

Универзитет у Новом Саду  
Факултет техничких наука



# Параметарски модел за пројектовање сложених афиних сводова

Испитивање равнотеже масивних  
засвођених конструкција

*Докторска дисертација*

ДИМИТРИЈЕ НИКОЛИЋ

Нови Сад, новембар 2018.



Параметарски модел за пројектовање  
сложених афиних сводова

Испитивање равнотеже масивних  
засвођених конструкција

*Докторска дисертација*

Димитрије Николић

Ментори:

др Весна Стојаковић и академик др Теодор Атанацковић

Нови Сад, новембар 2018.





УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ • ФАКУЛТЕТ ТЕХНИЧКИХ НАУКА  
21000 НОВИ САД, Трг Доситеја Обрадовића 6

КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА

Редни број, **РБР**:  
Идентификациони број, **ИБР**:  
Тип документације, **ТД**: Монографска публикација  
Тип записа, **ТЗ**: Текстуални штампани материјал  
Врста рада, **ВР**: Докторска дисертација  
Аутор, **АУ**: Димитрије Николић  
Ментор, **МН**: др Весна Стојаковић, академик др Теодор Атанацковић  
Наслов рада, **НР**: Параметарски модел за пројектовање сложених афиних сводова  
Језик публикације, **ЈП**: српски  
Језик извода, **ЈИ**: српски и енглески  
Земља публикавања, **ЗП**: Србија  
Уже географско подручје, **УГП**: Војводина  
Година, **ГО**: 2018.  
Издавач, **ИЗ**: Универзитет у Новом Саду, Факултет техничких наука  
Место и адреса, **МА**: Нови Сад, Трг Доситеја Обрадовића 6  
Физички опис рада, **ФО**: 9 глава, 293 стране, 133 референце, 30 табела, 95 слика, 10 додатака  
Научна област, **НО**: Архитектура  
Научна дисциплина, **НД**: Теорије и интерпретације геометријског простора у архитектури и урбанизму; Конструкције, инсталације, екологија и грађење параметарско пројектовање, конструкцијски афинитет, зидани сводови, испитивање равнотеже, теорија потпорне линије  
Предметна одредница/  
Кључне речи, **ПО**:  
**УДК**  
Чува се, **ЧУ**: Библиотека Факултета техничких наука у Новом Саду  
Важна напомена, **ВН**:  
Извод, **ИЗ**: У овој дисертацији обрађен је проблем равнотеже засвођених масивних конструкција. На основу подробне разраде теорије потпорне линије и концепта конструкцијског афинитета, уведен је модел афиних сводова. Установљена је зависност између облика сводних поља и одговарајућих дејстава свода, те је начињен параметарски модел за пројектовање сложених афиних сводова. Њиме је обухваћен аутоматизовани прорачун и графички приказ резултантних дејстава на ослонце, у виду рачунарског алата применљивог у пројектовању и савременом обликовању засвођених архитектонских простора. С обзиром на раванске проблеме – лукове који могу бити ободни лукови афиног свода, аналитички је обрађено чак десет скупина различитих симетричних конвексних лукова те је извршено и одговарајуће нумеричко моделирање.  
Датум прихватања теме, **ДП**: 20. септембар 2018.  
Датум одбране, **ДО**:

Чланови комисије, **КО**:

Председник: др Дарко Реба, редовни професор

Члан: др Радован Штулић, редовни професор

Члан: др Душан Ковачевић, редовни професор

Члан: др Миодраг Несторовић, редовни професор у пензији

Потписи ментора:

Члан, ментор: др Весна Стојаковић, ванредни професор

Члан, ментор: академик др Теодор Атанацковић, професор емеритус



## KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number, **ANO**:  
Identification number, **INO**:  
Document type, **DT**: Monographic publication  
Type of record, **TR**: Textual printed document  
Contents code, **CC**: PhD Thesis  
Author, **AU**: Dimitrije Nikolić  
Mentor, **MN**: PhD Vesna Stojaković and academician PhD Teodor Atanacković  
Title, **TI**: Parametric Model for the Design of Complex Affine Vaults  
Language of text, **LT**: Serbian  
Language of abstract, **LA**: Serbian and English  
Country of publication, **CP**: Serbia  
Locality of publication, **LP**: Vojvodina  
Publication year, **PY**: 2018  
Publisher, **PB**: University of Novi Sad, Faculty of Technical Sciences  
Publication place, **PP**: Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 6  
Physical description, **PD**: 9 chapters, 293 pages, 133 references, 30 tables, 95 figures, 10 appendices  
Scientific field, **SF**: Architecture  
Scientific discipline, **SD**: Geometric theories and interpretation of architectural space; Structures, installations, ecology and construction  
Subject/Key words, **S/KW**: parametric design, structural affinity, masonry vaults, equilibrium analysis, thrust line theory

**UC**

Holding data, **HD**: Library of Faculty of Technical Sciences in Novi Sad

Note, **N**:

Abstract, **AB**: In this dissertation, the problem of the equilibrium of vaulted masonry structures is considered. On the basis of detailed analysis of the thrust line theory and the concept of structural affinity, the model of affine vaults is introduced. The relation between the shape of the vault's bays and the structural action is established, and the parametric model for the design of complex affine vaults is defined. It involves the automated calculation and graphic representation of the resultant loads; thus, the computational tool applicable in the design and contemporary shaping of vaulted architectural spaces is created. Regarding two-dimensional problems – arches which can be peripheral arches of affine vaults, for ten groups of different symmetrical convex arches, the analytical treatment and a corresponding numerical modelling are carried out.

Accepted by the Scientific

Board on, **ASB**: 20 September 2018

Defended on, **DE**:

Defended Board, **DB**:

President: PhD Darko Reba, Full professor

Member: PhD Radovan Štulić, Full professor

Member: PhD Dušan Kovačević, Full professor

Member: PhD Miodrag Nestorović, Full professor – retired

Mentors' signs:

Member, Mentor: PhD Vesna Stojaković, Associate professor

Member, Mentor: Academician PhD Teodor Atanacković, Professor emeritus

---

## Захвалница

Захваљујем се својим менторима, академику Теодору Атанацковићу и проф. др Весни Стојаковић, на смерницама, примедбама, идејама, као и на указаној подршци при изради ове дисертације. Професору Атанацковићу дугујем захвалност што ми је открио и представио проблем равнотеже масивних лукова, те, како се испоставило, нехотице утицао на одабир теме дисертације.

Захваљујем проф. др Радовану Штулићу на помоћи при почетним тумачењима теоријских поставки теорије потпорне линије.

Захвалан сам проф. др Миодрагу Несторовићу, проф. др Дарку Реби и проф. др Душану Ковачевићу на указаној подршци, корисним разговорима и опаскама.

Захваљујем проф. др Ивици Бошњаку, који се, иако није тако близак области дисертације, упустио у тумачење мојих идеја, те ми упутио корисне примедбе у току истраживања.

Посебно се захваљујем својим пријатељима – без којих би ова дисертација вероватно била раније завршена. Ипак, веома сам им захвалан на указаној вољи и пажњи при саслушавању мојих недовољно разрађених и обликованих идеја.

Највећу захвалност свакако дугујем својој мајци, која ми, ево већ тридесет година, пружа несаломиву потпору, како иначе тако и у току израде ове дисертације.

---

## Садржај

<i>Предговор</i>	<i>страница</i>	<i>vi</i>
<b>Глава I Теоријске основе истраживања</b>		<b>1</b>
<b>1 Претходна истраживања масивних засвођених конструкција</b>		<b>3</b>
<b>2 О теорији потпорне линије</b>		<b>14</b>
<b>3 Предмет, хипотезе и циљ истраживања</b>		<b>20</b>
<b>4 Методолошки оквир истраживања</b>		<b>23</b>
<b>5 Нацрт разматраних лукова и сводова</b>		<b>30</b>
<b>Глава II Псеудолукови</b>		<b>35</b>
<b>6 Равни лукови</b>		<b>37</b>
6.1 Радијална стереотомија		37
6.2 Вертикална стереотомија		40
<b>7 Троугласти и троугаони лукови</b>		<b>42</b>
7.1 Вертикална стереотомија		42
7.1.1 Минимална дебљина троугаоног лука		42
7.1.2 Минимални хоризонтални потисак		44
7.2 Нормална стереотомија		46
7.2.1 Нагнути прави лук		46
7.2.2 Троугаони лук		49
7.3 Радијална стереотомија		52
7.4 Хоризонтална стереотомија		55
7.4.1 Два наспрамно постављена паралелоипеда		55
7.4.2 Лажни троугаони лук		56
7.4.3 Лажни полулук		58
7.5 Преглед резултата: троугаони и троугласти лукови		61



<b>Глава III Преломљени лукови</b>	<b>63</b>
<b>8 Радијална стереотомија</b>	<b>65</b>
8.1 Геометријска својства	65
8.2 Хоризонтални потисак и потпорна линија	74
<b>9 Нормална стереотомија</b>	<b>76</b>
9.1 Исечак кружног прстена	76
9.2 Геометријска својства	77
9.3 Хоризонтални потисак и потпорна линија	83
<b>10 Вертикална стереотомија</b>	<b>85</b>
10.1 Геометријска својства	85
10.2 Хоризонтални потисак и потпорна линија	90
<b>11 Могући механизми слома преломљених лукова</b>	<b>91</b>
<b>12 Нумеричко моделирање</b>	<b>98</b>
12.1 Одређивање чинилаца прорачуна	98
12.2 Одабир опасне области лука	99
12.3 Одређивање минималне дебљине преломљених лукова	100
12.4 Одређивање граничног ексцентрицитета	102
12.5 Одређивање минималне потпорне линије и потиска	104
<b>13 Преглед резултата</b>	<b>106</b>
<b>Глава IV Изведени полицентрични лукови</b>	<b>113</b>
<b>14 Лукови из трију средишта</b>	<b>115</b>
14.1 Елипсасти лукови	115
14.1.1 Геометријска својства	115
14.1.2 Хоризонтални потисак и потпорна линија	119
14.2 Псеудолукови из трију средишта	120
14.2.1 Геометријска својства	120
14.2.2 Хоризонтални потисак и потпорна линија	122
14.3 Минимална дебљина лукова из трију средишта	122
14.4 Преглед резултата	124
<b>15 Тјудорски лукови</b>	<b>127</b>
15.1 Лукови из четирију средишта	127
15.1.1 Геометријска својства	127
15.1.2 Хоризонтални потисак и потпорна линија	131
15.2 Псеудолукови из четирију средишта	132
15.2.1 Геометријска својства	133
15.2.2 Хоризонтални потисак и потпорна линија	137
15.3 Минимална дебљина тјудорских лукова	138
15.4 Преглед резултата	139

