правца k тангенте, своди се на решавање једначине (14), а пошто $T\notin\mathcal{K}$, не важи ни услов (15), тј. важи неједнакост

$$(x_0-p)^2+(y_0-q)^2\neq r^2.$$

Такође, јасно је да у тачки $T\notin\mathcal{K}$, постоји тангента кружнице, само ако тачка T није унутрашња тачка кружнице. Ако је $r^2-(x_0-p)^2\neq 0$ једначине (14) је квадратна, и њена дискриминанта је

$$D=(x_0-p)^2+(y_0-q)^2-r^2>0,$$

због чега једначина има два реална и различита решења по k:

$$k_{1,2}=\frac{-(x_0-p)(y_0-q)\pm r\sqrt{(x_0-p)^2+(y_0-q)^2-r^2}}{r^2-(x_0-p)^2},$$

чијом заменом у једначину (16), добијамо једначине две тангенте:

(18) $$t_1:y-y_0=k_1(x-x_0),\quad t_2:y-y_0=k_2(x-x_0),$$

из тачке $T(x_0,y_0)$, ван кружнице.

Ако је $r^2-(x_0-p)^2=0$, тј. $x_0=p\pm r$, онда је $y_0\neq q$, а из услова $T\notin\mathcal{K}$ следи $y_0\neq q$, па је једначина (14) линеарна и има једно решење

$$k=\frac{(y_0-q)^2-r^2}{2(x_0-p)(y_0-q)},$$

а једначине тангенти су

$$t_1:y-y_0=k(x-x_0)\ \text{ и }\ t_2:x=x_0.$$

Цео поступак се може добити покретањем, редом, апликација 4.1.13.a.ggb, 4.1.13.b.ggb и 4.1.13.ggb, у програму GeoGebra.

Пример 6. Саставити једначине тангенти кружнице $x^2 + y^2 - 8x + 4y + 10 = 0$, повучених из тачке $P(-1,3)$. Одредити угао који образују тангенте.

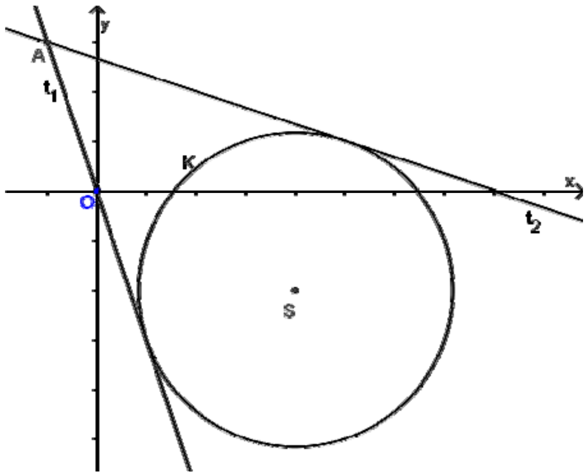
Решење. Центар дате кружнице је $S(4,-2)$, а полупречник $r = \sqrt{10}$, (Слика 8.). Ако је једначина тангенте облика

$$t : y = kx + n,$$

тада из услова $P \in t$, следи $n = k + 3$, а одатле услов да права t, буде тангента дате кружнице гласи

$$10(1 + k^2) = (5k + 5)^2,$$

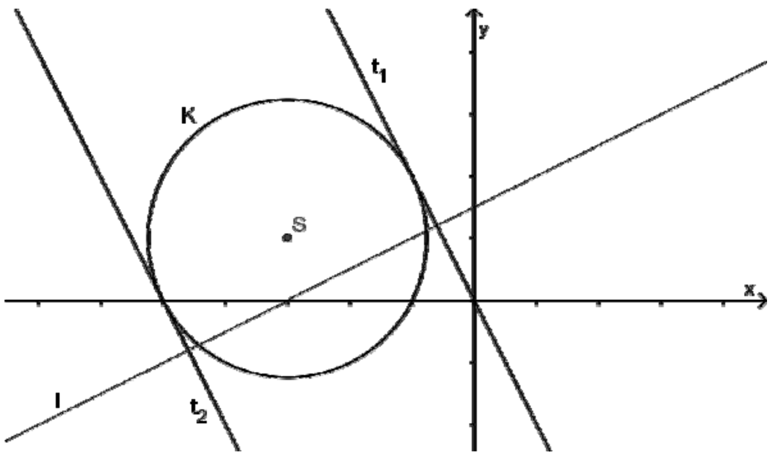
одакле је $k_1 = -1/3$, $k_2 = -3$, и $n_1 = 8/3$, $n_2 = 0$. Тада су једнаачине тангенти: $t_1 : x + 3y - 8 = 0$, $t_2 : 3x + y = 0$.



Слика 8.

Уопштење овог примера, решење и резултат, могу се добити кликом на линк 4.1.13.c.ggb и активирањем апликације GeoGebra. □

Пример 7. Саставити једначине тангенти кружнице $x^2 + y^2 + 6x - 2y + 5 = 0$, које су нормалне на праву $l : x - 2y + 3 = 0$;



Слика 9.

Решење. Центар дате кружнице је $S(-3,1)$, а полупречник $r = \sqrt{5}$. Коефицијент правца праве l је $k_l = 0.5$, а њене нормалне (тражене тангенте кружнице) $k = -2$. Користећи услов (13) да је права $y = kx + n$ тангента кружнице имамо $n_1 = 0$ и $n_2 = -10$, одакле су једначине тангенти $t_1 : y = -2x$ и $t_2 : y = -2x - 10$.

Уопштење овог примера, решење и резултат, могу се добити кликом на линк 4.1.14.ggb и активирањем апликације GeoGebra. □

Напомена 3. Узимајући у обзир изложено у Напомени 1., јасно је да се проблем налажења једначине тангенте t кружнице $\mathcal{K}$, у тачки $T(x_0, y_0)$, припадала она кружници или не, своди на проблем избора оне праве (оних правих) прамена

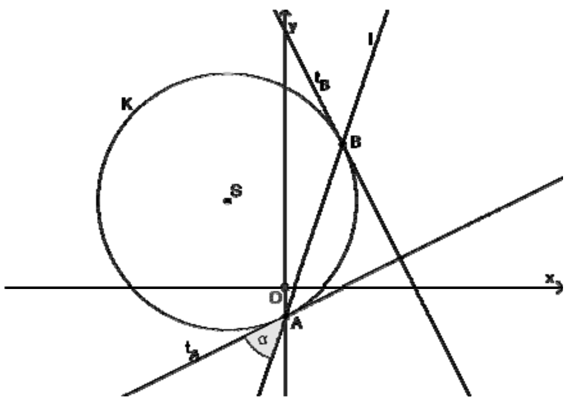
$$y - y_0 = k(x - x_0),$$

чије је растојање од центра кружнице $\mathcal{K}(S, r)$, једнако полупречнику r. □

4. Угао између праве и кружнице. Ако права сече кружницу, онда се под углом између праве и кружнице, подразумева угао између праве и тангенте кружнице у пресечној тачки. Очигледно је да је угао између тангенте и кружнице једнак 0 (нула).

Чињеница да сечица има две заједничке тачке са кружницом, не значи да се при решавању овог проблема, мора два пута налазити угао између сечице и тангенте, у свакој пресечној тачки посебно. Ово због тога што су пресечне тачке, и у њима тангенте, симетричне у односу на праву кроз центар, нормалну на сечицу, због чега су и одговарајући углови између тангенте и сечице симетрични у односу на исту праву.

Пример 8. Одредити угао између праве $l : 3x - y - 1 = 0$ и кружнице $\mathcal{K} : x^2 + y^2 + 4x - 6y - 7 = 0$.



Слика 10.

Решење. Решавањем система $3x - y - 1 = 0 \wedge x^2 + y^2 + 4x - 6y - 7 = 0$, одређујемо пресечне тачке $A(0, -1)$, $B(2, 5)$, праве и кружнице. Тангента у тачки A, $y = 0.5x - 1$ и сечица l, образују угао $\varphi = 45^\circ$ (Слика 10.).

Уопштење овог примера, решење и резултат, могу се добити кликом на линк 4.1.15.ggb и активирањем апликације GeoGebra.

4.1.3. Полара и пол у односу на кружницу

Нека је дата кружница $\mathcal{K}(S,r):(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$ и тачка $P(x_0,y_0)$, која не припада кругу $\overline{\mathcal{K}}(S,r)$. Претпоставимо да су $T_1(x_1,y_1)$ и $T_2(x_2,y_2)$ додирне тачке тангенти t_1 и t_2, редом, повучених из тачке P, на кружницу $\mathcal{K}$. Тада су једначине тангенти дате са

$$t_1:(x_1-p)(x-p)+(y_1-q)(y-q)=r^2 \text{ и } t_2:(x_2-p)(x-p)+(y_2-q)(y-q)=r^2,$$

а из услова $P\in t_1$ и $P\in t_2$, следи

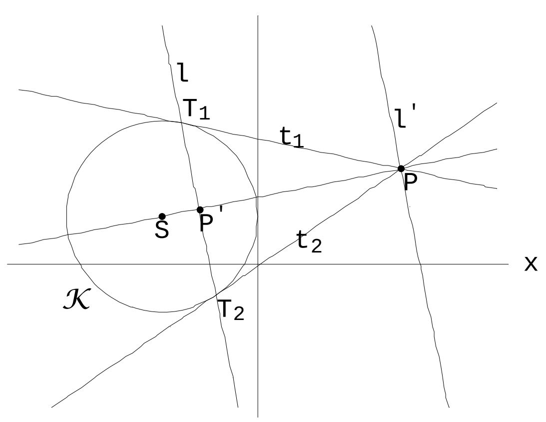
$$(x_1-p)(x_0-p)+(y_1-q)(y_0-q)=r^2 \text{ и } (x_2-p)(x_0-p)+(y_2-q)(y_0-q)=r^2.$$

Последње две релације указују на чињеницу да права

(19) $$l:(x_0-p)(x-p)+(y_0-q)(y-q)=r^2$$

садржи тачке додира T_1 и T_2, тј. права $l=p(T_1,T_2)$, је сечица кружнице $\mathcal{K}$ 4.1.16.nb (Слика 11.). Ова сечица, одређена додирним тачкама тангенти кружнице из тачке P, зове се **полара тачке (пола)** P, **у односу на кружницу** $\mathcal{K}$.

Може се приметити, да и унутрашњој тачки кружнице, различитој од центра, одговара полара.



Слика 11.

Наиме, ако је пресек поларе l и праве $p(S,P)$, тачка $P'(x_0',y_0')$, где је

$$x_0'=p+\frac{(x_0-p)r^2}{(x_0-p)^2+(y_0-q)^2} \text{ и } y_0'=q+\frac{(y_0-q)r^2}{(x_0-p)^2+(y_0-q)^2},$$

тада једначина њене поларе l', гласи

$$l':(x_0'-p)(x-p)+(y_0'-q)(y-q)=r^2,$$

или после замене x_0' и y_0'

$$l':(x_0-p)(x-x_0)+(y_0-q)(y-y_0)=0.$$

Другим речима, ако је P' унутрашња тачка кружнице и $P'\neq S$, онда нормала l на праву $p(S,P')$ сече кружницу у тачкама T_1 и T_2, а тангенте у тим тачкама секу се у тачки $P\in p(S,P')$. Нормала l' на праву $p(S,P')$, је полара тачке P', у односу на кружницу $\mathcal{K}$. Иначе, на основу једначине (19), полара у тачки кружнице јесте тангента у тој тачки.

Сада смо у прилици да претходно излагање уопштимо следећом дефиницијом.

Дефиниција 2. Нека је $\mathcal{K}(p,q,r)$ кружница и $P(x_0,y_0)$ тачка у њеној равни, различита од центра $S(p,q)$ кружнице. Права

$$s:(x_0-p)(x-p)+(y_0-q)(y-q)=r^2$$

зове се **полара тачке (пола)** P, у односу на кружницу $\mathcal{K}(p,q,r)$.

Непосредне последице ове дефиниције је следећа теорема

Теорема 9. *Полара тачке кружнице је тангента кружнице у тој тачки.* ■

Из претходног излагања види се да за сваку тачку, различиту од центра кружнице, постоји полара, у односу на ту кружницу.

Обрнуто, нека је $p: Ax+By+C=0$ произвољна права и $\mathcal{K}:(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$, кружница. Да би права p била полара неке тачке $P(x_0,y_0)$, у односу на кружницу $\mathcal{K}$, једначине

$$Ax+By+C=0 \quad \text{и} \quad (x_0-p)x+(y_0-q)y-(x_0-p)p-(y_0-q)q-r^2=0,$$

треба да представљају исту праву, тј. треба да важи

$$\frac{x_0-p}{A}=\frac{y_0-q}{B}=-\frac{(x_0-p)p+(y_0-q)q+r^2}{C},$$

одакле је

$$x_0=\frac{ABqr^2-A(Bq+C)r^2}{(Ap+C)(Bq+C)-AqBp}+p \quad \text{и} \quad y_0=\frac{ABpr^2-B(Ap+C)r^2}{(Ap+C)(Bq+C)-AqBp}+q,$$

где је $C\neq 0$, што значи да права p не садржи центар кружнице, а такође коефицијенти A и B нису истовремено једнаки нули, јер $(x_0,y_0)\neq(0,0)$.

Овим је доказано да за сваку тачку, различиту од центра кружнице, постоји у равни кружнице полара, у односу на кружницу, и за сваку праву, која не садржи центар кружнице, постоји у равни кружнице пол, у односу на кружницу.

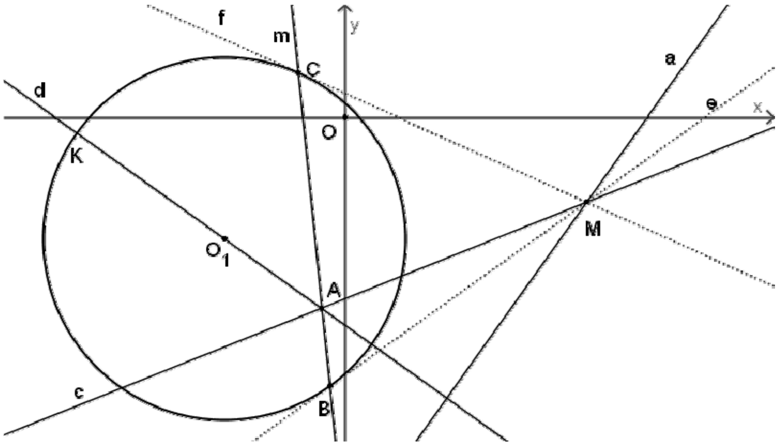
Пример 9. Одредити фигуру, коју описује полара m тачаке M, у односу ка кружницу $\mathcal{K}$, када се тачка M креће по датој правој a, ако је: а) $\mathcal{K}: x^2+y^2=1$, $a: y=2x-4$; б) $\mathcal{K}:(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$, $a: y=k\,x+n$.

Решење. а) Тачка (пол) $M(x_0,y_0)$ описује праву, тј. припада правој $a: y=2x-4$, ако је $y_0=2x_0-4$. Тада једначина одговарајуће поларе m, у односу на кружницу $\mathcal{K}(0;0;1)$, гласи

$$-4y-1+x_0(x+2y)=0,$$

што представља прамен (Слика 12.) са центром $A(x_A,y_A)$, чије су координате, решења система

$$-4y=1 \ \wedge \ x+2y=0 \,.$$



Слика 12.

Коначно, центар прамена је $A(1/2,-1/4)$.

б) Аналогним поступком, када пол $M(x_0,y_0)$ описује праву $a: y=kx+n$, тада је $y_0=kx_0+n$, полара m тачке M, описује прамен

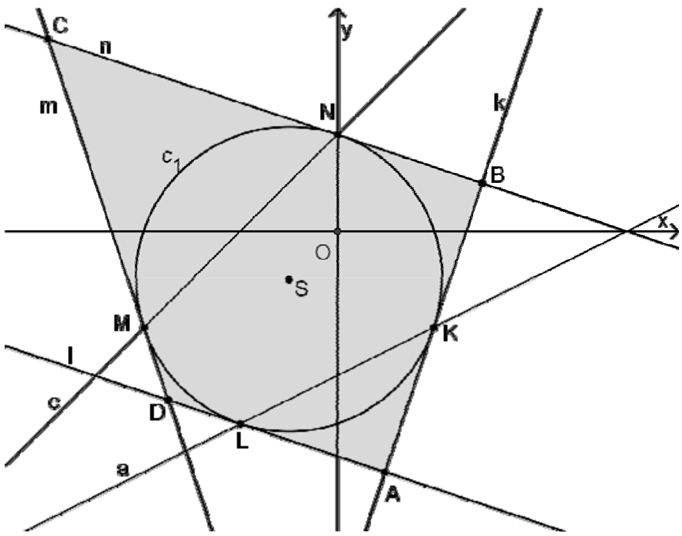
$$-px+(n-q)y+p^2-q(n-q)-r^2+x_0(x+ky-p-kq)=0\,,$$

са центром $A(x_A,y_A)$, где је

$$x_A=p+kq-k+\frac{kr^2}{(n+pk-q)q} \quad \text{и} \quad y_A=1+\frac{r^2}{(n+pk-q)q}\,.$$

Решење се може добити кликом на линк 4.1.17.ggb и активирањем апликације GeoGebra. □

Пример 10. Из тачака $A(1,-5)$ и $C(-6,4)$, конструисане су тангенте на кружницу $\mathcal{K}(-1;-1;\sqrt{10})$. Израчунати обим и површину насталог тангентног четвороугла.



Слика 13.

Решење. Поларе a и c, тачака A и C, редом, у односу на дату кружницу су $a: x-2y=6$ и $c: x-y=-2$, и важи:

$$a\cap\mathcal{K}=\{K,L\}\text{, где је } K(2,-2),\ L(-2,4)$$
$$b\cap\mathcal{K}=\{M,N\}\text{, где је } M(-4,-2),\ N(0,2)$$

Тангенте из тачке A: $k=p(A,K)$ и $l=p(A,L)$, имају једначине $k: -3x+y=-8$ $l: x+3y=-14$, а из тачке C: $m=p(C,M)$, $n=p(C,N)$ имају једначине $m: 3x+y=-14$ и $n: x+3y=6$.

Пресек тангенти k и n је $B(3;1)$, а пресек тангенти l и m је $D(-3.5;-3.5)$, те је обим тангентног четвороугла $ABCD$, (4.1.17.a.ggb) једнак
$O_{ABCD}=d(A,B)+d(B,C)+d(C,D)+d(D,A)=2\sqrt{10}+3\sqrt{10}+2.5\sqrt{10}+1.5\sqrt{10}=9\sqrt{10}$,
а површина

$$P_{ABCD}=0.5\cdot r\cdot O_{ABCD}=45. \qquad \square$$

4.1.4. Међусобни однос две кружнице

Из Еуклидске геометрије је познато, да за две кружнице различитих центара, важи тачно један од следећих односа: имају две заједничке тачке, имају једну заједничку тачку, немају заједничких тачака. О коме од наведених односа је реч, закључује се решавањем одговарајућег система две квадратне једначине са две непознате. Наиме, ако су дате кружнице $\mathcal{K}_1(p_1,q_1,r_1)$ и $\mathcal{K}_2(p_2,q_2,r_2)$, редом, једначинама:

$$\mathcal{K}_1:(x-p_1)^2+(y-q_1)^2=r_1^2 \quad\text{и}\quad \mathcal{K}_2:(x-p_2)^2+(y-q_2)^2=r_2^2,$$

где је $S_1(p_1,q_1)\neq S_2(p_2,q_2)$, онда на основу закључака из 3.1.5.2., њихов пресек, ако постоји, одређује се решавањем система квадратних једначина

$$\begin{cases}(x-p_1)^2+(y-q_1)^2=r_1^2\\(x-p_2)^2+(y-q_2)^2=r_2^2\end{cases},$$

који је еквивалентан са системом

$$(20)\qquad \begin{cases}(x-p_1)^2+(y-q_1)^2=r_1^2\\2(p_2-p_1)x+2(q_2-q_1)y=r_1^2-r_2^2-p_1^2+p_2^2-q_1^2+q_2^2\end{cases}.$$

Може се доказати да за решења (x_1,y_1) и (x_2,y_2), овог система важи:

$$(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2 \ \wedge\ (x_1,y_1)\neq(x_2,y_2) \ \Leftrightarrow\ |r_1-r_2|<(p_1-p_2)^2+(q_1-q_1)^2<r_1+r_2,$$
$$(x_1,y_1)=(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2 \ \Leftrightarrow\ (p_1-p_2)^2+(q_1-q_1)^2=|r_1-r_2| \ \vee\ (p_1-p_2)^2+(q_1-q_1)^2=r_1+r_2,$$
$$(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in\mathbb{C}^2 \ \Leftrightarrow\ (p_1-p_2)^2+(q_1-q_1)^2<|r_1-r_2| \ \vee\ (p_1-p_2)^2+(q_1-q_1)^2>r_1+r_2.$$

У ту сврху видети апликацију Mathematica, кликом на линк 4.1.18.nb.

Другим речима, за однос две дате кружнице важи:

$$\mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_2 = \{A, B\} \Leftrightarrow |r_1 - r_2| < d(S_1, S_2) < r_1 + r_2$$

$$\mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_2 = \{A\} \Leftrightarrow d(S_1, S_2) = |r_1 - r_2| \vee d(S_1, S_2) = r_1 + r_2$$

$$\mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_2 = \varnothing \Leftrightarrow d(S_1, S_2) < |r_1 - r_2| \vee d(S_1, S_2) > r_1 + r_2$$

Пример 11. Дате су кружнице: а) $\mathcal{K}_1 : (x-1)^2 + (y-3)^2 = 4$ и $\mathcal{K}_2 : (x+3)^2 + y^2 = 9$, б) $\mathcal{K}_1 : (x-1)^2 + (y-3)^2 = 49$ и $\mathcal{K}_2 : (x+3)^2 + y^2 = 9$. Испитати њихов међусобни положај.

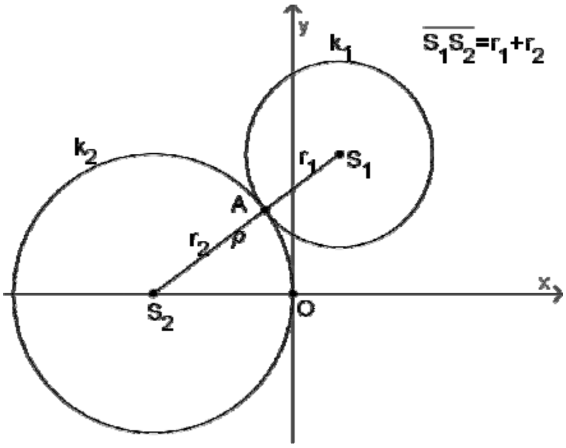
Решење. а) Кружнице $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$ додирују се споља, тј. имају једну заједничку тачку $A(-0.6, 1.8)$.

б) Кружнице $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$ имају две заједничке тачке,

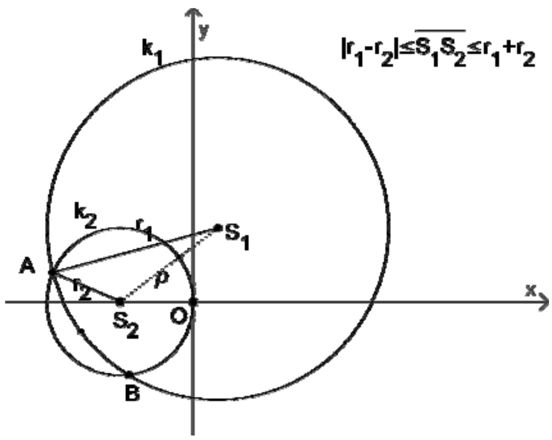
$$A\left(-4.2 + 0.9\sqrt{3}, -0.9 - 1.2\sqrt{3}\right),\ B\left(-4.2 - 0.9\sqrt{3}, -0.9 + 1.2\sqrt{3}\right).$$

Решења и резултати задатка а) и б), као и анализа међусобних односа две кружнице, могу се добити кликом на линк 4.1.19.ggb и активирањем апликације GeoGebra.

Такође у исту сврху може корисно да послужи и апликација Mathematica, која се активира кликом на линк 4.1.18.nb. □



Слика 14. а



Слика 14. б

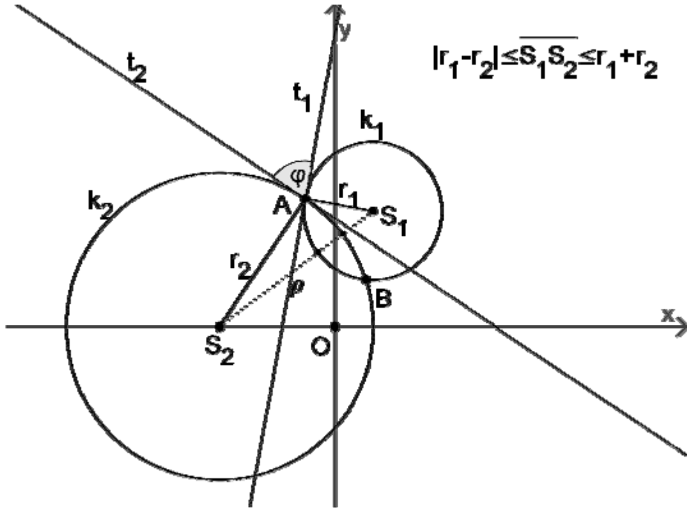
Такође, познато је да ако две кружнице имају заједнички центар, онда или се поклапају, ако имају подударне полупречнике, или су концентричне (немају заједничких тачака), ако су им полупречници различити. И овај случај се може анализирати активирањем наведених апликација.

1. Угао између две кружнице. Под углом између две кружнице које се секу, подразумева се угао који образују њихове тангенте у пресечној тачки (Слика 15).

Из ове дефиниције директно следе следеће значајне особине:

1. Угао између две кружнице које имају једну заједничку тачку, једнак је 0 (нула).

2. Пошто су пресечне тачке, и у њима тангенте, симетричне у односу на линију центара (праву одређену центрима кружница), то су и одговарајући углови које образују тангенте у пресечним тачкама, симетрични у односу на исту праву.



Слика 15.

Илустрација дефиниције и анализа наведених особина, могу се добити кликом на линк 4.1.20.ggb и активирањем апликације GeoGebra.

Пошто је уведен појам угла који образују две кружнице, можемо да анализирамо и услове да две кружнице буду ортогоналне. ти услови су непосредна последица следећих очигледних тврђења:

1. Две кружнице су ортогоналне, ако и само ако је тангента једне кружнице у пресечној тачки, нормала друге, и обрнуто.
2. Две кружнице су ортогоналне, ако и само ако је квадрат централног растојања кружница, једнак збиру квадрата њихових полупречника.

Ако су дате кружнице $\mathcal{K}_1(p_1,q_1,r_1)$ и $\mathcal{K}_2(p_2,q_2,r_2)$, онда се услов да оне буду ортогоналне може исказати формулом

(21) $$(p_1-p_2)^2+(q_1-q_2)^2=r_1^2+r_2^2.$$

Ако су кружнице дате у са $\mathcal{K}_1: x^2+y^2+d_1x+e_1y+f_1=0$ и $\mathcal{K}_2: x^2+y^2+d_2x+e_2y+f_2=0$, онда исти услов гласи

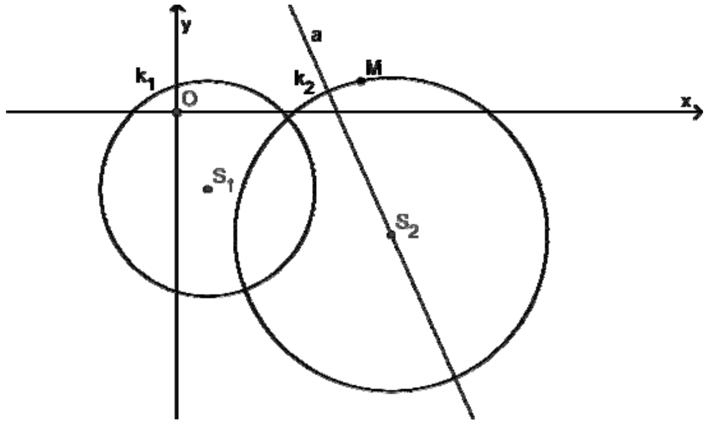
(22) $$d_1d_2+e_1e_2-2f_1-2f_2=0.$$

Илустрација и анализа наведених особина, могу се добити кликом на линк 4.1.21.ggb и активирањем апликације GeoGebra.

Пример 12. Саставити једначину кружнице која садржи тачку $M(6,1)$, има центар на правој $a: 9x+4y-47=0$, а сече кружницу $\mathcal{K}_1: x^2+y^2-2x+5y-5=0$ под правим углом.

Решење. За дату кружницу важи $\mathcal{K}_1=\mathcal{K}(1,-2.5,3.5)$. Ако је $\mathcal{K}_2(p,q,r)$ тражена кружница, онда из услова $S(p,q)\in a$, следи $9p+4q-47=0$, а из услова

$d(S,M)=r$, следи $(6-p)^2+(1-q)^2=r^2$.



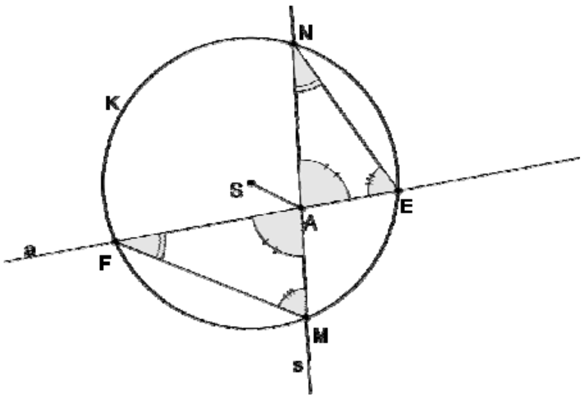
Слика 16.

Из услова ортогоналности кружница $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$, следи $(1-p)^2+(-2.5-q)^2=3.5^2+r^2$. Решавањем ове три једначине имамо тражену кружницу 4.1.22.ggb (Слика 16.) $\mathcal{K}_2:(x-7)^2+(y+4)^2=26$. □

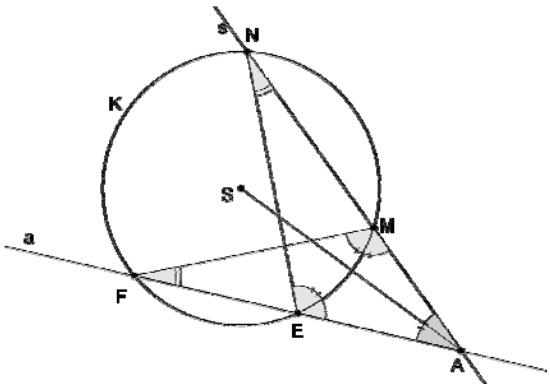
4.1.5. Потенција тачке у односу на кружницу

Из Еуклидске геометрије је познато да се производ дужина дужи $\sigma_{\mathcal{K}}(A):=AM\cdot AN$, где су M и N пресечне тачке сечице из дате тачке A и дате кружнице $\mathcal{K}(S,r)$, назива **потенција тачке у оносу на кружницу**. (4.1.23.ggb)

Такође, познато је да, ако су задате кружница и тачка, тада је потенција тачке у оносу на кружницу константна, тј. зависи од полупречника кружнице и од растојања таке од центра кружнице, а не зависи од избора сечице кроз дату тачку. Нека је дата кружница $\mathcal{K}(S,r)$ и тачка A, у равни кружнице и сечице a и s, које садрже тачку A и секу кружницу у тачкама E, F и M, N (Слика 16.а и б).

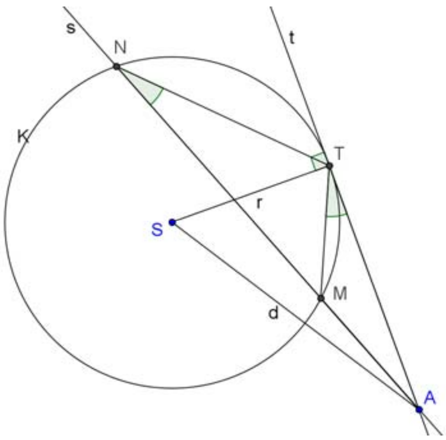


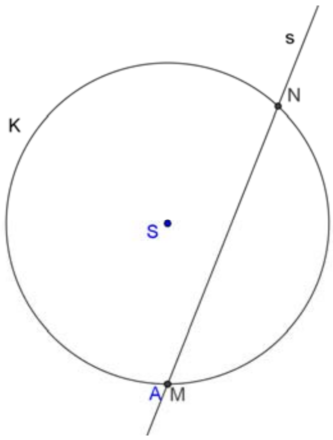
Слика 16. а



Слика 16. б

На основу сличности троуглова $\Delta AEN\sim\Delta AMF$, важи једнакост $\sigma_{\mathcal{K}}(A)=AM\cdot AN=AE\cdot AF$, што значи да потенција тачке у односу на кружницу не зависи од избора тетиве.





Слика 17. а Слика 17. б

На основу сличности троуглова $\Delta AMT \sim \Delta ATN$ (Слика 17.а) важи релација

$$AM : AT = AT : AN$$

одакле је

$$\sigma_{\mathcal{K}}(A) = AM \cdot AN = AT^2 = AS^2 - r^2 .$$

$$AS^2 - r^2 = AM \cdot AN$$

Аналитичка интерпретација потенције тачке у односу на кружницу, дата је следећом теоремом.

Теорема 3. *Потенција* $\sigma_{\mathcal{K}}(A)$, *тачке* $A(x_0, y_0)$, *у односу на кружницу* $\mathcal{K}(p,q,r)$, *једнака је*

(23) $$\sigma_{\mathcal{K}}(A) = (x_0 - p)^2 + (y_0 - q)^2 - r^2 . \qquad \blacksquare$$

Сада је јасно да постоји директна веза између знака потенције тачке и њеног положаја у односу на кружницу, због чега непосредно следи

Теорема 4. *Ако је* $\sigma = \sigma_{\mathcal{K}}(A)$, *потенција тачке* $A(x_0, y_0)$, *у односу на кружницу* $\mathcal{K}(p,q,r)$, *онда важе следеће релације*

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \begin{cases} 1 \Leftrightarrow A \notin \overline{\mathcal{K}}(p,q,r), \\ 0 \Leftrightarrow A \in \mathcal{K}(p,q,r), \\ -1 \Leftrightarrow A \in \overline{\mathcal{K}}(p,q,r) \backslash \mathcal{K}(p,q,r). \end{cases} \qquad \blacksquare$$

Сада се може поставити питање, да ли постоји веза између потенције тачке у односу на кружницу и односа две кружнице. С тим у вези важи теорема.

Теорема 5. *Нека су дате кружнице* $\mathcal{K}_1(p_1, q_1, r_1)$ *и* $\mathcal{K}_2(p_2, q_2, r_2)$ *једне равни, чији центри су различите тачке, тј.* $S_1(p_1, q_1) \neq S_2(p_2, q_2)$. *Скуп тачака, чије су потенције у односу на обе кружнице једнаке, је права*

(24) $$r : 2(p_1 - p_2)x + 2(q_1 - q_2)y - p_1^2 + p_2^2 - q_1^2 + q_2^2 + r_1^2 - r_2^2 = 0 ,$$

коју називамо, ***потенцијална (радикална) оса*** *две кружнице* $\mathcal{K}_1$ *и* $\mathcal{K}_2$.

Доказ. Нека је $A(x, y)$ тачка, која припада равни одређеној кружницама $\mathcal{K}_1$ и

$\mathcal{K}_2$ и нека је $\sigma_{\mathcal{K}_1}(A)=\sigma_{\mathcal{K}_2}(A)$. Одатле непосредно следи да за координате тачке $A(x,y)$ важи

$$2(p_1-p_2)x+2(q_1-q_2)y-p_1{}^2+p_2{}^2-q_1{}^2+q_2{}^2+r_1^2-r_2^2=0,$$

што представља једначину праве, **нормалне** на заједничку осу $s(S_1,S_2)$.

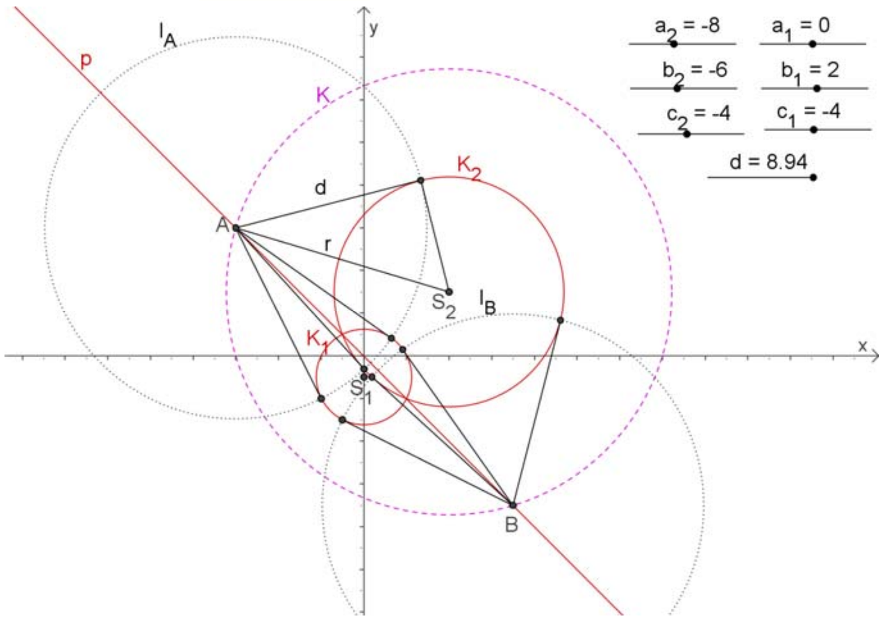
Обрнуто тврђење: ако тачка $A(x,y)$ припада потенцијалној оси, онда су потенције тачке A у односу на кружнице $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$, једнаке, тј. $\sigma_{\mathcal{K}_1}(A)=\sigma_{\mathcal{K}_2}(A)$, доказује се потпуно обрнутим поступком.

Ако се кружнице $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$ секу, потенције заједничких тачака у односу на обе кружнице једнаке су (имају вредност нула), стога се потенцијална оса поклапа са заједничком сечицом (тангентом) кружница. На исти закључак упућује и једначина (20). ■

Напомена 4. Потенцијална оса кружница $\mathcal{K}_1 : x^2+y^2+d_1x+e_1y+f_1=0$ и $\mathcal{K}_2 : x^2+y^2+d_2x+e_2y+f_2=0$, је права $r:(d_1-d_2)x+(e_1-e_2)y+f_1-f_2=0$. □

Примери потенцијалне осе, за разне положаје две кружнице, могу се добити кликом на линк 4.1.24.ggb и активирањем апликације GeoGebra.

Пример 13. Одредити координате тачке из које се могу конструисати тангенте на кружнице $\mathcal{K}_1 : x^2+y^2+2y-4=0$ и $\mathcal{K}_2 : x^2+y^2-8x-6y-4=0$, чије су тангентне дужи једнаке $d=4\sqrt{5}$. (4.1.24.b.ggb).



Слика 18. □

Решење. Права $p:x+y=0$ је потенцијална оса датих кружница (Слика 18.). Полупречник кружнице $\mathcal{K}_2$ је $r_2=0.5\sqrt{a_2^2+b_2^2-4f_2}=\sqrt{29}$. Нека је $r=\sqrt{d^2+r_2^2}$, тада кружница $\mathcal{K}(S_2,r):(x-4)^2+(y-3)^2=109$, сече потенцијалну осу у тачкама $A(-6,6)$ и $B(7,-7)$, из којих тангентне дужи датих кружница имају дужину d.

Теорема 6. *Нека су $\mathcal{K}_1(p_1,q_1,r_1)$, $\mathcal{K}_2(p_2,q_2,r_2)$ и $\mathcal{K}_3(p_3,q_3,r_3)$ три кружнице једне равни, чији су центри $S_1(p_1,q_1)$, $S_2(p_2,q_2)$ и $S_3(p_3,q_3)$, различите неколинеарне тачке. Тада, у истој равни, постоји јединствена тачка P, чије су потенције у односу на све три кружнице једнаке, тј.*

$$\sigma_{\mathcal{K}_1}(P)=\sigma_{\mathcal{K}_2}(P)=\sigma_{\mathcal{K}_3}(P).$$

*Тачка P са овом особином зове се **потенцијални (радкални) центар** кружница $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$ и $\mathcal{K}_3$.*

Доказ. Нека су дате кружнице $\mathcal{K}_1:x^2+y^2+d_1x+e_1y+f_1=0$, $\mathcal{K}_2:x^2+y^2+d_2x+e_2y+f_2=0$ и $\mathcal{K}_3:x^2+y^2+d_3x+e_3y+f_3=0$, са различитим неколинеарним центрима, тј. важи

$$(d_2-d_1)(e_3-e_1)\neq(d_3-d_1)(e_2-e_1).$$

Потенцијалне осе парова кружница: $\mathcal{K}_1,\mathcal{K}_2$; $\mathcal{K}_2,\mathcal{K}_3$; $\mathcal{K}_3,\mathcal{K}_1$, су праве

$$l:(d_1-d_2)x+(e_1-e_2)y+f_1-f_2=0,$$

$$m:(d_2-d_3)x+(e_2-e_3)y+f_2-f_3=0,$$

$$n:(d_3-d_1)x+(e_3-e_1)y+f_3-f_1=0,$$

редом, а како за детерминанту одређену њиховим коефицијентима, важи

$$\begin{vmatrix} d_1-d_2 & e_1-e_2 & f_1-f_2 \\ d_2-d_3 & e_2-e_3 & f_2-f_3 \\ d_3-d_1 & e_3-e_1 & f_3-f_1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d_2-d_3 & e_2-e_3 & f_2-f_3 \\ d_3-d_1 & e_3-e_1 & f_3-f_1 \end{vmatrix}=0,$$

то значи да се оне секу у једној тачки, потенцијалном центру кружница $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$ и $\mathcal{K}_3$, што је и требало доказати. ■

Напомена 5. Резултат Теореме 6. има практични значај за конструкције потенцијалне осе две кружнице $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$, које немају заједничких тачака. Тада кружница $\mathcal{K}$, која сече обе кружнице, а њен центар је тачка неколинеарна са центрима датих кружница, са кружницом $\mathcal{K}_1$, образује потенцијалну осу p_1, а са кружницом $\mathcal{K}_2$ образује потенцијалну осу p_2. Конструкција потенцијалне оса p кружница $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$, заснива се чоњеници да је она конкурентна са осама p_1 и p_2, и нормална на централну осу кружница $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$. □

4.1.6. Прамен кружница

Нека су дате две кружнице са разлчитим центрима

$$\mathcal{K}_1:x^2+y^2+d_1x+e_1y+f_1=0 \text{ и } \mathcal{K}_2:x^2+y^2+d_2x+e_2y+f_2=0,$$

где је: $d_i^2+e_i^2>4f_i$, за $i=1,2$ и $(d_1,e_1)\neq(d_2,e_2)$.