Глава V Испитивање равнотеже простих крстастих сводова	145
<b>16 Троугаони крстаста сводови</b>	147
16.1 Хоризонтални потисак троугаоних крстастих сводова	149
16.2 Тежина троугаоних крстастих сводова	152
16.3 Троугаони крстаста свод минималне дебљине	152
16.4 Резултати	154
<b>17 Преломљени крстаста сводови</b>	155
17.1 Минимални потисак меродавног свода	159
17.2 Запремина меродавног свода	162
17.3 Дијагонални потисак простих крстастих сводова	164
17.4 Резултати	165
Глава VI Образовање афиних сводова	169
<b>18 Разврставање афиних сводова</b>	171
<b>19 Сложени крстаста сводови</b>	172
19.1 Правилни крстаста сводови	172
19.2 Неправилни крстаста сводови	173
19.3 Дејствовање сложеног крстастог свода	174
<b>20 Зракасти и прстенасти сводови</b>	177
20.1 Прости прстенасти сводови	178
20.2 Сложени прстенасти сводови	180
Глава VII Параметарско обликовање сводова	183
<b>21 Конструкцијски афинитет сводова</b>	185
21.1 Конструкцијски афинитет равних ликова	185
21.2 Конструкцијски афинитет просторних облика	186
<b>22 Пројектовање сложених афиних сводова</b>	192
22.1 Дејство на појединачан ослонац	194
22.2 Оптималан положај ослонца	197
22.3 Дејствовање сложеног неправилног афиног свода	200
22.4 Дејствовање сложеног зракастог свода	203
22.5 Алгоритам за испитивање општих афиних сводова	211
Глава VIII Завршна разматрања	215
<b>23 Преглед доприноса дисертације</b>	217
<b>24 Закључак</b>	224

Глава IX	Додаци	225
<i>Додатак А</i>	Испитивање равнотеже ланчаничног лука	227
<i>Додатак Б</i>	Прилог резултатима нагнутог правог лука	234
<i>Додатак В</i>	Преломљени лукови по радијалној стереотомији: резултати	240
<i>Додатак Г</i>	Графички приказ лукова из трију средишта минималне дебљине	244
<i>Додатак Д</i>	Графички приказ тјудорских лукова минималне дебљине	249
<i>Додатак Ђ</i>	Подељено хоризонтално оптерећење	253
<i>Додатак Е</i>	Примери прорачуна дејства афиних сводова	256
<i>Додатак Ж</i>	Заравњени сводови	266
<i>Додатак З</i>	Испитивање равнотеже драперастог лука	269
<i>Додатак И</i>	Испитивање равнотеже циклоидног лука	273

---

## Предговор

*Ако, на пример, приупитате циглу: „Шта би ти, цигло?“, и цигла вам одговори: „Ја бих лук“, и ако јој онда кажете: „Види, лукови су скупи и могао бих да употребим бетонски надвратник уместо тебе, шта кажеш на то, цигло?“, цигла ће одговорити: „Ја бих лук!“ [42, стр. 10]*

Луис Кан

Увођењем математичке обраде у дотада претежно практичан задатак, проблем стабилности<sup>1</sup> масивних конструкција (првенствено засведених) крајем седамнаестог века задобија и теоријски вид. Тако њиме почињу да се баве појединци који су боље владали математичким апаратом, а који су изворно били усмерени ка другим, чак и веома различитим, областима.<sup>2</sup> Подизањем степена математичке обраде ових проблема, као и развојем инжењерских школа крајем осамнаестог века, постепено се раздвајају функцијски и естетски вид градитељства с једне стране, и конструкцијски вид с друге стране, те се у образовном систему успостављају појединачне струке, архитектонска и грађевинска (в. [59, 75, 115]). Тиме

---

<sup>1</sup> Под појмом стабилност у овој дисертацији подразумева се статичка стабилност, где је граница одређена методом блиске равнотежне конфигурације. Одређеније, губитак стабилности подразумева угрожавање интегритета конструкције, односно њену носивост.

<sup>2</sup> Тако је нпр. за пројектовање куполе Светог Павла у Лондону био задужен изворно астроном, а потом један од најзначајнијих енглеских архитеката, Кристофер Рен, уз сарадњу физичара Роберта Хука; у једној варијанти пројекта средња купола има облик ротационе површи чија је изводница кубна парабола [63], што је један од првих случајева где се математички одређени облик непосредно користио као део процеса архитектонског пројектовања. Испитивање стабилности куполе Светог Петра је, средином осамнаестог века, било поверено тројци математичара (*tre matematici*, в. [59, 80, 81]), међу којима је био и Руђер Бошковић, а што се сматра првим елаборатом стабилности конструкција; он је, такође, касније био задужен и за анализу стабилности куполе Миланске катедрале (в. [21, 28]).

ови проблеми бивају претежно разматрани од стране грађевинских инжењера или стручњака за посебне области техничке механике. Међутим, има и градитеља, као што су Антони Гауди, Пјер Луиђи Нерви, Феликс Кандела и Сантијаго Калатрава, који су и у току двадесетог века, без обзира на основно академско образовање, успевали да обједине и једну и другу страну, испољавајући изражену склоност ка конструкцијским видовима архитектонског стваралаштва.<sup>3</sup> Захваљујући развоју рачунарских технологија у градитељству, данас се овим проблемима равноправно баве и архитекте, обједињујући области историје архитектуре, техничке механике, рачунарских наука и дигиталне фабрикације. Тако су на последњем одржаном Венецијанском бијеналу архитектуре, 2016. године, чак три поставке биле посвећене управо масивним сводовима.

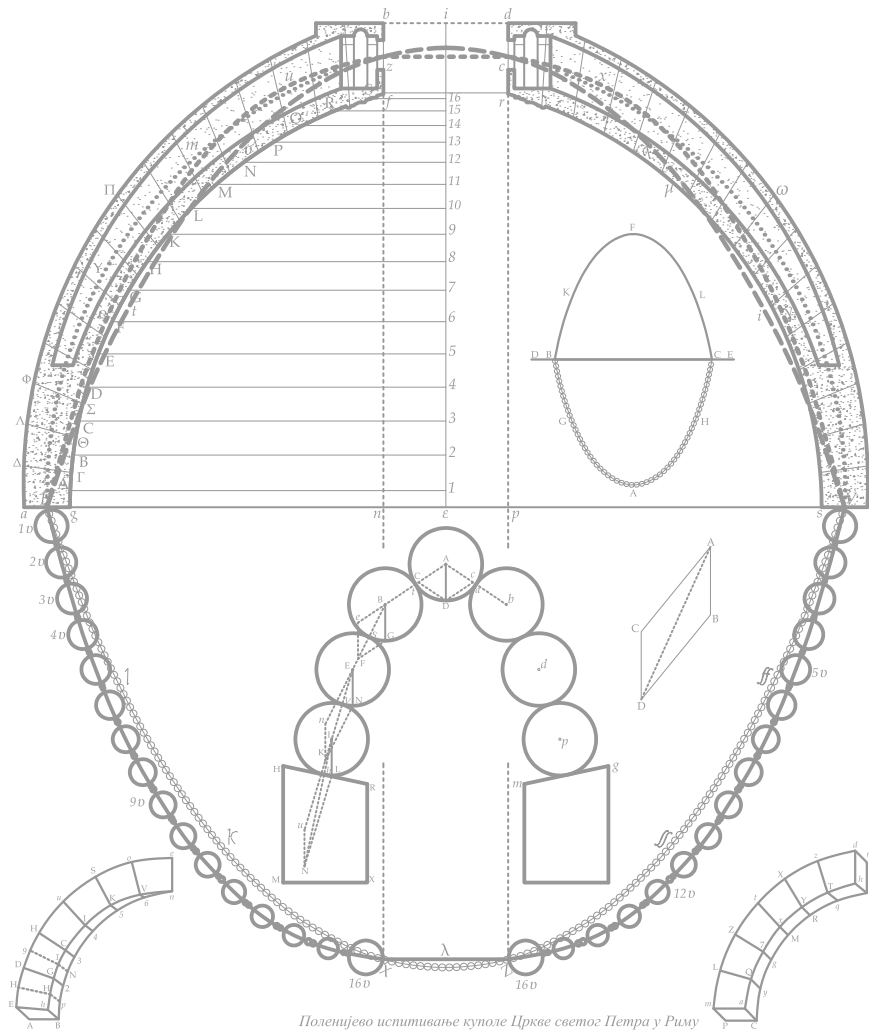
---

<sup>3</sup> Уз њих се могу сврстати и представници хај-тек архитектуре, попут Ренца Пјана, Ричарда Родерса и Нормана Фостера, у чијим делима архитектонско-конструкцијски детаљи у великој мери утичу на доживљај архитектонског простора.



# Глава I

## Теоријске основе истраживања







---

## Претходна истраживања масивних засвођених конструкција

*Ut pendet continuum flexile, sic stabit contiguum rigidum inversum.*<sup>1</sup>

Роберт Хук

Древни градитељи су изумели разне облике конструкцијских елемената како би наткрили простор, односно премостили отворе у зиду или између стубова. Претече натпрозорних односно надвратних греда били су комади монолитних камених блокова коришћених у архитравном конструкцијском систему, својственом неолитској (нпр. менхири у Стоунхенџу), египатској (храмови у Карнаку, Луксору) или грчкој архитектури (Атински Акропољ). Претежно су постављани хоризонтално, али и у нагнути положај, образујући тако троугаоне отворе. Такозвани лажни лукови, образовани од конзолно препуштених блокова у хоризонталним слоговима, представљају корак ка изумевању лука односно свода (нпр. Атрејева ризница у Кнососу). Масивне засвођене конструкције, као што су зидани лукови или сводови, данас представљају велики део архитектонског наслеђа. За разлику од гредних система, код којих постоје само вертикална оптерећења, код лучних носача јављају се и хоризонтални потисци, чије је савладавање представљало један од кључних проблема током градитељске историје.

Како би предвидели и предупредили могуће сломове (колапсе), истраживачи развијају различите моделе дејствовања (понашања)

---

<sup>1</sup> „Као што виси гупко урсе, наглавачке стоји крути лук.“ Хук је (за)дао овај став у виду (једног од укупно десет) анаграма: *abccc ddeeee fgg iiiiiii lmmmmnnnnnooprr ssstttttuuuuuuuuuux*, на крају књиге [64, стр. 31], „како би испунио упражњено место на страни“. Решење анаграма је објављено тек 1705. године, након Хукове смрти. Чак је и данас, изван уских научних кругова, уврежено мишљење да потпорна линија има облик ланчанице. Међутим, по Бенвенути [12] је још у осамнаестом веку указано на погрешност те аналогije [118]. Ово је потврдио Миланковић [92], а недавно су Макрис и Алексакис [84] показали да ланчаница теоријски не може бити потпорна линија у полукружном луку.

конструкција, који се користе у испитивањима (анализама) стабилности.<sup>2</sup> Међутим, све до краја седамнаестог века, чак су и највећи лукови, сводови и куполе били грађени на основу чисто геометријских правила конструисања [102] (нпр. тзв. Дераново правило [11, 19, 41]), која су била заснована једино на искуству и градитељској интуицији [12]. Све до Галилеја, сматрало се да је геометрија (облик) – а не механика (чврстоћа материјала) – та која обезбеђује стабилност конструкције. Тако Витрувијево *firmitas* првенствено припада пољу геометрије [116]. По Леонарду да Винчију, лук није ништа више до снага добијена удруживањем двеју слабости [106], а што се може сматрати првим описом дејствовања лука [27].<sup>3</sup> Дакле, исправно димензионисање је било резултат емпиријских опажања током дугачког периода, а не последица знања техничке механике [31].

Градитељи су често тежили оптималном извођењу појединих конструкција, с обзиром на њихов облик и материјал употребљен за изградњу. Веза између (најбољег) облика лука и ланчанице<sup>4</sup> такође је установљена емпиријски [102], али је мало вероватно да датира пре ренесансе [31]. Роберт Хук је вероватно први који је, данас добро познатим анаграмом [64], указао на то. Грегори [57] (у енглеском преводу [129]) наводи да је неки лук стабилан зато што је његовом дебљином обухваћена одговарајућа ланчаница. Другим речима, лук је стабилан ако је могуће наћи потпорну линију која лежи у његовим границама [62]. Међутим, ова значајна напомена није довела до корисних поступака за испитивање или пројектовање стварних лукова [69]. Идеја о изврнутој (наглавачке постављеној) верижној кривој – ланчаници може се наћи и у Белидоровим илустрацијама [11], и управо њу је применио Полени [101] приликом провере стабилности куполе Светог Петра у Риму, средином осамнаестог века. Ово начело остало је заступљено чак и у двадесетом веку, посебно међу архитектама [31], нпр. у делима Гаудија [66]. Премда су проблеми ланчанице и зиданог лука сведени на један [124], могу се разграничити његова два вида. Наиме, с једне

<sup>2</sup> Овде ће бити изложена материја потребна за постављање теоријскога оквира ове дисертације, док се опширнији прикази развитка истраживања стабилности масивних лукова и сводова могу наћи у [12, 59, 61, 75].

<sup>3</sup> Наиме, половина лука, дејствујући самостално, није у равнотежи. Међутим, две половине лука, преносећи хоризонтални потисак једна на другу у темену лука, чине лук у целини стабилним. У Да Винчијевим Белешкама [37] може се наћи скица опреме за мерење хоризонталног потиска полукружног и преломљеног лука.

<sup>4</sup> Облик криве одређен положајем који заузима савршено гипка нерастегљива тешка нит (хомоген ланац) окачена о крајеве; в. Додатак А.

стране је математички проблем, претежно разматран међу математичарима (попут браће Бернули, Лајбница, Хајгенса, Грегорија) који су посматрали лук инфинитезималне дебљине; с друге стране је то механички проблем, разматран међу архитектама (као што су Лаир, Купле и Белидор) који посматрају ланчаницу у виду линије која повезује тежишта тесаника лука одређене (коначне) дебљине [102].

Лаир [38, 39] се сматра првим аутором који је приступио проблему стабилности лукова и сводова с научне тачке гледишта [12], док је Белидор [11] његове ставове применио у пракси. Иако је било разматрано и раније, Купле [30] је био први који је поставио јасне претпоставке о понашању масивног материјала: треће између тесаника је довољно велико да не може доћи до клизања, међу тесаницима не може да се преноси затезање и напони који настају су тако мали да је чврстоћа на притисак практично неважна [59]. При томе је утврдио начин на који долази до слома лука – механизам слома узрокован образовањем пукотина у луку.<sup>5</sup> На томе је засновао поступак којим је покушао да одреди минималну дебљину полукружног лука непроменљиве дебљине под дејством сопствене тежине, а што је данас познато као Куплеов проблем. У складу с наведеним, изузета је могућност слома услед чврстоће материјала, дозвољавајући само слом услед губитка стабилности, релативним обртањем делова лука. Ове указе је на гипсаним моделима лукова експериментално потврдио Денизи [50]. Након тога је Кулон [29], из услова статичке равнотеже, развио метод максимума и минимума, показујући постојање двеју граничних вредности хоризонталног потиска. Циљ овога је било тачно одређивање положаја пукотине (зглоба) и израчунавање одговарајућег потиска лука [59].

Почетком деветнаестог века је Томас Јанг [133] увео концепт потпорне линије, омогућавајући визуализацију тока оптерећења у луку [69]. Пре више од једнога века, наш научник Милутин Миланковић, подробно је обрадио замисао потпорне линије, и то у својој докторској дисертацији.<sup>6</sup> У свом раду [92], Миланковић је пружио општу теорију за испитивање равнотеже масивних лукова општег –

<sup>5</sup> Назнаке оваквог механизма слома могу се наћи читав век раније у [9].

<sup>6</sup> Према је с почетка двадесетог века, овај рад је широј научној заједници познат тек однедавно, те Миланковићев приступ изнова постаје предмет истраживања. Овоме су највише допринели рад италијанског истраживача Фоча из 2007, у којем је на енглеском језику приказано Миланковићево истраживање (изворно објављено на немачком језику), као и неколицина радова грчких истраживача Макриса и Алексакаса из протеклих неколико година у којима је исти приступ истакнут и примењен.

закривљеног облика [51]. У прорачун је увео тачне положаје тежишта тесаника, који су до тада узимани дуж осе (средишње линије) лука, те је диференцијалним рачуном извео израз за потпорну линију. Тако је, изванредном математичком разрадом проблема, први који је дао тачно решење Куплеовог проблема, скоро два века након његове поставке. Миланковић је указао на то да се експлицитна једначина потпорне линије може непосредно добити, без извођења диференцијалне једначине и њеног интеграљења, и то када је могуће извести аналитички израз за резултантно оптерећење и припадајућу нападну тачку за одређени – коначни део лука [51]; управо овај став је примењен при аналитичкој обради потпорне линије у овој дисертацију.

У другој половини деветнаестог века, с развојем челичних конструкција, истраживање масивних лукова потпало је под оквир теорије еластичности [27]. Међутим, ова решења су се испоставила неодговарајућа за масивне лукове, који не испољавају линеарно еластично понашање [65]. С обзиром на то да се применом графичких (геометријских) конструкција могу обрађивати сложенији конструкцијски проблеми које је било захтевно решавати нумеричким путем [56], чак и касније, у двадесетом веку, када је теорија еластичности преузела свеопште првенство, у пракси је још увек била уобичајена провера стабилности уз помоћ метода графостатике [69], развијаних у другој половини деветнаестог века (в. [32, 33]) и усавршених до краја века (в. [73] и [125]).

Средином двадесетог века је показано да су поменуте Куплеове претпоставке заправо довољне да се испитивање масивних конструкција уврсти у оквир теорије пластичности односно анализе граничних стања [74], изворно развијене за челичне конструкције [27, 58, 62, 75]. Од посебног значаја је статичка теорема (тзв. сигурносна, доња гранична теорема) теорије пластичности која каже да је лук стабилан (сигуран) уколико постоји потпорна линија која је у равнотежи с оптерећењем и притом свуда лежи у границама лука (што је већ наслутио Грегори); при томе, то не мора да буде стварна потпорна линија [59]. Према томе, облик лука, а не чврстоћа материјала, обезбеђује стабилност лука [61]. То омогућава једноставно статичко испитивање у оквиру теорије статички одређених система, својствено анализи граничне равнотеже, примењиваној пре двадесетог века [75]. Тако се проблем стабилности масивног лука своди на претежно геометријски задатак, а што ће бити подробније размотрено у поглављу 2 ове дисертације.

**Испитивање зиданих сводова.** С обзиром на зидане просторне (тродимензионалне) конструкције – сводове, као полазиште се узимају псеудотродимензионална испитивања развијана у оквиру метода графостатике.<sup>7</sup> Наиме, сводови се поделе на лукове (деонице) коначне ширине чија се равнотежа засебно испитује (в. нпр. [61, 73, 125, 130, 131]). Закључено је да је разложно „сечење“ (подела, дискретизација) свода према линијама најстрмијег пада (нпр. вертикалним равнима које их садрже) [16, 69, 125]. У складу с тим се крстасти или ребрасти сводови, образовани од двају цилиндричних сводова,<sup>8</sup> испитују (графички) на основу дискретизованог модела тока сила, као систем међусобно независних (елементарних, паралелних) лукова који премештавају распон између укрсница односно (дијагоналних) ребара свода. Њихови појединачни потисци нижу се дуж ребара<sup>9</sup> и преносе се посредно на ослонце [73, 125].