На основу резултата добијених у тачки 1., линеарна комбинација датих једначина

(25) $$x^2+y^2+d_1x+e_1y+f+\lambda\left(x^2+y^2+d_2x+e_2y+f_2\right)=0,$$

представља једначину кружнице за

(26) $$\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}\ \wedge\ \left(d_1+\lambda d_2\right)^2+\left(e_1+\lambda e_2\right)^2>4\left(1+\lambda\right)\left(f_1+\lambda f_2\right),$$

а пошто $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, кажемо да једначина (25) представља **скуп кружница**.

Прецизније, у зависности од параметра λ, једначина (26) представља кружницу, ако:

$$\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}\Leftrightarrow\left(d_1d_2+e_1e_2-2f_1-2f_2\right)^2<\left(d_1{}^2+e_1{}^2-4f_1\right)\left(d_2{}^2+e_2{}^2-4f_2\right),$$

$$\lambda\in\mathbb{R}\setminus\left\{-1,\frac{2f_1+2f_2-d_1d_2-e_1e_2}{d_2{}^2+e_2{}^2-4f_2}\right\}\Leftrightarrow\left(d_1d_2+e_1e_2-2f_1-2f_2\right)^2=\left(d_1{}^2+e_1{}^2-4f_1\right)\left(d_2{}^2+e_2{}^2-4f_2\right),$$

$$\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{-1,\lambda_1,\lambda_2\}\Leftrightarrow\left(d_1d_2+e_1e_2-2f_1-2f_2\right)^2=\left(d_1{}^2+e_1{}^2-4f_1\right)\left(d_2{}^2+e_2{}^2-4f_2\right),$$

где је

$$\lambda_{1,2}=\frac{2f_1+2f_2-d_1d_2-e_1e_2\pm\sqrt{\left(d_1d_2+e_1e_2-2f_1-2f_2\right)^2-\left(d_1{}^2+e_1{}^2-4f_1\right)\left(d_2{}^2+e_2{}^2-4f_2\right)}}{d_2{}^2+e_2{}^2-4f_2}.$$

У првом случају реч је о кружницама које се секу, у другом, кружнице се додирују, а у трећем случају, кружнице су дисјунктне.

Посматрајмо, дакле, скуп кружница датих једначином (25). Основна карактеристика овог скупа јесте, да било која два његова елемента имају исту потенцијалну осу, што се може закључити из следећег разматрања. Наиме, нека су

$$x^2+y^2+d_1x+e_1y+f+\lambda_1\left(x^2+y^2+d_2x+e_2y+f_2\right)=0$$

и

$$x^2+y^2+d_1x+e_1y+f+\lambda_2\left(x^2+y^2+d_2x+e_2y+f_2\right)=0,$$

две кружнице наведеног скупа (25), за $\lambda_1\neq\lambda_2$, при чеми важе услови (26). Њихова потенцијална оса је права дата једначином

$$\left(\frac{d_1+\lambda_1d_2}{1+\lambda_1}-\frac{d_1+\lambda_2d_2}{1+\lambda_2}\right)x+\left(\frac{e_1+\lambda_1e_2}{1+\lambda_1}-\frac{e_1+\lambda_2e_2}{1+\lambda_2}\right)y+\frac{f_1+\lambda_1f_2}{1+\lambda_1}-\frac{f_1+\lambda_2f_2}{1+\lambda_2}=0,$$

која после сређивања има облик

$$\frac{\left(\lambda_2-\lambda_1\right)\left(d_1-d_2\right)}{\left(1+\lambda_1\right)\left(1+\lambda_2\right)}x+\frac{\left(\lambda_2-\lambda_1\right)\left(e_1-e_2\right)}{\left(1+\lambda_1\right)\left(1+\lambda_2\right)}y+\frac{\left(\lambda_2-\lambda_1\right)\left(f_1-f_2\right)}{\left(1+\lambda_1\right)\left(1+\lambda_2\right)}=0,$$

а после скраћивања имамо

$$\left(d_1-d_2\right)x+\left(e_1-e_2\right)y+f_1-f_2=0,$$

што представља једначину потенцијалне осе датих кружница $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$.

На основу напред наведеног у прилици смо да уведемо ову дефиницију:

Дефиниција 3. Скуп кружница, које имају особину да сваке две кружнице из тог скупа имају исту потенцијалну осу, зове се **прамен кружница**. Заједничка потенцијална оса зове се **потенцијална оса прамена** кружница.

На основу идентитета

$$\begin{vmatrix} -\dfrac{d_1}{2} & -\dfrac{e_1}{2} & 1 \\ -\dfrac{d_2}{2} & -\dfrac{e_2}{2} & 1 \\ -\dfrac{d_1+\lambda d_2}{2\left(1+\lambda\right)} & -\dfrac{e_1+\lambda e_2}{2\left(1+\lambda\right)} & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

јасно је да координате центра произвољне кружнице прамена (25) задовољавају једначину линије центара датих кружница $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$, тј. центар произвољне кружнице прамена **припада линији центара** датој са

$$2\left(e_2-e_1\right)x-2\left(d_2-d_1\right)y+d_1e_2-d_2e_1=0.$$

Пресечна тачка потенцијалне осе прамена и линије центара зове се **центар прамена**.

Примери прамена кружница одређених кружницама $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$, могу се добити кликом на линк 4.1.25.ggb и активирањем апликације GeoGebra.

Као што се види из претходног излагања, две кружнице потпуно одређују прамен кружница. Такође, прамен кружница једнозначно је одређен, ако је дата једна његова кружица

$$\mathcal{K}: x^2+y^2+dx+ey+f=0$$

и потенцијална оса

$$p: ax+by+c=0.$$

Једначина

(27) $$x^2+y^2+dx+ey+f+\lambda\left(ax+by+c\right)=0,$$

представља прамен кружница, ако је $\left(d+\lambda a\right)^2+\left(e+\lambda b\right)^2>4\left(f+\lambda c\right)$ и $\lambda\in\mathbb{R}$. Другим речима, у зависности од параметра λ, једначина (27) представља кружницу за

$\lambda\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\left(ad+be-2c\right)^2<\left(a^2+b^2\right)\left(d^2+e^2-4f\right)$, (права p сече кружницу $\mathcal{K}$)

$\lambda\in\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{ad+be-2c}{a^2+b^2}\right\}\Leftrightarrow\left(ad+be-2c\right)^2=\left(a^2+b^2\right)\left(d^2+e^2-4f\right)$, (права p је тангента кружнице $\mathcal{K}$)

$\lambda\in\mathbb{R}\setminus\left(\lambda_1,\lambda_2\right)\Leftrightarrow\left(ad+be-2c\right)^2=\left(a^2+b^2\right)\left(d^2+e^2-4f\right)$ (права p и кружница $\mathcal{K}$ су дисјунктне), где је

$$\lambda_{1,2}=\frac{2c-ad-be\pm\sqrt{\left(ad+be-2c\right)^2-\left(a^2+b^2\right)\left(d^2+e^2-4f\right)}}{a^2+b^2}.$$

Примери прамена кружница одређених кружницом $\mathcal{K}_1$ и потенцијалном осом p, могу се добити кликом на линк 4.1.26.ggb и активирањем апликације GeoGebra.

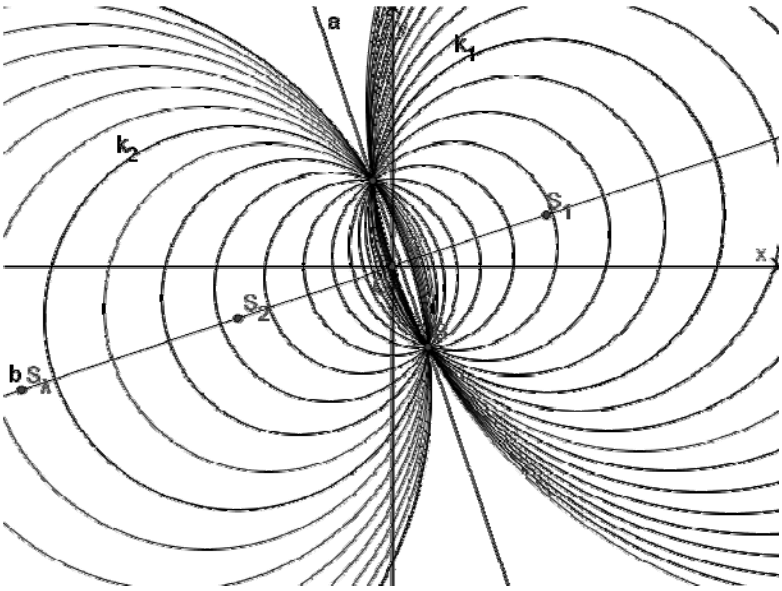
У случају када је дата једна кружница и центар прамена, прамен кружница одређен је једнозначно. Тада је потенцијална оса прамена она права која садржи центар прамена и нормална је на праву која садржи центар прамена и центар кружнице.

Ако се две кружнице прамена секу, онда све кружнице прамена садрже тачке пресека (пресечне тачке одређују потенцијалну осу прамена). Такав прамен зове се **елиптички прамен** кружница (Слика 19.). Ако две кружнице прамена имају једну заједничку тачку, онда све кружнице прамена садрже ту тачку (потенцијална оса прамена је заједничка тангента свих кружница у заједничкој тачки). Такав прамен зове се **параболички прамен** кружница (Слика 20.). Ако две кружнице прамена немају заједничких тачака, онда било које две кружнице прамена немају заједничких тачака (потенцијална оса прамена нема заједничких тачака са никојом кружницом прамена). Такав прамен зове се **хиперболички прамен** кружница (Слика 21.).

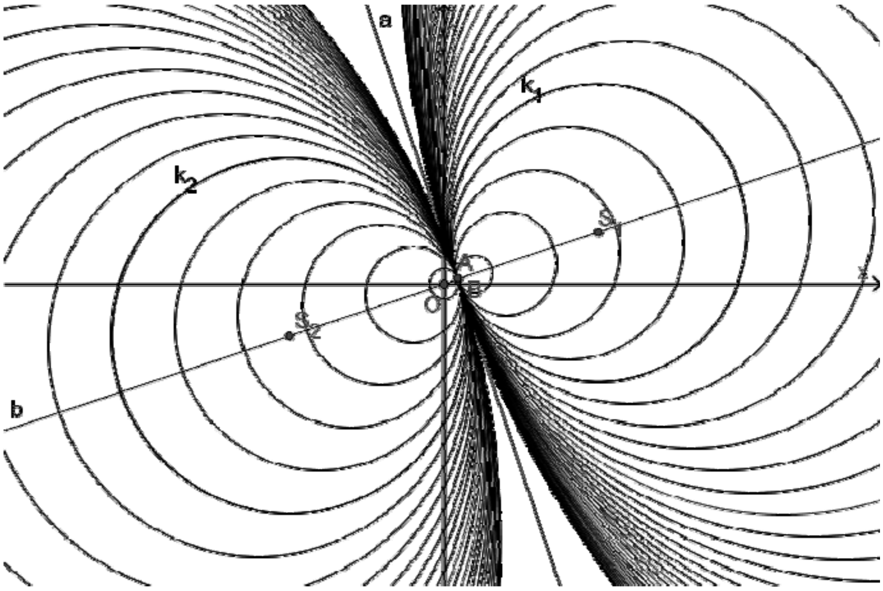
Примери ова три типа прамена кружница одређених кружницама $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$, могу се добити кликом на линк 4.1.25.ggb и активирањем апликације GeoGebra.
Кроз било коју тачку $T\left(x_0, y_0\right)$ равни, која не припада потенцијалној оси, пролази једна и само једна кружница датог прамена. За утврђивање њене једначине, потребно је одредити λ из услова

$$x_0^2 + y_0^2 + d_1 x_0 + e_1 y_0 + f + \lambda\left(x_0^2 + y_0^2 + d_2 x_0 + e_2 y_0 + f_2\right) = 0,$$

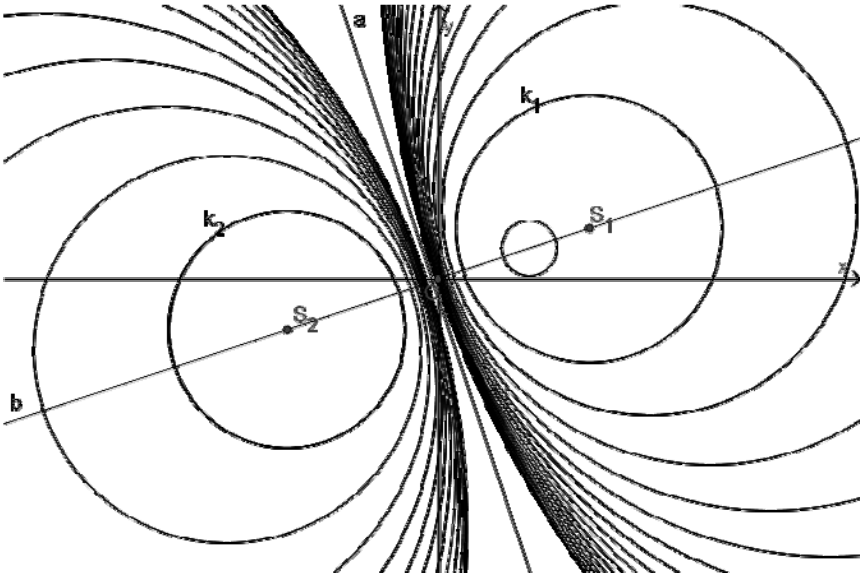
и уврстити у једначину (25).



Слика 19.



Слика 20.



Слика 21.

1. Ортогонални прамени кружница. Када је о прамену кружница реч, интере-сантно је питање ортогоналности неке кружнице и кружница прамена. У ту сврху се може доказати и следећа особина.

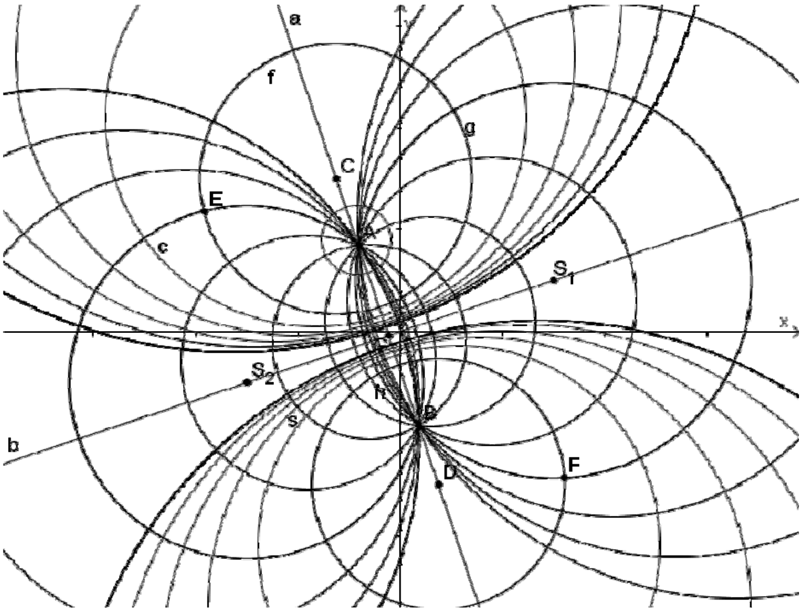
Теорема 7. *Ако је кружница* $\mathcal{K}: x^2+y^2+dx+ey+f=0$, *ортогонална на сваку од кружница* $\mathcal{K}_1: x^2+y^2+d_1x+e_1y+f_1=0$ *и* $\mathcal{K}_2: x^2+y^2+d_2x+e_2y+f_2=0$, *онда је ортогона-лна на сваку кружницу прамена*

$$x^2+y^2+d_1x+e_1y+f+\lambda_1\left(x^2+y^2+d_2x+e_2y+f_2\right)=0,$$

а њен центар припада потенцијалној оси прамена, 4.1.27.ggb.

Доказ. Из услова ортогоналности (22) кружница $\mathcal{K}$ и $\mathcal{K}_1$, односно $\mathcal{K}$ и $\mathcal{K}_2$, следи

$$dd_2+ee_2-2f-2f_2=0 \text{ и } d_1d+e_1e-2f_1-2f=0.$$



Слика 22.

Проверавајући услов ортогоналности на кружницама $\mathcal{K}$ и произвољној кружници датог прамена, коју записујемо као

$$x^2+y^2+\frac{d_1+\lambda d_2}{1+\lambda}x+\frac{e_1+\lambda e_2}{1+\lambda}y+\frac{f_1+\lambda f_2}{1+\lambda}=0,$$

имамо

$$d\frac{d_1+\lambda d_2}{1+\lambda}+e\frac{e_1+\lambda e_2}{1+\lambda}-2f-2\frac{f_1+\lambda f_2}{1+\lambda}=d\left(d_1+\lambda d_2\right)+e\left(e_1+\lambda e_2\right)-2\left(1+\lambda\right)f-2\left(f_1+\lambda f_2\right)$$

$$=dd_1+ee_1-2f-2f_1+\lambda\left(dd_2+ee_2-2f-2f_2\right)=0.$$

Из услова ортогоналности (22) непосредно следи да је једнакост

$$\left(d_1-d_2\right)\left(-\frac{d}{2}\right)+\left(e_1-e_2\right)\left(-\frac{e}{2}\right)+f_1-f_2=0$$

идентитет, што значи да центар $S\left(-d/2,-e/2\right)$, кружнице $\mathcal{K}$, припада потенција-лној оси прамена, чиме је докано тврђење. ■

Може се доказати да скуп свих кружница $\{\mathcal{L}\}$, које су ортогоналне кружницама датог прамена $\{\mathcal{K}\}$, такође представља прамен кружница. Прамен $\{\mathcal{L}\}$ је ортогоналан прамену $\{\mathcal{K}\}$ (Слика 22.). Може се такође доказати да је елиптичком прамену ортогоналан хиперболички, а хиперболичком ортогоналан је елиптички, док је параболичком прамену ортогоналан параболички прамен кружница.

4.1.7. Задаци

1. Кружница је дефинисана центром $C=\left(-4,-6\right)$ и полупречником $r=1$. Написати једначину кружнице која је симетрична датој линији:

а) у односу на x - осу
б) у односу на y - осу
в) у односу на симетралу I и III квадранта
г) у односу на координатни почетак 1.ggb

2. Наћи једначину кружнице која додирује обе коориднатне осе и чији је полупречник једнак $r=3$. 2.ggb
3. Испитати положај тачке P у односу на линију $x^2+y^2-6x-8y=75$, где је:
   а) $P=(1,7)$, б) $P=(9,12)$, в) $P=(-7,8)$. 3.ggb
4. Одредити једначину кружнице полупречника 13, која садржи тачке $(10,4)$ и $(17,-3)$. 4.ggb
5. Одредити једначину кружнице која пролази кроз тачке $(11,2)$ и $(7,-2)$, а центар припада правој $y=3x-19$. 5.ggb
6. Одредити једначину кружнице која садржи три тачке:
   а) $(1,1)$, $(4,2)$, $(2,4)$; б) $(-4,-2)$, $(-4,-6)$, $(2,-2)$. 6.ggb
7. Да ли је четвороугао $ABCD$ где је: $A=(6,5)$, $B=(8,1)$, $C=(0,-3)$, $D=(-1,4)$ тетивни? Ако јесте, наћи једначину описане кружнице. 7.ggb
8. Одредити једначину кружнице, која садржи тачке $(3,4)$, $(4,5)$, а центар лежи на линији $x^2+y^2=50$. 8.ggb
9. Одредити једначину кружнице, која пролази кроз тачке $(-4,1)$ и $(3,0)$ и има центар на y - оси. 9.ggb
10. Одредити за које вредности броја k, права $y=kx$:
    а) сече кружницу $x^2+y^2-10x+16=0$,
    б) додирује је,
    в) нема заједничких тачака са њом. 10.ggb
11. Одредити једначину кружнице полупречника $\sqrt{10}$, која садржи тачку $(4,3)$ и додирује праву $x-3y-15=0$. 11.ggb
12. Наћи једначину кружнице која додирује праве $3x+4y-35=0$, $3x-4y-35=0$, $x=1$. 12.ggb
13. Која је тачка кружнице $x^2+y^2+6x+4y+3=0$ најближа, а која најудаљенија од праве $x+3y+9=0$? 13.ggb
14. Наћи једначину тангенте кружнице $x^2+y^2+2x+4y+1=0$ која је нормална на праву $3x-4y=0$. 14.ggb
15. Наћи центар кружнице полупречника 1, ако су праве $5x+12y+4=0$ и $3x-4y-5=0$ њене тангенте. 15.ggb
16. Написати једначину кружнице која садржи тачку $(1,0)$ и додирује две паралелене праве $2x+y=0$ и $2x+y-18=0$. 16.ggb
17. Једначине страница троугла ABC су: $x+2y=5$, $x=3y$, $y=2x$. Написати једначину кружнице која је уписана у троугао. 17.ggb
18. Начи јединачине тангенти из тачке $(-1,-5)$ на кружници $x^2+y^2=13$. 18.ggb

19. Дате су тачка $(-2,5)$ и кружница $(x-5)^2+(y-6)^2=25$.

а) Написати једначине тангенти из дате тачке на дату линију.
б) Под којим се углом види дата кружница из дате тачке.
в) Одредити координате додирних тачака тангенти и кружнице.
г) Израчунати површину делтоида који је образован од тангенти и полупречника у додирним тачкама. 19.ggb

20. Под којим углом се секу права и кружница: а) $7x-17y+169=0$, $x^2+y^2=169$; б) $y+3=0$, $x^2+y^2=10$? 20.ggb

21. Из тачке $(14,2)$ конструисати праву која кружницу $x^2+y^2-2x-4y-8=0$ сече под углом 45^0. 21.ggb

22. Наћи једначину кружнице која додирује обе координатне осе и споља додирује кружницу $x^2+y^2-26x+2y+145=0$. 22.ggb

23. Под којим се углом секу кружнице: а) $x^2+y^2=29$ и $(x+2)^2+(y-5)^2=58$; б) $(x-3)^2+(y-1)^2=8$ и $(x-2)^2+(y+2)^2=2$? 23.ggb

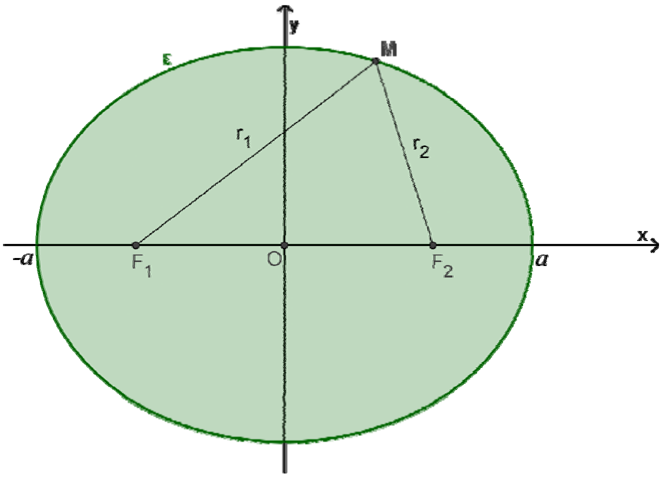
24. Наћи геометријско место средина тетива кружнице $x^2+y^2=r^2$, чији је један крај тачка $(r,0)$. 24.ggb

25. Која права прамена $x+y-10+\lambda(x-y)=0$ додирује кружницу $x^2+y^2=5$? 25.ggb

4.2. ЕЛИПСА

Са појмом елипсе срећемо се у разним областима науке и у разним животним ситуацијама. На пример, према првом Кеплеровом закону, планете се крећу око Сунца по путањама облика елипсе, а Сунце се налази у једној жижи. Такође, око атомског језгра електрони се крећу по путањама облика елипсе, а Земљини сателити крећу се по путањама приближним елипсама. Приказ кретања планета се може добити кликом на линк 4.2.1.ggb и активирањем апликације GeoGebra.

Претпоставимо даље, да на једној ливади пасе коза, везана канапом за један штап пободен у земљу. Јасно је да ће после извесног времена коза да попасе траву са површи облика круга, у чији је центар пободен штап, а полупречник једнак дужини канапа. Замислимо сада, да огрлица око врата козе може да клизи по канапу чији су крајеви везани за два штапа пободена у земљу, а да је дужина канапа већа од растојања међу штаповима. У овом случају површ на којој коза пасе изгледа као на Слици 1.



Слика 1.

Граница те површи је линија чија свака тачка има особину да је збир њених растојања од тачака у којима су пободени штапови, једнак дужини канапа. Ова линија зове се **елипса**, а тачке у које су пободени штапови зову се **фокуси** (жиже).

Одавде следи и поступак за "техничку конструкцију" елипсе: ако се крајеви канапа дужине $2a$ причврсте у тачкама F_1 и F_2, при чему је $2a > d(F_1, F_2)$, тада врх оловке, држећи канап затегнутим, описује елипсу.Ова конструкција се може добити кликом на линк 4.2.2.ggb и активирањем апликације GeoGebra.

4.2.1. Дефиниција, конструкција и једначина елипсе

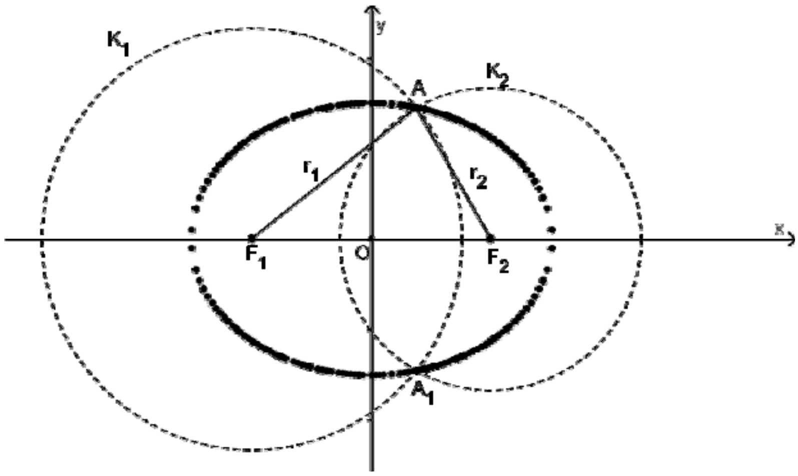
На основу напред изложеног, у прилици смо да саопштимо дефиницију елипсе, која се најчешће користи у Еуклидској геометрији.

Дефиниција 1. Нека су F_1 и F_2 тачке равни α и нека је a реалан број такав да је $2a > d(F_1, F_2)$. Елипса са фокусима (жижама) F_1 и F_2 и **главном** (**фокалном**) **осом** $2a$, је скуп тачака равни α, са особином да је збир њихових растојања од фокуса константан и једнак $2a$, тј.

(1) $$\mathcal{E} := \{M : M \in \alpha \wedge d(M, F_1) + d(M, F_2) = 2a\}.$$

Ова дефиниција и напред изложена разматрања, послужиће за извођење конструкције елипсе.

Конструкција 1. Конструкција елипсе по дефиницији, за дате вредности $a > c \geq 0$, изводи се тако што се прво конструишу фокуси: $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$, (Слика 2.).



Слика 2.

Затим се конструишу лукови $\mathcal{L}_1 : (x+c)^2 + y^2 = r_1^2$ и $\mathcal{L}_2 : (x-c)^2 + y^2 = r_2^2$, при чему се за полупречник r_1 бирају такве вредности да је $a - c \leq r_1 \leq a + c$, а за r_2 тада важи: $r_2 = 2a - r_1$. Пресек лукова $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ су тачке $A(x, y)$ и $A_1(x_1, y_1)$ (или само тачка A, ако је $r_1 = a - c$ или $r_1 = a + c$), које припадају елипси (1). Поступак се наставља тако што се за полупречник r_1 узимају различите вредности из интервала $[a - c, a + c]$, а добијају се тачке A и A_1, које заузимају различите положаје на елипси. Ова конструкција се може добити кликом на линк 4.2.3.ggb и активирањем апликације GeoGebra. ■

Поступак који ће бити коришћен за извођење једначине елипсе, карактеристичан је за одређивање геометријских места тачака и формирање њихових једначина.

1. Канонски облик једначине елипсе

Теорема 1. *Нека су $a, c \in \mathbb{R}$ и $a > c \geq 0$, а F_1 и F_2 тачке равни α, дате у Декартовом правоуглом координатном систему са $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$. Елипса (1), са* *жижама* F_1 *и* F_2 *и главном осом* $2a$, *је скуп*

(2) $$\mathcal{E} := \left\{ (x, y) \in \alpha : b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \right\},$$

где је $b^2 = a^2 - c^2$. *Број* a ***главна (велика)***, *број* b ***споредна (мала) полуоса елипсе***, *а* $c \in \mathbb{R}^+ \bigcup \{0\}$ ***линеарни ексцентрицитет*** *хиперболе*.

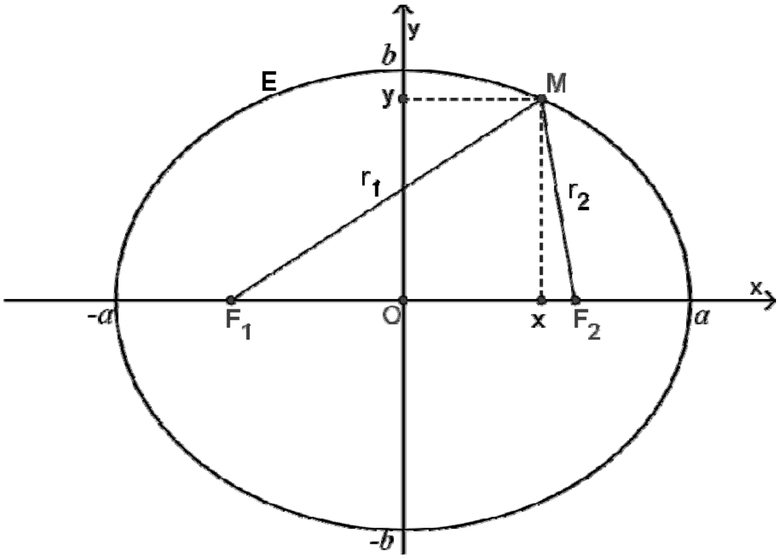
Другим речима, једначина елипсе је

(3) $$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2,$$

или у **канонском облику**

(4) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Доказ. Овом теоремом се тврди да су скупови приказани формулама (1) и (2) једнаки, тј. ако тачка припада елипси (1), онда њене координате задовољавају једначину (2), и обрнуто, ако координате произвољне тачке равни α задовољавају једначину (2), онда та тачка припада елипси (1).



Слика 3.

Претпоставимо, дакле (Слика 3.), да је $M(x, y)$ тачка елипсе (1), тј. да важи

$$d(M, F_1) + d(M, F_2) = 2a,$$

одакле је

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

а после квадрирања

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2,$$

тј.

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx.$$

После (поновног) квадрирања и сређивања имамо

$$\left(a^2 - c^2\right)x^2 + a^2y^2 = a^2\left(a^2 - c^2\right),$$

а после увођења смене $b^2 = a^2 - c^2$, коначно важи

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2,$$

што значи да ако тачка $M(x, y)$ припада елипси (1), онда припада и скупу (2).

Обрнуто, ако координате произвољне тачке $M(x, y)$ задовољавају једначину (2), тј. ако је

(5)
$$y^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \quad \text{и} \quad b^2 = a^2 - c^2,$$

тада за дужине **фокалних радијуса** (дужи које спајају фокусе и тачке елипсе), $r_1 = d(M, F_1)$ и $r_2 = d(M, F_2)$, важи

$$r_1^2 = (x+c)^2 + b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) = a^2 + 2cx + \frac{c^2}{a^2}x^2 = \left(a + \frac{c}{a}x\right)^2$$

и

$$r_2^2 = (x-c)^2 + b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) = a^2 - 2cx + \frac{c^2}{a^2}x^2 = \left(a - \frac{c}{a}x\right)^2,$$

а увођењем обележавања $e = c/a$, имамо

$$r_1^2 = (a+ex)^2 \quad \text{и} \quad r_2^2 = (a-ex)^2.$$

Пошто из услова теореме $a > c \geq 0$ следи $0 \leq e < 1$, а из (5) следи $|x| \leq a$, имамо

$$a + ex \geq a(1-e) > 0 \quad \text{и} \quad a - ex \geq a(1-e) > 0$$

због чега је

(6)
$$r_1 = a + ex \quad \text{и} \quad r_2 = a - ex,$$

одакле следи

$$d(M, F_1) + d(M, F_2) = r_1 + r_2 = 2a,$$

што значи да тачка $M(x, y)$ припада елипси (1). ■

У дефиницији елипсе се претпоставља да је $c \geq 0$, тј. $c > 0 \vee c = 0$, што значи да фокуси F_1 и F_2 могу, а не морају бити две различите тачке. Другим речима, допуштена је могућност $c = 0$, што повлачи $F_1 = F_2$. Тада је $b^2 = a^2$, а једначина елипсе гласи

$$x^2 + y^2 = a^2$$

што је једначина кружнице (елипсе чији се фокуси поклапају).

2. Параметарски облик једначине елипсе

Теорема 2. *Нека су a и b реалне позитивне константе и нека је t реалан параметар. Једначине*

(7)
$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t,$$

*представљају **параметарски облик** једанчине елипсе* (4).

Доказ. Нека је елипса дата једначином (4), где су a и b дати реални позитивни бројеви. Ако је $T(x,y)$ тачка елипсе, онда из једначине (4), написане у облику

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1,$$

непосредно следи да постоји $t\in\mathbb{R}$, такав да је

$$\frac{x}{a}=\cos t \text{ и } \frac{y}{b}=\sin t,$$

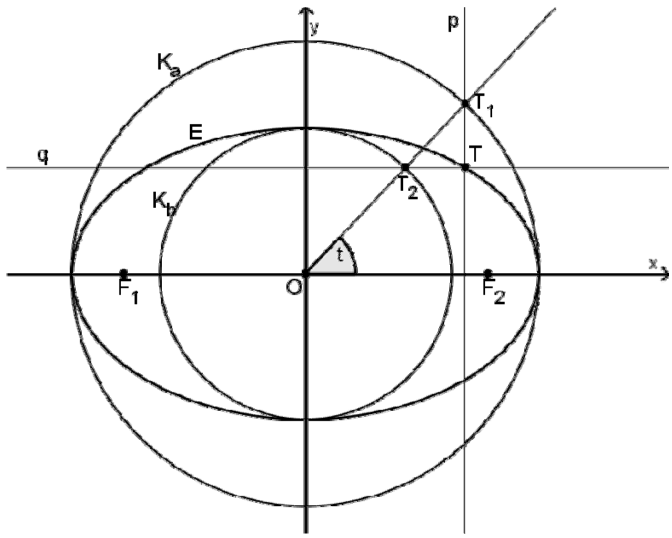
одакле следи једначине (7).

Обрнуто, ако за дате реалне позитивне бројеве a и b, координате тачке $T(x,y)$ задовољавају једначине (7), онда је

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=\cos^2 t+\sin^2 t=1,$$

што значи да је $T(x,y)$ тачка елипсе дате једначином (4). ■

Конструкција 2. За конструкцију елипсе, дате једначином (7), конструишимо прво две концентричне кружнице $\mathcal{K}_a : x^2+y^2=a^2$ и $\mathcal{K}_b : x^2+y^2=b^2$, (Слика 4.). Затим се на кружници $\mathcal{K}_a$ изабере тачка T_1 тако да полуправа $[OT_1)$ образује угао t са позитивним смером x - осе, због чега је $T_1(a\cos t, a\sin t)$. За тачку T_2 у којој полуправа $[OT_1)$ сече кружницу $\mathcal{K}_b$, имамо $T_2(b\cos t, b\sin t)$. Права p кроз тачку T_1, паралелна са y - осом, чија је једначина $x=a\cos t$ и права q кроз тачку T_2, паралелна са x- осом, чија је једначина $y=b\sin t$, секу се у тачки $T(a\cos t, b\sin t)$, која очигледно припада елипси (7).



Слика 4.

Ако се тачка T_1 креће тако да описује кружницу $\mathcal{K}_a$, тачка T описује елипсу (7). Ова конструкција се може добити кликом на линк 4.2.4.ggb и активирањем апликације GeoGebra. ■

3. Унутрашња и спољашња област елипсе

Однос елипсе и скупа тачака равни у којој је дефинисана, регулишу следећа дефиниција и теорема.

Дефиниција 2. Нека је $\mathcal{E}$ елипса у равни α, са фокусима F_1 и F_2 и главном осом $2a$. Скуп тачака $U_{\mathcal{E}} := \{X : X \in [F_i T) \wedge T \in \mathcal{E} \wedge i \in \{1,2\}\}$ зове се **унутрашња област** (**унутрашњост**) елипсе, а скуп тачака $S_{\mathcal{E}} := \alpha \setminus (U_{\mathcal{E}} \cup \mathcal{E})$ зове се **спољашња област** (**спољашњост**) елипсе.

Генерички организатор за маркирање унутрашње и спољашње области елипсе, може се покренути кликом на линк 4.2.5.ggb, активирањем апликације GeoGebra.

Један од критеријума за маркирање унутрашње и спољашње области елипсе, регулише следеће тврђење.

Теорема 1. *Ако је* $\mathcal{E}$ *елипса у равни* π*, са фокусима* F_1 *и* F_2 *и главном осом* $2a$*, онда је унутрашња област*

$$U_{\mathcal{E}} = \{X : X \in \pi(\mathcal{E}) \wedge d(F_1, X) + d(X, F_2) < 2a\}$$

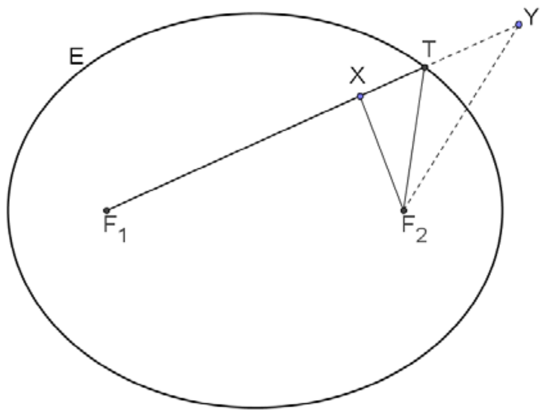
а спољашња област

$$S_{\mathcal{E}} := \{T : T \in \pi(\mathcal{E}) \wedge d(T, F_1) + d(T, F_2) > 2a\}.$$

Доказ. Нека је $\mathcal{E}$ елипса у равни π, са фокусима F_1 и F_2 и главном осом $2a$. Нека је X унутрашња тачка елипсе (Слика 5.), тј. нека је $X \in U_{\mathcal{E}}$, тада важи

$$d(F_1, X) + d(X, T) = d(F_1, T),$$

где је T тачка елипсе $\mathcal{E}$, због чега је $d(F_1, T) + d(T, F_2) = 2a$.



Слика 5.

Примењујући неједнакост троугла

$$d(X, F_2) < d(X, T) + d(T, F_2),$$

где строга неједнакост важи због услова $X \neq T$, добијамо следећу релацију

$$d(F_1, X) + d(X, F_2) < d(F_1, X) + d(X, T) + d(T, F_2) = d(F_1, T) + d(T, F_2) = 2a.$$

Обрнуто, претпоставимо да за тачку Y важи

$$d\left(Y,F_1\right)+d\left(Y,F_2\right)<2a$$

и да Y није унутрашња тачка. Пошто последња релација није једнакост, следи да је Y тачка спољашњости, тј. постоји тачка T елипсе $\mathcal{E}$, која припада отвореној дужи $\left(F_1Y\right)$, због чега важи релација

$$d\left(F_1,T\right)+d\left(T,Y\right)=d\left(F_1,Y\right).$$

Тада важи

$$d\left(F_1,Y\right)+d\left(Y,F_2\right)=d\left(F_1,T\right)+d\left(T,Y\right)+d\left(Y,F_2\right)>d\left(F_1,T\right)+d\left(T,F_2\right)=2a,$$

што је у контрадикцији са претпоставком. Аналогним поступком, доказује се и друга једнакост. ■

Аналитички критеријум на основу кога се утврђује да ли тачка припада унутрашњој или спољашњој области, наведен је у следећој теореми, која је директна последица Теореме 1.

Теорема 2. *Тачка* $M\left(x_0,y_0\right)$ *припада* ***унутрашњости елипсе*** $\mathcal{E}\left(\alpha,\beta,a,b\right)$ *ако и само ако је*

$$b^2\left(x_0-\alpha\right)^2+a^2\left(y_0-\beta\right)^2<a^2b^2.$$

Тачка $M\left(x_0,y_0\right)$ *припада* ***спољашњости елипсе****, ако и само ако је*

$$b^2\left(x_0-\alpha\right)^2+a^2\left(y_0-\beta\right)^2>a^2b^2.$$ ■

Овај критеријум је дат у генеричком организатору који се може добити кликом на линк 4.2.6.ggb, активирањем апликације GeoGebra.

Последњи генерички организатор пружа могућност за решавање квадратне неједначине облика

$$b^2\left(x-\alpha\right)^2+a^2\left(y-\alpha\right)^2\ \rho a^2b^2$$

за разне вредности параметара $a,b\in\mathbb{R}^+$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, као и за различите облике релације $\rho\in\{\geq,\leq,>,<\}$.

4.2.2. Нека својства елипсе: симетричност, центар, темена, анализа једначине

1. Симетричност. Ако је $f\left(x,y\right)$ функција две променљиве, дата са

$$f\left(x,y\right)=b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2,$$

онда једначина $f\left(x,y\right)=0$, представља једначину (3) елипсе.

Због парности функција x^2 и y^2, јасно је да је функција $f\left(x,y\right)$ парна по свакој промењивој појединачно, и по обе промењиве истовремено, тј.