Почев од последње четвртине прошлог века, развијају се различити модели понашања засвођених конструкција засновани на тзв. методи коначних (*FEM*) и дискретних (*DEM*) елемената (в. нпр. [53, 69, 77, 78, 86, 85, 91, 110]). Међутим, премда се и данас развијају, с обзиром на својства масивног материјала те изузетну осетљивост на мале промене граничних услова, испостављају се непримеренима за испитивање зиданих конструкција [27, 61, 69, 110]. Као што је поменуто, у својим многобројним радовима у другој половини двадесетого века, Хејман је показао да тзв. анализа граничних стања може бити примењена на зидане конструкције, уколико материјал испуњава одређене услове (поменуте Куплеове претпоставке).<sup>10</sup> У складу с тим, конструкција је безбедна уколико може бити нађено статички могуће равнотежно стање; ово је случај када се унутрашњи (равнотежни) систем, као што је потпорна мрежа или потпорна површ, који представља ток сила унутар засвођене конструкције и који је у равнотежи с датим оптерећењима, налази у оквиру граница свода (између интрадоса и екстрадоса) [13, 14, 27, 61, 67, 69, 75]. Иако је идеја стара више векова, овај тзв. равнотежни односно геометријски приступ, данас се сматра веома

<sup>7</sup> Овакав приступ, такозвану методу сечења односно резања, први је на примеру крстаог свода и куполе применио Витман [69, 130].

<sup>8</sup> Водиље ових сводова могу бити нпр. троугаони, полукружни, преломљени лук итд.

<sup>9</sup> Позната је двојба имају ли ребра естетску или конструкцијску улогу (в. нпр. [70]). У овој дисертацији тај проблем неће бити разматран, а сводови ће бити испитивани без присуства и утицаја ребара.

<sup>10</sup> Такав тзв. равнотежни приступ је заправо већ био присутан у тзв. старој теорији развијаној током осамнаестог и деветнаестог века [69].

учинковитим алатом који ваљано (блиско стварности) описује понашање масивних конструкција [61, 69, 75, 110].

**Стереотомија.** Приликом истраживања лукова, научници су разматрали различите врсте стереотомије, односно утицај облика тесаника на стабилност и естетику засвођених конструкција. Стереотомија представља скуп геометријских знања и каменорезачких вештина, односно технику конструисања (цртања и тесања) каменних блокова и састављања у сложене архитектонске конструкције (као што су лукови, сводови, тромпе, завојна степеништа и сл.) [2, 116].<sup>11</sup>

Различити правци спојница односно пукотина међу тесаницима, те правци произвољних (спојничких) пресека приликом аналитичког моделирања проблема, одређују различите облике односно тежине одговарајућих делова лука [84]. Сходно томе, уочен је утицај стереотомије на сложеност самог аналитичког поступка који се спроводи приликом прорачуна стабилности.<sup>12</sup> Закључено је да различити облици стереотомије дају различите теоријске, физички могуће, облике потпорне линије [7, 84, 123].<sup>13</sup> Уколико се испитује стабилност постојећег лука, требало би да примењена стереотомија одражава конструкцију лука, односно правац пружања изведених спојница [99].

С обзиром на зидане лукове, уобичајене врсте стереотомије, односно правци пружања спојница<sup>14</sup> међу тесаницима (в. [73, 125]), који уједно одређују и претпостављени правац пукотина, јесу:

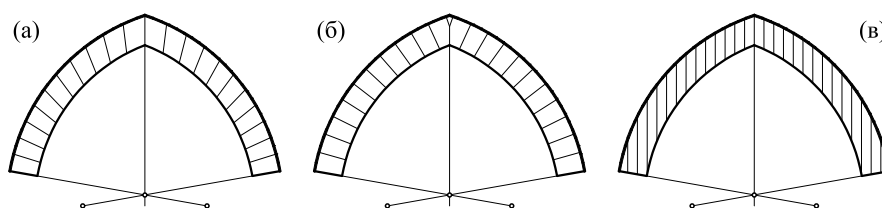
<sup>11</sup> Тако стереотомија обједињује начела примењене геометрије, статике и естетике, и важан је чинилац у историјском развоју архитектонских конструкција. Међу најпознатијим трактатима су [40, 50, 79]. Развој стереотомије претходно је успостављању нацртне геометрије као дисциплине. Извођачки цртежи каменорезача били су покретачи развоја техника репрезентације и визуализације простора [116]. Међутим, временом се стереотомија, изучавана у инжењерским школама у Француској крајем осамнаестог века, од заната преусмерила ка теоријском пољу. Тако је нпр. Монж предложио да спојнице међу тесаницима елипсоидног свода (половина трогосног елипсоида) буду израђене у виду правоизводних површи чије су изводнице нормале елипсоида дуж његових линија закривљености; међутим овакав свод није никада изведен [95, 117].

<sup>12</sup> Уз то, коришћена стереотомија обично налаже и одабир одговарајућег координатног система приликом аналитичког моделирања проблема.

<sup>13</sup> Испитујући полукружни лук, Макрис и Алексакис [84] су показали да уобичајени облици стереотомије не дају знатно различите вредности минималне дебљину луке. Међутим, недавно је Гашпар са сарадницима [55] показао да се може наћи стереотомија којом се знатно утиче ову величину.

<sup>14</sup> Постоје и сложени претпостављени изломљени облици пукотина [7, 76].

- (а) *радијална стереотомија*: правац спојница је конкурентан са средиштем лука, као што је случај код тзв. италијанских преломљених лукова (слика 1а);
- (б) *нормална стереотомија* (управна, ортогонална): спојнице су управне на осу лука односно управне на интрадос (слика 1б);<sup>15</sup>
- (в) *вертикална стереотомија*: спојнице су паралелне и пружају се у вертикалном правцу (слика 1в).<sup>16</sup>



Слика 1. Различити облици стереотомије заступљени у преломљеним луковима (а) радијална, (б) нормална, (в) вертикална

**Механизми слома зиданих лукова.** Крути масивни лук је статички неодређен систем [58, 65, 75, 112]. Након уклањања оплате, услед неизбежних (геометријских) неправилности, лук прилагођава облик односно слеже се (деформише се), те настају пукотине у луку (које не морају бити јасно видљиве). Ове пукотине се идеализују у виду зглобова, будући да се око њих врши релативно обраћање крутих делова лука [61]. На овај начин статички неодређена полазна конструкција постаје статички одређен лук. Оптерећење се преноси, кроз једну, крајњу, тачку отворене спојнице односно пукотине, кроз деформацијом образован зглоб. Према томе, пукотине су саставни део природног стања зиданог лука [58]. У складу с наведеним својствима масивног материјала, изузета је могућност слома услед чврстоће материјала, дозвољавајући само слом услед губитка стабилности. Тако до слома лука може да дође искључиво након образовања кинематички могућег механизма слома [75]. Потребан је настанак одређеног броја пукотина, које се понашају као

<sup>15</sup> У случају кружних лукова радијална и нормална стереотомија се подударају.

<sup>16</sup> Ламе и Клапејрон [76] су показали да се на овај начин прорачун упрошћава [123]. Међутим, вертикални резони се могу наћи већ у радовима Лорње [82] и Фонтана [52]. Јанг [133] је показао да, уз вертикалну стереотомију, потпорна линија лукова који имају једнообразну вертикалну дебљину има облик параболе [72]. Миланковић [92] ју је такође разматрао код лука једнаког отпора. Вертикална стереотомија је уобичајено примењивана приликом испитивања равнотеже сводова (в. нпр. [73, 125, 130, 131] или у новијим истраживањима [15, 25, 27]).

зглобови, како би стабилан лук постао механизам. Уз то је потребно да пукотине буду наизменично оријентисане. Да би се показало да лук може изгубити стабилност, неопходно је одредити размештај зглобова који одговара механизму слома [59].

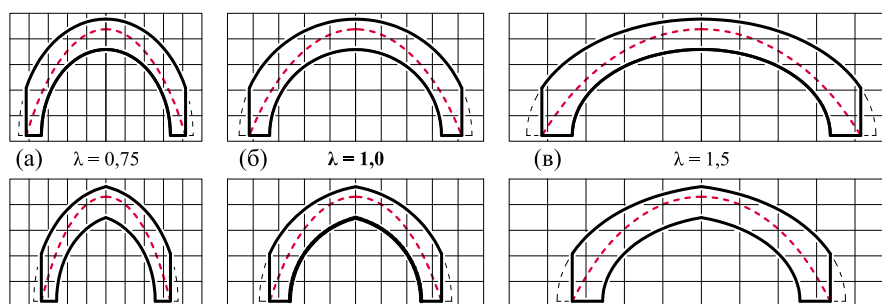
Овакви механизми слома су познати за различите облике лукова (в. [50, 89]). Равнотежу равног тј. правога лука разматрали су, између осталих, још Лаир [39] и Кулон [29], и то као склоп крутих тесаника са спојницама без трења нити кохезије међу њима. Показано је да сломљени архитрав, с пукотином у средини распона, такође дејствује као раван лук [60, 72]. Хејман [61] је закључио да код лукова сличних правима, хоризонталних или нагнутих (попут лебдећих потпорња), не постоји размештај зглобова тј. пукотина који би образовао механизам слома, те да је такав лук неограничене јачине.<sup>17</sup> Међутим, тачан положај зглобова, када је претпостављена минимална дебљина лука, утврђен је само за полукружне и елиптичке лукове (в. [8, 92]). Штавише, механизми слома својствени луковима с глатким теменом не важе у случају преломљених лукова. Увођењем преломљеног темена лука, уз разматрање сегментних и потковичастих лукова, аналитичко моделирање проблема се знатно усложњава. Стога механизми слома преломљених лукова представљају посебни проблем који ће у овој дисертацији бити подробно испитан.

**О конструкцијском афинитету.** Ранкин [104, 105] је указао на то да је равнотежу сложених структура могуће испитивати на основу погодних одабраних једноставнијих структура, уколико су оне у афиној вези. Наиме, ако је нека конструкција (нпр. лук, свод, решетка) стабилна, онда је стабилна и конструкција која се добија њеном афином трансформацијом (пресликавањем паралелним пројекцијским зрацима). У складу с наведеним је при испитивању или пројектовању сложених сводова (нпр. крстастих) довољно показати да је између његових делова заступљен конструкцијски афинитет, те испитати само својствени (једноставнији) део (чиме се знатно може поједноставити сам прорачун). Сводови који поседују ово својство овде су названи *афини сводови*. Идеја о конструкцијском афинитету остала је скоро незапажена (в. и [71]), те сходно томе недовољно истражена. У овој дисертацији пружа се њена подробна разрада те примена на испитивање равнотеже афиних сводова.

<sup>17</sup> Међутим, као што ће бити показано, теоријски је могуће да само раван хоризонталан лук буде бесконачно танак, док је у нагнутом случају за обезбеђење стабилности неопходна коначна минимална дебљина којом се обухвата потпорна линија.



Приликом разматрања раванских проблема, уколико се нека фигура (лук), чија је равнотежа представљена придруженом потпорном линијом, афином трансформацијом преслика у другу фигуру, њој придружена потпорна линија такође представља афину слику изворне потпорне линије [71, 105]. Тако је Еди [45] обрадио равнотежу елиптичког лука на основу одговарајућег, њему афиног, полукружног лука једнаког распона. На слици 2б дати су полукружни и преломљени лук с приказаном потпорном линијом. На слици 2а је приказана њихова слика добијена афином трансформацијом с коефицијентом  $\lambda < 1$  који даје скраћену слику, док је на слици 2в уз коефицијент  $\lambda > 1$  добијена продужена слика.



Слика 2. Афине трансформације полукружног лука (горе) и преломљеног лука (доле): (а) скраћена слика, (б) полукружни и преломљени лук, (в) издужена слика

**Новија истраживања зиданих лукова и сводова.** Током последњих година, истраживачи наново разматрају теорију потпорне линије и класична питања одређивања граничних стања равнотеже симетричних масивних лукова различитог облика, као и одговарајуће теоријске минималне дебљине под сопственом тежином [7]. У [24], где су полукружни лукови исцрпно обрађени, Миланковићева анализа је проширена на сегментне и потковичасте кружне лукове. Макрис и Алексакис [8, 84] су израчунали минималну дебљину полукружних и елиптичких лукова, уз примену и радијалне и вертикалне стереотомије, и то коришћењем и варијационог и геометријског приступа (одређивање минималне потпорне линије).

Међутим, упркос чињеници да су преломљени лукови, поред кружних и елиптичких, веома чести у историјским конструкцијама, као и да њихово усвајање представља основу разлике између романичке и готичке архитектуре [48], њихово конструкцијско пона-

шање по теорији потпорне линије и даље је недовољно истражено (в. нпр. [44, 89, 112]).<sup>18</sup> Уз то, иако су троугаони лукови (конструкцијски) претходници претходно поменутих, још су ређи радови који се њима баве. Такође су ретка истраживања у којима се разматра минимална дебљина преломљених и троугаоних лукова.<sup>19</sup>

Данас се проблеми засвођених зиданих конструкција – испитивање њихове равнотеже и, нарочито, пројектовање сложених облика, разматрају у оквиру архитектонских школа значајних универзитетских центара, међу којима се истичу скупине истраживача с техничких универзитета у Цириху и Барију.<sup>20</sup> У свом раду ови истраживачи, уз помоћ савремених рачунарских технологија, развијају различите дигиталне алате у градитељству, обједињујући у архитектонском оквиру теорију конструкција, рачунарске науке и дигиталну фабрикацију (в. [13, 22, 47, 107]). Ослањајући се на горепоменута начела конструисања старих градитеља и графичких метода испитивања равнотеже, развијају методе за изналажење конструкцијски оптималних сложених облика сводова<sup>21</sup> уз помоћ рачунара, као и начине образовања склопова од мањих елемената (дискретизације), њихове производње и изградње (в. [6, 108, 126, 127]).

Насупрот псеудо-тридимензионалним испитивањима, како би се боље представило садејство делова засвођених структура, Блок је са сарадницима у току протекле деценије развио модел у којем је равнотежа представљена потпорном мрежом (*Thrust network analysis*) [13, 18, 16, 17]. Овај модел представља најновији рачунарски приступ односно метод намењен за испитивање сводова врло сложене геометрије. Имајући у виду да је и у овом моделу ток сила

<sup>18</sup> Аита је са сарадницима [3, 4, 5] анализирао преломљене лукове применом нелинеарне еластичне анализе и тзв. методом области стабилности (коју је развио Дуран-Клеј). Роса и Галиција [43] су моделирали и анализирали лук као дискретизовани систем крутих блокова. Романо и Оксендорф [111, 112] су спровели анализу на основу једначина очувања рада.

<sup>19</sup> У [112] се могу наћи нумеричке вредности само за неколицину облика преломљених лукова, док је у [10, 132] дат однос дужине и минималне дебљине нагнутих (двају наспрамно постављених) правих лукова (који се одупиру један о другог).

<sup>20</sup> *ETH Zurich, Institute of Technology in Architecture, The Block Research Group* и *Polytechnic of Bari, Department of Civil Engineering and Architecture, New Fundamentals Research Group*. Истраживачи из различитих установа који се баве историјским развојем конструкција у градитељству окупљени су у удружењу Едоардо Бенвенуто (*Associazione Edoardo Benvenuto per la ricerca sulla Scienza e l'Arte del Costruire nel loro sviluppo storico*) са седиштем на Архитектонском факултету Универзитета у Ђенови.

<sup>21</sup> Предмет истраживања најчешће су самонесеће, претежно камене, засвођене конструкције (в. [46, 109, 114]).

дискретизован – у виду просторне решетке, првобитно је, за сваки испитивани случај, неопходно претпоставити ток сила односно пројекцију (основу) потпорне мреже (услед тога, није могуће прецизно одређивање опасних пресека).

У складу с наведеним, непрекидност тока сила представљеног у виду глатке (или у деловима глатке) потпорне површи и даље је отворен проблем у оквиру испитивања равнотеже зиданих засвођених конструкција. Поред тога, следећи закључци могу бити изведени: (а) геометрија тј. облик конструкције је кључан чинилац у пројектовању масивних сводова, (б) сви наведени методи подразумевају сложене прорачуне, обично засноване на итеративним поступцима, и (в) у већини случајева, једино су крстасти сводови подробно разматрани [12, 25, 53, 69, 75, 77, 78, 91].

---

У основи истраживања представљеног у овој дисертацији је теорија потпорне линије, којом се описује равнотежа лука. Стога су њена својства подробно приказана у предстојећем поглављу 2. Уз примену конструкцијског афинитета разматрање се проширује на просторни проблем, у виду потпорне површи у засвођеним конструкцијама, што је подробније разматрано у поглављу 21.

## О теорији потпорне линије

*Ако након уклањања оплате камена конструкција стоји првих пет минута, стајаће и наредних петсто година. [61, стр. 24]*

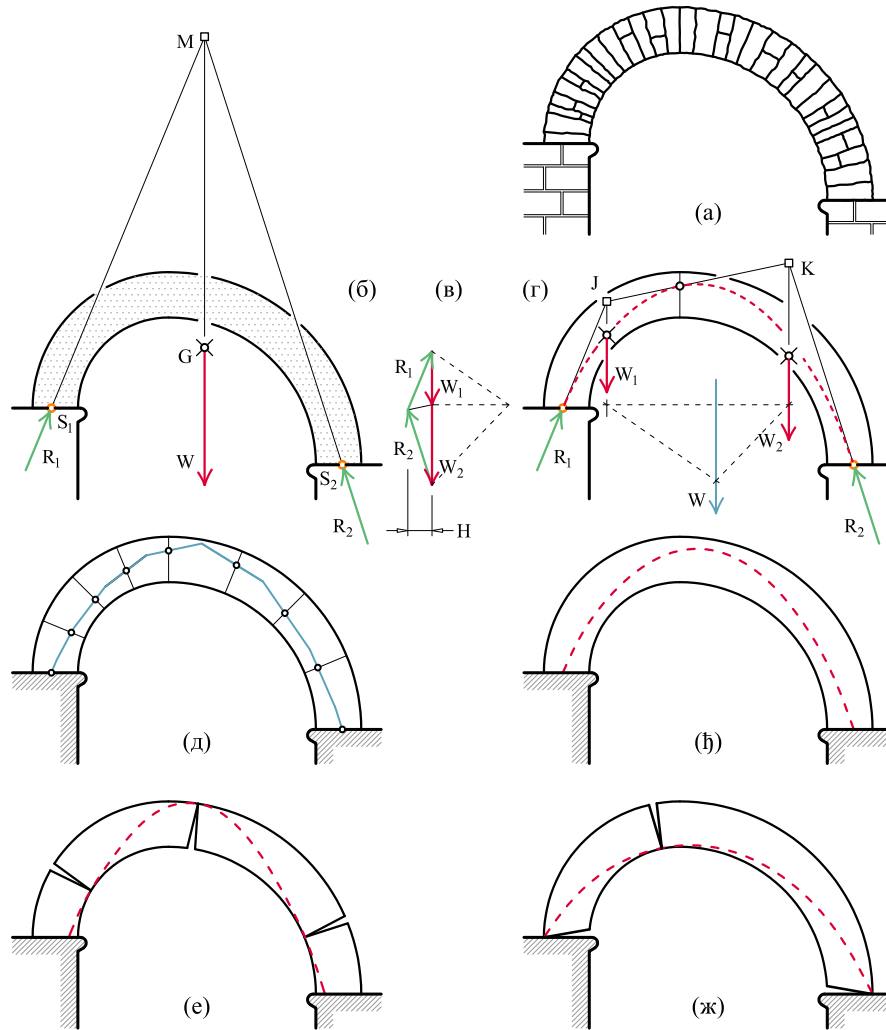
Жак Хејман

Масивни (зидани) лук је конструкција неправилног облика саздана од лучног камења (тесаника клинастог облика) који заједничким дејством наткриљују неки простор (слика 3а). Како би се испитивање једноставније спроводило, облик конструкције се идеализује, односно представља се блиским једноставнијим обликом. Неправилна геометрија *интрадоса* (подсвође, потрбушина) – доње (видљиве, унутрашње, конкавне) сводне површи (доње линије лука) и *екстрадоса* (засвође) – горње (спољашње, конвексне) сводне површи (горње линије лука), који представљају границе свода односно лука, замењују се кривим линијама. Тако је нпр. масивни лук приказан на слици 3а представљен у виду склопа двеју четвртина кружног лука различитог полупречника, као што је дато на сликама 3б–ђ.