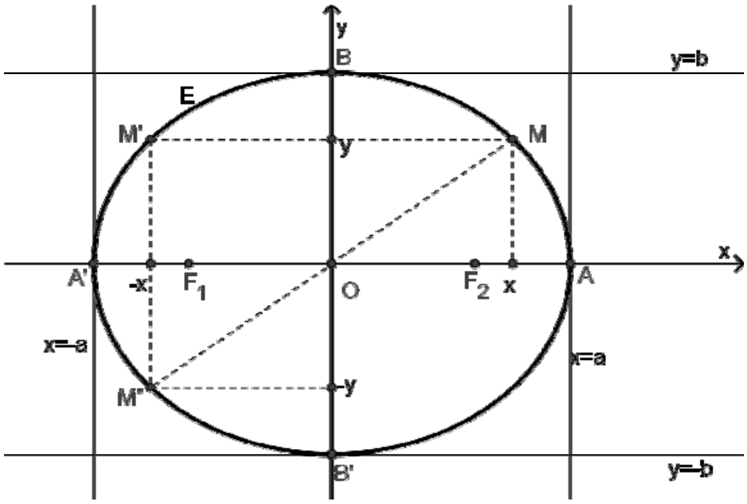
$$f\left(-x,y\right)=b^2\left(-x\right)^2+a^2y^2-a^2b^2=b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2=f\left(x,y\right),$$

$$f\left(x,-y\right)=b^2x^2+a^2\left(-y\right)^2-a^2b^2=b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2=f\left(x,y\right),$$

$$f\left(-x,-y\right)=b^2\left(-x\right)^2+a^2\left(-y\right)^2-a^2b^2=b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2=f\left(x,y\right).$$

Из прве релације следи да је елипса (3) симетрична у односу на $y-$осу, из друге жда је симетрична у односу на $x-$осу, а из треће да је симетрична у односу на координатни почетак (Слика 6.).

2. Центар и темена. Другим речима, елипса (3) има две (међусобно нормалне) осе симетрије, $x-$осу и $y-$осу, а координатни почетак је центар симетрије елипсе (3), тј. **центар елипсе**. Дуж која спаја центар елипсе и тачку елипсе зове се **радијус елипсе**. Даље, за $y=0$, једначина елипсе (3) еквивалентна је са $x^2=a^2$, одакле је $x=\pm a$, а за $x=0$, једначина елипсе (3) еквивалентна је са $y^2=b^2$, одакле је $y=\pm b$.



Слика 6.

То значи да елипса сече $x-$осу у тачкама $A(a,0)$ и $A'(-a,0)$, а $y-$осу у тачкама $B(0,b)$ и $B'(0,-b)$. Пошто се у геометрији све пресечне тачке неке криве и њених оса симетрије називају **темена криве** [8], то су наведене тачке A, A', B и B' темена елипсе. Темена A и A' су крајње тачке главне осе, а темена B и B' су крајње тачке **споредне осе**. 4.2.7.a.ggb

На основу наведеног јасно је да је елипса (3) уписана у правоугаоник чије странице припадају правама:

$$x=a,\ x=-a,\ y=b,\ y=-b.$$

3. Анализа једначине. Нека су у Декартовом правоуглом координатном систему дате тачке $A(x_1,y_1)$ и $B(x_2,y_2)$. Анализираћемо услове које треба да испуњавају њихове координате, тако да тачке A и B једнозначно одређују елипсу чија је једначина (4).

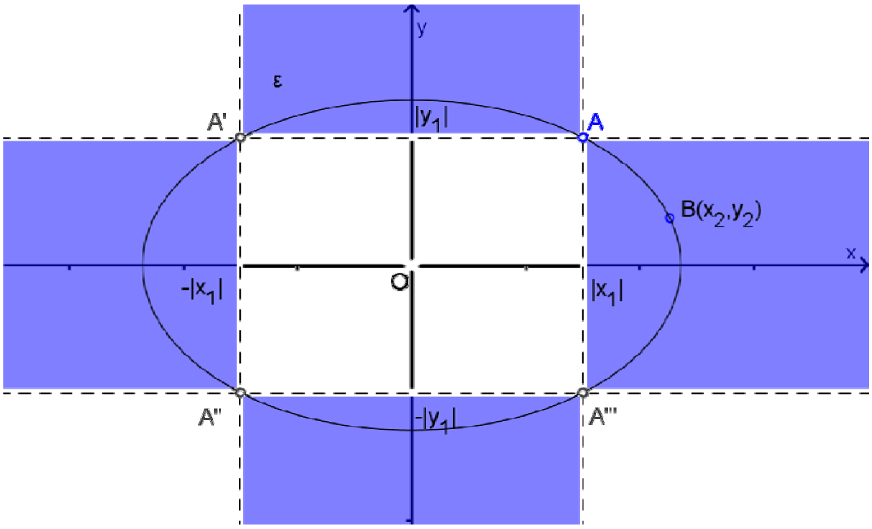
За конструкцију елипсе (1), коришћењем ових тачака у програму GeoGebra, конструишу се: тачка A', симетрична тачки A, у односу на $y-$осу, тачка A''' симетрична тачки A, у односу на $x-$осу, као и тачку A'' симетрична тачки A, у односу на координатни почетак. Затим се, уношењем у поље за унос наредбе $\boxed{\mathbf{\varepsilon = KonusniPresek[A, B, A', A'', A''']}}$, конструише елипса ε, одређена тачкама

A, A', A'', A''' и B. Ако је тачка A фиксирана (због чега су фиксиране и тачке A', A'' и A'''), померањем тачке B мења се облик криве ε, која је за неке положаје тачке B елипса, за неке нека друга крива (хипербола), а за неке права или унија две праве које се секу.

Под којим условима крива ε представља елипсу?

Да се то установи, уочимо праве $p(A,A')$, $p(A'',A''')$, $p(A,A''')$ и $p(A',A'')$. Сада се кликом на линк (4.2.7.ggb) и покретањем апликације GeoGebra, може уочити следећа правилност:

ако тачка B припада унутрашњости било кога од четири плаво обојена "правоугаоника", који су одређени тачком A, (Слика 6.), одакле су искључене тачке правих $p(A,A')$, $p(A'',A''')$, $p(A,A''')$ и $p(A',A'')$, онда је овако задатим тачкама A и B, једнозначно одређена елипса (1).



Слика 7.

$$(x_2,y_2)\in\Big(\big(\big((-\infty,-|x_1|)\cup(|x_1|,\infty)\big)\times(-|y_1|,|y_1|)\big)\cup\big((-|x_1|,|x_1|)\times\big((-\infty,-|y_1|)\cup(|y_1|,\infty)\big)\big)\Big),$$

или

$$\big(x_2\in(-\infty,-|x_1|)\cup(|x_1|,\infty)\wedge y_2\in(-|y_1|,|y_1|)\big)\vee\big(x_2\in(-|x_1|,|x_1|)\wedge y_2\in(-\infty,-|y_1|)\cup(|y_1|,\infty)\big)$$

,

што је еквивалентно са

(8) $$\big(|x_1|<|x_2|\wedge|y_2|<|y_1|\big)\vee\big(|x_2|<|x_1|\wedge|y_1|<|y_2|\big),$$

Последња релација је еквивалентна са

(9) $$\left(x_1^2-x_2^2<0\wedge y_2^2-y_1^2<0\right)\vee\left(x_1^2-x_2^2>0\wedge y_2^2-y_1^2>0\right),$$

одакле очигледно следи и релација:

(10) $$\left(x_1^2-x_2^2<0\wedge y_2^2-y_1^2<0\right)\Rightarrow x_1^2y_2^2-x_2^2y_1^2<0 \;\vee\; \left(x_1^2-x_2^2>0\wedge y_2^2-y_1^2>0\right)\Rightarrow x_1^2y_2^2-x_2^2y_1^2>0$$

С друге стране, услов да тачке A и B припадају елипси (1), еквивалентан је систему линеарних једначина са две промењиве $1/a^2$ и $1/b^2$

$$x_1^2/a^2+y_1^2/b^2=1 \text{ и } x_2^2/a^2+y_2^2/b^2=1,$$

који, под условом (8), односно (9) и (10), има једнозначно одређена, позитивна решења

$$a^2 = \left(x_1^2 y_2^2 - x_2^2 y_1^2\right) \Big/ \left(y_2^2 - y_1^2\right) \text{ и } b^2 = \left(x_1^2 y_2^2 - x_2^2 y_1^2\right) \Big/ \left(x_1^2 - x_2^2\right),$$

тј. $a^2, b^2 \in \mathbb{R}^+$. То значи да, за дате тачке $A\left(x_1, y_1\right)$ и $B\left(x_2, y_2\right)$, чије координате испуњавају услов

$$\left(|x_1| < |x_2| \wedge |y_2| < |y_1|\right) \vee \left(|x_2| < |x_1| \wedge |y_1| < |y_2|\right),$$

постоје једнозначно одређени бројеви $a, b \in \mathbb{R}^+$ – полуосе елипсе, тј. дате тачке A и B једнозначно одређују елипсу (1).

Пример 1. Састави једначину (1) елипсе, која садржи тачке $A(9,4)$ и $B(-12,-3)$.

Решење. Нека је $\varepsilon : \alpha x^2 + \beta y^2 = 1$ тражена једначина елипсе, где је $\alpha = 1/a^2$ и $\beta = 1/b^2$. Услови $A \in \varepsilon$ и $B \in \varepsilon$, су еквивалентни са системом

$$81\alpha + 16\beta = 1 \text{ и } 144\alpha + 9\beta = 1,$$

чија су решења $\alpha = 1/225$ и $\beta = 1/25$, па је тражена једначина

$$\varepsilon : x^2 + 9y^2 = 225. \qquad \square$$

Напомена 1. Из једначине (5) следи

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

што омогућује да се елипса посматра као унија графика следеће две функције

$$f(x) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \text{ и } g(x) = -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

при чему обе функције имају домен $[-a, a]$, док је $[0, b]$ кодомен функције f, а $[-b, 0]$ кодомен функције g. $\square$

Напомена 2. Слично поступку примењеном у доказу Теореме 1. доказује се да једначина (3), где је $b > a > 0$, представља елипсу чији фокуси $F_1\left(0, \sqrt{b^2 - a^2}\right)$ и $F_2\left(0, -\sqrt{b^2 - a^2}\right)$ припадају y - оси, (Слика 8.)

Напомена 3. У Теореми 1., уз наведене услове, фокуси елипсе могу да буду, на пример, тачке $F_1\left(p - c, q\right)$ и $F_2\left(p + c, q\right)$. Тада једначина елипсе гласи

$$b^2\left(x - p\right)^2 + a^2\left(y - q\right)^2 = a^2 b^2, \tag{3'}$$

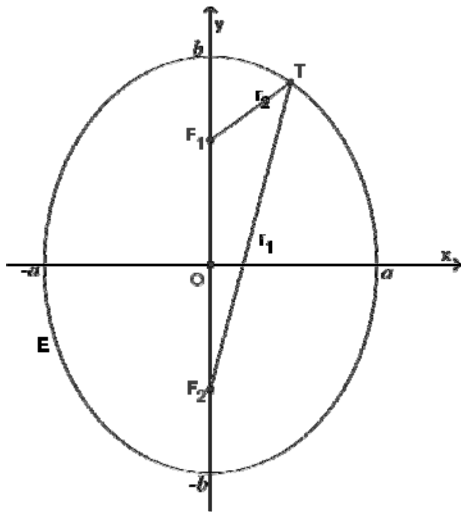
или у канонском облику

$$\frac{\left(x - p\right)^2}{a^2} + \frac{\left(y - q\right)^2}{b^2} = 1. \tag{4'}$$

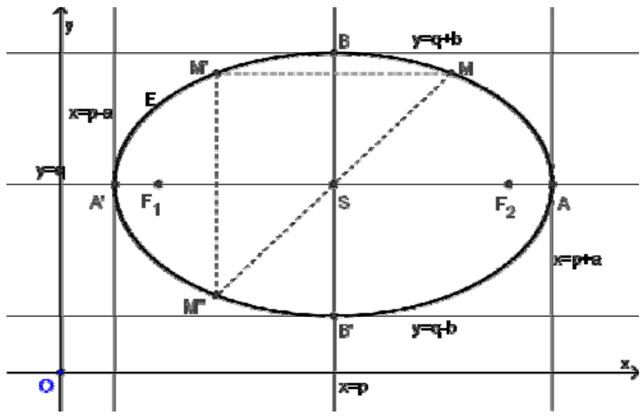
Тада су (Слика 9.) осе симетрије елипсе праве: $x = p$ и $y = q$, а центар симетрије елипсе тачка $S\left(p, q\right)$.

Темена елипсе $A(p+a,q)$ и $A'(p-a,q)$, су на главној оси, а $B(p,q+b)$ и $B'(p,q-b)$, на споредној оси, док је елипса уписана у правоугаоник, чије странице
припадају правама

$$x=p+a\,,\ x=p-a\,,\ y=q+b\,,\ y=q-b\,.$$



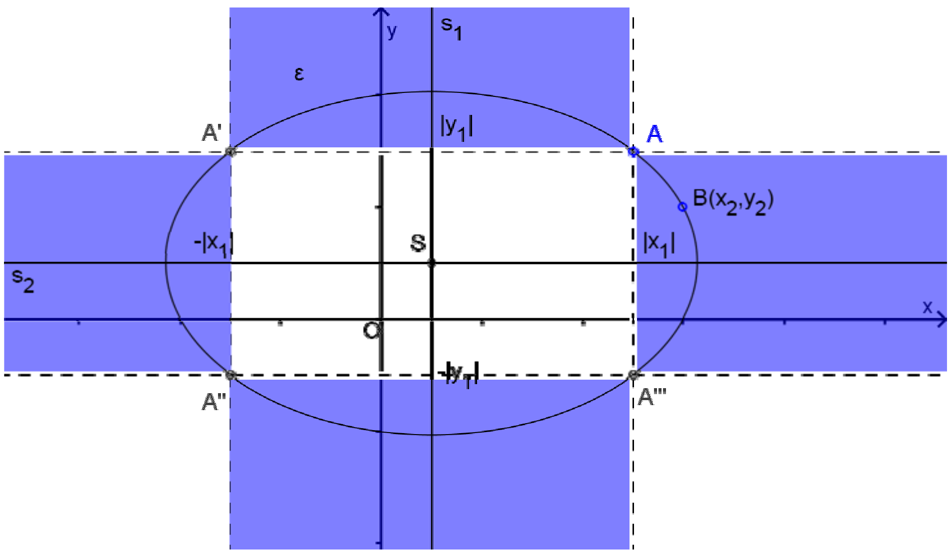
Слика 8.



Слика 9.

Аналогно услову (8) може се извести услов да једначина (4') буде једнозначно одређена, ако су у Декратовом правоуглом координатном систему дате две тачке елипсе $A(x_1,y_1)$ и $B(x_2,y_2)$ и осе симетрије елипсе $x=p$ и $y=q$. Тај услов гласи:

$$(x_2,y_2)\in\Big(\Big(\big(-\infty,p-|x_1-p|\big)\cup\big(p+|x_1-p|,\infty\big)\Big)\times\big(q-|y_1-q|,q+|y_1-q|\big)\Big)\cup \\ \cup\Big(\big(p-|x_1-p|,p+|x_1-p|\big)\times\Big(\big(-\infty,q-|y_1-q|\big)\cup\big(q+|y_1-q|,\infty\big)\Big)\Big). \tag{8'}$$



Слика 10.

Геометријски, услов (8') значи: ако су у Декратовом правоуглом координатном систему дате тачке $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$, при чему су A' и A''', редом, симетричне слике тачке A, у односу на праве $y = q$ и $x = p$, а A'' симетрична слика тачке A, у односу на тачку $S(p, q)$, и ако тачка B припада шрафираној фигури на Слици 10., онда дате тачке A и B, једнозначно одређују елипсу (4').

Активирањем, редом, апликација 4.2.8.a.ggb, 4.2.8.b.ggb и 4.2.8.ggb, у програму GeoGebra, може се добити визуелна интерпретација претходних разматрања. □

4.2.3. Ексцентрицитет, директрисе и параметар елипсе

1. Ексцентрицитет. У Дефиницији 1. елипсе, уводи се величина $c \in \mathbb{R}^+ \bigcup \{0\}$, која се назива **линеарни ексцентрицитет**. Количник $e = \dfrac{c}{a}$ зове се **нумерички ексцентрицитет**. Како је $0 \le c < a$, јасно је да за нумерички ексцентрицитет елипсе важи

$$0 \le e < 1.$$

Пример 2. Саставити једначину елипсе, која садржи тачку $M(2, -5/3)$, а има нумерички ексцентрицитет $e = 2/3$.

Решење. Нека је тражена једначина елипсе $\mathcal{E}: \alpha x^2 + \beta y^2 = 1$, где је уведено обележавање $\alpha = 1/a^2$ и $\beta = 1/b^2$. Из услова $M \in \mathcal{E}$ следи линеарна једначина

$$36\alpha + 25\beta = 9.$$

На основу дефиниције нумеричког ексцентрицитета је $c = ae$, одакле је

$$a^2e^2 = a^2 - b^2$$

а после дељења са a^2b^2, имамо једначину

$$\alpha + (e^2 - 1)\beta = 0,$$

а после увршћивања ексцентрицитета добија се линеарна једначина

$$9\alpha - 5\beta = 0.$$

Решавањем линеарних једначина по α и β имамо: $\alpha = 1/9$ и $\beta = 1/5$, па је тражена једначина елипсе

$$\mathcal{E}: 5x^2 + 9y^2 = 45$$ □

Геометријски смисао линеарног ексцентрицитета је јасан. Он је једнак половини растојања између фокуса, а смисао нумеричког ексцентрицитета биће разјашњен након следећег разматрања.

2. Директрисе. Нека су две d_1 и d_2, паралелне праве, симетричне у односу на споредну осу елипсе (1), на растојању од осе $\dfrac{a}{e}$, тј. посматрајмо праве (Слика 11.)

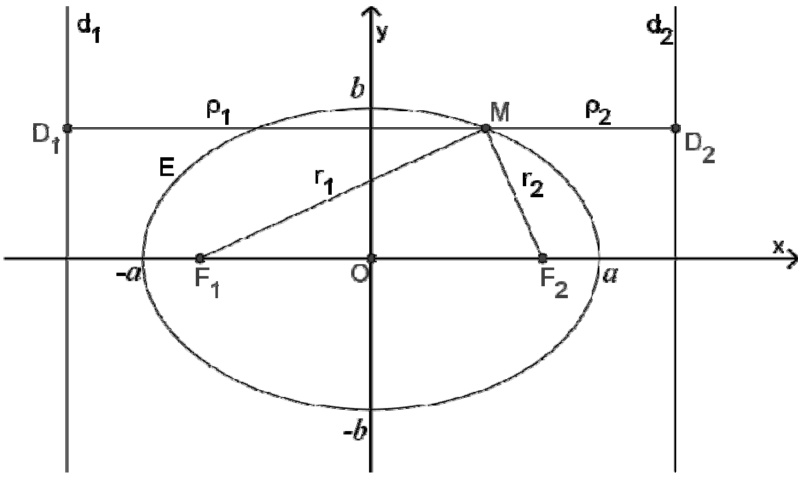
$$d_1 : x = -\frac{a}{e} \text{ и } d_2 : x = \frac{a}{e}.$$

Ове праве зову се **директрисе елипсе**, које одговарају, редом, фокусима F_1 и F_2.

Елипса и њене директрисе имају једно веома значајно својство, о чему говори

Теорема 4. *Нека је дата елипса једначином (4), нека су њени фокуси* $F_1(-c,0)$ *и* $F_2(c,0)$, *а директрисе* $d_1 : x = -\frac{a}{e}$ *и* $d_2 : x = \frac{a}{e}$. *Тада је количник растојања произвољне тачке* M *елипсе од фокуса и растојања од одговарајуће директрисе, једнак нумеричком ексцентрицитету, тј.*

(9) $$\frac{d(M,F_1)}{d(M,d_1)} = \frac{d(M,F_2)}{d(M,d_2)} = e.$$



Слика 11.

Доказ. Нека је $M(x,y)$ произвољна тачка елипсе (Слика 10.), због чега је $-a \le x \le a$. На основу (6) за фокалне радијусе $d(M,F_1)$ и $d(M,F_2)$ важи

(10) $$d(M,F_1) = r_1 = a + ex \text{ и } d(M,F_2) = r_2 = a - ex,$$

а због $-a \le ex \le a$, такође је

$$a + ex \ge 0 \text{ и } a - ex \ge 0.$$

За расојања од тачке M, до директрисе, важи

(11) $$d(M,d_1) = \rho_1 = \left| -\frac{a}{e} - x \right| = \frac{1}{e}|a + ex| = \frac{1}{e}(a + ex)$$

и

(11') $$d(M,d_2) = \rho_2 = \left| \frac{a}{e} - x \right| = \frac{1}{e}|a - ex| = \frac{1}{e}(a - ex).$$

На основу (10), (11) и (11') непосредно следи релација (9) . ■

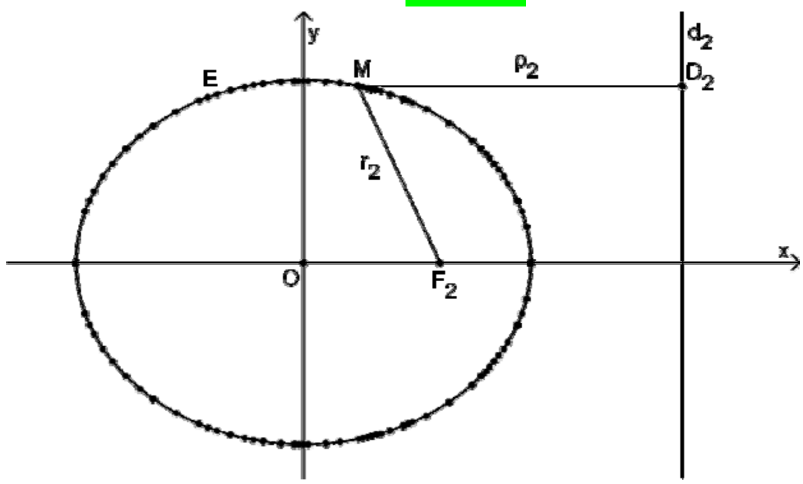
Важи и обрнуто тврђење

Теорема 5. *Нека је* F *дата тачка (фокус),* l *дата права (директриса) и* e *реалан број такав да је* $0 \le e < 1$*. Ако за тачку* M*, равни* α*, одређене датом тачком и датом правом, важи*

(12) $$\frac{d(M,F)}{d(M,l)} = e,$$

онда тачка M *описује елипсу.*

Доказ. Нека су дати реални бројеви a и e, такви да је $a > 0$ и e испуњава услове теореме $0 \le e < 1$. У Декартовом правоуглом координатном систему у равни α, уочимо тачку $F(ae,0)$ и праву $l: x = \frac{a}{e}$ 4.2.9.ggb (Слика 12.).



Слика 12.

Нека је $M(x,y)$ тачка исте равни, за коју важи релација (12), тј. важи

$$\sqrt{(x-ae)^2 + y^2} = e \cdot \left| x - \frac{a}{e} \right|,$$

а после квадрирања

$$x^2 - 2aex + a^2e^2 + y^2 = e^2x^2 - 2aex + a^2.$$

Обележавањем $c = ae$ и скраћивањем, последња једначина добија облик

$$a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 = c^2x^2 + a^4$$

а увођењем $b^2 = a^2 - c^2$, да за координате тачке M, важи

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2,$$

што и јесте једначина елипсе, чија је директриса l и фокус F. Исти резултат се добија и када је $F(-ae,0)$ и праву $l: x = -\frac{a}{e}$. ■

На основу ове две теореме може се исказати следећи потребан и довољан услов, да геометријско место тачака буде елипса, што је друга дефиниција елипсе

Дефиниција 3. Нека су дати тачка F (фокус), права d (директриса) и реалан број e (нумерички ексцентрицитет) такав да је $0 \le e < 1$. Елипса је еометријско место тачака M, равни α, одређене датом тачком и датом правом, са особином да је однос њихових растојања од тачке F и растојања од директрисе d, једнак ексцентрицитету e.

Илустрација дефиниције 2. и анализа наведених особина ексцентрицитета, директрисе и жиже могу се добити кликом на линк 4.2.10.ggb и активирањем апликације GeoGebra.

3. Параметар. Дужина дужи, која је нормална на велику осу и спаја фокус и тачку на елипси зове се **параметар елипсе** и означавамо га са p. Очигледно је да је његова вредност једнака

$$p = f(c) = \frac{b^2}{a},$$

где је $f(x)$ функција, дата у Напомени 1.

Напомена 3. Ако је дата елипса (3'), ексцентрицитет и параметар су исти као и у случају елипсе (3). Међутим, директрисе су

$$d_1 : x = p - \frac{a}{e} \quad \text{и} \quad d_2 : x = p + \frac{a}{e}.$$

Илустрација наведене напомене добија се кликом на линк 4.2.11.ggb и активирањем апликације GeoGebra.

4.2.4. Елипса и права

1. Међусобни однос. Однос елипсе и праве разматрамо решавајући систем, једне квадратне и једне линеарне једначине

$$\begin{aligned} &\mathcal{E}(O,a,b) : b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \\ &l : y = kx + n. \end{aligned} \tag{13}$$

Заменом непознате y из једначине праве у једначину елипсе и сређивањем, добијамо квадратну једначину

$$\left(a^2k^2 + b^2\right)x^2 + 2a^2knx + a^2n^2 - a^2b^2 = 0, \tag{14}$$

чија је дискриминанта

$$D = 4a^4b^2k^2 - 4a^2b^2n^2 + 4a^2b^4 = 4a^2b^2\left(a^2k^2 + b^2 - n^2\right).$$

На основу познате особине, која се односи на дискриминанту и природу решења, квадратне једначине, јасно је да за решења x_1 и x_2, једначине (14) важи:

$$x_1 = \overline{x}_2 \wedge x_1, x_2 \in \mathbb{C} \Leftrightarrow a^2k^2 + b^2 < n^2$$

$$x_1 = x_2 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow a^2k^2 + b^2 = n^2$$

$$x_1 \neq x_2 \wedge x_1, x_2 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow a^2k^2 + b^2 > n^2.$$

Решењима x_1 и x_2 једначине (14),

$$x_1 = \frac{-a^2kn + \sqrt{D}}{a^2k^2 + b^2}, \quad x_2 = \frac{-a^2kn - \sqrt{D}}{a^2k^2 + b^2},$$

одговарају решења

$$y_1 = \frac{b^2 n + k\sqrt{D}}{a^2k^2 + b^2}, \quad y_2 = \frac{b^2 n - k\sqrt{D}}{a^2k^2 + b^2},$$

тако да су парови (x_1, y_1) и (x_2, y_2), решења система (13). Ако су то парови реалних бројева (различити, или једнаки), права и елипса имају заједничке тачке $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$, (различите, или једнаке). Ако су пак, (x_1, y_1) и (x_2, y_2) парови комплексних бројева, права и елипса немају заједничких тачака.

Напред изведени закључци могу се добити кликом на линк 4.2.12.ggb и активирањем апликације GeoGebra, што је и тврђење следеће теореме.

Теорема 6. *За елипсу* $\mathcal{E}(O, a, b)$ *и праву* l*, дате системом једначина (13), важе следећи односи*:

$$\text{права и елипса су дисјунктни скупови} \Leftrightarrow a^2k^2 + b^2 < n^2,$$

(15)
$$\text{права је тангента елипсе} \Leftrightarrow a^2k^2 + b^2 = n^2,$$

$$\text{права је сечица елипсе} \Leftrightarrow a^2k^2 + b^2 > n^2. \qquad \blacksquare$$

2. Тангента у тачки елипсе. Да бисмо саставили једначину тангенте елипсе (3), претпоставимо да она гласи

$$t : y = kx + n.$$

Како је тачка $T(x_0, y_0)$ једина заједничка тачка тангенте и елипсе, то је

$$y_0 = kx_0 + n,$$

а због услова (15), важи

$$x_0 = \frac{-a^2kn}{a^2k^2 + b^2} = \frac{-a^2kn}{n^2} = \frac{-a^2k}{n} \quad \text{и} \quad y_0 = \frac{b^2n}{a^2k^2 + b^2} = \frac{b^2n}{n^2} = \frac{b^2}{n}.$$

Одатле је

$$k = -\frac{b^2x_0}{a^2y_0} \quad \text{и} \quad n = \frac{b^2}{y_0},$$

па једначина тангенте у тачки $T(x_0, y_0)$ елипсе (3),

(16)
$$b^2x_0x + a^2y_0y = a^2b^2.$$

Напомена 3. Тангента криве (кружнице, елипсе, и сл.) у њеној тачки T_0, често се (посебно у вишој математици) посматра као гранични положај сечице $s(T_0, T_1)$, одређене фиксираном тачком T_0 и промењљивом тачком T_1, која крећући се по кривој тежи ка тачки T_0.

Пошто тачке $T_0(x_0, y_0)$ и $T_1(x_1, y_1)$ одређују сечицу елипси (3), једначина сечице гласи

$$s(T_0, T_1) : y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0),$$

а како исте тачке припадају елипси (3), онда важе следеће једнакости

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1 \text{ и } \frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1.$$

Одузимањем прве од друге једнакости, добијамо

$$\frac{(x_1-x_0)(x_1+x_0)}{a^2}+\frac{(y_1-y_0)(y_1+y_0)}{b^2}=0,$$

одакле је

$$\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}=-\frac{b^2}{a^2}\frac{x_0+x_1}{y_0+y_1}.$$

Сада се једначина сечице може записати на следећи начин

(17) $$s(T_0,T_1): y-y_0=-\frac{b^2}{a^2}\frac{x_0+x_1}{y_0+y_1}(x-x_0).$$

Кад се тачка T_1 креће по елипси и тежи ка T_0, тада израз $\frac{x_0+x_1}{y_0+y_1}$ тежи ка $\frac{2x_0}{2y_0}=\frac{x_0}{y_0}$, због чега једначина (16) постаје еквивалентна једначини (17) , тј. сечица елипсе тежи ка тангенти елипсе.

Приказ описаног прелаза сечице у тангенту, добија се кликом на линк 4.2.13.ggb и активирањем апликације GeoGebra. □

3. Тангента из тачке ван елипсе. Поступак за одређивње једначине тангенте елипсе из тачке $T(x_0,y_0)$ која не припада елипси, (припада њеној спољашњости) сличан је поступку налажења једначине тангенте кружнице.

Наиме, ако је $y=kx+n$, једначина тражене тангенте елипсе (13), онда су испуњени следећи услови

$$a^2k^2+b^2=n^2 \quad \text{и} \quad y_0=kx_0+n,$$

одакле после елиминације n, за $x_0\neq\pm a$ важи

(17) $$\left(a^2-x_0^2\right)k^2+2x_0y_0k+b^2-y_0^2=0$$

тј.

$$k_{1,2}=\frac{-x_0y_0\pm\sqrt{b^2x_0^2+a^2y_0^2-a^2b^2}}{a^2-x_0^2}.$$

Како тачка $T(x_0,y_0)$ припада спољашњости елипсе, тј. $b^2x_0^2+a^2y_0^2-a^2b^2>0$, то постоје две различите реалне вредности за k, тј. $k_1\neq k_2$, што значи да постоје и две различите тангенте

$$t_1: y-y_0=k_1(x-x_0) \text{ и } t_2: y-y_0=k_2(x-x_0),$$

из тачке $T(x_0,y_0)$, спољашњости елипсе.

Ако је $a^2-x_0^2=0$, тј. $x_0=\pm a$, из услова $T\notin \mathrm{E}$ следи $y_0\neq 0$, па је једначина (17) линеарна и има једно решење

$$k = \frac{y_0^2 - b^2}{2x_0 y_0},$$

а једначине тангенти су

$$t_1 : y - y_0 = k\left(x - x_0\right) \text{ и } t_2 : x = x_0 .$$

Овај поступак налажења тангенте елипсе, реализује се активирањем, редом, апликација (4.2.14.a.ggb), (4.2.14.b.ggb) и (4.2.14.ggb), у програму GeoGebra, кликом на одговарајући линк.

У последњој апликацији решава се и први део следећег задатка, а решење другог дела добија се кликом на линк (4.2.14.c.ggb), активирањем апликације GeoGebra.

Пример 3. Дата је елипса $9x^2 + 16y^2 = 144$. Саставити једначине тангенти елипсе: а) из тачке $A(7,2)$, б) које су нормалне на праву $a : 2x - 5y + 10 = 0$.

Решење. а) Ако је права $y = kx + n$ тражена тангента (Слика 13.), онда су испуњени следећи услови

$$16k^2 + 9 = n^2 \text{ и } 7k + n = 2,$$

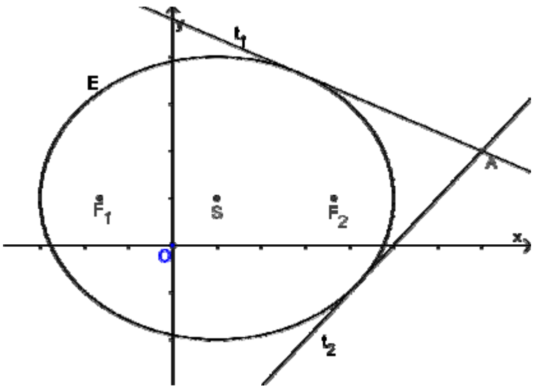
одакле је

$$k_1 = -5/33, \quad n_1 = 101/33 \text{ и } k_2 = 1, \quad n_2 = -5 .$$

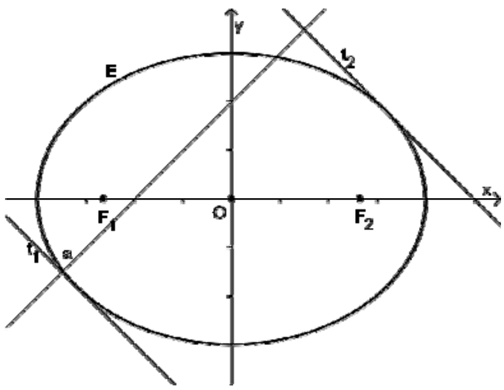
Једначине тангенти су

$$t_1 : 5x + 33y - 101 = 0 \quad \text{и} \quad t_2 : y = x - 5 .$$

б) Права $y = kx + n$ је тангента дате елисе (Слика 14.), ако је $16k^2 + 9 = n^2$, а на основу услова нормалности тангенте и дате праве имамо $k = -5/2$.



Слика 13.



Слика 14.

Тада је $n_{1,2} = \pm\sqrt{109}$, а тангенте су

$$t_1 : y = -\frac{5}{2}x + \sqrt{109} \quad \text{и} \quad t_2 : y = -\frac{5}{2}x - \sqrt{109} . \qquad \square$$

Напомена 4. Слично напред наведеном поступку, може се доказати да за елипсу $\mathcal{E} : b^2\left(x - p\right)^2 + a^2\left(y - q\right)^2 = a^2b^2$ и праву $l : y = kx + n$, важе следећи односи:

- права и елипса су дисјунктни скупови $\Leftrightarrow a^2k^2 + b^2 < \left(kp - q + n\right)^2$,
- права је тангента елипсе $\Leftrightarrow a^2k^2 + b^2 = \left(kp - q + n\right)^2$,

– права је сечица елипсе $\Leftrightarrow a^2k^2+b^2>\left(kp-q+n\right)^2$.

Једначина тангенте у тачки $T\left(x_0,y_0\right)$ дате елипсе тада гласи

(18) $$b^2\left(x_0-p\right)\left(x-p\right)+a^2\left(y_0-q\right)\left(y-q\right)=a^2b^2.$$

Илустрација поступка налажења тангенте дате елипсе, може се добити активирањем, редом, апликација (4.2.15.a.ggb), (4.2.15.b.ggb) и (4.2.15.ggb), у програму GeoGebra, кликом на одговарајући линк. □

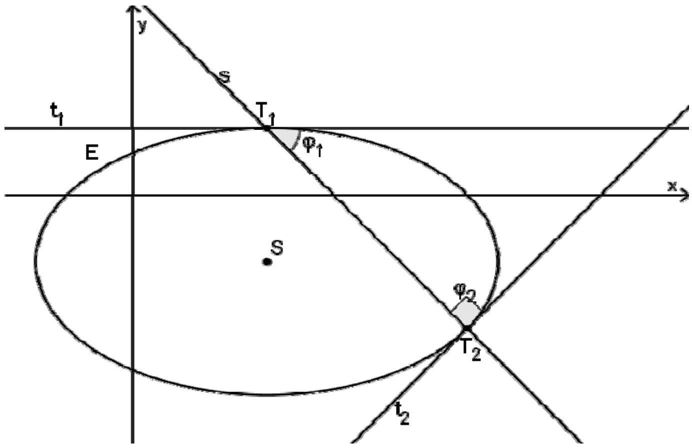
4. Угао између праве и елипсе. Ако права сече елипсу, онда се под угломизмеђу праве и елипсе, подразумева угао између праве и тангенте елипсе у пресечној тачки. Очигледно је да је угао између тангенте и елипсе једнак 0 (нула).

Познато је да су углови између сечице и тангенти у пресечним тачкама подударни једино кад су пресечне тачке (значи и сама сечица), и у њима тангенте, симетричне у односу на осу, или центар симетрије елипсе. То значи да се при решавању овог проблема, угао између сечице и тангенте мора одредити у свакој пресечној тачки посебно, изузимајући случај када је сечица елипсе осно сометрична у односу на једну од оса, или у односу на центар симетрије елипсе.

Пример 4. Одредити углове пресека елипсе и праве:

а) $\mathcal{E}:\left(x-2\right)^2+3\left(y+1\right)^2=12$, $s:x+y-3=0$; б) $\mathcal{E}:x^2+3y^2=12$, $s:x+y=0$.

Решење. а) Тангенте t_1 и t_2 у пресечним тачкама $T_1\left(2,1\right)$ и $T_2\left(5,-2\right)$, редом имају једначине: $t_1:y=1$ и $t_2:y=x-7$, а углови које оне образују са сечицом s су $\varphi_1=45°$ и $\varphi_2=90°$, редом (Слика 15).



Слика 15.

б) Сечица s садржи центар елипсе, што значи да су сечица, пресечне тачке и тангенте у пресечним тачкама симетричне у односу на центар елипсе $S\left(0,0\right)$. Зато су и углови пресека елипсе и сечице подударни. Тангенте t_1 и t_2 у пресечним тачкама $T_1\left(-\sqrt{3},\sqrt{3}\right)$ и $T_2\left(\sqrt{3},-\sqrt{3}\right)$, редом имају једначине: $t_1:-\sqrt{3}x+3\sqrt{3}y=12$ и $t_2:\sqrt{3}x-3\sqrt{3}y=12$, а углови које оне образују са сечицом s су $\varphi_1=\varphi_2=\operatorname{arctg}2$.

Решења и резултати задатка а) и б), као и решења задатака за друге могуће односе праве и елипсе, могу се добити кликом на линк 4.2.16.ggb и активирањем апликације GeoGebra. □

4.2.5. Дијаметри елипсе

Излагање које следи, засновано је на једном значајном својству међусобно паралелних тетива елипсе, на колинеарности њихових средина. У следећој теореми доказује се то својство и анализирају се особине праве која те средине садржи, а видећемо у каснијим излагањима да и остале криве другог реда карактришу сличне особине.

Теорема 7. *Средине паралелних тетива елипсе* $\mathcal{E}(O,a,b)$*, колинеарне су.*

Доказ. Нека је дата елипса $\mathcal{E}(O,a,b): b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ и **константа** $k\in\mathbb{R}$. Тада у скупу свих паралелних правих

$$y=kx+n,$$

за неке вредности параметра $n\in\mathbb{R}$, постоји подскуп, који чине (паралелне) сечице дате елипсе. Приметимо да за $n=0$, права

(19) $$l: x=kx$$

садржи центар елипсе.

На сечицама поменутог скупа, дата елипса одсеца одговарајуће паралелне тетиве. Поступајући као у тачки 4., са циљем одређивања пресечних тачака $M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)$, елипсе $\mathcal{E}(O,a,b)$ и неке од паралелних сечица датог скупа, (крајњих тачака једне од наведених тетива) добијамо једначину (14), из које следи:

$$x_1+x_2=-\frac{2a^2kn}{a^2k^2+b^2}.$$

Ако је $M_0(x_0,y_0)$ средина тетиве M_1M_2, онда је

$$x_0=-\frac{a^2kn}{a^2k^2+b^2} \quad \text{и} \quad y_0=kx_0+n=-\frac{a^2k^2n}{a^2k^2+b^2}+n=\frac{b^2n}{a^2k^2+b^2}.$$

Елиминишући n из последње две једначине, имамо

$$y_0=-\frac{b^2}{a^2k}x_0,$$

што значи да средине M_0 свих тетива, одређених елипсом $\mathcal{E}(O,a,b)$ и сечицама $y=kx+n$, припадају једној правој

(20) $$l': y=-\frac{b^2}{a^2k}x,$$

која садржи центар елипсе. Ако су сечице паралелне са y- осом (тада $k\notin\mathbb{R}$), јасно је да, због симетричности елипсе у односу x- осу, средине одговарајућих тетива припадају оси симетрије елипсе, x- оси. ■

Илустрација изведених закључака може се добити кликом на линк 4.2.17.ggb и активирањем апликације GeoGebra, што је и тврђење претходне теореме.

Дефиниција Права одређена серединама паралелних тетива елипсе зове се дијаметар.

Из доказа теореме видимо, да за коефицијенте правца: k - дијаметра l и k' - дијаметра l', елипсе $\mathcal{E}(O,a,b)$ важи следећа релација

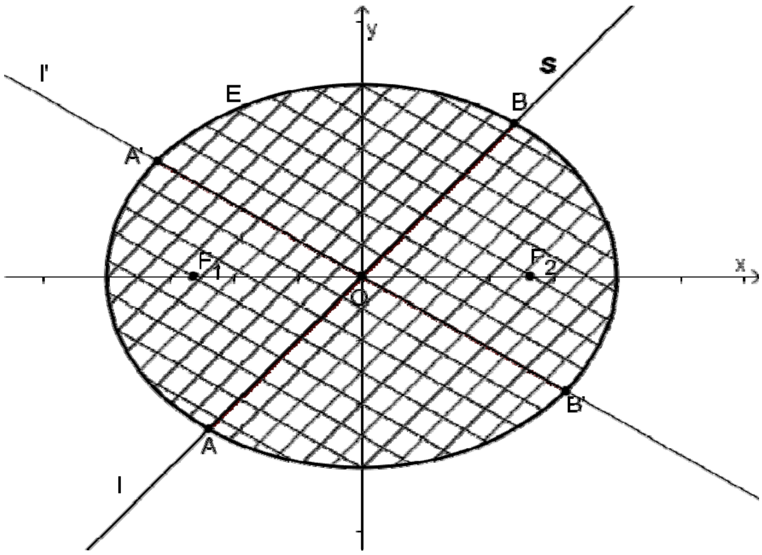
(21) $$kk' = -\frac{b^2}{a^2},$$

симетрична у односу на k и k'. **Тада за дијаметре l и l' кажемо да су (узајамно) коњуговани дијаметри.**

Узајамност коњугованих дијаметара одређена је у следећој дефиницији.