Теорија потпорне линије, тзв. стара (класична) теорија, развијена је као графички поступак за статичко испитивање лукова односно сводова. У складу с начелима графостатике, тело (или фигура, раван лик) је у равнотежи уколико су у равнотежи силе које делују на њега. Другим речима, резултанта система мора бити једнака нули. Уколико се разматрају три силе, први услов је да буду конкурентне, тј. да њихове нападне линије пролазе кроз исту тачку. Други услов је да величина (интензитет) тих сила буде таква да полигон сила који оне образују буде затворен.

На слици 3б приказан је лук чија је сопствена тежина  $W$ , која делује вертикално, нанета у његово тежиште, у тачку  $G$ . Тежина лука изазива у ослонцима отпоре тј. реакције  $R_1$  и  $R_2$ , које редом

делују на ослоначким спојницама у нападним тачкама  $S_1$  и  $S_2$ . Да би систем био у равнотежи нападне линије реакција се морају сећи на вертикали кроз тачку  $G$ , у тачки  $M$ ,<sup>1</sup> док се на плану сила одређује њихова величина.



**Слика 3.** (а) камени лук, (б) равнотежа лука, (в) план сила, (г) равнотежа лука, (д) верижни полигон, (ђ) потпорна линија, (е) минимална потпорна линија, (ж) максимална потпорна линија

<sup>1</sup> Померањем ове тачке по вертикали мења се величина хоризонталног потиска лука, односно хоризонталне компоненте реакција, као и правац реакција.

Уколико лук поделимо на два дела, као што је приказано на слици 3г, тежине појединачних делова,  $W_1$  и  $W_2$ , наносе се у припадајуће тежиште. Равнотежа система представљена је затвореним полигоном сила приказаним на слици 3в. Странице *полигона (плана) сила* представљају редом надовезане силе  $W_1$ ,  $W_2$ ,  $R_1$  и  $R_2$ , а хоризонтално растојање представља величину хоризонталне силе тј. потиска  $H$ , која је непроменљива дуж лука.<sup>2</sup> У овом случају се нападна линија реакције  $R_1$  и тежине  $W_1$  секу у тачки  $J$ , а нападна линија реакције  $R_2$  и тежине  $W_2$  секу се у тачки  $K$ . Резултантна сила која делује на теменој спојници има правац споне кроз тачке  $J$  и  $K$ . Изломљена (полигонална) линија  $S_1-J-K-S_2$ , коју образују нападне линије резултантних сила, назива се *верижни полигон*. Када је лук издељен на више деоница, верижни полигон је образован од већег броја страница, као што је приказано на слици 3д. Уколико се кривом линијом споје пресечне тачке верижног полигона и одговарајућих спојница добија се потпорна линија. Према томе, *потпорна линија* се дефинише као геометријско место нападних тачака резултантних сила на спојницама између тесаника. Како би се тачно одредио облик потпорне линије узима се инфинитезимална величина тесаника, односно лук се разматра као монолитан, у складу с претпоставкама о понашању масивног материјала, наведених у претходном поглављу.

Како је Кулон показао, постоје две граничне вредности хоризонталног потиска којима одговарају два гранична положаја потпорне линије. На местима у којима потпорна линија додирује границе лука (интрадос или екстрадос) настају пукотине, које се понашају као зглобови кроз које се преноси оптерећење, односно кроз које мора да прође потпорна линија. Наиме, ако ослонци лука попусте услед оптерећења, распон лука (свода) се повећава, те долази до размицања ослонаца. Потпорна линија која одговара оваквом стању, и која је најстрмија тј. највеће стреле и најмањег распона, назива се минимална потпорна линија, јер одговара најмањем хоризонталном потиску, и представља један њен гранични положај (слика 3е). С друге стране, примикање ослонаца узрокује друкчији размештај односно оријентацију пукотина (зглобова). Овоме одговара најмање стрма потпорна линија, највећег распона и најмање стреле, а која одговара највећем хоризонталном потиску (слика

<sup>2</sup> За произвољно изабрани пол на плану сила (приказаном испрекиданим линијама) могуће је одредити правац тј. нападну линију резултантног оптерећења  $W = W_1 + W_2$  које представља тежину лука у целини. Наравно, нападна линија пролази кроз тежиште  $G$  целог лука.

3ж), те се назива максимална потпорна линија [27, 61]. Замисао потпорне линије, као путање сила притисака кроз конструкцију, након Јанга као зачетника, разрадио је Мозли, објавивши низ радова о стабилности конструкција,<sup>3</sup> посебно масивних лукова [97]. Узгред, Мозли је увео и начело најмањег отпора [96], утврђујући да је стварна потпорна линија она чији је потисак најмањи, тј. минимална потпорна линија. У складу с наведеним, потпорна линија приказана на слици 3ђ, једна је од бесконачно много физички могућих потпорних линија, а која одговара одабраним нападним тачкама реакција и величини хоризонталног потиска. Доказ стабилности лука је постојање потпорне линије у оквиру граница лука.<sup>4</sup>

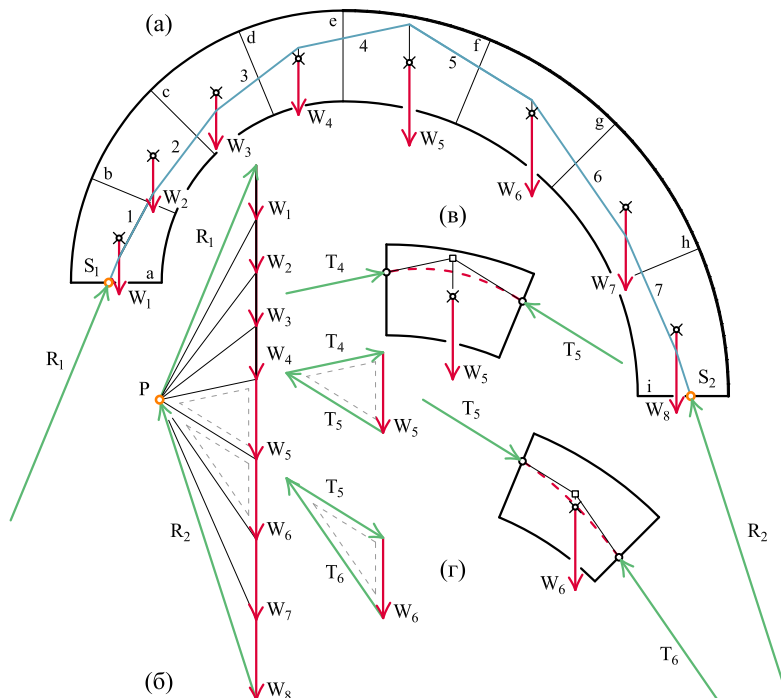
Размотримо несиметрични лук<sup>5</sup> дат на слици 4а, који је оптерећен само сопственом тежином. Лук је подељен на поједине деонице, чије тежине  $W_1, W_2 \dots W_7, W_8$  дејствују вертикално у припадајућим тежиштима. Наиме, уобичајено је усвајање јединичне вредности за запреминску тежину материјала и ширину (дубину) лука, те се сопствена тежина лука или његовог дела замењује површином припадајућег прстена лука, ограниченог екстрадосом и интрадосом и одређеним спојницама. Стога је важан задатак одредити површину деонице и припадајуће тежиште.

Као што је наведено, крути укљештени лук је трипут статички неодређен носач, те су потребна три чиниоца како би се систем свео на статички одређен, а којем би одговарала јединствена потпорна линија. Обично се одабирају три тачке кроз које пролази потпорна линија или две тачке и величина хоризонталног потиска. Стога су овде на ослонцима унапред усвојене (претпостављене) нападне тачке  $S_1$  и  $S_2$  реакција  $R_1$  и  $R_2$ , респективно, кроз које мора

<sup>3</sup> Мозли је посебно указао на разлику између верижног полигона и потпорне линије. Миланковић је подробно обрадио овај проблем, те је показао да се правац нападне линије резултантне силе разликује од правца тангенте на потпорну линију у нападној тачки те силе. Међутим, ова два правца се подударају уколико је примењена вертикална стереотомија [92].

<sup>4</sup> Често се захтева да, под утицајем начела теорије еластичности, потпорна линија буде у језгру пресека, тј. у оквиру средње трећине дебљине лука, како се ни у једном пресеку не би јавило затезање. Међутим, у складу с наведеним претпоставкама, где се занемарује затезање, дозвољено је да се притисак јавља целом дебљином лука. Степен сигурности се може постићи одговарајућим геометријским коефицијентом сигурности; нпр. за коефицијент 2, дебљина лука је двоструко већа од теоријске минималне потребне дебљине, док ће се за коефицијент 3 потпорна линија налазити у оквиру средње трећине дебљине [61].

<sup>5</sup> Тзв. лабудов врат, уздижући кошарасту луку, (нагнути) сочивасти лук с два средишта и с ослонцима у неједнаким висинама.



**Слика 4.** (а) конструкција верижног полигона, (б) план сила, (в) деоница лука с припадајућим полигоном сила, (г) деоница лука с припадајућим полигоном сила

да прође потпорна линија (односно верижни полигон).<sup>6</sup> Усвајањем положаја тачке на нападној линији тежине  $W$  лука (в. слику 3б), одређује се правац реакција ослонаца  $R_1$  и  $R_2$  и положај пола  $P$  на плану сила (уп. слике 3б,в и 4а,б). Тиме је уједно одређена и величина хоризонталног потиска, односно хоризонтална компонента унутрашњих резултантних сила, те је посматрани лук статички одређен.

Придружени план сила, на којем су, у одговарајућој размери за силе, редом нанете (надовезане) тежине деоница, дат је на слици 4б. На плану сила, полни зраци одређују правац резултујућих притисака, те представљају резултантне силе  $T_1, T_2 \dots T_6, T_7$  које деј-

<sup>6</sup> Код симетричних лукова, какви су предмет ове дисертације, уобичајено је да се непосредно усвоје три тачке кроз које пролази потпорна линија: по једна на ослоначким спојницама и једна на теменој спојници.



ствују међу појединачним деоницама лука. Интензитет ових сила једнак је дужини полних зракова у одговарајућој размери за силе.

У луку се конструише одговарајући (верижни) полигон притисака  $R_1, 1, 2, \dots, 6, 7, R_2$ , чија је свака страница паралелна с придруженим полним зраком у плану сила, а темена верижног полигона налазе се на (вертикалним) нападним линијама тежина појединачних деоница. Потпорна линија пролази кроз пресечне тачке овога полигона и спојница (саставака)  $a, b, \dots, h, i$  између деоница лука.

Као што је наведено, уколико се потпорна линија налази у оквиру граница лука, лук је стабилан. Уколико потпорна линија излази изван граница лука, губи се стабилност тј. долази до слома. Дакле, стабилност лука обезбеђује његов облик, односно његова дебљина. У посебном случају, када су облик и димензије лука такви да је теоријски могућа само једна потпорна линија, лук има *минималну теоријску дебљину* и налази се у стању граничне равнотеже. На местима где потпорна линија дотиче екстрадос или интрадос (с унутрашње стране), тј. када резултантна сила дејствује на граници лука, образује се зглоб. Уколико се образује довољан број таквих зглобова, стабилан лук постаје механизам. Сваком облику лука одговара јединствен механизам слома, који подразумева размештај зглобова, а његово одређивање представља засебан проблем. У складу с наведеним, за потврду стабилности је потребно показати да лук има већу дебљину од потребне теоријске минималне вредности.

---

## Предмет, хипотезе и циљ истраживања

*Sire, je n'avais pas besoin de cette hypothèse.*<sup>1</sup>

Пјер Симон Лаплас

**Предмет истраживања.** Предмет истраживања у овој дисертацији је моделирање равнотеже зиданих засвођених конструкција. Одређеније, чине га две скупине проблема: равнотежа масивних лукова и равнотежа масивних сводова. Првом скупином, која одсликава класични инжењерски проблем, у научним оквирима постављен крајем седамнаестог века, обухваћени су различити облици лукова, од најпростијих – правих лукова, до сложених лукова из више средишта – тзв. тјудорских лукова. Другу скупину проблема представља испитивање сложених афиних сводова, образованих од цилиндричних сводова исте висине, чији пресеци (ободни лукови) имају облик поменутих лукова.

**Хипотезе истраживања.** Основна хипотеза је да се обједињавањем теорије потпорне линије и конструкцијског афинитета може изнаћи метод за испитивање равнотеже и пројектовање сложених афиних сводова различитог облика ободних лукова. Тиме се подразумева и следеће:

- Геометријским приступом у статичкој анализи, односно применом теорије потпорне линије, може се знатно уопштити тзв. Куплеов проблем, у смислу решавања проблема равнотеже различитих масивних полицентричних лукова оптерећених сопственом тежином. При томе се, на основу изведеног израза који описује припадајућу потпорну линију, може начинити одговарајући ите-

---

<sup>1</sup> „Господару, не беше ми потребна та хипотеза.“ Лапласов одговор Наполеону, који је покушао да га прекори зато што се у његовој књизи (Небеска механика) не помиње Бог [122, стр. 195].

ративни поступак којим се одређује гранично стање равнотеже, односно вредност минималне дебљине лука која обезбеђује његову стабилност.

- Увођењем конструкцијског афинитета могуће је, полазећи од конструкцијских својстава лукова те одговарајућих крстастих сводова, испитати равнотежу различитих сложених афиних сводова. Тако је, уз примену одговарајућих афиних трансформација, дозвољено испитивање само једног (меродавног) дела свода.

**Циљ истраживања.** Општи циљ истраживања је стварање параметарског модела за испитивање равнотеже односно пројектовање сложених афиних сводова. У складу с описаним предметом истраживања, постављају се посебно следећи задаци.

(А) Примена геометријског (равнотежног) приступа у статичкој анализи (тзв. теорије потпорне линије), коришћеног у испитивању равнотеже полукружних и елиптичких лукова, на сложеније (полицентричне) облике лукова и псеудолукова.<sup>2</sup> За сваки разматрани облик потребно је:

- извести математички израз који описује потпорну линију и
- одредити вредност минималне дебљине лука.

- С обзиром на то да су преломљени лукови (из два средишта) најзаступљенији поред кружних лукова, потребно је испитати утицај различитих типова стереотомије (радијална, нормална, вертикална) на облик потпорне линије као и на вредност минималне дебљине, узимајући у обзир и сегментне и потковичасте облике. Остале облике лукова испитати у складу са стереотомијом која најбоље одсликава спојнице у стварним луковима.

(Б) Моделирање равнотеже сложених афиних сводова применом конструкцијског афинитета.

- Представљање тока унутрашњих сила у виду непрекидне у деловима глатке потпорне површи.
- Заснивање целокупног прорачуна на геометријским својствима тј. облику свода, те умањење његове сложености.
- Овакав модел пружио би могућности за пројектовање најразличитијих облика афиних сводова, а уједно би био добра апроксимација за испитивање постојећих сводова (који нису настајали применом конструкцијског афинитета).<sup>3</sup>

<sup>2</sup> Подробнији преглед ових лукова дат је у следећем поглављу 5; посебно в. табелу 1.

<sup>3</sup> Наиме, кружни и преломљеним кружни лук су редом афини с елиптичким и преломљеним елиптичким луком. Потоњи су избегавани (и за извођење а и за прорачун) због неједнообразности тесаника који чине лук. Међутим, уз савремене рачунар-

- Пружање јасног увида у „рад“ (дејствовање) ових сводова, те смерница за њихово пројектовање (нпр. оптимални размештај ослонаца односно облик сводних поља с циљем смањења или равномерније расподеле оптерећења).
- (В) Испитивање различитих начина образовања афиних сводова.
  - Типолошко разврставање могућих склопова афиних сводова (над основама правилног, централног, прстенастог или неправилног облика).
  - Стварање нових облика односно изналажење композиционих склопова сложених афиних сводова.

---

ске технологије ови проблеми се умањују, јер је могуће и спровести прорачун и изрезати жељени облик камена.

---

## Методолошки оквир истраживања

*Кључ за разумевање масивних конструкција налази се у исправном разумевању геометрије. [61, стр. 154]*

Жак Хејман

У овом поглављу се даје методолошки оквир, односно скуп поступака који ће бити коришћени приликом испитивања равнотеже лукова и сводова. У основи разматрања је теорија потпорне линије представљена у поглављу 2. Према томе, примењује се геометријски (равнотежни) приступ у статичкој анализи. Разматра се равнотежа конструкције само под дејством сопствене тежине. У складу с уобичајеним (тзв. Куплеовим односно Хејмановим) претпоставкама усвојено је да масивни материјал од којег је саздан лук има следећа својства:

- (а) неограничена чврстоћа на притисак,
- (б) нулта чврстоћа на затезање,
- (в) не долази до клизања (неограничено трење).

Према томе, лук се посматра као круто непрекидно (монолитно) хомогено тело без отпорности на затезање, док притисак преноси у свим правцима унутар граница лука (унилатералан материјал). У овој дисертацији се разматрају лукови који представљају равански проблем и сводови који представљају просторни (тродимензионални) проблем. Сходно томе, успостављене су две скупине поступака.

**Испитивање равнотеже лукова.** Услед симетрије лукова, приликом испитивања сваког појединачног облика лука, испитиваће се само једна половина, а биће предузети следећи кораци:

(А) Аналитичко моделирање – извођење једначина својствених предметном облику лука, што подразумева:

- Усвајање одређене врсте стереотомије и придруженог коорди-

натног система (правоуглог или поларног), те одређивање одговарајућих геометријских својстава:

- површина (тежина) коначног дела лука и координате придруженог тежишта;
  - површина (тежина) саставних деоница лука и координате придружених тежишта.
  - Напомена 1: усваја се јединична вредност за запреминску тежину материјала и ширину (дубину) лука, док се за остале димензије лука користе бездимензионе величине; тако се сопствена тежина лука или његовог коначног дела замењује (бездимензионом) површином припадајућег прстена лука.<sup>1</sup>
  - Напомена 2: за укупну површину (тежину) лука не узима се у обзир тежина (део) лука која се у складу са примењеном стереотомијом не преноси до ослоначког пресека.
  - Напомена 3: део лука изнад пресека, који у складу с примењеном стереотомијом садржи нападну тачку хоризонталне силе у темену лука, не улази у укупну тежину (површину) лука; овај део се узима као концентрисано оптерећење које делује у оси вертикалне симетрије лука.
  - Како би лук био статички одређен систем, усвајају се тачке на теменом и на ослоначком пресеку кроз које пролази потпорна линија.
  - Одређивање хоризонталне силе из равнотеже момената за тачку на ослоначкој спојници кроз коју пролази потпорна линија.
  - Одређивање једначине потпорне линије из равнотеже момената за нападну тачку резултантне силе на произвољном пресеку.
- (Б) Одређивање могућих механизма слома односно граничних стања равнотеже тј. одређивање броја и размештаја зглобова који одговарају граничној потпорној линији.
- (В) Нумеричко моделирање – извођење алгоритама за одређивање минималне дебљине лука (као и осталих битних чинилаца попут вредности граничних ексцентрицитета код преломљених лукова или вредности минималног хоризонталног потиска):
- Уколико је могуће, решење се одређује аналитичким путем:
    - одређивање тачке потпорне линије у којој је тангента паралелна с екстрадосом;
    - одређивање њене максималне удаљености од интрадоса, у одговарајућем правцу у складу са стереотомијом и усвојеним координатним системом;

<sup>1</sup> Стога ће се у даљем разматрању равноправно користити појмови тежина и површина лука.