Дефиниција 4. За два дијаметра елипсе кажемо да су (узајамно) коњуговани, ако сваки од њих полови тетиве елипсе паралелне оном другом дијаметру (Слика 16.).

Сада смо у прилици да докажемо једну веома значајну особину тангенте елипсе.



Слика 16.

Теорема 8. Права је тангента елипсе, ако и само ако је паралелна дијаметру елипсе, који је коњугован са дијаметром који садржи тачку додира.

Доказ. Нека је $T(x_0, y_0)$ тачка елипсе $\mathcal{E}(O,a,b): b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. Тада је $l: y = \frac{y_0}{x_0}x$ дијаметар елипсе који садржи тачку додира T, а њему коњуговани дијаметар је права $l': y = -\frac{b^2x_0}{a^2y_0}x$. Једначина праве која садржи тачку додира T, а паралелна је дијаметру l' елипсе, гласи

$$y - y_0 = -\frac{b^2x_0}{a^2y_0}(x - x_0),$$

што после сређивања даје тангенту елипсе у тачки T :

$$t : b^2 x_0 x + a^2 y_0 y = a^2 b^2 .$$

Обрнуто, тангента

$$t : y = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0} x + \frac{b^2}{y_0}$$

у тачки $T(x_0, y_0)$ елипсе $\mathcal{E}(O,a,b)$, паралелна је са дијаметром

$$l' : y = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0} x$$

који је коњугован дијаметру

$$l : y = \frac{y_0}{x_0} x . \qquad \blacksquare$$

Доказани потребани довољан услов представља дефиницију тангенте елипсе. Њен приказ се може добити кликом на линк 4.2.18.ggb и активирањем апликације GeoGebra.

Напомена 5. Приметимо на крају, ако је $a = b$, онда је

$$\mathcal{E}(O,a,b) = \mathcal{K}(O,a),$$

тј. ако је елипса кружница са центром $O(0,0)$ и полупречником a, тада **услов коњугованости дијаметара елипсе** (21), постаје **услов нормалности дијаметара кружнице**

$$kk' = -1 . \qquad \square$$

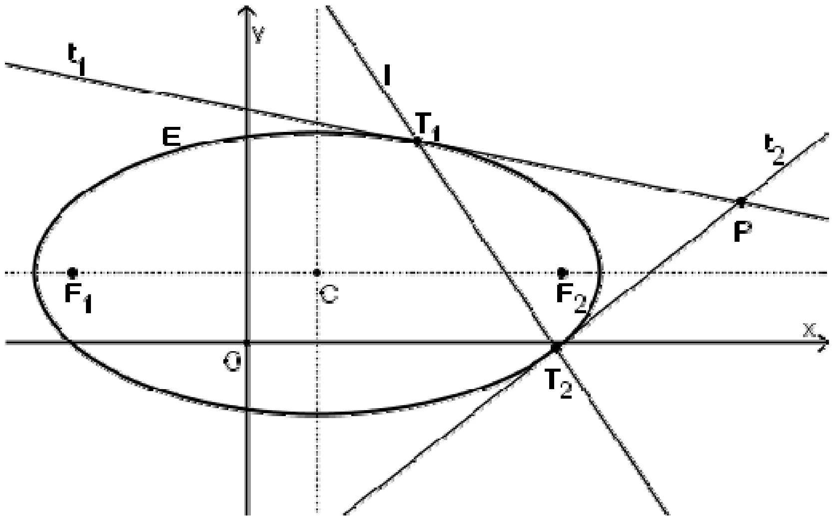
4.2.6. Полара и пол у односу на елипсу

Нека су дате: елипса $\mathcal{E}(O,a,b) : b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$, тачка $P(x_0, y_0)$ у њеној спољашњој области и тангенте t_1 и t_2 из тачке P на елипсу 4.2.19.ggb (Слика 17. а.). Ако су $T_1(x_1, y_1)$ и $T_2(x_2, y_2)$ додирне тачке тангенти и елипсе, онда су њихове једначине

$$t_1 : b^2 x_1 x + a^2 y_1 y = a^2 b^2 \quad \text{и} \quad t_2 : b^2 x_2 x + a^2 y_2 y = a^2 b^2 ,$$

а из услова $P \in t_1$ и $P \in t_2$, следи

$$b^2 x_1 x_0 + a^2 y_1 y_0 = a^2 b^2 \quad \text{и} \quad b^2 x_2 x_0 + a^2 y_2 y_0 = a^2 b^2 .$$



Слика 17. а.

На основу последње две једнакости закључујемо да права

$$l: b^2x_0x + a^2y_0y = a^2b^2$$

садржи тачке додира T_1 и T_2, тј. права $l = p(T_1, T_2)$ је сечица елипсе $\mathcal{E}$.

Сечица l, одређена додирним тачкама тангенти елипсе из тачке P, зове се **полара тачке (пола)** P, **у односу на елипсу** $\mathcal{E}$.

Сада доказујемо да и тачки унутрашње области елипсе одговара полара у односу на ту елипсу. У ту сврху уочимо тачку $P(x_0, y_0)$ унутрашње области елипсе $\mathcal{E}$, различиту од центра елипсе, дијаметар елипсе $l: y_0x - x_0y = 0$, који је садржи, и у тачки P њему коњуговану сечицу елипсе

$$s: b^2x_0(x - x_0) + a^2y_0(y - y_0) = 0.$$

Тангенте t_1 и t_2, у пресечним тачкама T_1 и T_2, сечице и елипсе секу њен дијаметар l у тачки $P'(x', y')$, где је

$$x' = \frac{a^2b^2x_0}{b^2x_0^2 + a^2y_0^2} \quad \text{и} \quad y' = \frac{a^2b^2y_0}{b^2x_0^2 + a^2y_0^2}.$$

Услов $b^2x_0^2 + a^2y_0^2 < a^2b^2$, да је $P(x_0, y_0)$ тачка унутрашњости елипсе $\mathcal{E}$, повлачи

$$b^2x'^2 + a^2y'^2 = \left(\frac{a^2b^2}{b^2x_0^2 + a^2y_0^2}\right)^2 \left(b^2x_0^2 + a^2y_0^2\right) = \frac{a^2b^2}{b^2x_0^2 + a^2y_0^2}a^2b^2 > a^2b^2,$$

што значи да је $P'(x', y')$ тачка спољашње области елипсе $\mathcal{E}$.

Права p, паралелна сечици s (или дијаметру, коњугованом дијаметру l), која садржи тачку P' чија је једначина

$$p: b^2x_0(x - x') + a^2y_0(y - y') = 0,$$

или

(22) $$p: b^2x_0x + a^2y_0y = a^2b^2,$$

је полара пола $P(x_0, y_0)$, у односу на елипсу $\mathcal{E}$, што је и требало да се докаже. Очигледно је да за $(x_0, y_0) = (0,0)$ тачка $P'(x', y')$ и права p, не постоје.

На основу изведених закључака, увешћемо следећу аналитичку дефиницију

Дефиниција 5. Нека је $\mathcal{E}(S, a, b)$ елипса са центром $S(p, q)$ и $P(x_0, y_0)$ тачка у њеној равни, различита од центра елипсе. Права

$$p : b^2(x_0 - p)(x - p) + a^2(y_0 - q)(y - q) = a^2b^2$$

зове се **полара тачке (пола)** P, у односу на елипсу $\mathcal{E}(S, a, b)$.

Непосредне последице ове дефиниције јесу следећа тврђења, о односу тангенте и елипсе и о односу фокуса и директрисе

Теорема 9. *Полара тачке елипсе је тангента елипсе у тој тачки.*

Теорема 10. *Полара фокуса елипсе је одговарајућа директриса.*

Из претходног излагања види се да за сваку тачку, различиту од центра елипсе, постоји полара, у односу на ту елипсу.

Обрнуто, нека је $p : Ax + By + C = 0$ произвољна права и $\mathcal{E} : b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, елипса. Да би права p била полара неке тачке $P(x_0, y_0)$, у односу на елипсу $\mathcal{E}$, једначине

$$Ax + By + C = 0 \quad \text{и} \quad b^2x_0x + a^2y_0y = a^2b^2,$$

треба да представљају исту праву, тј. треба да важи

$$\frac{b^2x_0}{A} = \frac{a^2y_0}{B} = -\frac{a^2b^2}{C},$$

одакле је

$$x_0 = -\frac{a^2A}{C} \quad \text{и} \quad y_0 = -\frac{b^2B}{C},$$

где је $C \neq 0$, што значи да права p не садржи центар елипсе, а такође коефицијенти A и B нису истовремено једнаки нули, јер $(x_0, y_0) \neq (0,0)$.

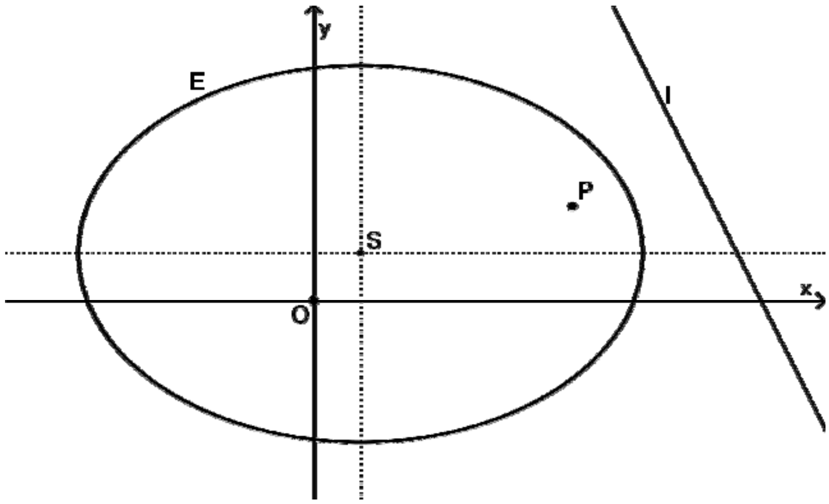
Овим је доказано да за сваку тачку, различиту од центра елипсе, постоји у равни елипсе полара, у односу на елипсу, и за сваку праву, која не садржи центар елипсе, тј. није дијаметар, постоји у равни елипсе пол, у односу на елипсу.

Пример 5. Одредити координате пола P, поларе $p : 2x + y - 16 = 0$, у односу на елипсу $\mathcal{E} : 4x^2 + 9y^2 = 144$.

Решење. Пошто је $p : 4x_0x + 9y_0y = 144$ једначина поларе, пола $P(x_0, y_0)$, у односу на дату елипсу, онда важи следећа пропорција

$$\frac{4x_0}{2} = \frac{9y_0}{1} = 9,$$

одакле је $x_0 = 4.5$ и $y_0 = 1$. Тачка $P(4.5, 1)$ је пол праве p, 4.2.20.ggb (Слика 17.).



Слика 17. □

Пример 6. Тангента кружнице $\mathcal{K}: x^2+y^2=r^2$, истовремено је полара пола P, у односу на елипсу $\mathcal{E}: b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$. Наћи геометријско место полова P. Специјално: $r=5$, $a=5$, $b=3$.

Решење. Полара p, пола $P(x_0,y_0)$, у односу на дату елипсу има једначину $p: b^2x_0x+a^2y_0y=a^2b^2$, а тангента t, дате кружнице у њеној тачки $T(x_1,y_1)$ има једначину $t: x_1x+y_1y=r^2$. Како је, по услову задатка, тангента кружнице у тачки T, истовремено полара пола P, тј. $t=p$, онда је

$$\frac{x_1}{b^2x_0}=\frac{y_1}{a^2y_0}=\frac{r^2}{a^2b^2}=\lambda,$$

одакле је

$$x_1=\frac{r^2}{a^2}x_0 \quad \text{и} \quad y_1=\frac{r^2}{b^2}y_0.$$

Коначно, из услова $T\in\mathcal{K}$, тј. $x_1^2+y_1^2=r^2$, за координате x_0 и y_0, пола P, важи

$$\frac{x_0^2}{\left(a^2/r\right)^2}+\frac{y_0^2}{\left(b^2/r\right)^2}=1,$$

што значи да пол P описује елипсу, са центром $O(0,0)$ и полуосама a^2/r и b^2/r.

У специјалном случају, пол P тангенте кружнице $\mathcal{K}$, која је истовремено полара, у односу на елипсу $\mathcal{E}$, описује елипсу

$$81x^2+625y^2=2025.$$

Илустрација примера и решење специјалног случаја, може се добити кликом на линк 4.2.21.ggb и активирањем апликације GeoGebra. □

4.2.7. Оптичко својство елипсе

Под оптичким својством елипсе, подразумева се својство елипсе на коме се заснива одбијање светлости. Наиме, ако се извор светлости налази у једном фокусу елиптичког огледала, онда његови светлосни зраци, одбијајући се од огледала, пролазе кроз други фокус. Ово важно својство регулише следећа теорема

Теорема 11. *Тангента у тачки* M *елипсе* (4)*, са жижама* F_1 *и* F_2*, образује једнаке углове са фокалним радијусима* F_1M *и* F_2M *и припада спољашњости угла* $\measuredangle F_1MF_2$.

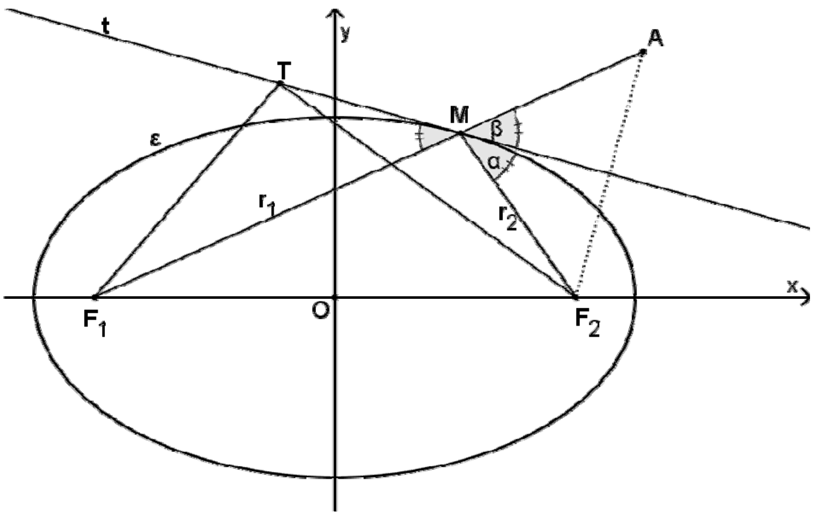
Доказ. Нека је t тангента у тачки M елипсе са великом осом $2a$ и жижама F_1 и F_2, и нека је тачка A, симетрична жижи F_2, у односу на тангенту t, (Слика 18.), због чега је $d(M,A)=d(M,F_2)$. Одатле следи једнакост

$$d(M,F_1)+d(M,A)=d(M,F_1)+d(M,F_2)=2a\ .$$

Пошто је произвољна тачка $T\in t$, $T\neq M$, тачка спољашње области елипсе, то на основу Теореме 2. важи

$$d(T,F_1)+d(T,F_2)>2a\,.$$

То значи да је збир $d(M,F_1)+d(M,A)$ минималан, а одатле следи да су тачке F_1, M и A, три различите колинеарне тачке, тј. $M\in p(F_1,A)$.



Слика 18.

С друге стране, тангента t је симетрала угла $\measuredangle AMF_2$, спољашњег угла троугла ΔF_1F_2M. Одатле непосредно следи да су углови које тангента t образује са фокалним радијусима F_1M и F_2M подударни, јер су оба подударни углу, који тангента образује са краком MA, троугла ΔF_2AM. ■

Илустрација описаног оптичког својства, може се добити кликом на линк 4.2.22.ggb и активирањем апликације GeoGebra.

Пример 7. Нека је дата кружница $k: x^2 + y^2 = a^2$ и тачке $F_1(-c,0)$ и $F_2(c,0)$, где је $a > c > 0$. Ако је N произвољна тачка кружнице, права $t \perp p(F_2, N)$ и тачка T симетрична тачки F_1, у односу на тачку N, одредити геометријско место пресечних тачака M, правих t и $p(F_1, T)$.

Решење. За координате тачке $N(x_1, y_1) \in k$ важи $x_1^2 + y_1^2 = a^2$, а пошто је $T = \sigma_N(F_2)$, онда је $T(2x_1 - c, 2y_1)$. Из услова нормалности $t \perp p(F_2, N)$, за $y_1 \neq 0$, следи

$$t: y - y_1 = \frac{c - x_1}{y_1}(x - x_1),$$

а за $x_1 \neq 0$, права $p(F_1, T) = d$, дата је једначином

$$d: y = \frac{y_1}{x_1}(x + c).$$

Праве t и d секу се у тачки $M(x, y)$, због чега важи

$$\frac{c - x_1}{y_1}(x - x_1) + y_1 = \frac{y_1}{x_1}(x + c),$$

одакле, после множења са $x_1 y_1$ и коришћења услова $x_1^2 + y_1^2 = a^2$, имамо

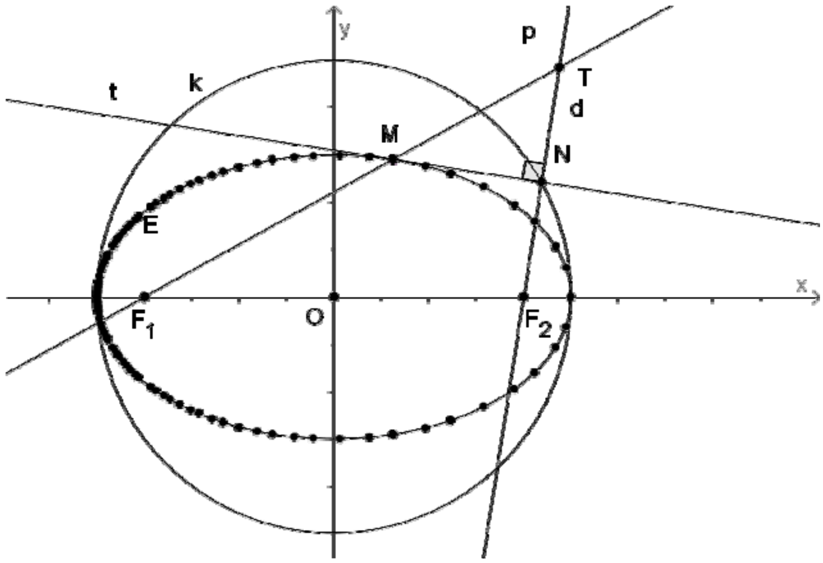
$$x_1 = \frac{a^2 x + a^2 c}{a^2 + cx}, \quad y_1 = \frac{a^2 y}{a^2 + cx}.$$

Из услова $N(x_1, y_1) \in k$ следи

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2 y^2 = a^2(a^2 - c^2), \tag{23}$$

што је централна елипса са великом осом $2a$ и жижама $F_1(c,0)$ и $F_2(-c,0)$, а то је тражено геометријско место тачака (Слика 19).

Ако је $y_1 = 0$, онда је $x_1 = \pm a$, тангента $t: x = \pm a$, а тачка $M_1(-a, 0)$, односно $M_2(a, 0)$, пресека правих t и d, припада елипси (23).



Слика 19.

Ако је $x_1 = 0$, онда је $y_1 = \pm a$, права $d : x = -c$, а тачка $M_1\left(0, \left(a^2 - c^2\right)/a\right)$, односно $M_2\left(0, -\left(a^2 - c^2\right)/a\right)$, пресека правих t и d, припада елипси (23).

Обрнуто, ако координате тачке $M\left(x, y\right)$ задовољавају једначину (23) елипсе и ако је права

$$t : y = kx + n$$

тангента елипсе у тачки M, која је истовремено (Теорема 11.) симетрала спољашњег угла код темена M, троугла ΔF_1F_2M, тада важи услов (да је права t тангента елипсе)

$$a^2k^2 + \left(a^2 - c^2\right) = n^2.$$

Нормала p из тачке F_2, на праву t, дата је са

$$p : y = -\frac{1}{k}\left(x - c\right),$$

а за координате подножја N нормале важи

$$x_1 = \frac{kn - c}{k^2 + 1} \quad \text{и} \quad y_1 = \frac{ck + n}{k^2 + 1}.$$

Користећи услов да је права t тангента елипсе (23), имамо

$$x_1^2 + y_1^2 = \left(\frac{kn - c}{k^2 + 1}\right)^2 + \left(\frac{ck + n}{k^2 + 1}\right)^2 = \frac{k^2n^2 + c^2 + c^2k^2 + n^2}{\left(k^2 + 1\right)^2} = \frac{\left(c^2 + n^2\right)\left(k^2 + 1\right)}{\left(k^2 + 1\right)^2}$$

$$= \frac{c^2 + a^2k^2 + a^2 - c^2}{k^2 + 1} = \frac{a^2\left(k^2 + 1\right)}{k^2 + 1} = a^2,$$

што значи да заједничка тачка $N\left(x_1, y_1\right)$ тангенте t и њене нормале p, припада кружници k, чиме је доказано тврђење.

Илустрација примера и конструкција елипсе, може се добити кликом на линк 4.2.23.ggb и активирањем апликације GeoGebra. □

Оптичко својство криве другог реда открио је познати старогрчки математичар Аполоније, уз Еуклида и Архимеда, најзначајнији представник Александријске школе, у периоду 210. – 200. г. пре н. ере, написао је фундаментално дело "Коника", [22].

4.2.8. Задаци

1. Одреди једначину елипсе која садржи тачке: 1.ggb
   а) $A(4,-2)$ и $B(\sqrt{6},3)$
   б) $A(9,4)$ и $B(12,3)$.
2. Одреди једначину елипсе ако растојања од жижа до крајњих тачака велике осе елипсе износе 1 и 7. 2.ggb
3. Одредити једначину елипсе чије жиже и једно теме, представљају темена једнакостраничног троугла површине $9\sqrt{3}$.
4. Одредити a, b, e и нацртати елипсу, чија је једначина: а) $9x^2+25y^2=225$, б) $x^2+36y^2=9$, в) $18x^2+4y^2=81$. 4.ggb
5. Нека тачка $M(8,q)$, $q>0$, припада елипси $9x^2+25y^2=900$, чије су жиже F_1 и F_2. Наћи једначине правих F_1M и F_2M, а затим дужине дужи F_1M и F_2M, као и угао који те праве образују. 5.ggb
6. Израчунати површину четвороугла чија два темена леже у жижама елипсе $x^2+5y^2=20$, а друга два се поклапају са крајевима мале полуосе. 6.ggb
7. Одреди тачке елипсе $9x^2+25y^2=900$ чија су растојања од десне жиже једнака 14. 7.ggb
8. Кроз жижу елипсе $x^2/25+y^2/15=1$ постављена је нормала на велику осу. Одредити растојања од жиже до пресечне тачке нормале са елипсом. 8.ggb
9. Наћи ексцентрицитет и једначине директриса елипсе $9x^2+5y^2=45$. 9.ggb
10. Одредити ексцентрицитет елипсе ако се њена мала оса види из жиже под углом од 60^0. 10.ggb
11. Праве $x=\pm 8$ су директрисе елипсе чија је мала полуоса једнака 4. Наћи једначину елипсе.
12. Дата је жижа елипсе $F(-2,0)$ и њен ексцентрицитет $e=1/3$. Одредити растојање тачке $M(2,y)$ те елипсе, од директрисе која је са исте стране координатног почетка као и жижа.
13. Дата је тачка $M(2,-3/5)$ елипсе, са ексцентрицитетом $e=2/3$. Наћи једначину елипсе. 13.ggb

14. Доказати да тачке $P\left(a\frac{1-t^2}{1+t^2}, b\frac{2t}{1+t^2}\right)$ и $Q(a\cos t, b\sin t)$ припадају елипси $\varepsilon: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, за сваки реалан број t. 14.ggb
15. Одреди осну једначину елипсе чији параметар је $9/4$ и мала оса 3.
16. Саставити једначине тангенти криве: $9x^2+16y^2+18x-32y=11$ нормалних на праву $x+2y=4$, 16.ggb
17. Одреди једначине тангенти елипсе $3x^2+4y^2=48$, паралелних правој $3x-2y+18=0$. 17.ggb
18. Саставити једначине тангенти елипсе: $9x^2+16y^2=144$ из тачке $A(6,1)$, 18.ggb
19. Одреди тангенте на елипсу $3x^2+4y^2=48$ из тачке $T(4,2)$. 19.ggb
20. Одредити угао под којим се види елипса $\frac{x^2}{32}+\frac{y^2}{18}=1$ из тачке $P(12,-3)$? 20.ggb
21. У тачкама M_1 и M_2 елипсе повучене су тангнете које се секу у тачки P. Доказати да тачка P припада дијаметру који полови тетиву M_1M_2.
22. Одредити тангенту из тачке $P(1,1/2)$ у односу на криву другог реда $2x^2-3x+4y^2-8y-1=0$ 18.ggb
23. Одредити једнаћине заједничких тангенти елипсе $4x^2+9y^2=36$ и кружнице $x^2+y^2=5$. 23.ggb
24. Око елипсе $x^2+8y^2=72$ описан је једнакокраки трапез са основицом паралелном великој оси и оштрим углом $\pi/4$. Одредити: а) једначине страница, б) координате темена, в) површину трапеза. 24.ggb
25. Решити неједначине: 25.ggb

    а) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}\le 1$,

    б) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}>1$,

    в) $1\le\frac{x^2}{9}+y^2\le 9$, 3.2.6.nb

    г) $4x^2-4x+9y^2+6y+1<0$,

    д) $\sqrt{(x-1)^2+y^2}+\sqrt{(x+1)^2+y^2}<6$,

    е) $\sqrt{x^2+(y-1)^2}+\sqrt{x^2+(y+1)^2}>4$.
26. Саставити једначину елипсе чије су тангент дате праве $x+4y=25$ $4x+9y=75$. 26.ggb

4.3. ХИПЕРБОЛА

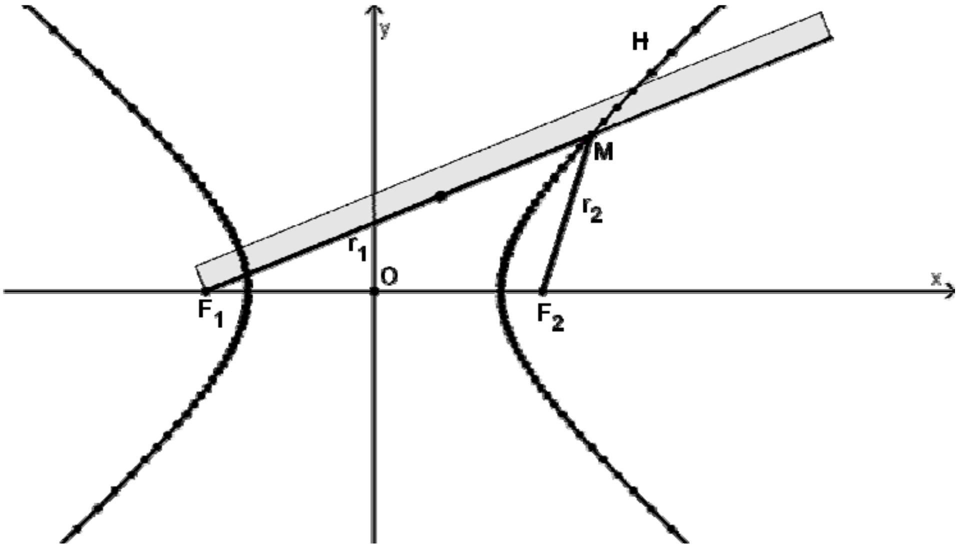
4.3.1. Дефиниција, конструкција и једначина хиперболе

У тексту који следи упознаћемо се са појмом хиперболе.

Дефиниција 1. Нека су F_1 и F_2 тачке равни α и нека је a реалан позитиван број такав да је $2a < d(F_1, F_2)$. Хипербола са фокусима (жижама) F_1 и F_2 и **реалном осом** $2a$, је скуп тачака равни α, са особином да је апсолутна вредност разлике њихових растојања од фокуса константна и једнака $2a$, тј.

(1) $$\mathcal{H} := \{M : M \in \alpha \wedge |d(M, F_1) - d(M, F_2)| = 2a\}.$$

Применом ове дефиниције може се извести механичка конструкција хиперболе. Један крај лењира се причврсти за фокус F_1, а за други крај и фокус F_2 причврсте се крајеви конца, који је краћи од лењира. Док лењир ротира око фокуса F_1, врх оловке клизи дуж лењира, држећи канап затегнутим, описује елипсу (Слика 1.).



Слика 1.

Ова конструкција се може добити кликом на линк 4.3.1.ggb и активирањем апликације GeoGebra.

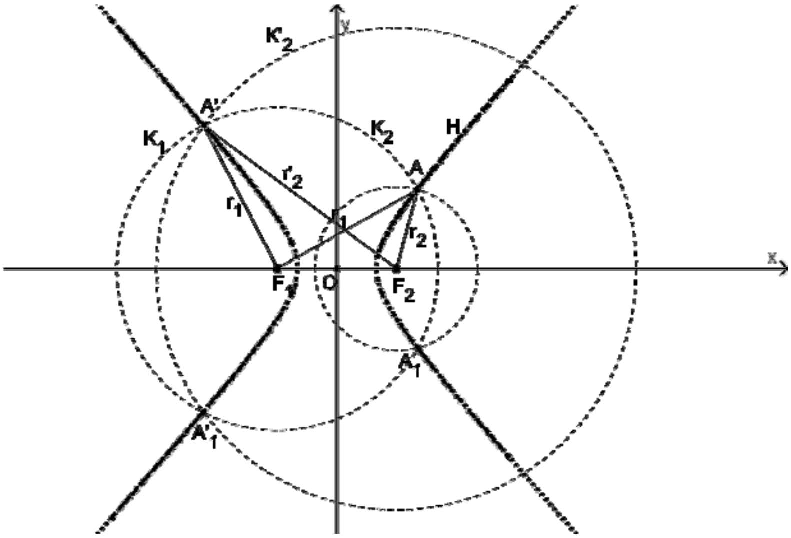
Напомена 1. Полазећи од особине симетрале дужи, да је свака њена тачка на једнаком растојању од крајњих тачака дужи, тј. $M \in s_{[F_1F_2]}$, ако и само ако је

$$d(M, F_1) - d(M, F_2) = 0$$

можемо извести један важан закључак, а то је: **да ни једна тачка симетрале дужи $[F_1F_2]$ не припада хиперболи**. То надаље значи да хиперболу у равни представљају две криве (две гране), једна у једној а друга у другој полуравни чија је заједничка ивица симетрала дужи $[F_1F_2]$.

Наведена дефиниција и напомена, послужиће за конструкцију и извођење једначине хиперболе.

Конструкција 1. Нека су дати фокуси F_1 и F_2, и позитиван реалан број a, тако да важи $2a < d\left(F_1, F_2\right) = 2c$ (Слика 2.).



Слика 2.

Прво се конструишу лукови $\mathcal{L}_1\left(F_1, r_1\right)$ и $\mathcal{L}_2'\left(F_2, r_2'\right)$, при чему се за полупречник r_1 бирају вредности $r_1 \geq c - a$, а за r_2' такве да важи: $r_2' \geq c + a$. Пресек лукова $\mathcal{L}_1$ и лукова $\mathcal{L}_2'$ су тачке A' и A_1' (или само тачка A', ако је $r_1 = c - a$ и $r_2' = a + c$), које су ближе фокусу F_1, него фокусу F_2, и описују **леву грану хиперболе** (1). Поступак се наставља тако што се конструишу и лукови $\mathcal{L}_2\left(F_2, r_2\right)$, чији полупречници узимају вредности $r_2 \geq c - a$ и у пресеку са луковима $\mathcal{L}_1\left(F_1, r_1\right)$, где је $r_1 \geq c + a$ добијају се пресечне тачке A и A_1 (или само тачка A, ако је $r_1 = c + a$ и $r_2 = c - a$), које су ближе фокусу F_2, него фокусу F_1, и описују **десну грану хиперболе** (1).

Ова конструкција се може добити кликом на линк 4.3.2.ggb и активи-рањем апликације GeoGebra. ■

Теорема која следи даје једначину хиперболе, а у доказу је примењен поступак за њено извођење, сличан поступку коришћеном за извођење једначине елипсе.

1. Канонски облик једначине хиперболе

Теорема 1. Нека су $a, c \in \mathbb{R}$ и $0 < a < c$, а F_1 и F_2 тачке равни α, дате у Декартовом правоуглом координатном систему са $F_1\left(-c, 0\right)$ и $F_2\left(c, 0\right)$. Хипербола (1), са жижама F_1 и F_2 и реалном осом $2a$, је скуп

(2) $$\mathcal{H} := \left\{\left(x, y\right) \in \alpha : b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2\right\},$$

где је $b^2 = c^2 - a^2$. Број a се назива **реална**, број b **имагинарна полуоса**, а $c \in \mathbb{R}^+$, **линеарни ексцентрицитет** хиперболе.

Другим речима, једначина хиперболе је

(3) $$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2,$$

или у **канонском облику**

(4) $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

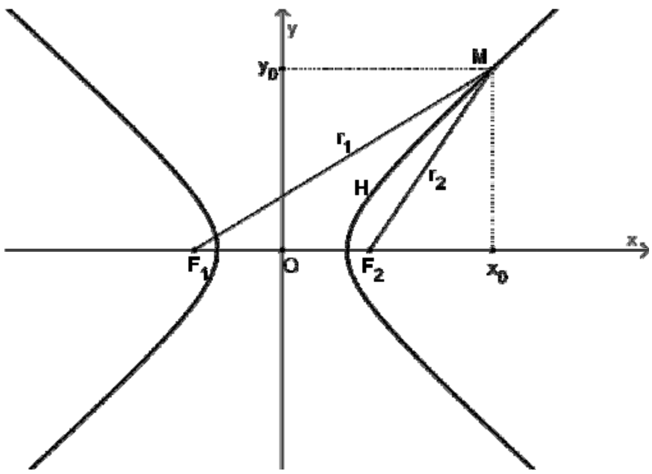
Доказ. Претпоставимо (Слика 3.) да је $M(x, y)$ тачка елипсе (1), одакле је

$$d(M, F_1) - d(M, F_2) = \pm 2a,$$

или

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \pm 2a.$$

На основу Напомене 1., знак " + " у претходним једначинама важи за тачке M хиперболе које су ближе фокусу F_2, тј. припадају "десној полуравни", а знак " – " важи за тачке M хиперболе које су ближе фокусу F_1, тј. припадају "левој полуравни"



Слика 3.

Квадрирањем последње једначине добијамо

$$(x+c)^2 + y^2 = (x-c)^2 + y^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + 4a^2,$$

тј.

$$\pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = cx - a^2.$$

После (поновног) квадрирања и сређивања имамо

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2),$$

а увођењем смене $b^2 = c^2 - a^2$, коначно важи

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2,$$

што значи да ако тачка $M(x, y)$ припада хиперболи (1), онда припада и скупу (2).

Обрнуто, ако координате произвољне тачке $M(x, y)$ задовољавају једначину (2), тј. ако је

(5) $$y^2 = b^2\left(\frac{x^2}{a^2}-1\right) \text{ и } b^2 = c^2 - a^2,$$

тада за дужине **фокалних радијуса** (дужи које спајају фокусе и тачке хиперболе), $r_1 = d\left(M,F_1\right)$ и $r_2 = d\left(M,F_2\right)$, важи

$$r_1^2 = \left(x+c\right)^2 + b^2\left(\frac{x^2}{a^2}-1\right) = a^2 + 2cx + \frac{c^2}{a^2}x^2 = \left(a+\frac{c}{a}x\right)^2$$

и

$$r_2^2 = \left(x-c\right)^2 + b^2\left(\frac{x^2}{a^2}-1\right) = a^2 - 2cx + \frac{c^2}{a^2}x^2 = \left(a-\frac{c}{a}x\right)^2,$$

а увођењем обележавања $e = c/a$, имамо

$$r_1^2 = \left(a+ex\right)^2 \text{ и } r_2^2 = \left(a-ex\right)^2.$$

Из услова теореме $0 < a < c$ следи $e > 1$, а из једначине (5) следи $|x| \geq a$, одакле изводимо следеће релације:

$$x \geq a \Rightarrow \left(a+ex \geq a\left(1+e\right) > 0 \ \wedge \ a-ex \leq a-ea = a\left(1-e\right) < 0\right),$$

$$x \leq -a \Rightarrow \left(a-ex \geq a+ea = a\left(1+e\right) > 0 \ \wedge \ a+ex \leq a-ea = a\left(1-e\right) < 0\right).$$

Из прве релације следи

$$r_1 = a+ex \text{ и } r_2 = ex-a,$$

а из друге

$$r_1 = -a-ex \text{ и } r_2 = a-ex.$$

због чега је

(6) $$\left|d\left(M,F_1\right)-d\left(M,F_2\right)\right| = \left|r_1-r_2\right| = 2a,$$

што значи да тачка $M\left(x,y\right)$ припада хиперболи (1). ■

2. Параметарски облик једначине хиперболе

Теорема 2. *Нека су* a *и* b *реалне позитивне константе и нека је* t *реалан параметар различит од* $\pi/2 + k\cdot\pi$*, где је* $k \in \mathbb{Z}$*. Једначине*

(7) $$x = \frac{a}{\cos t} \ \text{ и } \ y = b\operatorname{tg} t,$$

представљају ***параметарски облик*** *једанчине хиперболе* (4).

Доказ. Ако тачка $T\left(x,y\right)$ припада хиперболи (4), где су a и b реални позитивни бројеви, онда она припада области $\mathbb{R}^2 \setminus \left\{\left(x,y\right) : |x| \geq a > 0 \wedge y \in \mathbb{R}\right\}$ и тада постоји параметар $t \in \mathbb{R} \setminus \left\{\pi/2 + k\cdot\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$, такав да је

$$\cos t = \frac{a}{x}.$$

Једначина (4) може се представити у облику $\left(\frac{x}{a}\right)^2 = 1 + \left(\frac{y}{b}\right)^2$, одатле следи

$$\frac{1}{\cos^2 t} = \left(\frac{x}{a}\right)^2 = 1 + \left(\frac{y}{b}\right)^2,$$

а како за $t \in \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k \cdot \pi : k \in \mathbb{Z}\}$ важи

$$\frac{1}{\cos^2 t} = 1 + \mathrm{tg}^2 t,$$

то је

$$\mathrm{tg} t = \frac{y}{b},$$

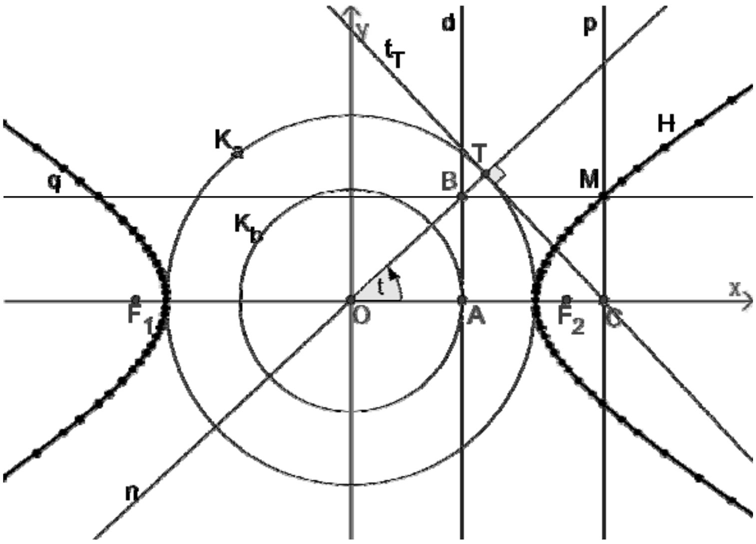
одакле следи да за координате произвољне тачке $T(x, y)$ хиперболе (4), важе једначине (7). 4.3.3.ggb

Обрнуто, ако за дате реалне позитивне бројеве a и b, координате тачке $T(x, y)$ задовољавају једначине (7), онда је

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2 t} - \mathrm{tg}^2 t = \frac{1}{\cos^2 t} - \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} = 1,$$

што значи да је $T(x, y)$ тачка хиперболе (4). ■

Конструкција 2. Нека су a и b реалне позитивне константе и нека је t реалан параметар различит од $\pi/2 + k \cdot \pi$, где је $k \in \mathbb{Z}$. За конструкцију елипсе, дате једначином (7), конструишимо прво две концентричне кружнице $\mathcal{K}_a : x^2 + y^2 = a^2$ и $\mathcal{K}_b : x^2 + y^2 = b^2$, (Слика 4.) и праву $n : y = x\,\mathrm{tg} t$. Тада је $T(a\cos t, a\sin t)$ пресечна тачка праве n и кружнице $\mathcal{K}_a$, а $B(b, b\,\mathrm{tg} t)$ пресечна тачка праве n и праве $d : x = b$.



Слика 4.

Права $t_T : x\cos t + y\sin t = a$, је тангента кружнице $\mathcal{K}_a$ у тачки T и сече x - осу у тачки $C(a/\cos t, 0)$. Праве $p : x = a/\cos t$ и $q : y = b\,\mathrm{tg} t$, секу се у тачки $M(a/\cos t, b\,\mathrm{tg} t)$, која, на основу Теореме 2. припада хиперболи (7). Ако тачка T

крећући се описује кружницу $\mathcal{K}_a$, тачка M описује хиперболу (4).

Конструкција трајекторије тачке хиперболе може се добити кликом на линк 4.3.4.ggb и активирањем апликације GeoGebra. ■

3. Унутрашња и спољашња област хиперболе.

Однос хиперболе и скупа тачака равни у којој је дефинисана, регулишу следећа дефиниција и теорема.

С обзиром на то да хипербола $\mathcal{H}$ са фокусима F_1 и F_2 има две гране, ако је s симетрала дужи $[F_1F_2]$, са $\mathcal{G}_1$ ћемо обележавати грану хиперболе која припада полуравни са ивицом s, којој припада и фокус F_1, а са $\mathcal{G}_2$ обележавамо грану хиперболе која припада полуравни са ивицом s, којој припада и фокус F_2. Сада смо у прилици да дефинишемо унутрашњост и спољашњост хиперболе.

Дефиниција 2. Нека су $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{G}_2$, гране хипербола $\mathcal{H}$ у равни α, са фокусима F_1 и F_2 и реалном осом $2a$. Скуп тачака $U_{\mathcal{G}_1} := \{X : X \in [F_1T) \wedge T \in \mathcal{G}_1\}$ зове се **унутрашња област гране** $\mathcal{G}_1$, скуп тачака $U_{\mathcal{G}_2} := \{X : X \in [F_2T) \wedge T \in \mathcal{G}_2\}$ **унутрашња област гране** $\mathcal{G}_2$, скуп $U_{\mathcal{H}} = U_{\mathcal{G}_1} \cup U_{\mathcal{G}_2}$ **унутрашња област хиперболе**, а скуп $S_{\mathcal{H}} := \alpha \setminus (U_{\mathcal{H}} \cup \mathcal{H})$ зове се **спољашња област хиперболе** $\mathcal{H}$.

Генерички организатор за маркирање унутрашње и спољашње области хиперболе, може се покренути кликом на линк 4.3.5.ggb, активирањем апликације GeoGebra.

За маркирање унутрашње и спољашње области хиперболе, може се користити следећи критеријум.

Теорема 2. *Ако је $\mathcal{H}$ хипербола у равни α, са фокусима F_1 и F_2 и реалном осом $2a$, онда је унутрашња област*

(8) $$U_{\mathcal{H}} = \{X : X \in \alpha(\mathcal{H}) \wedge |d(F_1,X) - d(F_2,X)| > 2a\}$$

а спољашња област

(9) $$S_{\mathcal{H}} := \{X : X \in \alpha(\mathcal{H}) \wedge |d(F_1,X) - d(F_2,X)| < 2a\}.$$

Доказ. Нека је $\mathcal{G}_1$ грана хиперболе $\mathcal{H}$ у равни α, са фокусима F_1 и F_2 и главном осом $2a$. Нека је X унутрашња тачка гране $\mathcal{G}_1$ (Слика 5.), тј. нека је $X \in U_{\mathcal{G}_1}$, тада важи

$$d(F_2,T) + d(T,X) = d(F_2,X),$$

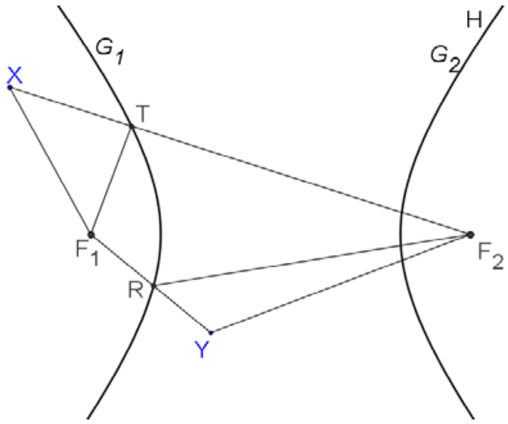
где је T тачка гране $\mathcal{G}_1$ хиперболе $\mathcal{H}$, због чега је $d(F_2,T) - d(F_1,T) = 2a$.

Примењујући неједнакост троугла

$$d(F_1,X) < d(X,T) + d(F_1,T),$$

где строга неједнакост важи због услова $X \neq T$, добијамо следећу релацију

$$d(F_2,X)-d(F_1,X)>d(F_2,X)-d(X,T)-d(F_1,T)=d(F_2,T)-d(F_1,T)=2a.$$



Слика 5.

Ако је Y тачка спољашње области гране $\mathcal{G}_1$, онда дуж $[F_1Y]$ сече грану $\mathcal{G}_1$ у тачки R, тј. $d(F_1,R)+d(R,Y)=d(F_1,Y)$, а на основу неједнакости троугла важи

$$d(F_2,Y)<d(F_2,R)+d(R,Y).$$

Тада важи

$$d(F_2,Y)-d(F_1,Y)<d(F_2,R)+d(R,Y)-\big(d(F_1,R)+d(R,Y)\big)=d(F_2,R)-d(F_1,R)=2a.$$

Аналогним поступком, доказује се да ако је X тачка унутрашње, а Y тачка спољашње области гране $\mathcal{G}_2$, важе неједнакости

$$d(F_1,X)-d(F_2,X)>2a \text{ и } d(F_1,Y)-d(F_2,Y)<2a.$$

Коначно, важе следеће релације

$$X\in U_{\mathcal{H}} \Leftrightarrow X\in U_{\mathcal{G}_1}\cup U_{\mathcal{G}_2} \Leftrightarrow X\in U_{\mathcal{G}_1}\vee X\in U_{\mathcal{G}_2} \Leftrightarrow d(F_2,X)-d(F_1,X)>2a \vee d(F_1,X)-d(F_2,X)>2a$$

$$\Leftrightarrow \left|d(F_1,X)-d(F_2,X)\right|>2a,$$

$$Y\in S_{\mathcal{H}} \Leftrightarrow Y\in\alpha\backslash\left(U_{\mathcal{H}}\cup\mathcal{H}\right) \Leftrightarrow> \wedge\neg\Big(Y\in\Big(\left(U_{\mathcal{G}_1}\cup U_{\mathcal{G}_2}\right)\cup\mathcal{H}\Big)\Big) \Leftrightarrow \neg\Big(Y\in\Big(\left(U_{\mathcal{G}_1}\cup U_{\mathcal{G}_2}\right)\cup\mathcal{H}\Big)\Big)$$

$$\Leftrightarrow \neg\left(\left|d(F_1,Y)-d(F_2,Y)\right|\geq 2a\right) \Leftrightarrow \left|d(F_1,Y)-d(F_2,Y)\right|<2a,$$

што је и требало да се докаже. ■

Аналитички критеријум на основу кога се утврђује да ли тачка припада унутрашњој или спољашњој области хиперболе, као и у случају елипсе, наведен је у следећој теореми, која је директна последица Теореме 3.

Теорема 4. *Тачка* $M(x_0,y_0)$ *припада* ***унутрашњости хиперболе*** $\mathcal{H}(\alpha,\beta,a,b)$ *ако и само ако је*

$$b^2(x_0-\alpha)^2-a^2(y_0-\beta)^2<a^2b^2.$$

Тачка $M(x_0,y_0)$ *припада* ***спољашњости елипсе,*** *ако и само ако је*

$$b^2(x_0-\alpha)^2-a^2(y_0-\beta)^2>a^2b^2. \quad ■$$

Овај критеријум је дат у генеричком организатору који се може добити кликом на линк 4.3.6.ggb, активирањем апликације GeoGebra.

Последњи генерички организатор пружа могућност за решавање квадратне неједначине облика

$$b^2\left(x-\alpha\right)^2-a^2\left(y-\beta\right)^2\rho a^2b^2$$

за разне вредности параметара $a,b\in\mathbb{R}^+$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, као и за различите облике релације $\rho\in\{\geq,\leq,>,<\}$.

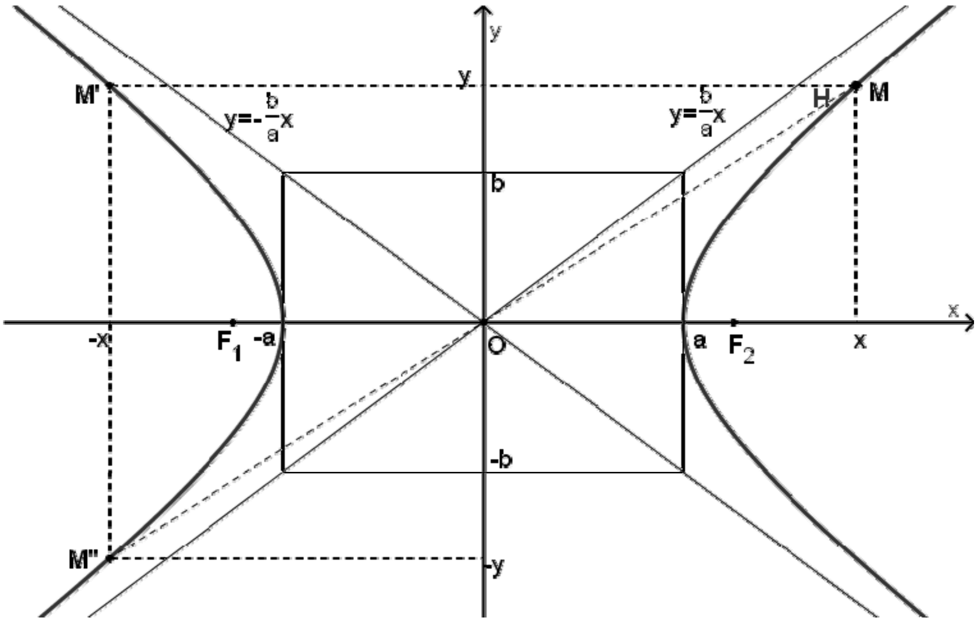
4.3.2. Нека својства хиперболе: симетричност, центар, темена, асимптоте

1. Симетричност. Једначина $f\left(x,y\right)=0$, где је

$$f\left(x,y\right)=b^2x^2-a^2y^2-a^2b^2,$$

за $a,b\in\mathbb{R}^+$, представља једначину (3) хиперболе.

Као и у случају елипсе (3.1.10.2.2.) функција $f\left(x,y\right)$ је парна по свакој променљивој појединачно, и по обе променљиве истовремено, одакле следи да је хипербола (3) симетрична у односу на $x-$осу, $y-$осу и координатни почетак (Слика 6.).



Слика 6.

2. Центар и темена. Другим речима, хипербола (3) има две (међусобно нормалне) осе симетрије, $x-$осу и $y-$осу, а координатни почетак је центар симетрије, тј. **центар хиперболе**. Дуж која спаја центар хиперболе и тачку хиперболе зове се **радијус хиперболе**.

Даље, за $y=0$, једначина хиперболе (3) еквивалентна је са $x^2=a^2$, одакле је $x=\pm a$, што значи да хипербола сече $x-$осу (осу симетрије) у тачкама $A\left(a,0\right)$ и $A'\left(-a,0\right)$, теменима хиперболе, због чега $x-$осу називамо **реална** (**главна**) **оса** хиперболе (3). За $x=0$, једначина хиперболе (3) еквивалентна је са једначином

$y^2 = -b^2$, која нема решења у скупу реалних бројева, ($y = \pm bi$, где је i имагинарна јединица), што значи да хипербола не сече $y-$осу, коју називамо **имагинарна оса** хиперболе (3).

У литератури се често и дуж $\left[AA'\right]$, као и $d\left(A, A'\right) = 2a$, назива **реална** (**главна**) **оса** хиперболе, а дуж $\left[BB'\right]$, (где је $B\left(0, b\right)$ и $B'\left(0, -b\right)$), као и $d\left(B, B'\right) = 2b$, назива се **имагинарна оса** хиперболе (3). У складу с тим, број a је **реална полуоса**, а број b је **имагинарна полуоса** хиперболе, 4.3.6.a.ggb.

Приметимо на крају, ако је $a = b$, онда једначина хиперболе гласи

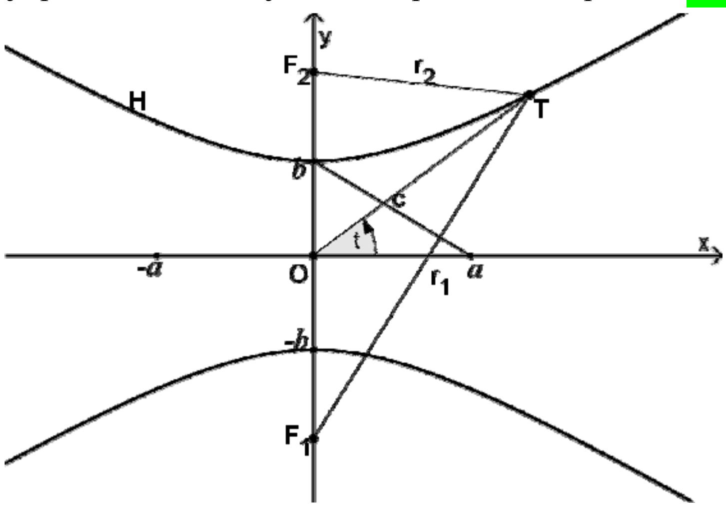
$$x^2 - y^2 = a^2,$$

тј. хипербола је **једнакостранична** са центром $O\left(0,0\right)$ и полуосама једнаким a.

Напомена 1. Једначина хиперболе, чији су фокуси на y-оси, тј. $F_1\left(0, -c\right)$ и $F_2\left(0, c\right)$, гласи

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где је $M\left(x, y\right)$ тачка хиперболе, $2a = \left|d\left(M, F_1\right) - d\left(M, F_2\right)\right|$ и $b^2 = c^2 - a^2$. У овом случају y - оса је реална, а x - оса је имагинарна оса хиперболе, 4.3.6.b.ggb.



Слика 7

3. Асимптоте хиперболе. На основу наведеног јасно је да за хиперболу (3) значајан правоугаоник чије странице припадају правама:

$$x = a,\ x = -a,\ y = b,\ y = -b,$$

тзв. **карактеристични правоугаонок хиперболе** а посебно његове дијагонале

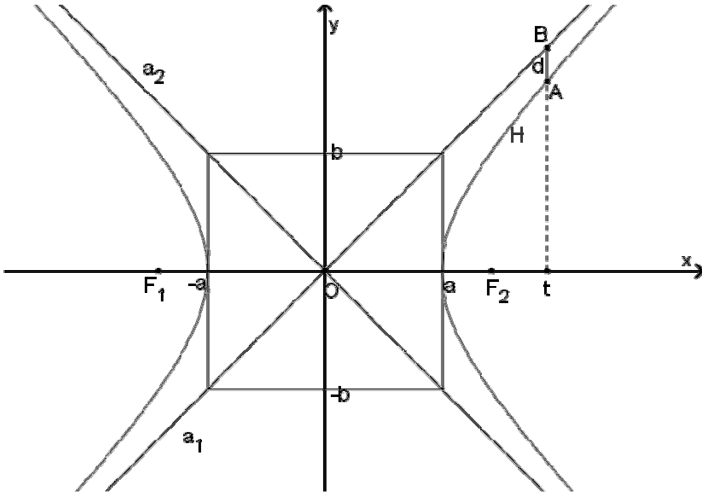
(10) $$bx - ay = 0 \text{ и } bx + ay = 0,$$

за које је карактеристично "да им се тачке хиперболе увек приближавају, а никад их не секу".

У тексту који следи анализираћемо односе хиперболе и поменутих дијагонала, како бисмо расветлили тај феномен. У ту сврху искористићемо симетричност хиперболе (3) и дијагонала (10), због чега је довољно да их анализирамо у I квадранту, тј. за $x \geq 0$ и $y \geq 0$.

За параметар $p \geq a$, уочимо тачку $A(p, y_A)$, која припада хиперболи (3) и тачку $B(p, y_B)$, која припада дијагонали $bx - ay = 0$ (Слика 8.), због чега је

$$y_A = \frac{b}{a}\sqrt{p^2 - a^2} \text{ и } y_B = \frac{b}{a}p.$$



Слика 8.

Из $\sqrt{p^2 - a^2} < p$, следи $y_A < y_B$, што значи да се у I квадранту свака тачка асимптоте налази изнад одговарајуће тачке хиперболе, тј. асимптота се налази изнад хиперболе, а за растојање између одговарајућих тачака важи

$$d(A, B) = \frac{b}{a}\left(\sqrt{p^2 - a^2} - p\right) = \frac{ab}{p + \sqrt{p^2 - a^2}} < \frac{ab}{p}.$$

Ако број p расте, тада се број $1/p$ смањује, због чега се смањује и растојање $d(A, B)$. Често се каже: "ако p неограничено расте, онда се растојање $d(A, B)$ неограничено смањује", или "ако $p \to \infty$ (тежи ка бесконачности), онда растојање $d(A, B) \to 0$ (тежи ка нули)"

Ова чињеница се у математици исказује и на следећи начин "за велике вредности $|x|$ и када $|x|$ расте, дијагонале (10) добро апроксимирају график хиперболе".

Као што се види из претходног излагања, због значаја дијагонала (10) уводимо следећу дефиницију

Дефиниција 3. Нека је дата хипербола једначином (3). Праве дате једначинама

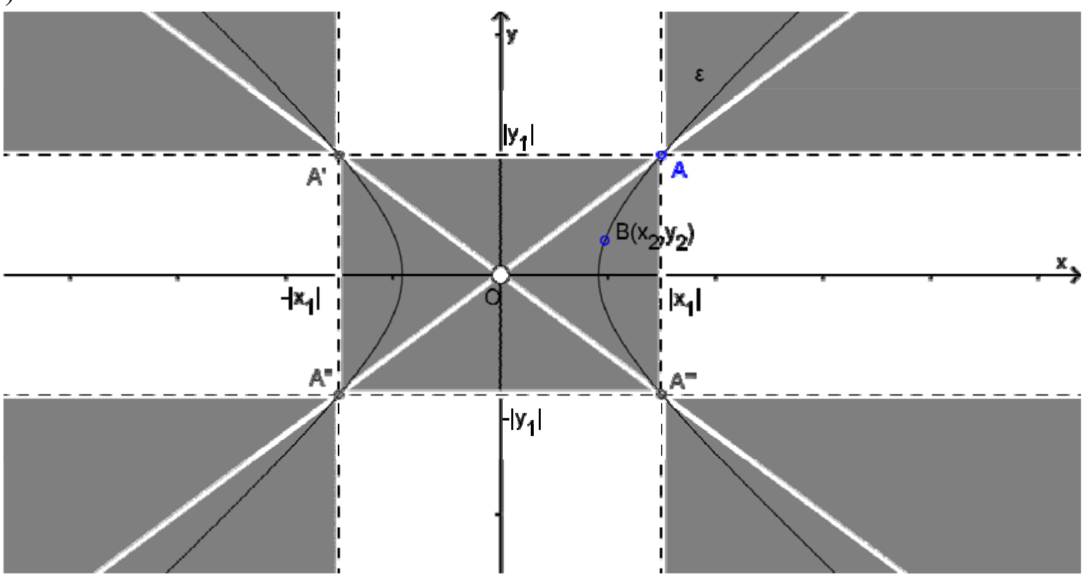
$$a_1 : y = \frac{b}{a}x \text{ и } a_2 : y = -\frac{b}{a}x,$$

зову се **асимптоте хиперболе**.

Илустрација наведене особине може се добити кликом на линк 4.3.7.ggb и активирањем апликације GeoGebra.

Интуитивна представа за асимптоте криве јесте тангента у "бесконачно далекој тачки".

4. Анализа једначине. Слично као и у случају елипсе, анализирајмо услов под којим две тачке у равни одређују хиперболу (4). У ту сврху, нека су у Декартовом правоуглом координатном систему дате тачке $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$, и нека је тачка A', симетрична тачки A, у односу на $y-$осу, тачка A''' симетрична тачки A, у односу на $x-$осу, као и тачку A'' симетрична тачки A, у односу на координатни почетак. Наредба $\boxed{\mathbf{\varepsilon = KonusniPresek[A, B, A', A'', A''']}}$, у програму GeoGebra, конструише крива ε, одређену тачкама A, A', A'', A''' и B. Ако је тачка A фиксирана (због чега су фиксиране и тачке A', A'' и A'''), померањем тачке B мења се облик криве ε, на следећи начин: ако тачка B припада унутрашњости било кога од пет црвено обојених правоугаоника, који су одређени тачком A, (Слика 9.), одакле су искључене тачке правих $p(A, A')$, $p(A'', A''')$, $p(A, A''')$, $p(A', A'')$, $p(A, A'')$, $p(A', A''')$ и координатни почетак $O(0,0)$, онда је овако задатим тачкама A и B, једнозначно одређена хипербола (4) .



Слика 9.

Овом закључку еквивалентна је једначина

$$x_1^2\alpha - y_1^2\beta = 1 \text{ и } x_2^2\alpha - y_2^2\beta = 1$$

где смо увели обележавање $1/a^2 = \alpha$ и $1/b^2 = \beta$. Овај систем је сагласан, тј. има јединствена решења

$$\alpha = \frac{y_2^2 - y_1^2}{x_1^2 y_2^2 - x_2^2 y_1^2} \text{ и } \beta = \frac{x_2^2 - x_1^2}{x_1^2 y_2^2 - x_2^2 y_1^2},$$

ако и само ако је

$$x_1^2 y_2^2 - x_2^2 y_1^2 \neq 0,$$

или

(11) $$x_1y_2 - x_2y_1 \neq 0 \text{ и } x_1y_2 + x_2y_1 \neq 0,$$

што значи да тачка $B(x_2, y_2)$ не припада правама

$$m: y = \frac{y_1}{x_1}x \text{ и } n: y = -\frac{y_1}{x_1}x.$$

С друге стране, чињеница да тачка B припада шрафираној области може се приказати формулом

(12) $$\left(|x_1| < |x_2| \wedge |y_1| < |y_2|\right) \vee \left(|x_2| < |x_1| \wedge |y_2| < |y_1|\right),$$

која је еквивалентна са

$$\left(x_2 \in (-\infty, -|x_1|) \cup (|x_1|, \infty) \wedge y_2 \in (-\infty, -|y_1|) \cup (|y_1|, \infty)\right) \vee \left(x_2 \in (-|x_1|, |x_1|) \wedge y_2 \in (-|y_1|, |y_1|)\right).$$

Коначно, услови (11) и (12) , могу се приказати у скуповном запису

(13) $$(x_2, y_2) \in \Big(\Big(\big((-\infty, -|x_1|) \cup (|x_1|, \infty)\big) \times \big((-\infty, -|y_1|) \cup (|y_1|, \infty)\big)\Big) \cup \big((-|x_1|, |x_1|) \times (-|y_1|, |y_1|)\big)\Big) \setminus \\ \setminus \left(\{(x, y) | y_1x + x_1y = 0\} \cup \{(x, y) | y_1x - x_1y = 0\}\right)$$

Кликом на линк 4.3.8.ggb и активирањем апликације GeoGebra, може се добити визуелна интерпретација претходне анализе о одређености хиперболе, као и следећег примера.

Пример 1. Саставити једначину хиперболе која садржи тачке: а) $A(3,2)$ и $B(-4,-3)$; б) $A(-3,2)$ и $B(5,-3)$.

Решење. Нека је $\mathcal{H}: \alpha x^2 - \beta y^2 = 1$ тражена једначина елипсе, где је $\alpha = 1/a^2$ и $\beta = 1/b^2$. Услови $A \in \mathcal{H}$ и $B \in \mathcal{H}$, су еквивалентни са системом:

а) $$9\alpha - 4\beta = 1 \text{ и } 16\alpha - 9\beta = 1,$$

чија су решења $\alpha = 5/17$ и $\beta = 7/17$, па је тражена једначина

$$\mathcal{H}: 5x^2 - 7y^2 = 17.$$

б) $$9\alpha - 4\beta = 1 \text{ и } 25\alpha - 9\beta = 1,$$

чија су решења $\alpha = 5/17$ и $\beta = 7/17$, па је тражена једначина

$$\mathcal{H}: -5x^2 + 16y^2 = 19.$$ □

Напомена 2. Из једначине (5) следи

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

што омогућује да се хипербола посматра као унија графика две функције

$$f(x) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \quad \text{и} \quad g(x) = -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

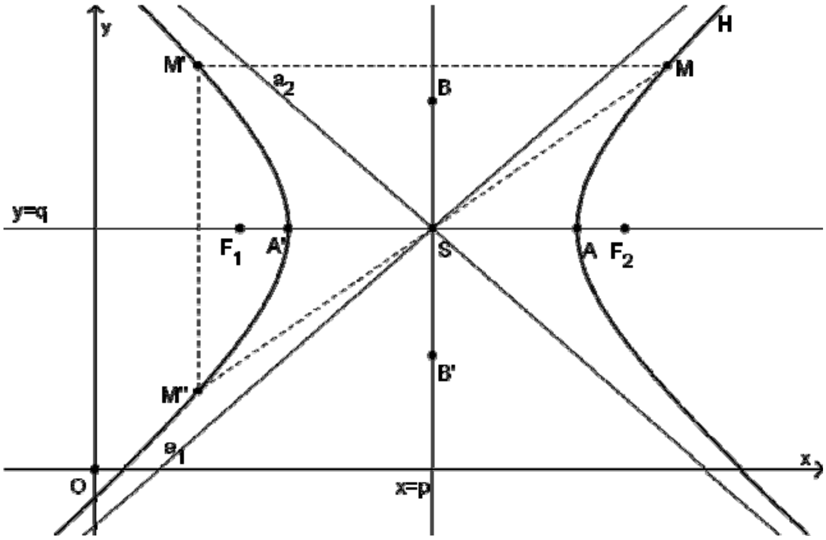
при чему обе функције имају домен $[-\infty, -a] \cup [a, \infty]$, док је $[0, \infty)$ кодомен функције f, а $(-\infty, 0]$ кодомен функције g. □

Напомена 3. У Теореми 1., уз наведене услове, фокуси хиперболе могу да буду, на пример, тачке $F_1\left(p-c,q\right)$ и $F_2\left(p+c,q\right)$. Тада једначина хиперболе гласи

(3') $$b^2\left(x-p\right)^2-a^2\left(y-q\right)^2=a^2b^2,$$

или у канонском облику

(4') $$\frac{\left(x-p\right)^2}{a^2}-\frac{\left(y-q\right)^2}{b^2}=1.$$

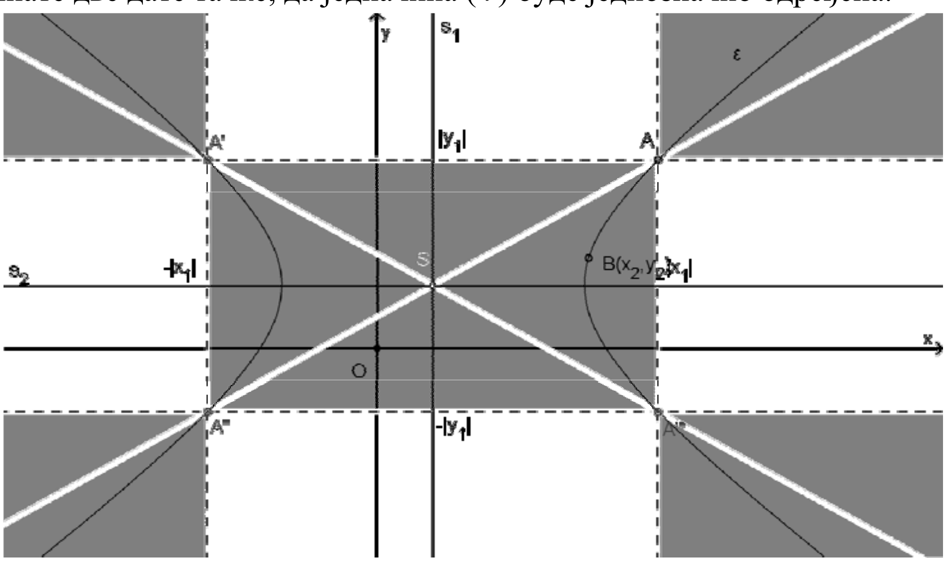


Слика 10.

Тада су (Слика 10.) осе симетрије хиперболе праве: $y=q$ реална оса и $x=p$ имагинарна оса, а центар симетрије елипсе тачка $S\left(p,q\right)$, 4.3.9.a.ggb. Темена хиперболе су $A\left(p+a,q\right)$ и $A'\left(p-a,q\right)$, а асимптоте су праве

$$y-q=\frac{b}{a}\left(x-p\right) \text{ и } y-q=-\frac{b}{a}\left(x-p\right).$$

Аналогно услову (8) може се извести услов који треба да задовоље координате две дате тачке, да једначина (4') буде једнозначно одређена.



Слика 11.

Ако су у Декратовом правоуглом координатном систему дате две тачке $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ и праве $x = p$ и $y = q$, онда тај услов гласи:

$$(x_2, y_2) \in \Big\{ \Big(\big((-\infty, p - |x_1 - p|) \cup (p + |x_1 - p|, \infty) \big) \times \big((-\infty, q - |y_1 - q|) \cup (q + |y_1 - q|, \infty) \big) \Big) \cup$$

$$\cup \big((p - |x_1 - p|, p + |x_1 - p|) \times (q - |y_1 - q|, q + |y_1 - q|) \big) \Big\} \setminus$$

$$\setminus \Big(\big\{ (x,y) \,\big|\, (y_1 - q)(x - p) + (x_1 - p)(y - q) = 0 \big\} \cup \big\{ (x,y) \,\big|\, (y_1 - q)(x - p) + (x_1 - p)(y - q) = 0 \big\} \Big).$$

Геометријска интерпретација услова (13) дата је на Слици 11. Ако тачка B припада шрафираном скупу тачака из кога су искључене тачке правих m и n, онда је овако задатим тачкама A и B једначина (4') хиперболе, једнозначно одређена.

Кликом на линк 4.3.9.ggb и активирањем апликације GeoGebra, може се добити визуелна интерпретација претходне анализе о одређености елипсе. □

4.3.3. Ексцентрицитет, директрисе и параметар хиперболе

1. Ексцентрицитет. Количник $e = \dfrac{c}{a}$ зове се **нумерички ексцентрицитет хиперболе**. Како је $0 < a < c$, јасно је да за нумерички ексцентрицитет хиперболе важи

$$e > 1.$$

Пример 2. Саставити једначину хиперболе, која садржи тачку $M(2, -4)$, а има нумерички ексцентрицитет $e = 5/2$.

Решење. Нека је тражена једначина хиперболе $\mathcal{H} : \alpha x^2 - \beta y^2 = 1$, где је уведено обележавање $\alpha = 1/a^2$ и $\beta = 1/b^2$. Из услова $M \in \mathcal{E}$ следи линеарна једначина

$$4\alpha - 16\beta = 1.$$

На основу дефиниције нумеричког ексцентрицитета је $c = ae$, одакле је

$$a^2 e^2 = a^2 + b^2$$

а после дељења са $a^2 b^2$, имамо једначину и

$$\alpha + (1 - e^2)\beta = 0,$$

а за $e = 5/2$ добија се линеарна једначина

$$4\alpha - 21\beta = 0.$$

Решавањем линеарних једначина по α и β имамо: $\alpha = 21/20$ и $\beta = 1/5$, па је тражена једначина елипсе

$$\mathcal{H} : 21x^2 - 4y^2 = 20 \qquad \square$$

Илустрација примера за разне вредности нумеричког ексцентрицитета и различите положаје тачке M, може се добити кликом на линк 4.3.10.ggb и активирањем апликације GeoGebra.

Геометријски смисао линеарног ексцентрицитета је јасан. Он је једнак половини растојања између фокуса, а смисао нумеричког ексцентрицитета биће разјашњен након следећег разматрања.

2. Директрисе. Посматрајмо две паралелне праве d_1 и d_2, симетричне у односу на имагинарну осу хиперболе (1), на растојању од осе $\frac{a}{e}$, тј. посматрајмо праве (Слика 12.)

$$d_1 : x = -\frac{a}{e} \text{ и } d_2 : x = \frac{a}{e}.$$

Праве d_1 и d_2 зову се **директрисе хиперболе**, које одговарају, фокусима F_1 и F_2.

Хипербола и њене директрисе имају веома значајно својство, о чему говори **Теорема 4.** *Нека је дата хипербола једначином (4), нека су њени фокуси* $F_1(-c,0)$ *и* $F_2(c,0)$, *а директрисе* $d_1 : x = -\frac{a}{e}$ *и* $d_2 : x = \frac{a}{e}$. *Тада је количник растојања про-извољне тачке* M *хиперболе од фокуса и растојања од одговарајуће директрисе, једнак нумеричком ексцентрицитету, тј.*

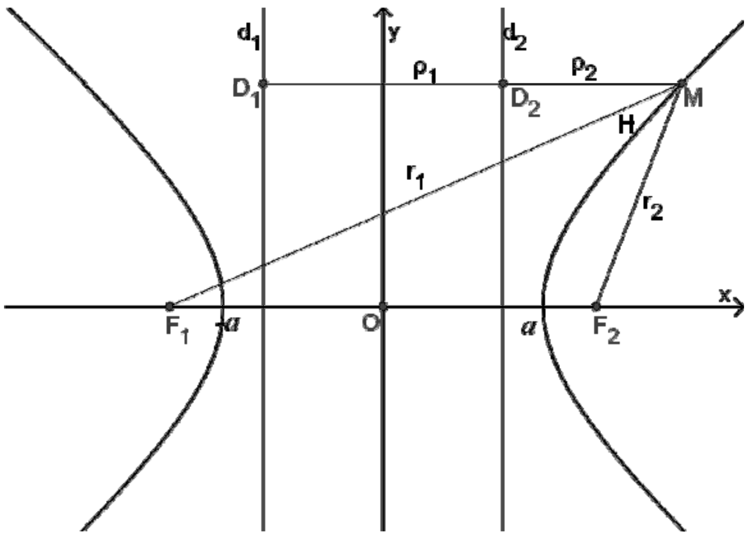
(9) $$\frac{d(M,F_1)}{d(M,d_1)} = \frac{d(M,F_2)}{d(M,d_2)} = e.$$

Доказ. Нека је $M(x,y)$ произвољна тачка хиперболе (Слика 12.), због чега је $|x| \geq a$. На основу (6) за фокалне радијусе $d(M,F_1)$ и $d(M,F_2)$ важи

(10) $$d(M,F_1) = r_1 = a + ex \text{ и } d(M,F_2) = r_2 = a - ex,$$

а због $-a \leq ex \leq a$, такође је

$$a + ex \geq 0 \text{ и } a - ex \geq 0.$$



Слика 12.

За расојања од тачке M, до директрисе, важи

(11) $$d(M,d_1) = \rho_1 = \left|-\frac{a}{e} - x\right| = \frac{1}{e}|a + ex| = \frac{1}{e}(a + ex)$$

и

(11')
$$d(M,d_2)=\rho_2=\left|\frac{a}{e}-x\right|=\frac{1}{e}|a-ex|=\frac{1}{e}(a-ex).$$

На основу (10), (11) и (11') непосредно следи релација (9) . ■

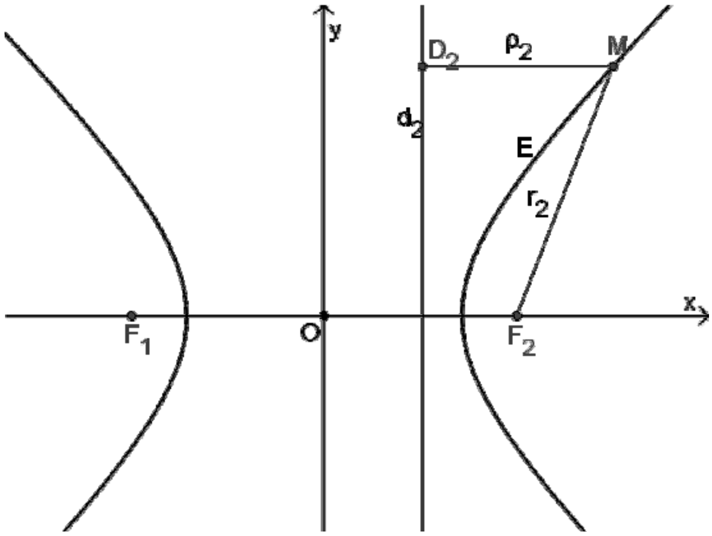
Важи и обрнуто тврђење

Теорема 5. *Нека је F дата тачка (фокус), l дата права (директриса) и e реалан број такав да је $e>1$. Ако за тачку M, равни α, одређене датом тачком и датом правом, важи*

(12)
$$\frac{d(M,F)}{d(M,l)}=e,$$

онда тачка M описује хиперболу.

Доказ. Нека су дати реални бројеви a и e, такви да је $a>0$ и $e>1$. У Декартовом правоуглом координатном систему у равни α, уочимо тачку $F(ae,0)$ и праву $l: x=\frac{a}{e}$, 4.3.11.a.ggb (Слика 12.).



Слика 13.

Нека је $M(x,y)$ тачка исте равни, за коју важи релација (12), тј. важи

$$\sqrt{(x-ae)^2+y^2}=e\cdot\left|x-\frac{a}{e}\right|,$$

а после квадрирања

$$x^2-2aex+a^2e^2+y^2=e^2x^2-2aex+a^2.$$

Обележавањем $c=ae$ и скраћивањем, последња једначина добија облик

$$a^2x^2+a^2c^2+a^2y^2=c^2x^2+a^4$$

а увођењем $b^2=c^2-a^2$, да за координате тачке M, важи

$$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2,$$

што и јесте једначина хиперболе, чија је директриса l и фокус F. Исти резултат се добија и када је $F\left(-ae,0\right)$ и праву $l: x=-\frac{a}{e}$. ■

На основу ове две теореме може се исказати следећи потребан и довољан услов, да геометријско место тачака буде хипербола, тј. њена друга дефиниција.

Дефиниција 4. Нека су дати тачка F (фокус), права d (директриса) и реалан број e (нумерички ексцентрицитет) такав да је $e>1$. Хипербола је геометријско место тачака M, равни α, одређене датом тачком и датом правом, са особином да је однос њихових растојања од тачке F и растојања од директрисе d, једнак ексцентрицитету e.

Илустрација дефиниције 2. и анализа наведених особина ексцентрицитета, директриса и фокуса хиперболе, могу се добити кликом на линк 4.3.11.ggb и активирањем апликације GeoGebra.

3. Параметар. Дужина дужи, која је нормална на велику осу и спаја фокус и тачку на елипси зове се **параметар елипсе** и означавамо га са p. Очигледно је да је његова вредност једнака

$$p=f\left(c\right)=\frac{b^2}{a},$$

где је $f\left(x\right)$ функција, дата у Напомени 1.

Напомена 3. Ако је дата хипербола (3'), ексцентрицитет и параметар су исти као и у случају хиперболе (3). Међутим, директрисе су

$$d_1: x=p-\frac{a}{e} \quad \text{и} \quad d_2: x=p+\frac{a}{e}.$$

Илустрација наведене напомене добија се кликом на линк 4.3.12.ggb и активирањем апликације GeoGebra.

4.3.4. Хипербола и права

1. Међусобни однос. Однос хиперболе и праве разматрамо решавајући систем, који чине једначина хиперболе и једначина праве

(13) $$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2 \qquad \wedge \qquad y=kx+n.$$

Заменом непознате y из једначине праве у једначину хиперболе и сређивањем, добијамо квадратну једначину

(14) $$\left(a^2k^2-b^2\right)x^2+2a^2knx+a^2n^2+a^2b^2=0,$$

ако и само ако је $a^2k^2-b^2\neq 0$, при чему дискриминанта једначине гласи

$$D=4a^2b^2\left(-a^2k^2+n^2+b^2\right).$$

На основу познате особине, која се односи на дискриминанту и природу решења, квадратне једначине, јасно је да за решења x_1 и x_2, једначине (14) важи:

$$x_1=\overline{x}_2 \wedge x_1,x_2\in\mathbb{C} \Leftrightarrow a^2k^2-b^2>n^2$$

$$x_1 = x_2 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow a^2k^2 - b^2 = n^2$$

$$x_1 \neq x_2 \wedge x_1, x_2 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow a^2k^2 - b^2 < n^2 .$$

Под условом $a^2k^2 - b^2 \neq 0$, решењима x_1 и x_2 једначине (14),

$$x_1 = \frac{-a^2kn + \sqrt{D}}{a^2k^2 - b^2}, \quad x_2 = \frac{-a^2kn - \sqrt{D}}{a^2k^2 - b^2},$$

одговарају решења

$$y_1 = \frac{-b^2n + k\sqrt{D}}{a^2k^2 - b^2}, \quad y_2 = \frac{-b^2n - k\sqrt{D}}{a^2k^2 - b^2},$$

тако да су парови (x_1, y_1) и (x_2, y_2), решења система (13). Ако су то парови реалних бројева (различити, или једнаки), права и хипербола имају заједничке тачке $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$, (различите, или једнаке). Ако су пак, (x_1, y_1) и (x_2, y_2) парови комплексних бројева, права и хипербола немају заједничких тачака.

Ако је $a^2k^2 - b^2 = 0$, тј. $k = \pm b/a$, онда је једначина (14) линеарна и (због $k \neq 0$) има за $n \neq 0$, **једно решење**, које није тачка додира него тачка пресека праве l и хиперболе. За $n = 0$ праве l су асимптоте.

Можемо закључити да свака права паралелна асимптоти, а различита од ње, сече хиперболу у једној тачки.

Напред изведени закључци могу се добити кликом на линк 4.3.13.ggb и активирањем апликације GeoGebra, што је и тврђење следеће теореме.

Теорема 6. *За хиперболу* $\mathcal{H}(O, a, b)$ *и праву* l*, дате системом једначина* (13)*, важе следећи односи*:

$$\text{права и хипербола су дисјунктни скупови} \Leftrightarrow a^2k^2 - b^2 > n^2 ,$$

$$(15) \qquad \text{права је тангента хиперболе} \Leftrightarrow a^2k^2 - b^2 = n^2 ,$$

$$\text{права је сечица хиперболе} \Leftrightarrow a^2k^2 - b^2 < n^2 . \qquad \blacksquare$$

2. Тангента у тачки хиперболе. Претпоставимо да једначина тангенте хиперболе (3), у тачки $T(x_0, y_0)$, гласи

$$t : y = kx + n .$$

Како је тачка $T(x_0, y_0)$ једина заједничка тачка тангенте и хиперболе, то је

$$y_0 = kx_0 + n ,$$

а због услова (15), важи

$$x_0 = \frac{-a^2kn}{a^2k^2 - b^2} = \frac{-a^2kn}{n^2} = \frac{-a^2k}{n} \quad \text{и} \quad y_0 = \frac{-b^2n}{a^2k^2 - b^2} = -\frac{b^2n}{n^2} = -\frac{b^2}{n} .$$

Одатле је

$$k = \frac{b^2x_0}{a^2y_0} \quad \text{и} \quad n = -\frac{b^2}{y_0},$$

па једначина тангенте у тачки $T(x_0, y_0)$ хиперболе (3),

(16) $$b^2x_0x - a^2y_0y = a^2b^2 .$$

Напомена 3. Тангента криве (кружнице, елипсе, хиперболе и сл.) у њеној тачки T_0, често се (посебно у вишој математици) посматра као гранични положај сечице $s(T_0,T_1)$, одређене фиксираном тачком T_0 и променљивом тачком T_1, која крећући се по кривој тежи ка тачки T_0.