- изједначавање те вредности с дебљином лука, те извођење аналитичког израза за минималну дебљину лука.
- Уколико није могуће изнаћи аналитички израз, решење се добија нумеричким путем; то подразумева утврђивање итеративног поступка којим се дебљина лука смањује док потпорна линија не додирне границе лука до жељеног нивоа тачности.
- Добијање нумеричких вредности и њихово тумачење; успостављање графичке зависности (у виду дијаграма) геометријских својстава лука и његове могуће минималне дебљине.

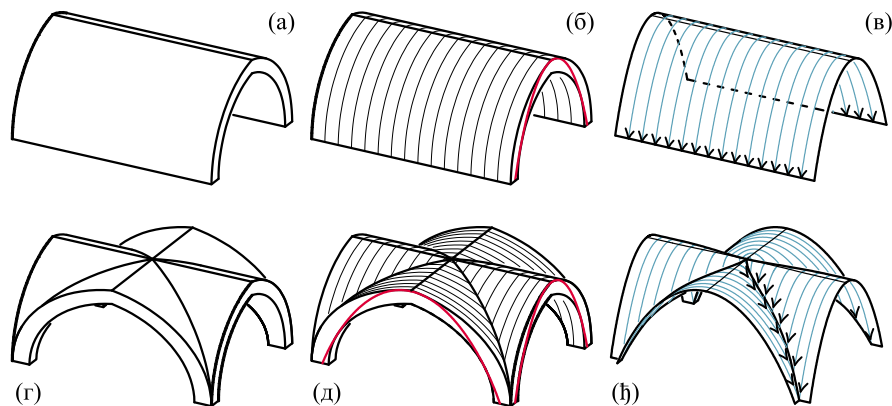
**Испитивање равнотеже афиних сводова.** Афини сводови представљају склоп образован од различитих сложених крстастих сводова чији су делови (саставни цилиндрични сводови) међусобно афини, односно међу којима се може успоставити и одговарајући конструкцијски афинитет.

*Цилиндрични* масивни свод (слика 5а)<sup>2</sup> се посматра као систем међусобно независних елементарних лукова у паралелним вертикалним равнима (слика 5б), чији се потисци преносе на ослонац (нпр. зид). Према томе, оптерећење се преноси у вертикалној равни изводнице свода, дакле кроз елементарни лук. У сваком луку заступљено је начело најмањег отпора, те влада минимални потисак односно минимална потпорна линија. Сходно томе ће и свод у целини имати минимални потисак. Када је дебљина елементарних лукова инфинитезимална, припадајуће потпорне линије образују непрекидну, у деловима глатку, *потпорну површ* у своду (слика 5в).

*Крстаст* свод образују одговарајући делови двају међусобно управних правих цилиндричних сводова једнаке висине – подужног и попречног свода (слика 5г). При испитивању сводова усвојиће се *вертикална стереотомија*. У складу с тим, пресечна (увална) површ (у даљем разматрању: *укрсница*) подужног и попречног свода је део вертикалне равни ограничен интрадосом и екстрадосом припадајућих сводова. С обзиром на двоструку симетрију крстастог свода, довољно је разматрати једну његову четвртину која преноси оптерећење на један ослонац.<sup>3</sup> Притом се дејство преосталих делова замењује *подељеним хоризонталним оптерећењем* дуж теме-

<sup>2</sup> Разматрају се само сводови код којих је ободни лук (профил свода) управан на осу односно темену линију, тј. ободни лук лежи у равни попречног пресека цилиндричног свода.

<sup>3</sup> Дејство свода у целини изражава се дијагоналним хоризонталним потиском – у правцу дијагонале сводног поља, а његова укупна тежина представља вертикално оптерећење које се преноси на ослонце.



**Слика 5.** Замисао потпорне површи у (а) цилиндричном и (г) крстастом своду: (б,д) низ елементарних лукова с придруженом минималном потпорном линијом, (в,ђ) потпорна површ

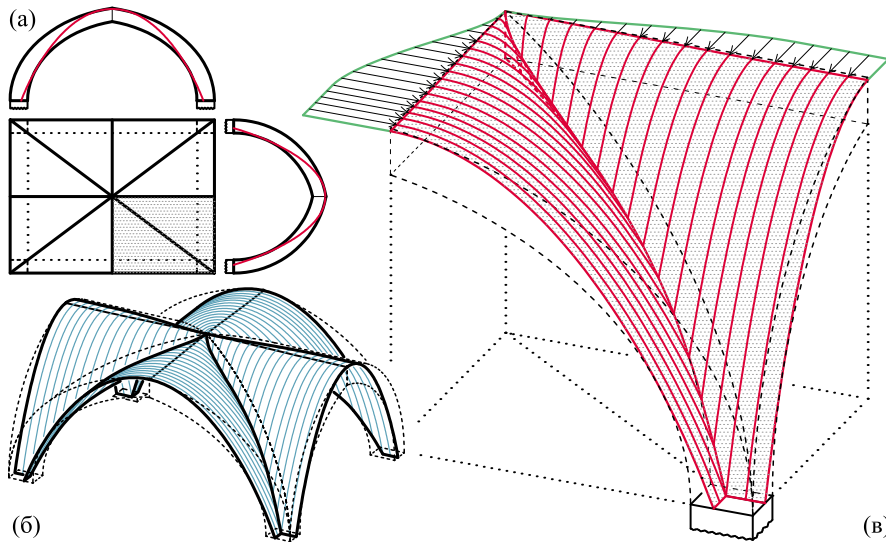
ног пресека подужног и попречног свода. Услед заступљеног афинитета између ободних лукова (попречног и подужног лука) свода, могуће је успоставити конструкцијски афинитет између одговарајућих делова крстастог свода. Тако се испитивање равнотеже целог крстастог свода своди на анализу једног његовог дела, тачније једне његове осмине.

С обзиром на то да од свих елементарних лукова афиног свода, ободни лук има највећи обухватни угао, он је меродаван за сигурност (односно за димензионисање) свода. Стога, уколико је ободни лук стабилан (садржи одговарајућу потпорну линију између интрадоса и екстрадоса), придружени свод је такође стабилан (потпорна површ је садржана у границама свода). Слично потпорној линији унутар ободног лука, приликом афине трансформације, потпорна површ у своду ће такође бити подвргнута истом афинитету, очувавајући положај у односу на границе свода. Сходно томе, при испитивању или пројектовању сложених афиних сводова, довољно је успоставити афинитет између његових саставних делова, те испитати само својствени тј. погодно одабрани (једноставнији) део, што значајно упрошћава пропратне прорачуне.

Приликом испитивања *сложених афиних сводова*, методолошки оквир подразумева следеће:

- Афин свод је образован као склоп делова цилиндричних сводова над пољима облика правоуглог троугла.
- Равнотежа свода, односно ток унутрашњих сила, представљена





**Слика 6.** (а) Сводно поље простог крстастог свода с приказаним попречним и подужним ободним луковима, (б) потпорна површ унутар простог крстастог свода, (в) четвртине потпорне површи с подељеним хоризонталним оптерећењем дуж теменог пресека

је минималном непрекидном у деловима глатком потпорном површи образованом као тродимензионално продужење потпорне линије. Претпостављен је ток сила дуж најстрмијег нагиба.

□ За *меродавни део свода* односно за *меродавно оптерећење* усваја се осмина простог крстастог свода над квадратном основом. Сви остали саставни делови сложеног афиног свода се одговарајућим афиним трансформацијама преобразују у одговарајући облик, односно добијају се растезањем меродавног (или полазног) свода. Растезање се врши само у правцу осе цилиндричног свода или у равни управној на њу; стога нема утицаја на правац (припадност вертикалној равни) нагибних линија потпорне површи.

Сходно томе, биће предузети следећи кораци:

□ Меродавни свод се разлаже на деонице које на различити начин дејствују, те се испитује њихово дејство – хоризонтални потисак и вертикално оптерећење.

○ По угледу на псеудотридимензионе анализе, дејства појединачних елементарних лукова (односно утицај потпорне по-

врши) нижу се дуж укрснице и посредно се преносе до ослонца (нпр. стуба у темену сводног поља).

- Дејство (хоризонтално и вертикално) деонице свода у ширини ослонца непосредно се преносе на њега.

- Деоница свода изнад стуба, која не учествује у претходно наведеној деоници, непосредно се преноси на стуб у виду вертикалног оптерећења.

□ Примењује се начело најмањег отпора, те је у сваком елементарном луку заступљена минимална потпорна линија, којој одговара минимални хоризонтални потисак у теменом пресеку. Ове силе образују подељено хоризонтално оптерећење дуж теменог пресека свода. Према томе, интеграљењем једначине минималног хоризонталног потиска (површина дијаграма подељеног оптерећења) добија се меродавни хоризонтални потисак.

- Уколико није могуће одредити аналитички израз за минималну потпорну линију, вредности минималног хоризонталног потиска за елементарне лукове (разне пресеке свода, уз задовољавајућу учесталост (размаке, густину)) одређују се нумерички, итеративним поступком, те се и меродавно оптерећење одређује нумеричком интеграцијом.

- Ипак, како би се обезбедила непрекидност потпорне површи, неопходно је подељено (