Пошто тачке $T_0(x_0,y_0)$ и $T_1(x_1,y_1)$ одређују сечицу хиперболе (3), једначина сечице гласи

$$s(T_0,T_1): y-y_0 = \frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(x-x_0),$$

а како исте тачке припадају хиперболи (3), онда важе следеће једнакости

$$\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}=1 \quad \text{и} \quad \frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1 .$$

Одузимањем прве од друге једнакости, добијамо

$$\frac{(x_1-x_0)(x_1+x_0)}{a^2}-\frac{(y_1-y_0)(y_1+y_0)}{b^2}=0,$$

одакле је

$$\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}=\frac{b^2}{a^2}\frac{x_0+x_1}{y_0+y_1}.$$

Сада се једначина сечице може записати на следећи начин

(17) $$s(T_0,T_1): y-y_0=\frac{b^2}{a^2}\frac{x_0+x_1}{y_0+y_1}(x-x_0).$$

Кад се тачка T_1 креће по хиперболи и тежи ка T_0, тада израз $\frac{x_0+x_1}{y_0+y_1}$ тежи ка $\frac{2x_0}{2y_0}=\frac{x_0}{y_0}$, због чега једначина (17) постаје еквивалентна једначини (16) , тј. сечица хиперболе тежи ка тангенти хиперболе. Приказ описаног прелаза сечице у тангенту, добија се кликом на линк 4.3.14.ggb и активирањем апликације GeoGebra. □

3. Тангента из тачке ван хиперболе. Поступак за одређивње једначине тангенте хиперболе из тачке $T(x_0,y_0)$ која не припада хиперболи, (припада њеној спољашњости) сличан је поступку налажења једначине тангенте кружнице.

Наиме, ако је $y=kx+n$, једначина тражене тангенте хиперболе (13), онда су испуњени следећи услови

$$a^2k^2-b^2=n^2 \quad \text{и} \quad y_0=kx_0+n,$$

одакле после елиминације n, за $x_0 \neq \pm a$ важи

(17) $$\left(a^2-x_0^2\right)k^2+2x_0y_0k-b^2-y_0^2=0$$

тј.

$$k_{1,2} = \frac{-x_0 y_0 \pm \sqrt{-b^2 x_0^2 + a^2 y_0^2 + a^2 b^2}}{a^2 - x_0^2}.$$

Како тачка $T(x_0, y_0)$ припада спољашњости хиперболе, тј. $b^2 x_0^2 - a^2 y_0^2 - a^2 b^2 < 0$, то постоје две различите реалне вредности за k, тј. $k_1 \neq k_2$, што значи да постоје и две различите тангенте

$$t_1 : y - y_0 = k_1 (x - x_0) \text{ и } t_2 : y - y_0 = k_2 (x - x_0),$$

из тачке $T(x_0, y_0)$, спољашњости хиперболе.

Ако је $a^2 - x_0^2 = 0$, тј. $x_0 = \pm a$, из услова $T \notin \mathcal{E}$ следи $y_0 \neq 0$, па је једначина (17) линеарна и има једно решење

$$k = \frac{y_0^2 + b^2}{2 x_0 y_0},$$

а једначине тангенти су

$$t_1 : y - y_0 = k(x - x_0) \text{ и } t_2 : x = x_0.$$

Поступак налажења тангенте елипсе, реализује се активирањем, редом, апликација (4.3.15.a.ggb), (4.3.15.b.ggb) и (4.3.15.ggb), у програму GeoGebra, кликом на одговарајући линк.

Пример 3. Саставити једначине тангенти хиперболе $x^2 - y^2 = 16$ из тачке $A(-1, -7)$.

Решење. а) Ако је права $y = kx + n$ тражена тангента (Слика 14.), онда су испуњени следећи услови

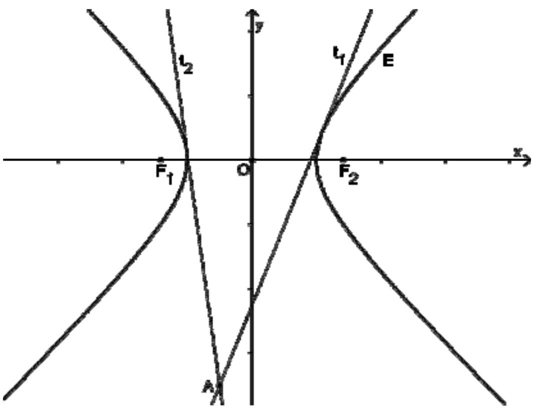
$$16k^2 - 16 = n^2 \text{ и } k - n = 7,$$

одакле је

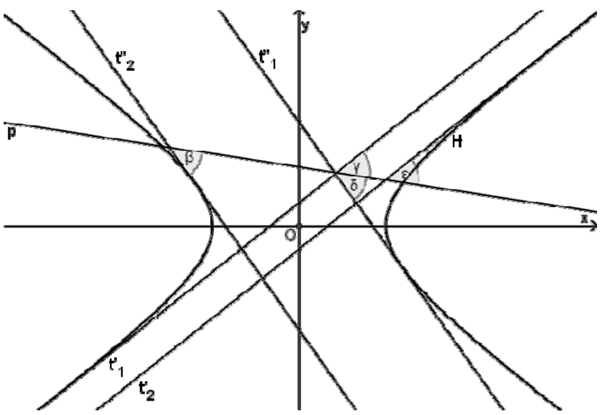
$$k_1 = 5/3, \quad n_1 = -16/3 \text{ и } k_2 = -13/5, \quad n_2 = -48/5.$$

Једначине тангенти су

$$t_1 : 5x - 3y - 16 = 0 \quad \text{и} \quad t_2 : 13x + 5y + 48 = 0.$$



Слика 14.



Слика 15. □

Пример 4. Саставити једначину тангенте хиперболе $x^2 - 2y^2 = 4$, која са правом $p : x + 7y - 9 = 0$ образује угао $\alpha = 45°$. 4.3.16.ggb

Решење. Ако је $t: y = k_t x + n_t$ тражена тангента, онда на основу услова $\text{tg}\alpha = 1$, важи $7k_t + 1 = 7 - k_t$, или $7k_t + 1 = k_t - 7$, одакле је $k_t' = 3/4$ или $k_t'' = -4/3$. На основу услова (16), имамо одговарајуће врредности $n_t' = \pm 1/2$ или $n_t'' = \pm\sqrt{46}/3$, а тражене тангенте имају једначине: $t_{1,2}' : 3x - 4y \pm 2 = 0$ и $t_{1,2}' : 4x + 3y \pm \sqrt{46} = 0$. □

Напомена 4. Слично напред наведеном поступку, може се доказати да за хиперболу $\mathcal{H} : b^2(x-p)^2 - a^2(y-q)^2 = a^2b^2$ и праву $l : y = kx + n$, важе следећи односи:

- права и хипербола су дисјунктни скупови $\Leftrightarrow a^2k^2 - b^2 > (kp - q + n)^2$,
- права је тангента хиперболе $\Leftrightarrow a^2k^2 - b^2 = (kp - q + n)^2$,
- права је сечица хиперболе $\Leftrightarrow a^2k^2 - b^2 < (kp - q + n)^2$.

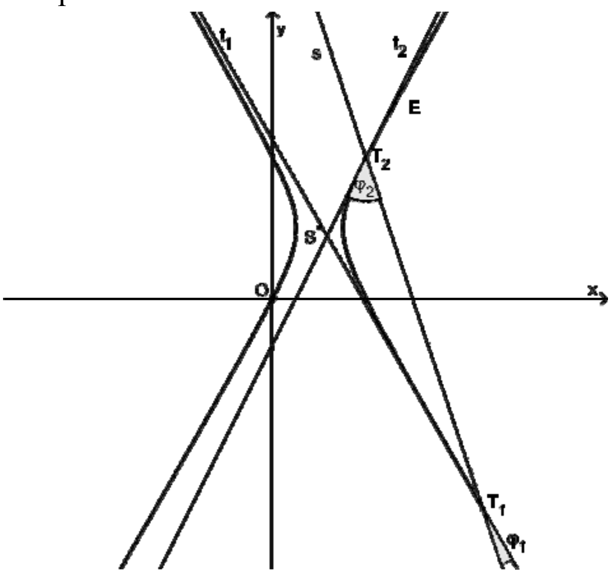
Једначина тангенте у тачки $T(x_0, y_0)$ дате хиперболе тада гласи

(18) $$b^2(x_0 - p)(x - p) - a^2(y_0 - q)(y - q) = a^2b^2.$$ □

Илустрација поступка налажења тангенте хиперболе, може се добити кликом на линк 4.3.17.ggb и активирањем апликације GeoGebra.

4. Угао између праве и хиперболе. Ако права сече хиперболу, онда се под углом између праве и хиперболе, подразумева угао између праве и тангенте хиперболе у пресечној тачки. Очигледно је да је угао између тангенте и хиперболе једнак 0 (нула). Познато је да су углови између сечице и тангенти у пресечним тачкама подударни једино када су пресечне тачке (значи и сама сечица), и у њима тангенте, симетричне у односу на осу, или центар симетрије хиперболе.

То значи да при решавању овог проблема, треба одредити угао између сечице и тангенте у свакој од пресечних тачака посебно, изузимајући случај када је сечица хиперболе осно сометрична у односу на једну од оса, или у односу на центар симетрије хиперболе.



Слика 16.

Пример 4. Одредити углове пресека хиперболе $\mathcal{H}:3(x-2)^2-(y-3)^2=3$ и праве $s:3x+y-9=0$.

Решење. Тангенте t_1 и t_2 у пресечним тачкама $T_1(-9,9)$ и $T_2(4,6)$, редом имају једначине: $t_1:7x+4y=27$ и $t_2:2x-y=2$, а углови које оне образују са сечицом s су $\varphi_1=\operatorname{arctg}0.2$ и $\varphi_2=45°$, редом (Слика 16).

Решење и резултат задатка, као и решења задатака за друге могуће односе праве и елипсе, могу се добити кликом на линк 4.3.18.ggb и активирањем апликације GeoGebra. □

4.3.5. Дијаметри хиперболе

Као и у случају елипсе, посматрамо **праву која садржи средине паралелних тетива хиперболе**. Ову праву **називамо дијаметар хиперболе** и у следећој теореми анализирамо њене важне особине.

Теорема 7. *Средине паралелних тетива хиперболе, колинеарне су.*

Доказ. Нека је дата хипербола $\mathcal{H}(O,a,b):b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ и константа $k\in\mathbb{R}$. Тада у скупу свих паралелних правих

$$y=kx+n,$$

за неке вредности параметра $n\in\mathbb{R}$, постоји подскуп, који чине (паралелне) сечице дате хиперболе. Нас занимају само оне сечице које нису паралелне асимптотама, тј. сечице за које је $k\neq\pm b/a$, или $a^2k^2-b^2\neq0$. Приметимо да за $n=0$, права

(19) $$l:x=kx$$

садржи центар хиперболе.

На сечицама поменутог скупа, дата хипербола одсеца одговарајуће паралелне тетиве, што са сечицама паралелним асимптоти није случај. Поступајући као у тачки 4., са циљем одређивања пресечних тачака $M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)$, хиперболе $\mathcal{H}(O,a,b)$ и неке од паралелних сечица датог скупа, (крајњих тачака једне од наведених тетива) добијамо једначину (14), из које следи:

$$x_1+x_2=\frac{2a^2kn}{b^2-a^2k^2}.$$

Ако је $M_0(x_0,y_0)$ средина тетиве M_1M_2, онда је

$$x_0=\frac{a^2kn}{b^2-a^2k^2}\quad\text{и}\quad y_0=kx_0+n=\frac{a^2k^2n}{b^2-a^2k^2}+n=\frac{b^2n}{b^2-a^2k^2}.$$

Елиминишући n из последње две једначине, имамо

$$y_0=\frac{b^2}{a^2k}x_0,$$

што значи да средине M_0 свих тетива, одређених хиперболом $\mathcal{E}(O,a,b)$ и сечицама $y = kx + n$, припадају једној правој

(20) $$l' : y = \frac{b^2}{a^2 k} x,$$

која садржи центар хиперболе.

Ако су сечице паралелне са y-осом (тада $k \notin \mathbb{R}$), јасно је да због симетричности хиперболе у односу x-осу, средине одговарајућих тетива припадају оси симетри-је хиперболе, x-оси, која такође садржи центар хиперболе. ■

Илустрација изведених закључака може се добити кликом на линк 4.3.19. ggb и активирањем апликације GeoGebra, што је и тврђење претходне теореме.

Дефиниција 5. Права одређена срединама паралелних тетива хиперболе зове се дијаметар хиперболе.

Из доказа теореме видимо, да за коефицијенте правца: k - дијаметра l и k' - дијаметра l', елипсе $\mathcal{H}(O,a,b)$ важи следећа релација

(21) $$kk' = \frac{b^2}{a^2},$$

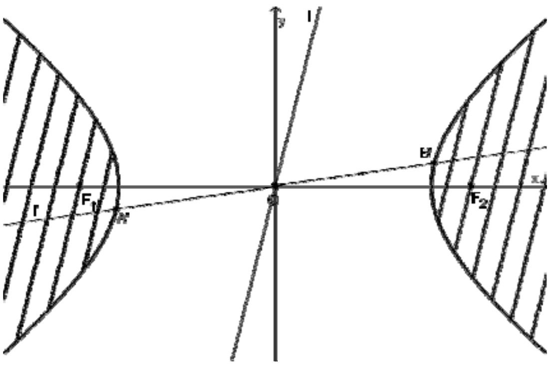
симетрична у односу на k и k'. **Тада за дијаметре l и l' хиперболе кажемо да су (узајамно) коњуговани дијаметри.**

Узајамност коњугованих дијаметара одређена је у следећој дефиницији.

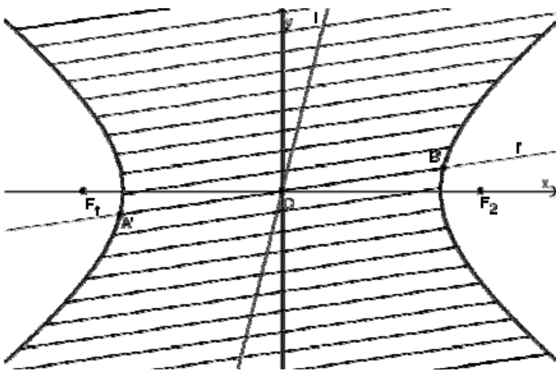
Дефиниција 6. Два дијаметра хиперболе су (узајамно) коњуговани ако сваки од њих полови тетиве хиперболе паралелне оном другом дијаметру (Слике 17. и 18.).

Сада доказујемо једну веома значајну особину тангенте хиперболе.

Теорема 8. *Права је тангента хиперболе, ако и само ако је паралелна дијаметру хиперболе, који је коњугован са дијаметром који садржи тачку додира.*



Слика 17.



Слика 18.

Доказ. Нека је $T(x_0, y_0)$ тачка хиперболе $\mathcal{H}(O,a,b) : b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$. Тада је $l : y = \frac{y_0}{x_0} x$ дијаметар хиперболе који садржи тачку додира T, а њему коњуговани дијаметар је права $l' : y = \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0} x$. Једначина праве која садржи тачку додира T, а паралелна је дијаметру l' хиперболе, гласи

$$y-y_0=\frac{b^2x_0}{a^2y_0}\left(x-x_0\right),$$

што после сређивања даје тангенту хиперболе у тачки T:

$$t:b^2x_0x-a^2y_0y=a^2b^2.$$

Обрнуто, тангента

$$t:y=\frac{b^2x_0}{a^2y_0}x-\frac{b^2}{y_0}$$

у тачки $T\left(x_0,y_0\right)$ хиперболе $\mathcal{H}\left(O,a,b\right)$, паралелна је са дијаметром

$$l':y=\frac{b^2x_0}{a^2y_0}x$$

који је коњугован дијаметру

$$l:y=\frac{y_0}{x_0}x. \qquad \blacksquare$$

Доказани потребан и довољан услов представља дефиницију тангенте хиперболе. Њен приказ се може добити кликом на линк 4.3.20.ggb и активирањем апликације GeoGebra.

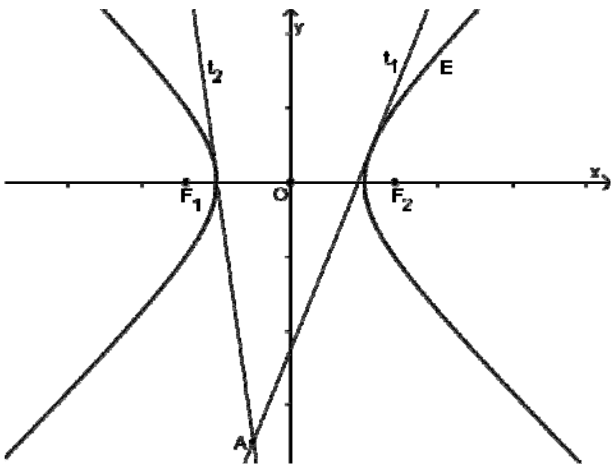
4.3.6. Полара и пол у односу на хиперболу

Нека је $\mathcal{H}\left(O,a,b\right):b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$ хипербола, $P\left(x_0,y_0\right)$ тачка њене спољашње области и t_1 и t_2 тангенте из тачке P на хиперболу 4.3.21.ggb (Слика 19.). Ако су $T_1\left(x_1,y_1\right)$ и $T_2\left(x_2,y_2\right)$ додирне тачке тангенти и хиперболе, онда су једначине тангенти хиперболе

$$t_1:b^2x_1x-a^2y_1y=a^2b^2 \text{ и } t_2:b^2x_2x-a^2y_2y=a^2b^2,$$

а из услова $P\in t_1$ и $P\in t_2$, следи

$$b^2x_1x_0-a^2y_1y_0=a^2b^2 \text{ и } b^2x_2x_0-a^2y_2y_0=a^2b^2.$$



Слика 19.

На основу последње две релације закључујемо да права

$$l : b^2 x_0 x - a^2 y_0 y = a^2 b^2$$

садржи тачке додира T_1 и T_2, тј. права $l = p(T_1, T_2)$, је сечица хиперболе $\mathcal{H}$.

Сечица l, одређена додирним тачкама тангенти хиперболе из тачке P, зове се **полара тачке (пола)** P, **у односу на хиперболу** $\mathcal{H}$.

Сада доказујемо да и тачки унутрашње области хиперболе одговара полара у односу на ту хиперболу.

У ту сврху уочимо тачку $P(x_0, y_0)$ унутрашње области хиперболе $\mathcal{H}$, дијаметар хиперболе $l : y_0 x - x_0 y = 0$, који је садржи, и у тачки P њему коњуговану сечицу хиперболе $s : b^2 x_0 (x - x_0) - a^2 y_0 (y - y_0) = 0$. Тангенте t_1 и t_2, у пресечним тачкама T_1 и T_2, сечице и хиперболе секу њен дијаметар l у тачки $P'(x', y')$, где је

$$x' = \frac{a^2 b^2 x_0}{b^2 x_0^2 - a^2 y_0^2} \quad \text{и} \quad y' = \frac{a^2 b^2 y_0}{b^2 x_0^2 - a^2 y_0^2}.$$

Из услова $b^2 x_0^2 - a^2 y_0^2 > a^2 b^2$, да је $P(x_0, y_0)$ тачка унутрашње области хиперболе $\mathcal{H}$, следи

$$b^2 x'^2 - a^2 y'^2 = \left(\frac{a^2 b^2}{b^2 x_0^2 - a^2 y_0^2} \right)^2 \left(b^2 x_0^2 - a^2 y_0^2 \right) = \frac{a^2 b^2}{b^2 x_0^2 - a^2 y_0^2} a^2 b^2 < a^2 b^2,$$

што значи да је $P'(x', y')$ тачка спољашње области хиперболе $\mathcal{H}$.

Права p, паралелна сечици s (или дијаметру, коњугованом дијаметру l), која садржи тачку P' чија је једначина

$$p : b^2 x_0 (x - x') - a^2 y_0 (y - y') = 0,$$

или

(22) $$p : b^2 x_0 x - a^2 y_0 y = a^2 b^2,$$

је полара пола $P(x_0, y_0)$, у односу на хиперболу $\mathcal{H}$, што је и требало да се докаже. Очигледно је да за $(x_0, y_0) = (0, 0)$ тачка $P'(x', y')$ и права p, не постоје.

На основу изведених закључака, увешћемо следећу аналитичку дефиницију

Дефиниција 7. Нека је $\mathcal{H}(O, a, b)$ хипербола и $P(x_0, y_0)$ тачка у њеној равни, различита од центра хиперболе. Права

$$p : b^2 (x_0 - p)(x - p) - a^2 (y_0 - q)(y - q) = a^2 b^2$$

зове се **полара тачке (пола)** P, у односу на хиперболу $\mathcal{H}(O, a, b)$.

Непосредне последице ове дефиниције јесу следећа тврђења, о односу тангенте и хиперболе и о односу фокуса и директрисе

Теорема 9. *Полара тачке хиперболе је тангента хиперболе у тој тачки.* ■

Теорема 10. *Полара фокуса хиперболе је одговарајућа директриса.* ■

Из претходног излагања види се да за сваку тачку, различиту од центра хиперболе, постоји полара, у односу на ту хиперболу.

Обрнуто, нека је $p: Ax+By+C=0$ произвољна права и $\mathcal{H}: b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$, хипербола. Да би права p била полара неке тачке $P(x_0,y_0)$, у односу на хиперболу $\mathcal{H}$, једначине

$$Ax+By+C=0 \quad \text{и} \quad b^2x_0x-a^2y_0y=a^2b^2,$$

треба да представљају исту праву, тј. треба да важи

$$\frac{b^2x_0}{A}=-\frac{a^2y_0}{B}=-\frac{a^2b^2}{C},$$

одакле је

$$x_0=-\frac{a^2A}{C} \quad \text{и} \quad y_0=-\frac{b^2B}{C},$$

где је $C\neq 0$, што значи да права p не садржи центар хиперболе, тј. није дијаметар или асимптота, а такође коефицијенти A и B нису истовремено једнаки нули, јер $(x_0,y_0)\neq(0,0)$.

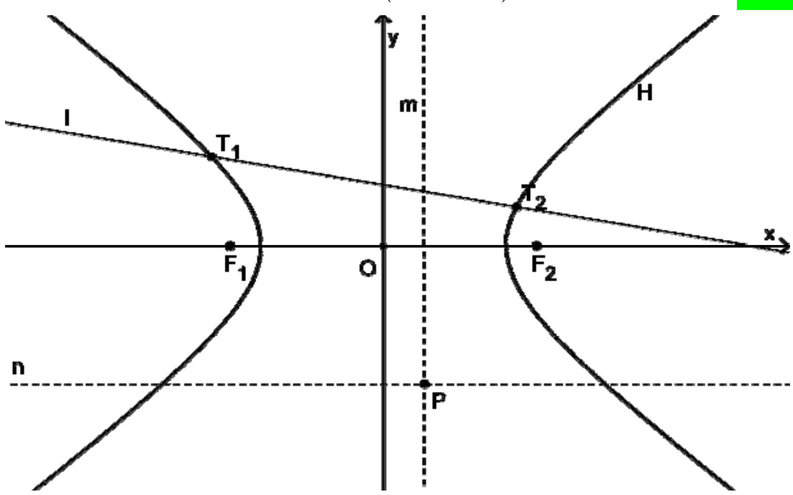
Овим је доказано да за сваку тачку, различиту од центра хиперболе, постоји у равни хиперболе полара, у односу на хиперболу, и за сваку праву, која не садржи центар хиперболе (није дијаметар, или асимптота), постоји у равни хиперболе пол, у односу на хиперболу.

Пример 5. Одредити координате пола P, поларе $p: x+6y-12=0$, у односу на хиперболу $\mathcal{H}: 9x^2-16y^2=144$.

Решење. Пошто је $p: 9x_0x-16y_0y=144$ једначина поларе, пола $P(x_0,y_0)$, у односу на дату хиперболу (Слика 20.), онда важи следећа пропорција

$$\frac{9x_0}{1}=-\frac{16y_0}{6}=12,$$

одакле је $x_0=4/3$ и $y_0=-9/2$. Тачка $P(4/3;-9/2)$ је пол праве p 4.3.22.ggb. □



Слика 20.

Пример 6. Тангента кружнице $\mathcal{K}: x^2+y^2=r^2$, истовремено је полара пола P, у односу на хиперболу $\mathcal{H}: b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$. Наћи геометријско место полова P. Специјално: $r=2$, $a=2$, $b=1$.

Решење. Полара p, пола $P(x_0,y_0)$, у односу на дату хиперболу има једначину $p: b^2x_0x-a^2y_0y=a^2b^2$, а тангента t, дате кружнице у њеној тачки $T(x_1,y_1)$ има једначину $t: x_1x+y_1y=r^2$. Како је, по услову задатка, тангента кружнице у тачки T, истовремено полара пола P, тј. $t=p$, онда је

$$\frac{x_1}{b^2x_0}=-\frac{y_1}{a^2y_0}=\frac{r^2}{a^2b^2}=\lambda,$$

одакле је

$$x_1=\frac{r^2}{a^2}x_0 \quad \text{и} \quad y_1=-\frac{r^2}{b^2}y_0.$$

Коначно, из услова $T\in\mathcal{K}$, тј. $x_1^2+y_1^2=r^2$, за координате x_0 и y_0, пола P, важи

$$\frac{x_0^2}{\left(a^2/r\right)^2}+\frac{y_0^2}{\left(b^2/r\right)^2}=1,$$

што значи да пол P описује елипсу, са центром $O(0,0)$ и полуосама a^2/r и b^2/r. У специјалном случају, пол P тангенте кружнице $\mathcal{K}$, која је истовремено полара, у односу на елипсу $\mathcal{E}$, описује елипсу

$$x^2+16y^2=4.$$

Илустрација примера и решење специјалног случаја, може се добити кликом на линк 4.3.23.ggb и активирањем апликације GeoGebra. □

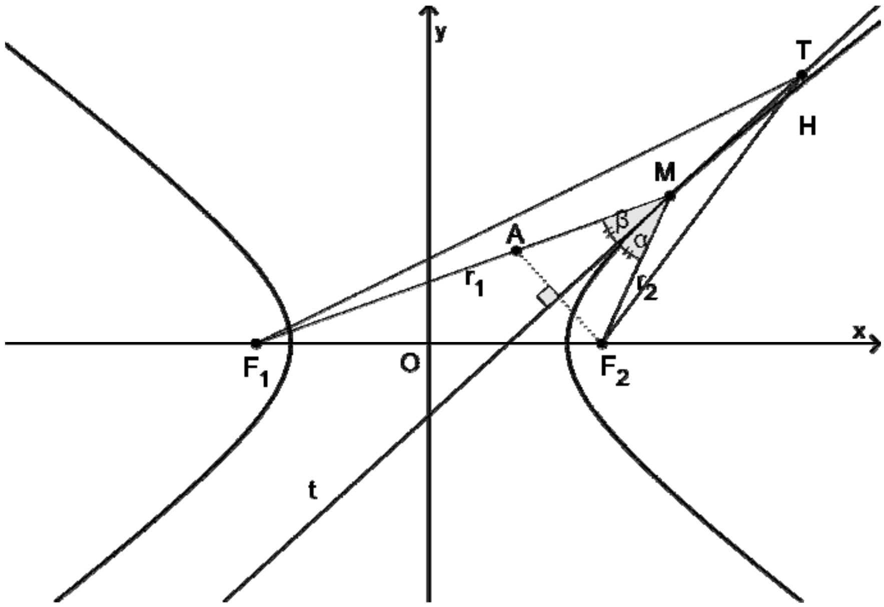
4.3.7. Оптичко својство хиперболе

Под оптичким својством хиперболе, подразумева се својство хиперболе на коме се заснива одбијање светлосног зрака од хиперболичког огледала. Наиме, ако се извор светлости налази у једном фокусу хиперболичког огледала, његови светло-сни зраци се одбијају од огледала, као да је извор у другом фокусу. Ово важно својство регулише следећа теорема

Теорема 11. *Тангента у тачки M хиперболе* (4)*, са жижама F_1 и F_2, образује једнаке углове са фокалним радијусима F_1M и F_2M и припада унутрашњости угла $\measuredangle F_1MF_2$.*

Доказ. Нека је t тангента у тачки M хиперболе са великом осом $2a$ и жижама F_1 и F_2, и нека је тачка A, симетрична жижи F_2, у односу на тангенту t, (Слика 22.). Тада је $d(M,A)=d(M,F_2)$, а одатле следи једнакост

$$\left|d(M,F_1)-d(M,A)\right|=\left|d(M,F_1)-d(M,F_2)\right|=2a.$$



Слика 22.

Пошто је произвољна тачка $T \in t$, $T \neq M$, тачка спољашње области хиперболе, то на основу Теореме 2. важи

$$\left|d\left(T,F_1\right)-d\left(T,F_2\right)\right|<2a.$$

То значи да израз $\left|d(M,F_1)-d(M,A)\right|=d(F_1,A)$ има максималну вредност, а одатле следи да су тачке F_1, M и A, три различите колинеарне тачке, тј. $M \in p\left(F_1,A\right)$. С друге стране, тангента t је симетрала угла $\measuredangle AMF_2$, унутрашњег угла троугла ΔF_1F_2M. Одатле непосредно следи да су углови које тангента t образује са фокалним радијусима F_1M и F_2M подударни. ■

Илустрација описаног оптичког својства, може се добити кликом на линк 4.3.24.ggb и активирањем апликације GeoGebra.

Пример 7. Нека је дата кружница $k: x^2+y^2=a^2$ и тачке $F_1\left(-c,0\right)$ и $F_2\left(c,0\right)$, где је $c>a>0$. Ако је N произвољна тачка кружнице, права $t \perp p\left(F_2,N\right)$ и тачка T симетрична тачки F_2, у односу на тачку N, одредити геометријско место пресечних тачака M, правих t и $p\left(F_1,T\right)$.

Решење. За координате тачке $N\left(x_1,y_1\right)\in k$ важи $x_1^2+y_1^2=a^2$, а пошто је $T=\sigma_N\left(F_2\right)$, онда је $T\left(2x_1-c,2y_1\right)$. Из услова нормалности $t\perp p\left(F_2,N\right)$, за $y_1\neq 0$, следи

$$t: y-y_1=\frac{c-x_1}{y_1}\left(x-x_1\right),$$

а за $x_1\neq 0$, права $p\left(F_1,T\right)=d$, дата је једначином

$$d: y=\frac{y_1}{x_1}\left(x+c\right).$$

Праве t и d секу се у тачки $M(x,y)$, због чега важи

$$\frac{c-x_1}{y_1}(x-x_1)+y_1=\frac{y_1}{x_1}(x+c),$$

одакле, после множења са x_1y_1 и коришћења услова $x_1^2+y_1^2=a^2$, имамо

$$x_1=\frac{a^2x+a^2c}{a^2+cx},\quad y_1=\frac{a^2y}{a^2+cx}.$$

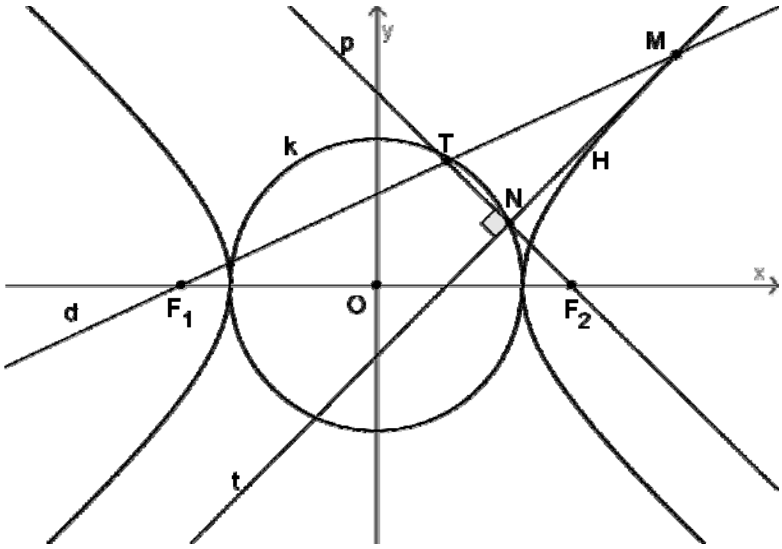
Из услова $N(x_1,y_1)\in k$ следи

$$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2), \tag{23}$$

што је централна хипербола са реалном осом $2a$ и жижама $F_1(c,0)$ и $F_2(-c,0)$, а то је тражено геометријско место тачака (Слика 23).

Ако је $y_1=0$, онда је $x_1=\pm a$, тангента $t:x=\pm a$, а тачка $M_1(-a,0)$, односно $M_2(a,0)$, пресека правих t и d, припада хиперболи (23).

Ако је $x_1=0$, онда је $y_1=\pm a$, права $d:x=-c$, а тачка $M_1\left(0,(c^2-a^2)/a\right)$, односно $M_2\left(0,-(c^2-a^2)/a\right)$, пресека правих t и d, припада хиперболи (23).



Слика 23.

Обрнуто, ако координате тачке $M(x,y)$ задовољавају једначину (23) хиперболе и ако је права

$$t:y=kx+n$$

тангента хиперболе у тачки M, која је истовремено (Теорема 11.) симетрала угла код темена $\measuredangle F_1MF_2$, тада важи услов (да је права t тангента хиперболе)

$$a^2k^2-(c^2-a^2)=n^2.$$

Нормала p из тачке F_2, на праву t, дата је са

$$p:y=-\frac{1}{k}(x-c),$$

а за координате подножја N нормале важи

$$x_1 = \frac{c-kn}{k^2+1} \quad \text{и} \quad y_1 = \frac{ck+n}{k^2+1}.$$

Користећи услов да је права t тангента хиперболе (23), имамо

$$x_1^2 + y_1^2 = \left(\frac{c-kn}{k^2+1}\right)^2 + \left(\frac{ck+n}{k^2+1}\right)^2 = \frac{k^2n^2+c^2+c^2k^2+n^2}{\left(k^2+1\right)^2} = \frac{\left(c^2+n^2\right)\left(k^2+1\right)}{\left(k^2+1\right)^2}$$

$$= \frac{c^2+a^2k^2-c^2+a^2}{k^2+1} = \frac{a^2\left(k^2+1\right)}{k^2+1} = a^2,$$

што значи да заједничка тачка $N\left(x_1, y_1\right)$ тангенте t и њене нормале p, припада кружници k, чиме је доказано тврђење.

Илустрација примера и конструкција хиперболе, може се добити кликом на линк 4.3.25.ggb и активирањем апликације GeoGebra. □

4.3.8. Задаци

1. Одреди једначину хиперболе која садржи тачке: 1.ggb
   а) $A(6,3)$ и $B\left(2\sqrt{3},1\right)$,
   б) $A(6,-1)$ и $B\left(-8,2\sqrt{2}\right)$.
2. Одредити једначину хиперболе, чија је жижа $F\left(2\sqrt{3},0\right)$, а угао између њених асимптота износи $\varphi = 60^\circ$. 2.ggb
3. Одреди једначину хиперболе чији је линеарни ексцентрицитет 17 и $a-b+7=0$.
4. Одредити једначину хиперболе чији је нумерички ексцентрицитет $4/3$, а линеарни ексцентрицитет 2.
5. Одредити једначину хипербуле, чије су жиже у главним теменима елипсе $x^2/100 + y^2/64 = 1$, а директрисе садрже жиже елипсе. 5.ggb
6. Права $3x+4y=0$ је асимптота хиперболе којој су жиже удаљене 10. Одреди једначину хиперболе. 6.ggb
7. Одредити површину троугла који образују асимптоте хиперболе $x^2 - 0.5y^2 = 4$ и нормала на Ox осу кроз једну од жижа. 7.ggb
8. Права $3x-2y=0$ је једна асимптота хиперболе код које растојање између жижа износи $4\sqrt{13}$. Одредити једначину хиперболе.
9. Израчунати површину правоуглог троугла чија су два темена жиже хиперболе $x^2 - y^2 = 9$, а теме правог угла на асимптоти. 9.ggb
10. Одредити површину троугла који образују асимптоте хиперболе $x^2 - y^2 = 8$ и нормала на Ox осу кроз једну од жижа. 10.ggb
11. Одредити једначину хиперболе, ако је $c=2$, а тангента $2x-y-1=0$.

12. Одредити једначину тангенте и нормале хиперболе $9x^2 - y^2 = 144$ у тачки пресека хиперболе и праве $y = 5$.
13. Одредити једначине тангенти конструисаних у крајњим тачкама параметра хиперболе $9x^2 - 16y^2 = 144$.
14. У једначини праве $ax - 3y = 24$ одредити a, тако да права буде тангента хиперболе $x^2 - y^2 = 36$. 14.ggb
15. Из тачке $(1,-5)$ конструисати тангенте на хиперболу $5x^2 - 3y^2 = 1$ и израчунати растојање од те тачке до праве одређене додирним тачкама тангенти и хиперболе. 15.ggb
16. Кроз пресек праве $3x + y = 11$ и хиперболе $3x^2 - 4y^2 = 11$ пролази кружница чији је центар на x- оси. Наћи једначину кружнице и површину троугла чија су темена центар кружнице и пресечне тачке праве и кружнице. 16.ggb
17. Одредити једначине тангената из тачке $A(-1,-7)$ на хиперболу $x^2 - y^2 = 16$ 17.ggb 18.ggb
18. Одреди тангенту хиперболе $3x^2 - y^2 = 3$ из тачке $T(3,5)$. 18.ggb 17.ggb
19. Одреди угао који образују тангенте хиперболе $x^2 - y^2 = 1$ у тачкама у којима је сече нормала на апсцису у једној од жижа. 19.ggb
20. Одреди заједничке тангенте кривих $x^2 + 4y^2 = 4$ и $4x^2 - 9y^2 = 36$. 20.ggb
21. Доказати да се елипса и хипербола које имају заједничке жиже секу под правим углом. 21.ggb
22. Решити неједначине: 22.ggb 22.nb

    а) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} \le 1$,

    б) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} \ge 1$,

    в) $\sqrt{x} + \sqrt{y} \le 2$,

    г) $\left|\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{36}\right| < 1$,

    д) $\left|3x^2 - 9y^2\right| > 1$,

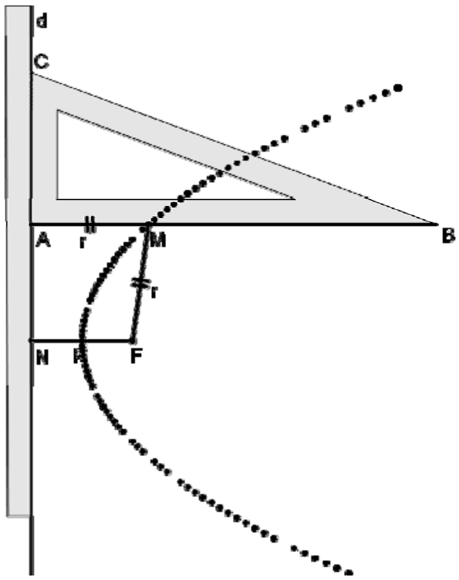
    е) $\sqrt{(x-2)^2 + y^2} - \sqrt{(x+2)^2 + y^2} < 2$.

4.4. ПАРАБОЛА

У претходном излагању, дефинисали смо елипсу и хиперболу као скупове тачака у равни, чији је збир, односно апсолутна вредност разлике, растојања од две утврђене тачке (фокуса) те равни, константан.

Такође је доказано да је скуп тачака у равни, одређеој правом (директрисом) и тачком ван те праве (фокусом), са особином да је количник њихових растојања од фокуса и њихових растојања од директрисе, константан и једнак реалном позитивном броју e (нумерички ексцентрицитет); ако је $e<1$ скуп тачака је елипса, ако је $e>1$ скуп тачака је хипербола.

Логично је да се постави питање шта представља наведени скуп тачака, ако је $e=1$, тј. ако је растојање произвољне тачке тог скупа од директрисе, једнако растојању исте тачке од фокуса. Тај скуп тачака зове се парабола (Слика 1.).



Слика 1.

Приказ "механичке конструкције" параболе добија се кликом на линк 4.4.1.ggb и активирањем апликације GeoGebra.

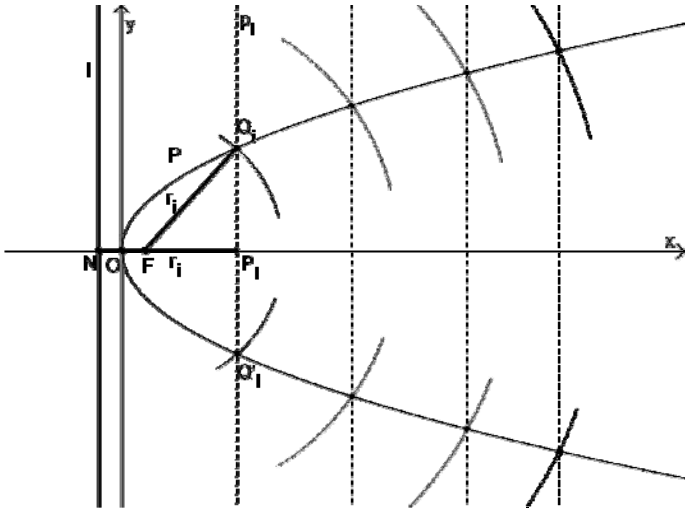
4.4.1. Дефиниција, конструкција и једначина параболе

Дефиниција 1. Нека је l дата права - **директриса** и нека је F дата тачка – **фокус** (жижа), на растојању p од праве. **Парабола**, са **параметром** p, је скуп тачака равни α одређене правом l и тачком F, са особином да су њихова растојања од фокуса једнака њиховим растојањима од директрисе, тј.

(1) $$\mathcal{P} := \{M : M \in \alpha(l,F) \wedge d(M,F) = d(M,l)\}.$$

Наведена дефиниција, послужиће за конструкцију и извођење једначине хиперболе.

Конструкција 1. Нека су дате директриса l и фокус F, на растојању p од директрисе (Слика 2.). Ако је N подножје нормале из фокуса F на директрису, онда је средина T, дужи NF, тачка параболе. Даље, на полуправој $[N,F)$ бирамо тачку P_1, тако да је $N-T-P_1$ и у њој праву p_1 паралелну директриси. Пресек лука $\mathcal{L}(F,NP_1)$ и праве p_1 су две тачке Q_1 и Q_1', параболе. Поступак настављамо даље, тако што у тачкама $P_i \in [N,F)$ конструишемо нове праве p_i, паралелне директриси l, и у пресеку са луковима $\mathcal{L}(F,NP_i)$, добијамо нове тачке параболе Q_i и Q_i'.



Слика 2.

Ова конструкција се може добити кликом на линк 4.4.2.ggb и активи-рањем апликације GeoGebra.

У следећој теореми решавамо проблем једначине параболе.

1. Канонски облик једначине параболе

Теорема 1. *Нека је* $p \in \mathbb{R}^+$ *и нека су у Декартовом правоуглом координатном систему дате: тачка* $F(p/2,0)$ *и права* $l: x=-p/2$. *Парабола (1), са фокусом* F *и директрисом* l, *је скуп*

(2) $$\mathcal{P} := \{(x,y) : y^2 = 2px \wedge p>0\},$$

где је p - ***параметар*** *параболе.*

Другим речима, под наведеним условима једначина параболе је

(3) $$y^2 = 2px, \quad p>0.$$

Доказ. Претпоставимо (Слика 3.а.) да је $M(x,y)$ тачка параболе (1), одакле је

$$d(M,F) = d(M,l).$$

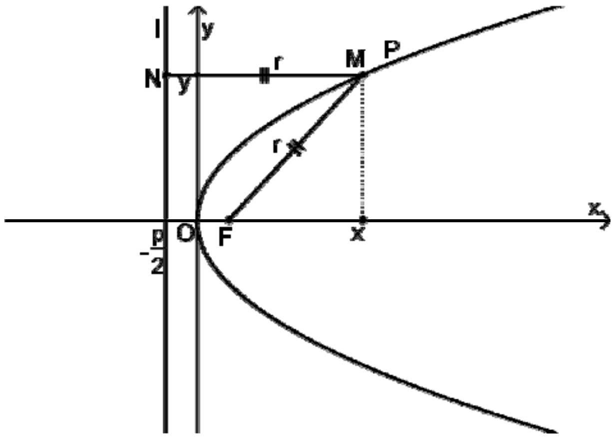
Тада је

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \left|x+\frac{p}{2}\right|,$$

а после квадрирања и сређивања добијамо

$$y^2 = 2px,$$

што значи да ако тачка $M(x,y)$ припада параболи (1), онда припада и скупу (2).



Слика 3.

Обрнуто, ако координате произвољне тачке $M(x,y)$ задовољавају једначину (3), тада је

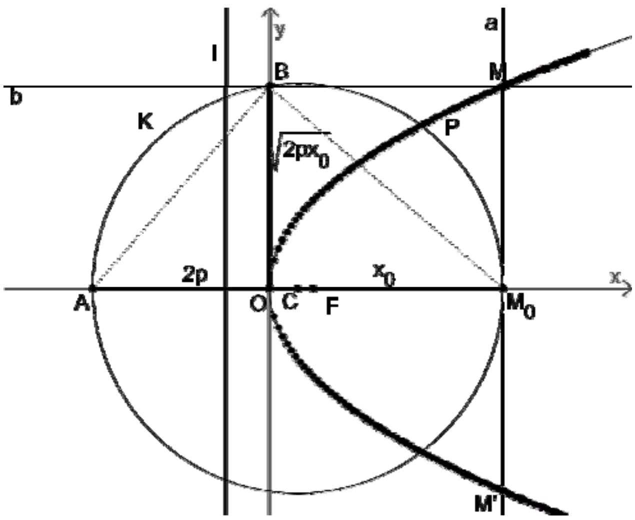
$$d(M,F)=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+2px}=\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2}=\left|x+\frac{p}{2}\right|=d(M,l),$$

што значи да тачка $M(x,y)$ припада параболи (1). ■

Конструкција 2. Да бисмо конструисали параболу, у овом случају ћемо се послужити једначином (3), али уз једно подсећање на један познати геометријски појам. Наиме, дуж a је **геометријска средина** дужи b и c, ако и само ако је

$$a^2=bc.$$

Ова дефиниција и једначина (3) упућују на следећи закључак: позитивна ордина-та, тачке $M(x,y)$ параболе (3), је геометријска средина двеју дужи од којих једна има дужину једнаку $2p$, а друга има дужину једнаку x.



Слика 4.

Прво се конструишу дужи OA, дужине $2p$ и OM_0, дужине x_0 (конструкцијом тачака $A(-2p,0)$ и $M_0(x_0,0)$), а затим њихова геометријска средина $y_0 = \sqrt{2p \cdot x_0}$, као висина OB правоуглог троугла $\triangle ABM_0$ (код кога су пројекције катета OA и OM_0, на хипотенузу AM_0), при чему је $B(0, y_0)$. Тачка $M(x_0, y_0)$, пресек праве a, кроз M_0, паралелне са висином OB и праве b кроз B, паралелне хипотенузи AM_0, описује параболу (Слика 4.).

Конструкција траекторије тачке M параболе може се добити кликом на линк 4.4.3.ggb и активирањем апликације GeoGebra.

2. Параметарски облик једначине параболе

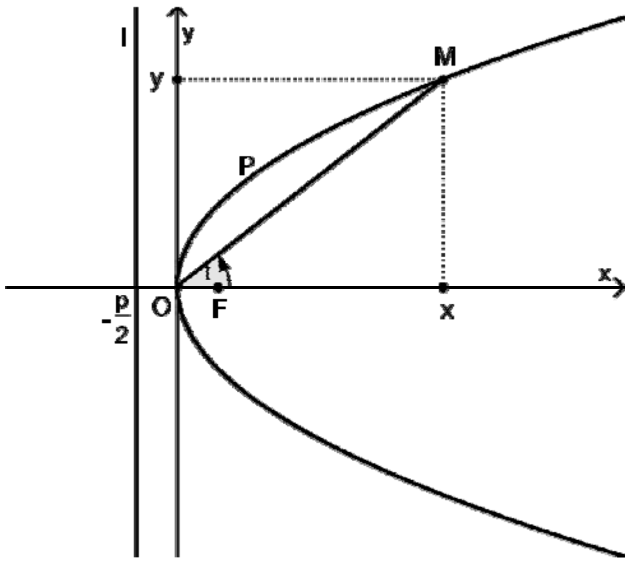
Теорема 2. *Нека је* $p \in \mathbb{R}^+$ *и* $t \in \mathbb{R} \setminus \{k \cdot \pi : k \in \mathbb{Z}\}$. *Једначине*

(4) $$x = 2p \cdot \text{ctg}^2 t \ \text{ и } \ y = 2p \cdot \text{ctg} t,$$

представљају ***параметарски облик*** *једанчине параболе* (3).

Доказ. Ако тачка $M(x, y)$ припада параболи (3), где је $p \in \mathbb{R}^+$, онда она припада области $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) : x \geq 0 \wedge y \in \mathbb{R}\}$, тј. припада "десној" затвореној полуравни са ивицом $x = 0$. Ако је дати параметар t мера угла који образује вектор $\overrightarrow{OM}$ са позитивним смером $x-$осе (Слика 5.), тада за $t \in \mathbb{R} \setminus \{k \cdot \pi : k \in \mathbb{Z}\}$ важи

$$\text{ctg} t = \frac{x}{y}.$$



Слика 5.

Пошто координате тачке $M(x, y)$ задовољавају једначину (3), имамо

$$\text{ctg}^2 t = \frac{x^2}{y^2} = \frac{x^2}{2px} = \frac{x}{2p},$$

а одатле следе параметарске једначине (4).

Обрнуто, ако за $p \in \mathbb{R}^+$ и $t \in \mathbb{R} \setminus \{k \cdot \pi : k \in \mathbb{Z}\}$, координате тачке $M(x, y)$ задовољавају једначине (4), онда је

$$2px = 2p \cdot 2p \cdot \text{ctg}^2 t = 4p^2 \text{ctg}^2 t = (2p \cdot \text{ctg} t)^2 = y^2,$$

што значи да је $M(x,y)$ тачка хиперболе (3).

Конструкција трајекторије тачке M параболе може се добити кликом на линк 4.4.4.ggb и активирањем апликације GeoGebra. ■

3. Унутрашња и спољашња област параболе.

Однос параболе и скупа тачака равни у којој је дефинисана, регулишу следећа дефиниција и теорема.

Дефиниција 2. Нека је $\mathcal{P}$ парабола у равни α, са фокусом F и директрисом l. Скуп тачака $U_{\mathcal{P}} = \{X : X \in \alpha(\mathcal{P}) \wedge [FX] \cap \mathcal{P} = \varnothing\}$ зове се **унутрашња област параболе** $\mathcal{P}$, а скуп $S_{\mathcal{P}} := \alpha \setminus (U_{\mathcal{P}} \cup \mathcal{P})$ зове се **спољашња област параболе** $\mathcal{P}$.

Теорема 2. *Ако је $\mathcal{P}$ парабола у равни α, са фокусом F и директрисом l, онда је унутрашња област*

(5) $$U_{\mathcal{P}} = \{X : X \in \alpha(\mathcal{P}) \wedge d(X,F) < d(X,l)\},$$

а спољашња област

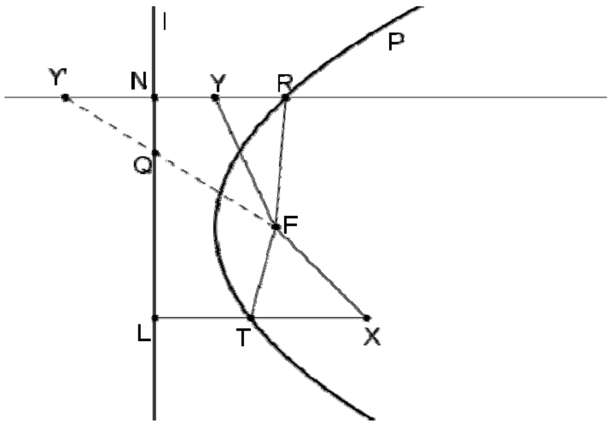
(6) $$S_{\mathcal{P}} := \{X : X \in \alpha(\mathcal{P}) \wedge d(X,F) > d(X,l)\}.$$

Доказ. Ако је X унутрашња тачка дате параболе $\mathcal{P}$, а L њена нормална пројекција на директрису l (подножје нормале из X на l) (Слика 6.), тада очигледно постоји заједничка тачка T, дужи $[XL]$ и параболе, тј. $[XL] \cap \mathcal{P} = \{T\}$, због чега важи

$$d(X,l) = d(X,L) = d(X,T) + d(T,L) = d(X,T) + d(F,T) > d(X,F),$$

Нека је тачка $Y \in S_{\mathcal{P}}$ између директрисе l и параболе $\mathcal{P}$. Ако је тачка N подножје нормале из Y на l, а R пресечна тачка нормале и параболе, онда је

$$d(Y,l) = d(Y,N) = d(N,R) - d(R,Y) = d(F,R) - d(R,Y) < d(Y,F).$$



Слика 6.

Ако је директриса између тачке Y' и параболе $\mathcal{P}$, а тачка N подножје нормале из Y' на l, а Q пресечна тачка директрисе и дужи $[FY']$, тада је

$$d(Y',F) = d(Y',Q) + d(Q,F) > d(Y',N) + d(Q,F) > d(Y',l),$$

што је и требало да се докаже. ■

Генерички организатор за маркирање унутрашње и спољашње области параболе, може се покренути кликом на линк 4.4.5.a.ggb, активирањем апликације GeoGebra.

У следећој теореми, која се доказује аналогно Теореми 1., дат је аналитички критеријум на основу кога се утврђује да ли тачка припада унутрашњој или спољашњој области параболе.

Теорема 3. *Тачка* $M(x_0, y_0)$, *припада* ***унутрашњости параболе*** (3), *ако и само ако је*

(5')
$$y_0^2 < 2px_0.$$

Тачка $M(x_0, y_0)$ *припада* ***спољашњости елипсе****, ако и само ако је*

(6')
$$y_0^2 > 2px_0.$$

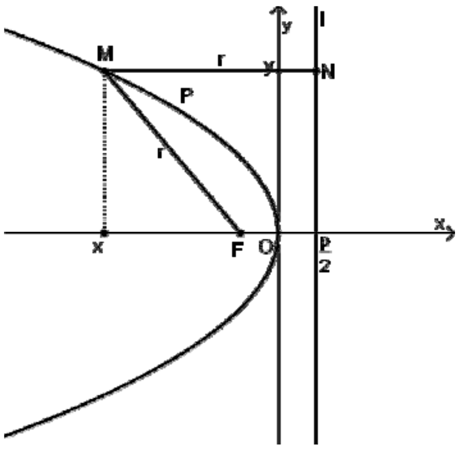
Илустрација релација (5), (6), (5') и (6') може се добити кликом на линк 4.4.5.b.ggb и активирањем апликације GeoGebra. ■

4.4.2. Нека својства параболе: положај, симетричност, теме

1. Положај. Уз основну претпоставку $p \in \mathbb{R}^+$, различити положаји фокуса и директрисе параболе имају за последицу и различите једначине:

а) за $F(-p/2, 0)$ и $l: x = p/2$ (Слика 7.), једначина параболе је

(8)
$$y^2 = -2px;$$



Слика 7.

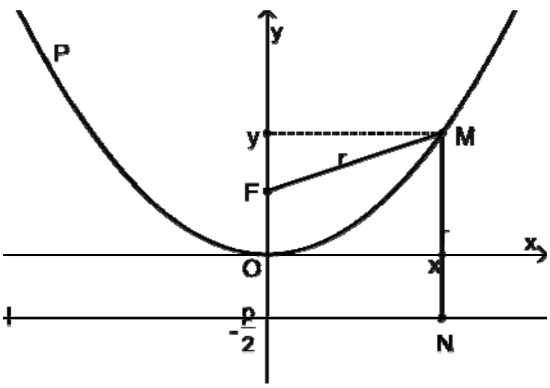
б) за $F(0, p/2)$ и $l: y = -p/2$ (Слика 8.), једначина параболе је

(9)
$$x^2 = 2py;$$

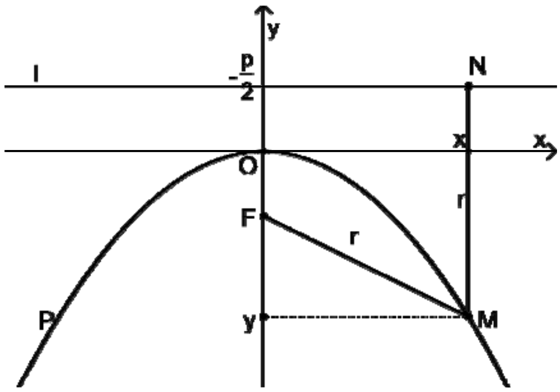
в) за $F(0, -p/2)$ и $l: y = p/2$ (Слика 9.), једначина параболе је

(10)
$$x^2 = -2py.$$

Илустрација графика параболе, у зависности од положаја фокуса и директрисе, може се добити кликом на линк 4.4.6.ggb, или 4.4.7.ggb и активирањем апликација GeoGebra. □



Слика 8.



Слика 9.

Напомена 1. Тачка $M(x_0, y_0)$, припада **унутрашњости**:

– параболе (8), ако и само ако је $y_0^2 < -2px_0$,

– параболе (9), ако и само ако је $x_0^2 < 2py_0$,

– параболе (10), ако и само ако је $x_0^2 < -2py_0$.

Тачка $M(x_0, y_0)$ припада **спољашњости**:

– параболе (8), ако и само ако је $y_0^2 > -2px_0$,

– параболе (9), ако и само ако је $x_0^2 > 2py_0$,

– параболе (10), ако и само ако је $x_0^2 > -2py_0$.

Илустрација наведених закључака може се добити кликом на линк 4.4.5.a.ggb, 4.4.5.b.ggb, 4.4.5.c.ggb, или 4.4.5.d.ggb, и активирањем апликације GeoGebra.

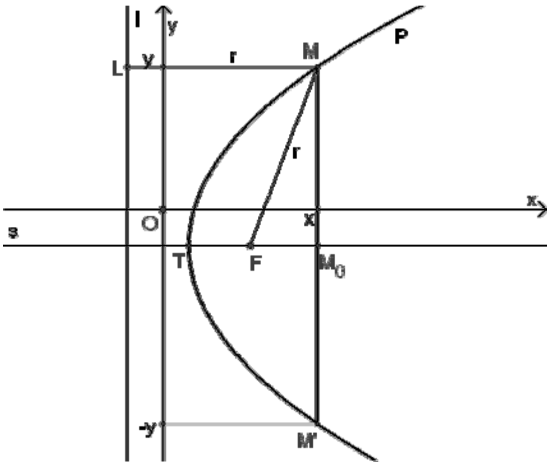
2. Симетричност. Пошто је $(-y)^2 = y^2$, функције $y^2 = 2px$ и $y^2 = -2px$ су парне по y, што значи да су параболе (3) (Слика 3.) и (8) (Слика 7.) симетриче у односу на x - осу. Једнакост $(-x)^2 = x^2$ повлачи парност по промењљивој x, функција $x^2 = 2py$ и $x^2 = -2py$, а због тога и симетричност парабола (9) (Слика 8.) и (10) (Слика 9.).

3. Теме параболе је тачка параболе која има најмање растојање од директрисе, а оно износи $p/2$. У свим случајевима (3), (8), (9) и (10), теме је тачка $O(0,0)$.

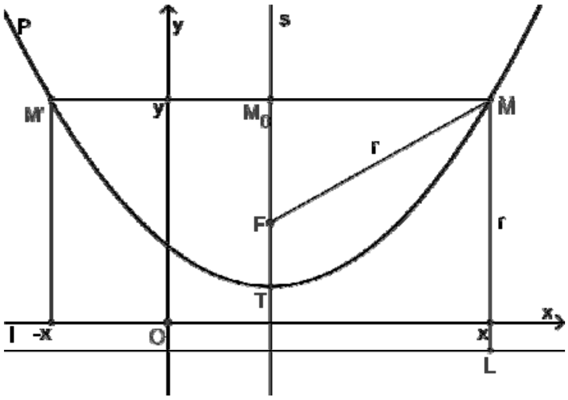
Напомена 2. Једначина

(11) $$(y-\beta)^2 = 2p(x-\alpha)$$

представља параболу, која настаје транслацијом параболе $y^2 = 2px$ за вектор $\vec{v} = (\alpha, \beta)$, где је $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (Слика 10.). Њено теме је $T(\alpha, \beta)$, фокус $F(\alpha + p/2, \beta)$, а директриса и оса симетрие су праве: $l : x = \alpha - p/2$ и $s : y = \beta$.



Слика 10.



Слика 11.

Аналогно, једначина $(x-\alpha)^2 = 2p(y-\beta)$ представља параболу, кола настаје транслацијом параболе $y^2 = 2px$ за вектор $\vec{v} = (\alpha, \beta)$ (Слика 11.). Теме параболе је $T(\alpha, \beta)$, фокус $F(\alpha, \beta + p/2)$, директриса $l : y = \beta - p/2$ и оса $s : x = \alpha$. □

Илустрација наведених особина може се добити кликом на линк 4.4.9.ggb, или 4.4.10.ggb и активирањем апликација GeoGebra.

Напомена 3. Познато је да квадратна функција

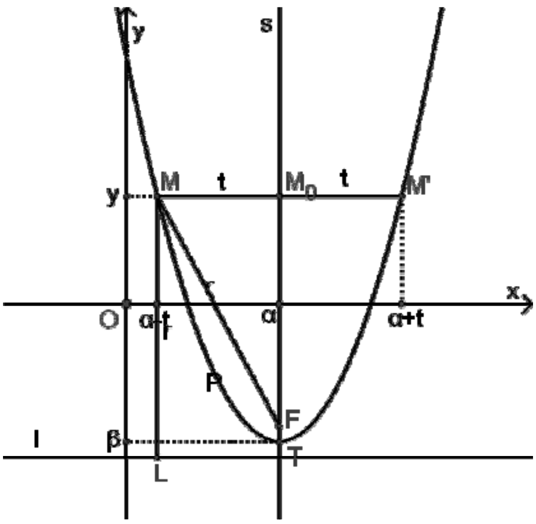
(12) $$y = ax^2 + bx + c,$$

за $a, b, c \in \mathbb{R}$ и $a \neq 0$, представља параболу. Канонски облик ове функције, за $\alpha = -b/2a$ и $\beta = (4ac - b^2)/4a$, је

$$y = a(x-\alpha)^2 + \beta,$$

или

$$(x-\alpha)^2 = \frac{1}{a}(y-\beta).$$



Слика 12.

На основу Напомене 2. параметар ове параболе је $p = 1/2a$, теме $T(\alpha, \beta)$, фокус $F(\alpha, \beta + 1/4a)$, директриса $l: y = \beta - 1/4a$, а оса симетрије $s: x = \alpha$, (Слика 12.). □

Пример 1. Одредити теме, осу, фокус и директрису параболе $y = x^2 - 5x + 4$.

Резултат. Користећи наведено у Напомени 3., имамо (Слика 12.): $p = 1/2$, $\alpha = 5/2$ и $\beta = -9/4$.

Илустрација закључака из Напомене 3. и уопштење примера могу се добити кликом на линк 4.4.11.ggb и активирањем апликација GeoGebra.

4.4.3. Парабола и права

1. Међусобни однос. За анализу односа параболе (3) и праве, решавамо систем једне квадратне (једначина параболе) и једне линеарне једначине (праве)

(13) $$y = kx + n \quad \wedge \quad y^2 = 2px, \quad p > 0$$

Заменом непознате y из једначине праве у једначину параболе и сређивањем, добијамо квадратну једначину

(14) $$k^2x^2 + 2(kn - p)x + n^2 = 0,$$

ако и само ако је $k \neq 0$, при чему дискриминанта једначине гласи

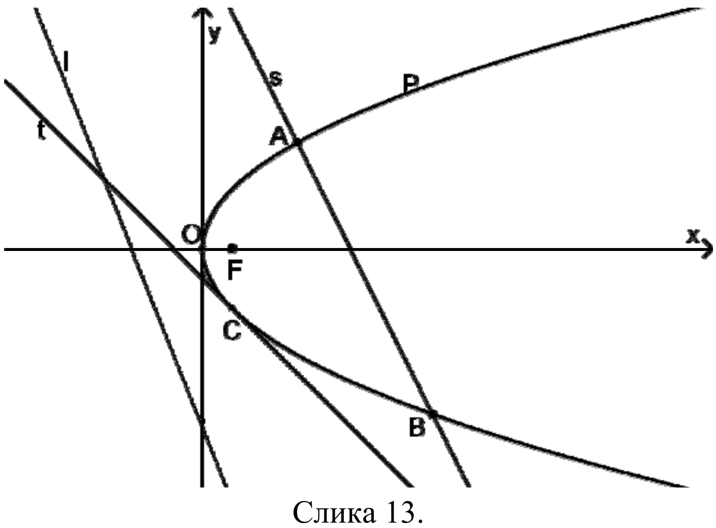
$$D = 4p(p - 2kn).$$

На основу особине дискриминанте квадратне једначине и услова $p > 0$, јасно је да за решења x_1 и x_2, једначине (14) важи:

$$x_1 = \overline{x}_2 \wedge x_1, x_2 \in \mathbb{C} \Leftrightarrow p < 2kn,$$

$$x_1 = x_2 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow p = 2kn,$$

$$x_1 \neq x_2 \wedge x_1, x_2 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow p > 2kn.$$



Слика 13.

Под условом $k \neq 0$, решењима x_1 и x_2 једначине (14),

$$x_1 = \frac{p - kn + \sqrt{p(p-2kn)}}{k^2}, \quad x_2 = \frac{p - kn - \sqrt{p(p-2kn)}}{k^2},$$

одговарају решења

$$y_1 = \frac{p + \sqrt{p(p-2kn)}}{k}, \quad y_2 = \frac{p - \sqrt{p(p-2kn)}}{k},$$

тако да су парови (x_1, y_1) и (x_2, y_2), решења система (13).

Ако су то парови реалних бројева (различити, или једнаки), права и парабола имају заједничке тачке $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$, (различите, или једнаке). Ако су пак, (x_1, y_1) и (x_2, y_2) парови комплексних бројева, права и парабола немају заједничких тачака (Слика 13).

Ако је $k = 0$, онда је једначина (14) линеарна и има **једно решење**, а решење система (13) је пар $\left(n^2/2p, n\right)$, што није тачка додира него тачка пресека праве l и парарболе и реч је о сечици која је паралелна са осом параболе.

Напред изведени закључци могу се добити кликом на линк 4.4.12.ggb и активирањем апликације GeoGebra, што је и тврђење следеће теореме.

Теорема 4. *За параболу* $\mathcal{P}$ *и праву* l*, дате системом једначина* (13)*, важе следећи односи*:

права и парабола су дисјунктни скупови $\Leftrightarrow p < 2kn$,

(15) *права је тангента параболе* $\Leftrightarrow p = 2kn$,

права је сечица параболе $\Leftrightarrow p > 2kn$. ■

2. Тангента у тачки параболе. Претпоставимо да једначина тангенте парарболе (3), у тачки $T(x_0, y_0)$, гласи

$$t : y = kx + n.$$

Како је тачка $T(x_0, y_0)$ једина заједничка тачка тангенте и параболе, то је

$$y_0 = kx_0 + n,$$

а због услова (15), важи

$$x_0 = \frac{p - kn}{k^2} = \frac{kn}{k^2} = \frac{n}{k} \text{ и } y_0 = \frac{p}{k} = \frac{2kn}{k} = 2n.$$

Одатле је

$$k = \frac{y_0}{2x_0} \text{ и } n = \frac{y_0}{2},$$

па једначина тангенте у тачки $T(x_0, y_0)$ параболе (3),

(16) $$y_0 y = p(x + x_0).$$

Напомена 4. Аналогним поступком утврђује се однос праве и параболе, као и једначина тангенте у тачки $T(x_0, y_0)$ параболе, ако је парабола дата једном од једначина: (8), (9), (10), (11), или (12), а права са $y = kx + n$, што је приказано у следећој табели:

	Једначина параболе	Услов додира праве и параболе	Једначина тангенте у тачки $T(x_0, y_0)$ параболе
1.	$y^2 = \pm 2px$	$p \mp 2kn = 0$	$y_0 y = \pm p(x + x_0)$
2.	$(y-\beta)^2 = \pm 2p(x-\alpha)$	$p \mp 2k(k\alpha - \beta + n) = 0$	$(y_0-\beta)(y-\beta) = \pm p(x + x_0 - 2\alpha)$
3.	$x^2 = \pm 2py$	$pk^2 \pm 2n = 0$	$x_0 x = \pm p(y + y_0)$
4.	$(x-\alpha)^2 = \pm 2p(y-\beta)$	$pk^2 \pm 2(k\alpha - \beta + n) = 0$	$(x_0-\alpha)(x-\alpha) = \pm p(y + y_0 - 2\beta)$

Илустрација односа праве и параболе (једначине 1. и 2. у табели) може се добити кликом на линк 4.4.13.ggb, а тангенте кликом на линк 4.4.14.ggb и активирањем одговарајуће апликације GeoGebra.

Илустрација односа праве и параболе (једначине 3. и 4. у табели) може се добити кликом на линк 4.4.15.ggb, а тангенте кликом на линк 4.4.16.ggb и активирањем одговарајуће апликације GeoGebra.

Такође, користећи резултате добијене анализом једначине параболе (11), закључујемо да је права $y = kx + n$ тангента параболе (12), ако је испуњен услов

$$(k-b)^2 - 4a(c-n) = 0,$$

а једначина тангенте у њеној тачки $T(x_0, y_0)$, гласи

$$(2ax_0 + b)x - y + bx_0 - y_0 + 2c = 0.$$

Аналогно поступку примењеном у Теореми 6., закључујемо да важи

- права и парабола су дисјунктни скупови $\Leftrightarrow (k-b)^2 - 4a(c-n) < 0$,
- права је сечица параболе $\Leftrightarrow (k-b)^2 - 4a(c-n) > 0$.

Илустрација односа праве и параболе (12) може се добити кликом на линк 4.4.17.ggb, а тангенте кликом на линк 4.4.18.ggb и активирањем одговарајуће апликације GeoGebra.

Напомена 5. Једначина тангенте може се добити (као и у случају кружнице, елипсе и хиперболе), ако се тангента у тачки T_0 криве, посматра као гранични положај сечице $s(T_0, T_1)$, одређене фиксираном тачком T_0 и промењивом тачком T_1, која крећући се по кривој тежи ка тачки T_0.

Пошто тачке $T_0(x_0, y_0)$ и $T_1(x_1, y_1)$ одређују сечицу параболе (3), једначина сечице гласи

$$s(T_0, T_1): y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0),$$

а како исте тачке припадају параболи (3), онда важе следеће једнакости

$$y_0^2 = 2px_0 \quad \text{и} \quad y_1^2 = 2px_1,$$

а одузимањем добијамо

$$\left(y_1-y_0\right)\left(y_1+y_0\right)=2p\left(x_1-x_0\right),$$

одакле је

$$\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}=\frac{2p}{y_0+y_1}.$$

Сада се једначина сечице може записати на следећи начин

(17) $$s\left(T_0,T_1\right): y-y_0=\frac{2p}{y_0+y_1}\left(x-x_0\right).$$

Кад се тачка T_1 креће по параболи и тежи ка T_0, тада y_0+y_1 тежи ка $2y_0$, због чега једначина (17) постаје еквивалентна једначини (16) , тј. сечица параболе тежи ка тангенти параболе.

Приказ описаног прелаза сечице у тангенту, добија се кликом на линк 4.4.19.ggb и активирањем апликације GeoGebra. □

3. Тангента из тачке ван параболе. Поступак за одређивње једначине тангенте параболе (3) из тачке $T\left(x_0,y_0\right)$ која не припада параболи, (припада њеној спољашњости) сличан је поступку налажења једначине тангенте кружнице. Наиме, ако је $y=kx+n$, за $k\neq 0$, једначина тражене тангенте параболе (3), која садржи тачку $T\left(x_0,y_0\right)$ и $x_0\neq 0$, онда важи

$$p=2kn \quad \text{и} \quad y_0=kx_0+n,$$

одакле после елиминације n важи

(18) $$2x_0k^2-2y_0k+p=0$$

тј.

$$k_{1,2}=\frac{y_0\pm\sqrt{y_0^2-2px_0}}{2x_0}.$$

Како тачка $T\left(x_0,y_0\right)$ припада спољашњости параболе, тј. $y_0^2>2px_0$, то постоје две различите реалне вредности за k, тј. $k_1\neq k_2$, што значи да постоје и две различите тангенте

$$t_1: y-y_0=k_1\left(x-x_0\right) \text{ и } t_2: y-y_0=k_2\left(x-x_0\right),$$

из тачке $T\left(x_0,y_0\right)$, спољашњости параболе.

Ако је $x_0=0$, из услова $T\notin\mathcal{P}$ следи $y_0\neq 0$, па је једначина (17) линеарна и има једно решење

$$k=\frac{p}{2y_0} \text{ и } n=y_0,$$

а једначине тангенти су

$$t_1: px-2y_0y+2y_0^2=0 \text{ и } t_2: x=0.$$

Илустрација поступка налажења тангенте параболе, може се добити активирањем, редом, апликација (4.4.20.a.ggb), (4.4.20.b.ggb) и (4.4.21.ggb), у програму GeoGebra, кликом на одговарајући линк.

Пример 3. Саставити једначине тангенти параболе $y^2 = 8x$ из тачке $A(-4,-2)$.

Решење. Ако је права $y = kx + n$ тражена тангента (Слика 14.), онда су испуњени следећи услови

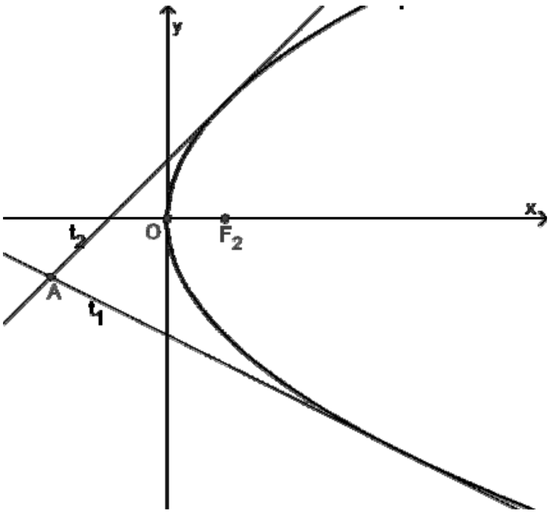
$$kn = 2 \text{ и } 4k - n = 2,$$

одакле је

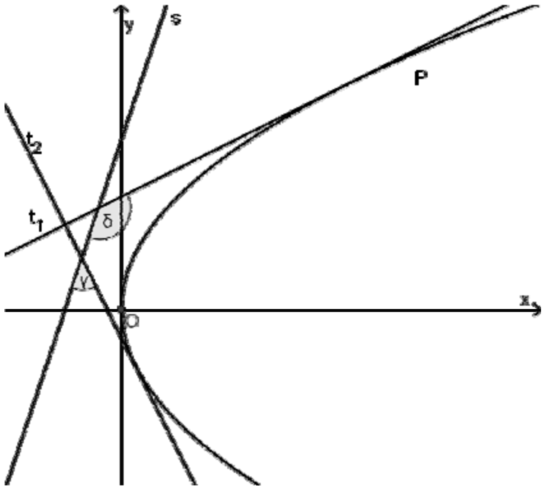
$$k_1 = 1, \quad n_1 = 2 \text{ и } k_2 = -1/2, \quad n_2 = -4.$$

Једначине тангенти су

$$t_1 : x - y + 2 = 0 \quad \text{и} \quad t_2 : x + 2y + 8 = 0.$$



Слика 14.



Слика 15.

Илустрација и уопштење Примера 3. може се добити кликом на линк (4.4.21.ggb) и активирањем апликације GeoGebra. □

Пример 4. Саставити једначину тангенте параболе $y^2 = 4x$, која образује угао $\alpha = 45°$, са правом $l : 3x - y + 3 = 0$.

Решење. Ако је $t : y = k_t x + n_t$ тражена тангента, онда из услова $\mathrm{tg}\alpha = 1$, следи $3k + 1 = 3 - k$, или $3k + 1 = k - 3$, одакле је $k_1 = 1/2$ или $k_2 = -2$. На основу услова (15), имамо одговарајуће вредности $n_1 = 2$ или $n_2 = -1/2$, а тражене тангенте имају једначине: $t_1 : x - 2y + 2 = 0$ и $t_2 : 4x + 2y + 1 = 0$.

Илустрација и уопштење Примера 4. може се добити кликом на линк 4.4.22.ggb и активирањем апликације GeoGebra. □

У циљу комплетнијег упознавања особина параболе, следи теорема о односу тангенти и директрисе

Теорема 5.*Тангенте параболе су нормалне, ако и само ако се секу на директриси.*

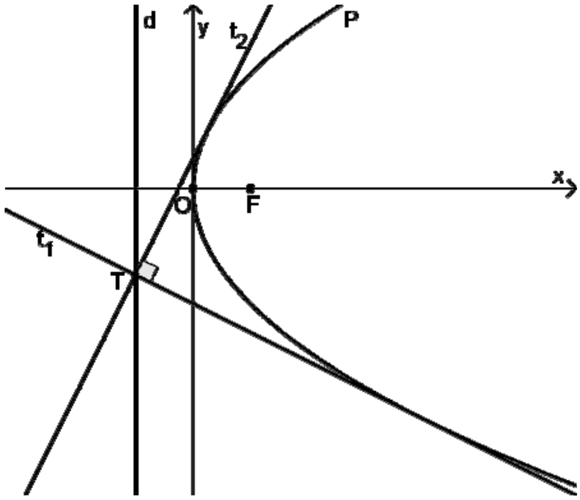
Доказ. Ако су праве $t_1 : y = k_1 x + n_1$ и $t_2 : y = k_2 x + n_2$, нормалне тангенте параболе $\mathcal{P} : y^2 = 2px$, онда важе релације

$$k_1 k_2 = -1 \quad \text{и} \quad p/2 = k_1 n_1 = k_2 n_2.$$

Елиминацијом променљиве y из једначина тангенти, за апсцису њихове пресечне тачке, имамо

$$x=\frac{n_2-n_1}{k_1-k_2}=\frac{n_1}{k_2}\frac{\frac{n_2}{n_1}-1}{\frac{k_1}{k_2}-1}=-k_1n_1\frac{\frac{n_2}{n_1}-1}{\frac{n_2}{n_1}-1}=-\frac{p}{2},$$

што значи да пресечна тачка припада директриси (Слика 16.).



Слика 16.

Обрнуто, ако је $T\left(x_0,y_0\right)$, произвољна тачка директрисе, онда је $x_0=-p/2$, а $y_0\in\mathbb{R}$. Ако је $t:y=kx+n$ једна од тангенти параболе из тачке T, тада важе следеће релације

$$p=2kn \quad \text{и} \quad y_0=-k\,p/2+n\,.$$

Елиминацијом n добијамо квадратну једначину по k

$$pk^2+2y_0k-p=0\,,$$

одакле на основу Вијетових правила, за коефицијенте праваца тангенти параболе из тачке T, важи

$$k_1k_2=-1\,,$$

што значи да су тангенте нормалне.

Илустрација наведене особине добија се кликом на линк 4.4.23.ggb и активирањем апликације GeoGebra. ■

4. Угао између праве (криве) и параболе.

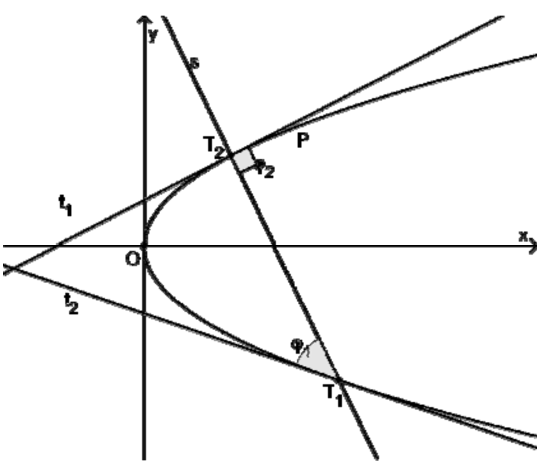
Ако права сече параболу, онда се под углом између праве и параболе, подразумева угао између праве и тангенте параболе у пресечној тачки. Очигледно је да је угао између тангенте и параболе једнак 0 (нула). Познато је да су углови између сечице и тангенти у пресечним тачкама подударни једино када су пресечне тачке (значи и сама сечица), и у њима тангенте, симетричне у односу на осу симетрије параболе.

То значи да при решавању овог проблема, треба одредити угао између сечице и тангенте у свакој од пресечних тачака посебно, изузимајући случај када је сечица параболе осно сометрична у односу на осу симетрије параболе.

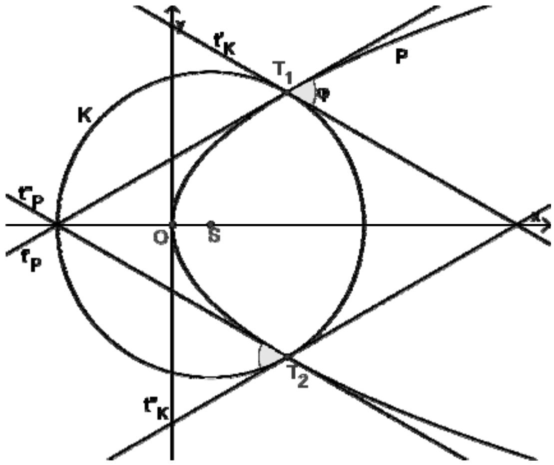
Како се под углом између две криве подразумева угао између њихових тангенти у тачки пресека, јасно је да се угао између параболе и неке друге криве одређује тако што се израчунавају углови у пресечним тачкама.

Пример 4. Одредити углове пресека линија: а) $\mathcal{P}: y^2 = 4x$ и $s: 2x + y - 12 = 0$
б) $\mathcal{K}: (x-2)^2 + y^2 = 64$.

Решење. а) Тангенте t_1 и t_2 у пресечним тачкама $T_1(9,-6)$ и $T_2(4,4)$, редом имају једначине: $t_1: x + 3y + 9 = 0$ и $t_2: x - 2y + 4 = 0$, а углови које оне образују са сечицом s су $\varphi_1 = 90°$ и $\varphi_2 = 45°$, редом (Слика 17).



Слика 17.



Слика 18.

б) У пресечним тачкама $T_1\left(6,4\sqrt{3}\right)$ и $T_2\left(6,-4\sqrt{3}\right)$, кружнице и параболе, редом, тангенте кружнице су $t_1^K: x + \sqrt{3}y - 18 = 0$ и $t_2^K: x - \sqrt{3}y - 18 = 0$, а параболе $t_1^P: x - \sqrt{3}y + 6 = 0$ и $t_2^P: x + \sqrt{3}y + 6 = 0$, Слика (18). Због симетричности у односу на x - осу, довољно је одредити угао који образују тангенте у једној тачки, на пример T_1, а он износи $\varphi = 60°$.

Решења и резултати оба задатка, као и разна уопштења, могу се добити кликом на линк 4.4.24.ggb и 4.4.25.ggb, активирањем апликација GeoGebra. □

5.4.4. Дијаметри параболе

Како је раније истакнуто, криве другог реда имају значајну особину, да су средине њихових међусобно паралелних тетива колинеарне. То својство доказујемо и за параболу и на основу тога уводимо појам дијаметра параболе.

Теорема 6. *Средине паралелних тетива параболе, колинеарне су.*

Доказ. Нека је дата парабола $\mathcal{P}: y^2 = 2px$, $p > 0$ и константа $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Тада у скупу свих паралелних правих

$$y = kx + n,$$

за неке вредности параметра $n \in \mathbb{R}$, постоји подскуп, који чине међусобно паралелне сечице дате параболе. Занимају нас само оне сечице које нису паралелне оси параболе, тј. сечице за које је $k \neq 0$.

Приметимо да за $n = 0$, права

(19) $$l : x = kx$$

садржи теме дате параболе. На сечицама поменутог скупа, дата парабола одсеца одговарајуће паралелне тетиве. Поступајући као у тачки 4., са циљем одређивања пресечних тачака $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, параболе $\mathcal{P}$ и неке од паралелних сечица датог скупа, (крајњих тачака једне од наведених тетива) добијамо једначину (14), из које следи:

$$x_1 + x_2 = \frac{2(p - kn)}{k^2}.$$

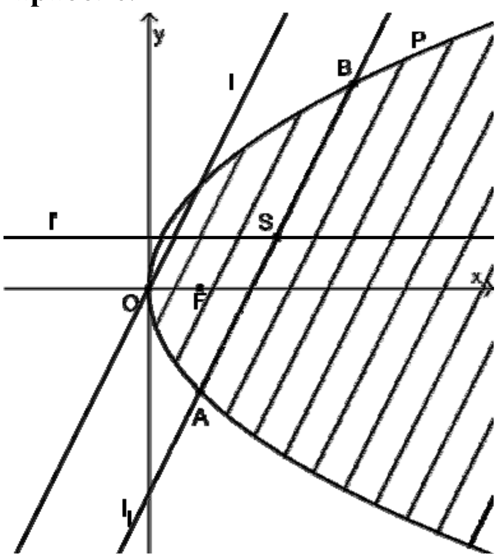
Ако је $M_0(x_0, y_0)$ средина тетиве M_1M_2, онда је

$$x_0 = \frac{p - kn}{k^2} \quad \text{и} \quad y_0 = kx_0 + n = \frac{p - kn}{k} + n = \frac{p}{k}.$$

Дакле, док параметар $n \in \mathbb{R}$ "пролази" скупом $\mathbb{R}$ (узима вредности из скупа $\mathbb{R}$), средине M_0 свих тетива, одређених датом параболом $\mathcal{P}$ и сечицама $y = kx + n$, припадају једној правој

(20) $$l' : y = \frac{p}{k},$$

која је **паралелна оси параболе**.



Слика 19.

Ако су сечице паралелне са y- осом (тада $k \notin \mathbb{R}$), јасно је да због симетричности параболе у односу x- осу, средине одговарајућих тетива припадају оси симетри-је параболе, x- оси, која је такође паралелна оси параболе. ■

Илустрација изведених закључака може се добити кликом на линк 4.4.26.ggb и активирањем апликације GeoGebra, што је и тврђење претходне теореме.

Дефиниција 3. Права одређена срединама паралелних тетива параболе зове се **дијаметар параболе**.

Из доказа теореме видимо, да за свако $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ постоји тачно једна вредност p/k, тј. свакоме скупу сечица једног правца, одређеног коефицијентом правца k, (паралелних сечица l, тј. тетива) одговара један **дијаметар** $l': y = \frac{p}{k}$, **параболе** (3), **паралелан оси параболе**.

Одавде непосредно следи теорема

Теорема 7. *Дијаметри параболе паралелни су оси параболе.* ■

Иначе за **дијаметар** l' **параболе кажемо да је коњугован тетивама чије средине садржи.**

Сада смо у прилици да докажемо једну веома значајну особину тангенте хиперболе.

Теорема 8. *Права је тангента параболе, ако и само ако је паралелна тетивама параболе, којима је коњугован дијаметар који садржи тачку додира.*

Доказ. Нека је $T(x_0, y_0)$ тачка параболе $\mathcal{P}: y^2 = 2px$, за $p > 0$, а $l': y = y_0$, за $y_0 \neq 0$, дијаметар параболе који садржи тачку T. За $n \in \mathbb{R}$, праве $l: y = \frac{p}{y_0}x + n$, представљају сечице, којима је коњугован дијаметар l' (полови одговарајуће тетиве). Једначина праве која садржи тачку T, а паралелна је сечицама l параболе, гласи

$$y - y_0 = \frac{p}{y_0}(x - x_0),$$

што после сређивања даје тангенту параболе у тачки T:

$$t: y_0 y = p(x + x_0).$$

Обрнуто, тангента

$$t: y_0 y = p(x + x_0)$$

у тачки $T(x_0, y_0)$ параболе $\mathcal{P}: y^2 = 2px$, паралелна је сечицама

$$l: y = \frac{p}{y_0}x + n,$$

којима је коњугован дијаметар

$$l': y = y_0. \qquad ■$$

Доказани потребан и довољан услов представља дефиницију тангенте параболе. Њен приказ се може добити кликом на линк 4.4.27.ggb и активирањем апликације GeoGebra.

Напомена 6. Аналогним поступком изводи се анализа дијаметара параболе $x^2 = 2py$, $p > 0$. У овом случају, све праве паралелне оси параболе (y - оси) су дијаметри параболе. Дакле, **дијметри** ове параболе су праве дате једначином

$$x = x_0,$$

где је $x_0 \in \mathbb{R}$, а њима **коњуговане тетиве** припадају прамену паралелних сечица, чија је једначина облика $y = \frac{x_0}{p}x + n$, где је $n \in \mathbb{R}$.

Илустрација изведених закључака може се добити кликом на линк 4.4.28.ggb и активирањем апликације GeoGebra. □

4.4.5. Полара и пол у односу на параболу

Нека је $\mathcal{P}: y^2 = 2px$, $p > 0$, парабола, $P(x_0, y_0)$ тачка њене спољашње области и t_1 и t_2 тангенте из тачке P на параболу (Слика 20.). Ако су $T_1(x_1, y_1)$ и $T_2(x_2, y_2)$ додирне тачке тангенти и параболе, онда су једначине тангенти параболе

$$t_1 : y_1 y = p(x + x_1) \text{ и } t_2 : y_2 y = p(x + x_2),$$

а из услова $P \in t_1$ и $P \in t_2$, следи

$$y_1 y_0 = p(x_0 + x_1) \text{ и } y_2 y_0 = p(x_0 + x_2).$$

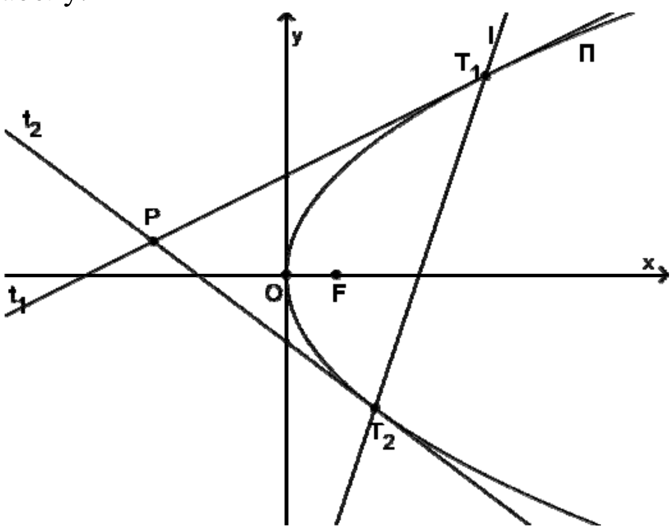
На основу последње две релације закључујемо да права

$$l : y_0 y = p(x + x_0)$$

садржи тачке додира T_1 и T_2, тј. права $l = p(T_1, T_2)$, је сечица параболе $\mathcal{P}$.

Сечица l, одређена додирним тачкама тангенти параболе из тачке P, зове се **полара тачке** (**пола**) P, **у односу на параболу** $\mathcal{P}$. 4.4.29.ggb

Сада доказујемо да и тачки унутрашње области параболе одговара полара у односу на ту параболу.



Слика 20.

У ту сврху уочимо тачку $P(x_0, y_0)$, унутрашње области параболе $\mathcal{P}$, дијаметар параболе $l: y = y_0$, и у тачки P сечицу параболе $s: y - y_0 = \frac{p}{y_0}(x - x_0)$, где је $y_0 \neq 0$, чији је коњуговани дијаметар права l. За $y_0 = 0$, дијаметар $l: y = 0$, (x-оса) садржи тачку $P(x_0, 0)$ и коњугован је сечици $s: x = x_0$.

Тангенте t_1 и t_2, у пресечним тачкама T_1 и T_2, сечице и параболе секу њен дијаметар l у тачки $P'(x', y')$, где је

$$x' = \frac{y_0^2 - px_0}{p} \quad \text{и} \quad y' = y_0 .$$

Из услова $y_0^2 - 2px_0 < 0$, да је $P(x_0, y_0)$ тачка унутрашње области параболе $\mathcal{P}$, следи

$$y'^{\,2} - 2px' = y_0^{\,2} - 2p\left(\frac{y_0^2 - px_0}{p}\right) = y_0^{\,2} - 2y_0^2 + 2px_0 = -\left(y_0^2 - 2px_0\right) > 0$$

што значи да је $P'(x', y')$ тачка спољашње области параболе $\mathcal{P}$.

Права p, која садржи тачку P' и паралелна је сечици s (дијаметар l јој је коњугован), има једначину

$$p: y - y' = \frac{p}{y_0}(x - x'),$$

или

(22) $$p: y_0 y = p(x + x_0),$$

је **полара пола** $P(x_0, y_0)$**, у односу на параболу** $\mathcal{P}$, што је и требало да се докаже.

На основу изведених закључака, увешћемо следећу аналитичку дефиницију

Дефиниција 5. Нека је $\mathcal{P}: y^2 = 2px$, $p > 0$, парабола и $P(x_0, y_0)$ тачка у њеној равни, различита од центра хиперболе. Права

$$p: y_0 y = p(x + x_0)$$

зове се **полара тачке (пола)** P, у односу на параболу $\mathcal{P}$.

Непосредне последице ове дефиниције јесу следећа тврђења, о односу тангенте и параболе и о односу фокуса и директрисе параболе.

Теорема 9. *Полара тачке параболе је тангента параболе у тој тачки.* ■

Теорема 10. *Полара фокуса параболе је директриса параболе.* ■

Из претходног излагања види се да за сваку тачку, равни параболе, постоји полара, у односу на ту параболу.

Обрнуто, нека је $p: Ax + By + C = 0$ произвољна права и $\mathcal{P}: y^2 = 2px$, парабола. Да би права p била полара неке тачке $P(x_0, y_0)$, у односу на параболу $\mathcal{P}$, једначине

$$Ax + By + C = 0 \quad \text{и} \quad y_0 y = p(x + x_0),$$

треба да представљају исту праву, тј. треба да важи

$$\frac{p}{A} = -\frac{y_0}{B} = \frac{px_0}{C},$$

одакле је

$$x_0 = \frac{C}{A} \quad \text{и} \quad y_0 = -\frac{pB}{A},$$

где је $A \neq 0$, што значи да права p није паралелна са осом параболе, тј. права p није дијаметар параболе .

Овим је доказано да за сваку тачку, у равни параболе, постоји полара, у односу на параболу, и за сваку праву, која није паралелна са осом (није дијаметар) параболе, постоји у равни параболе пол, у односу на параболу.

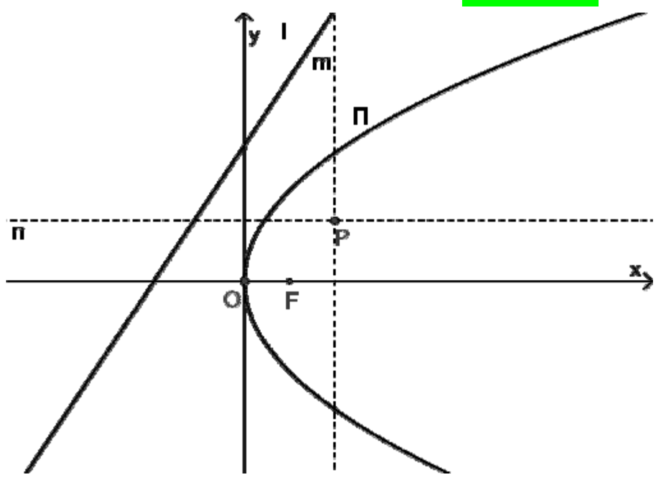
Напомена 7. Аналогно напред примењеном поступку, закључујемо: полара пола $P(x_0, y_0)$, у односу на параболу $\mathcal{P}: x^2 = 2py$, $p > 0$, је права $x_0 x = p(y + y_0)$.

Пример 5. Одредити координате пола P, поларе $l: 2x - 2y + 6 = 0$, у односу на хиперболу $\mathcal{P}: y^2 = 4x$.

Решење. Пошто је $l: y_0 y = 2(x + x_0)$ једначина поларе, пола $P(x_0, y_0)$, у односу на дату хиперболу, онда важи следећа пропорција

$$\frac{2}{3} = \frac{y_0}{2} = \frac{x_0}{3},$$

т $x_0 = 2$ и $y_0 = 4/3$. Тачка $P(2; 4/3)$ је пол праве p 4.4.30.ggb, (Слика 21.). □



Слика 21.

Напомена 8. Задатак се може решити и коришћењем познате је теореме: Полара пресечне тачке двеју правих, у односу на криву (кружницу, елипсу, хиперболу, параболу) садржи полове тих правих, у односу на исту криву. □

Пример 6. Тангента кружнице $\mathcal{K}: x^2 + y^2 = r^2$, истовремено је полара пола P, у односу на хиперболу $\mathcal{P}: y^2 = 2px$. Наћи геометријско место полова P. Специјално: $r = 2$, $p = 1$.

Решење. Полара p, пола $P(x_0, y_0)$, у односу на дату хиперболу има једначину

$p: y_0 y = p\left(x + x_0\right)$, а тангента t, дате кружнице у њеној тачки $T\left(x_1, y_1\right)$ има једначину $t: x_1 x + y_1 y = r^2$. Како је, по услову задатка, тангента кружнице у тачки T, истовремено полара пола P, тј. $t = p$, онда је

$$\frac{x_1}{p} = -\frac{y_1}{y_0} = -\frac{r^2}{p x_0} = \lambda,$$

одакле је

$$x_1 = -\frac{r^2}{x_0} \quad \text{и} \quad y_1 = \frac{r^2 y_0}{p x_0}.$$

Коначно, из услова $T \in \mathcal{K}$, тј. $x_1^2 + y_1^2 = r^2$, за координате x_0 и y_0, пола P, важи

$$\frac{x_0{}^2}{r^2} - \frac{y_0{}^2}{p^2} = 1,$$

што значи да пол P описује хиперболу, са центром $O\left(0,0\right)$, реалном полуосом r и имагинарном полуосом p.

У специјалном случају, пол P тангенте кружнице $\mathcal{K}$, која је истовремено полара, у односу на елипсу $\mathcal{E}$, описује елипсу

$$x^2 - 4y^2 = 4.$$

Илустрација примера и решење специјалног случаја, може се добити кликом на линк 4.4.31.ggb и активирањем апликације GeoGebra. □

4.4.6. Оптичко својство параболе

Из оптике је познато, да ако се извор светлости налази у фокусу параболичког огледала, његови светлосни зраци се одбијају од огледала паралелно оси, што је у веома широкој употреби код разних врста рефлекторског, а посебно код аутомобилског осветљења. Овај феномен заснива се на **оптичком својству параболе**.

Илустрација овог својства, може се добити кликом на линк 4.4.32.ggb и активирањем апликације GeoGebra.

Оптичко својство параболе регулише следећа теорема

Теорема 11. *Тангента у тачки M параболе (4), са фокусом F и директрисом d, је симетрала угла $\measuredangle FMN$, где је N подножје нормале из тачке M на директрису.*

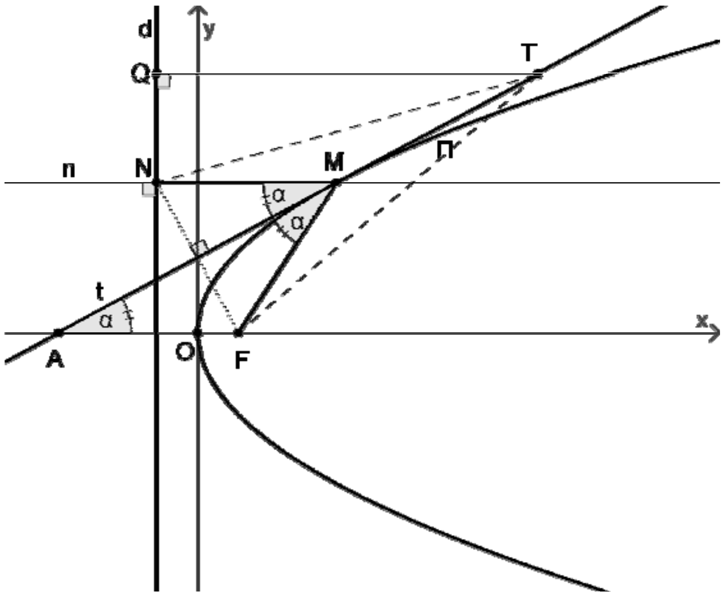
Доказ. Нека је тачка N подножје нормале из произвољне тачке M, параболе (3) на директрису d, и нека је t симетрала угла $\measuredangle FMN$, што је уједно и симетрала дужи FN, (Слика 22.). Тачка M једнако је удаљена од жиже F и од директрисе d, тј.

$$d\left(M,F\right) = d\left(M,N\right).$$

За било коју тачку $T \in t$, $T \neq M$, важи

$$d(T,F) = d(T,N) > d(T,Q),$$

где је Q подножје нормале из тачке T на директрису, тј. свака тачка симетрале t, различита од тачке M, припада спољашњој области параболе, што значи да је права t тангента параболе.



Слика 22.

Због симетричности тачака F и N, као и паралелности праве n и осе параболе, јасно је да тангента t, образује једнаке углове и са фокалним радијусом FM и осом параболе. ■

Користећи оптичко својство параболе, дајемо још једну конструкцију параболе.

Пример 7. Дата је права $d: x = -\frac{p}{2}$ и тачка $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, где је $p > 0$. Ако је $A \in d$ произвољна тачка праве, одредити геометријско место пресечних тачака M, симетрале дужи FA и праве $c \perp d$, која садржи тачку A, парабола са жижом F и директрисом d.

Решење. Нека је дата права $d: x = -\frac{p}{2}$ и тачка $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, где је $p > 0$ и нека је $A\left(-\frac{p}{2}, y_0\right) \in d$, (Слика 23.). Једначина симетрале s, дужи FA дата је са

$$s: y - \frac{y_0}{2} = \frac{p}{y_0} x,$$

а нормале c кроз тачку A, на праву d

$$c: y = y_0.$$

За координате пресечне тачке $M(x, y)$, ове две праве важи

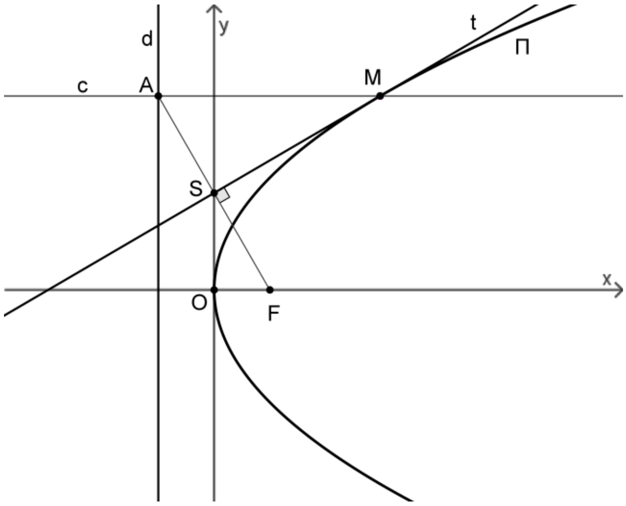
(3) $$y^2 = 2px,$$

што јесте парабола, са жижом F и директрисом d.

Обрнуто, нека је права

$$t: y = kx + n$$

тангента у тачки $M(x, y)$, параболе (3). Тангента t је симетрала угла одређеног фокалним радијусом FM и правом кроз M, паралелном са осом параболе.



Слика 23.

Нормала n из тачке F, на праву t, дата је са

$$n: y = -\frac{1}{k}\left(x - \frac{p}{2}\right),$$

а за координате подножја S нормале важи

$$x_1 = \frac{2kn - p}{k^2 + 1} = 0 \text{ и } y_1 = n,$$

где је коришћен услов да је права $t: y = kx + n$, тангента параболе (3).

Ако је тачка $A(x_0, y_0)$ симетрична тачки F, у односу на праву t, онда је

$$x_0 = -\frac{p}{2} \text{ и } y_0 = 2y_1 = 2n,$$

што значи да наведена тачка $A(x_0, y_0)$ припада правој $d: x = -\dfrac{p}{2}$, што је и требало да се докаже. ■

Илустрација примера и конструкција хиперболе, може се добити кликом на линк 4.4.33.ggb и активирањем апликације GeoGebra. □

4.4.7. Задаци

1. Наћи координате жиже, једначину директрисе и приказати графички следеће параболе:

а) $y^2 = 4x$,	г) $x^2 = 10y$,
б) $4y^2 = 5x$,	д) $x^2 = -12y$,
в) $y^2 = -8x$,	е) $y^2 = 2px,\ p > 0$

ж) $y^2 = -px,\ p > 0$ з) $y = -\sqrt{3}x^2$ 1.ggb.

2. Које су линиј епредстављене једначинама:
   а) $y = 2\sqrt{x}$, 2.a.ggb
   б) $y = -\sqrt{-x}$, 2.b.ggb
   в) $y = -\sqrt{-6x}$, 2.c.ggb
   г) $x = -\sqrt{-2y}$. 2.d.ggb
3. Одредити једначину параболе $y^2 = 2px$, ако је дато: а) жижа $F(3,0)$; б) директриса $x = -1$; в) тачка параболе $T(1,3)$.
4. Испитати однос параболе $y^2 = 10x$ и следећиих тачака:
   а) $(5,-7)$; б) $(8,9)$; в) $(5/2, \text{-}5)$. 4.ggb
5. Испитати однос параболе $x^2 = \pm 8y$ и следећиих тачака:
   а) $(5,-7)$; б) $(8,9)$; в) $(5/2, \text{-}5)$. 5.ggb
6. Израчунати растојање тачке M параболе $y^2 = 12x$, од жиже, ако је ордината тачке M једнака 6. 6.ggb.
7. Израчунати растојање тачке M параболе $y^2 = 20x$, од жиже, ако је апсциса тачке M једнака 7. 7.ggb.
8. Одреди тачке параболе $y^2 = 16x$ чије растојање од жиже износи 13. 8.ggb
9. Наћи једначину параболе $y^2 = 2px$, која садржи тачке A и B, чије су апсцисе $x_1 = 1$ и $x_2 = 9$, а разлика одговарајућих координата је $y_2 - y_1 = 4$. 9.ggb
10. Одредити за које вредности броја k, права $y = kx + 2$: а) сече параболу $y^2 = 4x$, б) додирује је, г) са њом нема заједничких тачака. 10.ggb
11. Одредити вредност параметра m, тако да права буде тангента параболе:
    а) $x + my + 1 = 0$, $y^2 = x$; 11.a.ggb
    б) $mx - 2y + 3 = 0$, $y^2 = 6x$; 11.b.ggb
    в) $3x - my - m + 7.5 = 0$, $y^2 = 6x$; 11.v.ggb
    г) $3x - my - m - 7 = 0$, $x^2 = 8y$; 11.g.ggb
    д) $x - y - m = 0$, $x^2 = 4y$. 11.d.ggb
12. Праве $2x + y - 12 = 0$ и $3x - y - 3 = 0$ секу се на параболи $y^2 = 2px$. Наћи површину троугла чија темена леже у пресечним тачкама датих правих и дате параболе. 12.ggb
13. У тачкама $A(1,y)$, $B(1,-y)$, $C(x,6)$, параболе $y^2 = 4x$, конструисане су тангенте. Израчунај површину троугла чије су странице на тангентама. 13.ggb
14. Наћи једначине тангенти из тачке M на параболу (P): а) $M(5,-7)$, $P: y^2 = 8x$ 14.a.ggb; b) $M(-3,-4)$, $P: x^2 = 4y$ 14.b.ggb.

15. Одреди једначине тангенти параболе $y^2 = 4x$, у пресечним тачкама са правом $2x + y - 4 = 0$.
16. Одредити углове пресека параболе $\mathcal{P}: y^2 = 4x$ и праве $s: 2x + y - 12 = 0$ 16.ggb
17. Наћи једначину скупа средина тетива параболе $y^2 = 3x$, паралелних правој $2x + 3y - 5 = 0$. 17.ggb
18. Саставити једначину сечице параболе $y^2 = 6x$, ако је тачка $A(5,3)$ средина њене тетиве.
19. Под којим се углом види парабола $\mathcal{P}: y^2 = 16x$ из тачке $M(-4,-2)$ 19.ggb
20. Одреди једначину тангенте параболе $\mathcal{P}: y^2 = 8x$, која је: а) паралелна правој $l: 2x + 2y = 3$ 20.a.ggb, б) нормална на праву $l: 2x + 2y = 3$, 20.b.ggb
21. Права $t_1: x - 2y + 6 = 0$ је тангента параболе $\mathcal{P}: y^2 = 2px$. Наћи тангенту t_2 исте параболе, која је нормална на дату тангенту и доказати да се тангенте секу на директриси. 21.ggb
22. Решити неједначине:
    - е) $y^2 \leq 4x$ 22.ggb
    - ж) $y^2 > 6x$ 22.ggb 22.nb
    - з) $x \leq y^2 \leq 3x$ 22.nb
    - и) $-2x - x^2 < y^2 < -2x$ 22.nb

5. КОНУСНИ ПРЕСЕЦИ

Нека је у равни α дата кружница k и ван равни тачка S. Скуп тачака свих правих одређених тачком S и тачкама кружнице k, зове се кружна конусна површ, тачка S зове се врх, а праве одређене врхом и тачком кружнице – изводнице, кружне конусне површи.

Ако је права, одређена врхом S конусне површи и центром кружнице k, нормална на раван кружнице, конусна површ је – права.

Под конусним пресеком подразумева се пресек кружне конусне површи и равани која не садржи њен врх.

Конусним пресецима бавили су се и математичари старе Грчке. Још је тада било познато да је пресек кружне конусне површи и равни, која не садржи њен врх: елипса – ако раван сече све изводнице, хипербола – ако је раван паралелна са двема изводницама и парабола – ако је раван паралелна са једном изводницом кружне конусне површи.

Наводимо један доказ ове особине, који је дао белгијски математичар Данделен, а ова особина позната је као **Данделенова теорема**

Теорема. *Ако лопта, уписана у праву кружну конусну површ, пресечену једном равни, додирује ту раван, онда је додирна тачка фокус конусног пресека.*

Доказ. а) Размотримо прво пресек праве конусне површи једном равни π, која сече све њене изводнице и није нормала на осу симетрије.

Упишимо у праву конусну површ две (Данделенове) сфере, које додирују раван π у тачкама F_1 и F_2 (Слика 1.). Нека је M произвољна тачка на пресеку конусне површи и равни π. Конструишимо кроз M изводницу $p(S,M)$ и одредимо њене заједничке тачке T_1 и T_2 са уписаним сферама (тачке T_1 и T_2 припадају кружницама k_1 и k_2, од којих свака представља пресек конусне површи и уписаних сфера). Тада, на основу подударности тангентних дужи сфере, из тачке ван сфере, важе релације

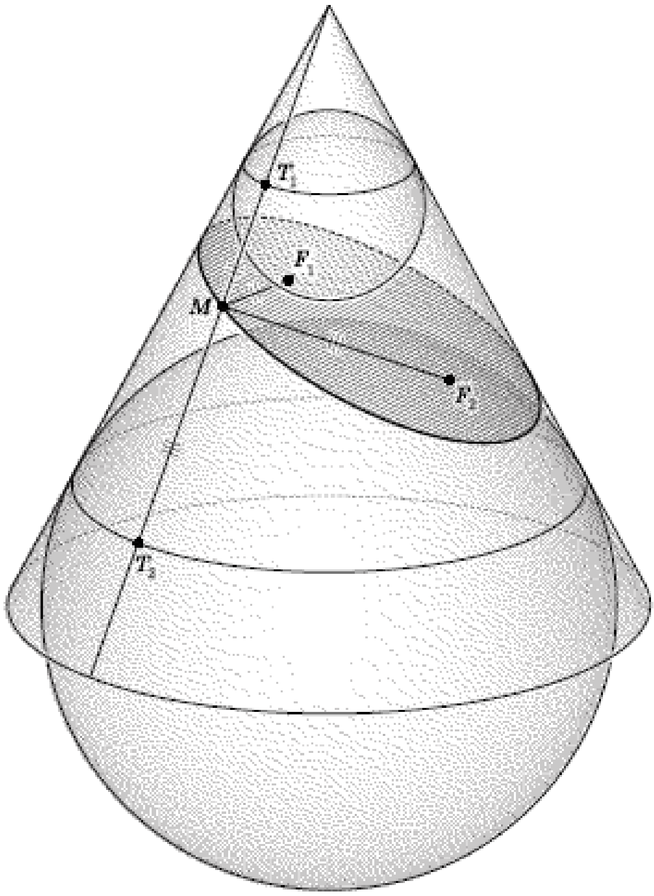
$$MF_1 \cong MT_1 \text{ и } MF_2 \cong MT_2 .$$

Одатле следи

$$MF_1 + MF_2 = MT_1 + MT_2 = T_1T_2 .$$

Одсечак изводнице T_1T_2, налази се између две равни нормалне на осу конусне површи, и његова дужина је константна, тј. не зависи од избора тачке X.

Дакле, линија пресека конусне површи са равни π, представља елипсу, а додирне тачке F_1 и F_2, равни π и сфера уписаних у конусну површ су жиже те елипсе.



Слика 1.

Однос њених полуоса зависи од нагиба равни пресека π, и може узети било коју вредност. 6.1.ggb

б) Ааналогним поступком се доказује, да ако је раван π, која сече двоструку праву конусну површ, паралелна двема изводницама, онда је пресек равни и конусне површи, хипербола (Слика 2.), а додирне тачке F_1 и F_2, равни π и сфера уписаних у конусну површ су жиже те хиперболе. 6.2.ggb

в) На крају, размотримо случај када је раван π, која сече праву кружну конусну површ, паралелна једној изводници (Слика 3.). У конусну површ упишимо сферу, која додирује раван π у тачки F. Та сфера и конусна површ имају заједничку кружницу, која лежи у равни σ, нормалној на осу конусне површи. Означимо са d пресек равни π и σ

$$\pi \cap \sigma = d .$$

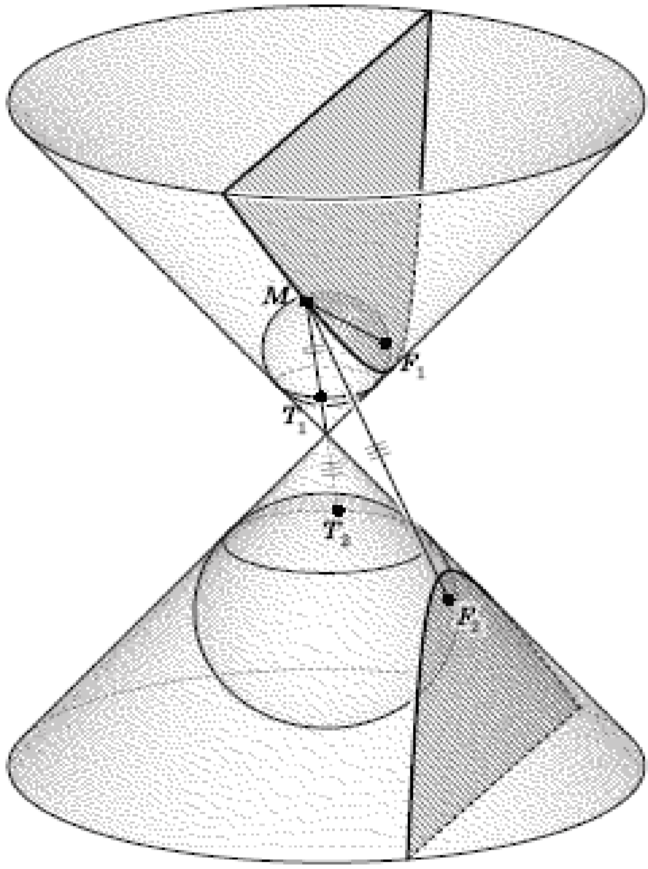
Уочимо произвољну тачку M, пресека конусне површи и равни π, са T обележимо пресек изводнице $p(S,M)$ и равни σ, тј.

$$p(S,M) \cap \sigma = \{T\},$$

а са H, нормалну пројекцију тачке M, на праву d. Тада тачке $T, H \in \sigma$ и важи подударност дужи

$$MF \cong MT,$$

које су танентне дужи сфере из тачке M.



Слика 2.

С друге стране, угао између изводнице $p(M,T)$ и равни σ, једнак је углу између изводнице и равни нормалне на осу конусне површи – равни основе, а угао између $p(M,H)$ и равни σ, једнак је углу између равни π и σ.

Пошто је раван π паралелна једној изводници, то је угао између изводнице $p(M,T)$ и равни σ, једнак углу између праве $p(M,H)$ и равни σ, па је троугао ΔMHT једнакокраки, због чега је

$$MT \cong MH,$$

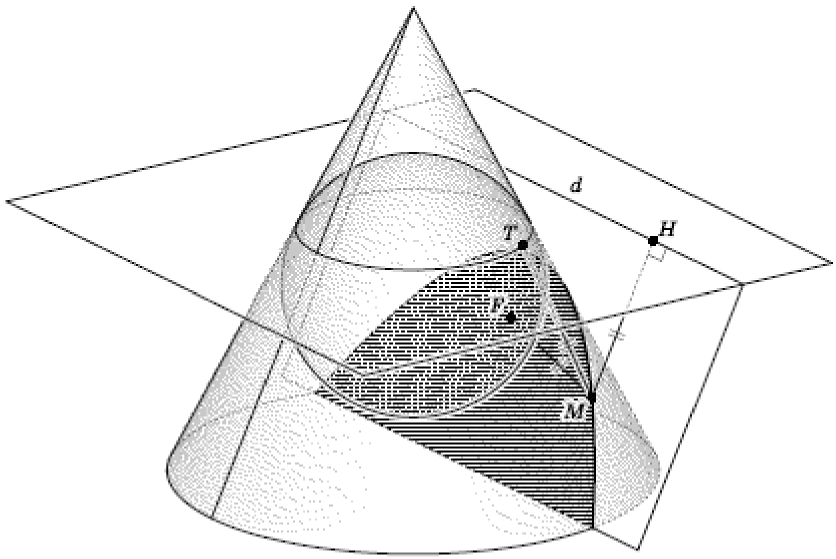
одакле је

$$MF \cong MH.$$

Следи да тачка M припада параболи с фокусом F и директрисом d. 6.3.ggb

На тај начин свака недегенерисана крива другог реда, може се добити као пресек кружне конусне површи једном равни, због чега се такве криве често и називају конусни пресеци, или једноставно – **конике**.

Сфере, уписане у конусну површ, које додирују раван пресека π, зову се сфере Данделена



Слика 3.

Напомена 1. Ако раван, сече цилиндричну површ (уместо конусне површи), онда се потпуно аналогним расуђивањем може доказати, да је пресек елипса.
Напомена 2. Елипса се може добити као паралелна пројекција кружнице, на раван која сече раван кружнице..

Напомена 3. Елипса, хипербола, или парабола, може се добити и као централна пројекција кругжнице k_1, или k_2, из врха конусне површи S, као центра пројекције, на раван π, која сече све изводнице, паралелна је са две, или са једном изводницом, а не садржи врх S.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Акопян, А.В., Заславский, А.А.: Геометрические свойства кривых второго порядка, Издательство МЦНМО, Москва, 2007.

[2] Беклемишев, Д. В.: Курс аналитеческой геометрии и ленейной алгебри. - 10-е изд., ФИЗМАТЛИТ, 2005.

[3] Беклемишева, Л. А., Петрович, А. Ю., Чубалов, И. А.:Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре, Издание второе переработаное, ФИЗМАТЛИТ МОСКВА 2001

[4] Бел, Э. Т.: Творцы математики, Пособие для учителей, Под редакцией и дополнениями С.Н.Киро, "Просвещение" Москва 1979.

[5] Вилейтнер, Г.: История математики от Декарта до середини XIX столетия Перевод с немецкого под редакцией А. П. Юшкевича государственное издательство физикоматематической литературы, Москва 1960

[6] Даан-Дальмедико, А., Пейффер, Ж.: Пути и лабиринты, очерки по истории математики (Перевод с французского А-А. Бряндинцкой) Москва «МИР» 1986

[7] Декарт, Ренэ: Геометрия с приложением изабранных работ П. Ферма и переписки Декарта, (перевод, примечания и статья А. П. Юшкевича), Государственное обьединенное научно-техническое издательство НКТП СССР, Редакция техникотеоретической литературы, Москва - Ленинград 1938.

[8] Делоне, Б. Н., Райков, Д. А.: Аналитическая геометрия. ОГИЗ, Москва, 1948.

[9] Дорофеева, А.: Ренэ Декарт и его "Геометрия". Журнал Квант, номер 9. 1987. http://kvant.mccme.ru/

[10] Дорфман, А.Г.: Оптика конических сечений. ФИЗМАТГИЗ, Москва, 1959.

[11] Ефимов, Н. В.: Краткий курс аналитической геометрии. Учебн. пособие. - 13-е изд, ФИЗМАТЛИТ, 2005.

[12] Кечкић, Ј.: Математика са збирком задатака, за III разред средње школе, Научна књига Београд и Завод за уџбенике Нови Сад, 1992.

[13] Клетеник, Д. В. и др.: Сборник задач по аналитеческой геометрии. Наука, Москва, 1967.

[14] Лопшиц, А. М.: Аналитическая геометрия. Для педагогических институтов, УЧПЕДГИЗ, Москва, 1948.

[15] Минтаковић, С.: Збирка задатака из аналитичке геометрије. Завод за изд. уџбеника, Сарајево 1966.

[16] Понарин, Я. П.: Алгебра комплексных чисел в геометрических задачах, МЦНМО, 2004.

[17] Првановић, М.: Основи геометрије, Грађевинска књига, Београд, 1982.

[18] Прентовић, Б.: Неке дефиниције и конструкције кривих другог реда које се ређе користе, Педагошка стварност LIII, 9-10 (2007), Нови Сад.

[19] Прентовић, Б.: Рачунар у настави аналитичке геометрије, 12. СРПСКИ МАТЕМАТИЧКИ КОНГРЕС, (саопштење), Нови Сад, 2008.

[20] Прентовић, Б., Херцег, Д.: Анализа опште квадратне једначине – применом рачунара, XVIII Conference on Applied Mathematics – PRIM 2009. Суботица, 25. – 27. маја 2009.

[21] Привалов, И. И.: Аналитическая геометрия. Физматгиз, Москва, 1962.
[22] Протасов, В.Ю.: Максимумы и мимимумы в геометрии, Издательство Московского центра непреривного математического образованиja • Москва • 2005.
[23] Рашајски, Б. Н.: Аналитичка геометрија. Грађевинска књига, Београд 1968.
[24] Розенфельд, Б. А.: Аполоний Пергский, МЦНМО, Москва, 2004.
[25] Стојаковић, З. и Херцег, Д.: Линеарна алгебра и аналитичка геометрија. Завод за издавање уџбеника, Нови Сад, 1982.
[26] Херцег, Д., Недић, Ј., Радека, И.: Кроз математику са Mathematica-om, Институт за математику, Природно-математички факултет, Нови Сад, 2001.
[27] Херцег, Д., Херцег, Ђ.: Математичке формуле, Змај, 2000.
[28] Шаль, Мишель: Исторический обзор происхождения и развития геометрических методов переводчикъ В.Я. Цингеръ http://ru.wikisource.org/wiki

УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ
ПРИРОДНО – МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
ДЕПАРТМАН ЗА МАТЕМАТИКУ И ИНФОРМАТИКУ
КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА

Редни број:
РБР
Идентификациони број:
ИБР
Тип документације: Монографска документација
ТД
Тип записа: Текстуални штампани материјал
ТЗ
Врста рада: Докторска дисертација
ВР
Аутор: мр Бранко Прентовић
АУ
Ментор: Проф. др Драгослав Херцег
МН
Наслов рада: Рачунар у настави аналитичке геометрије у гимназији
НР
Језик публикације: Српски (ћирилица)
ЈП
Језик извода: Српски / енглески
ЈИ
Земља публикације: Република Србија
ЗП
Уже географско подручје: Војводина
УГП
Година: 2011
ГО
Издавач: Ауторски репринт
ИЗ
Место и адреса: Нови Сад, Департман за математику и информатику, Природно-математички факултет, Трг Доситеја Обрадовића 4.
МА
Физички опис рада: (6, 203, 140, 26, 46, 20, 2)
(број поглавља/страна/лит. цитата/табела/слика/графика/прилога/)
ФО
Научна област: Математика
НО
Научна дисциплина: Методика математике
НД
Предметна одредница / Кључне речи:
аналитичка геометрија, права, кружница, елипса, хипербола, парабола, вектор, настава, рачунар, образовни софтвер, визуализација, ...
ПО

УДК

Чува се: Библиотека Департмана за математику и информатику
ЧУ

Важна напомена: Прилоге докторској дисертацији представљају: Интерактивни уџбеник аналитичке геометрије и CD
ВН

Извод: У Докторској дисертацији је извршена методичка трансформација садржаја аналитичке геометрије, у наставном систему – настава уз помоћ рачунара, адекватним избором садржаја, израдом одговарајућих генеричких органи-затора уз коришћење образовног софтвера GeoGebra и Mathematica. Обрађен је дидактички систем настава уз помоћ рачунара, анализом међусобне зависности фактора наставе, анализом дидактичких принципа, класификацијом и приказом наставних метода, уз подесно формиране генеричке организаторе. Експериментално истраживање је потврдило могућност примене наставе уз помоћ рачунара, као и позитиван утицај на реализацију циљева и задатака, на укупан образовни учинак и подизање нивоа ефикасности савремене наставе.
ИЗ

Датум прихватања теме од стране Сената Универзитета у Новом Саду:
17.12. 2009. г.
ДП

Датум одбране:
ДО

Комисија:

Председник:

Ментор: Др. Драгослав Херцег, редовни професор
Природно-математичког факултета у Новом Саду

Члан:

Члан:

Члан:

КО

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE
DEPARTAMENT OF MATHEMATICS AND INFORMATICS
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accesion number:
ANO
Identification number:
INO
Document type: Monograph type
DT
Type of record: Printed text
TR
Contents code: Doctoral dissertations
CC
Author: mr Branko Prentović
AU
Mentor: Prof. dr Dragoslav Herceg
MN
Title: The computer in teaching analytic geometry in the gymnasium
TI
Language of text: Serbian (Cyrillic)
LT
Language of abstract: Serbian / english
LA
Country of publication: Republic of Serbia
CP
Locality of publication: Vojvodina
LP
Publication year: 2014
PY
Publisher: Author's reprint
PU
publ. place: Novi Sad, Department of mathematics and informatics, Faculty of science, Trg Dositeja Obradovića 4.
PP
Physical description: (6, 203, 140, 26, 46, 20, 2)
PD (chapters/pagges/literature/tables/pictures/graphs/additional lists)
Scientific field: Mathematics
SF
Scientific discipline: Teaching of Mathematics
SD
Subject/Key words: analytic geometry, line, circle, ellipse, hyperbola, parabola, vector, teaching, computer, educational software, visualization, …
SKW

UC

Holding date: Library Department of Mathematics and Informatics

HD

Note: The contributions represent a doctoral thesis: Interactive textbook of analytic geometry and CD

N

Abstract: In this doctoral dissertation, methodical transformation of content analytic geometry, is carried out, in the educational system - a computer-assisted teaching, by appropriate selection of content, making appropriate generic organizers using educational software GeoGebra and Mathematica. Didactic teaching system, computer-assisted teaching, was processed, by analyzing the factors of teaching and didactic principles, classification and presentation of teaching methods, with the adequately created generic organizers. Experimental research has confirmed the apossibility of computer-assisted teaching, as well as a positive impact on the realization of goals and tasks, on the overall educational impact and raising the efficiency of modern teaching.

AB

Accepted by the Senate of the University of Novi Sad on:
december 17. 2009.

ASB

Defended:

DE

Thesis defend board:
(Degree/name/surname/title/faculty)

DB

President:

Mentor: Dr. Dragoslav Herceg, Full Profesor Faculty of Science,
University of Novi Sad

Member:

Member: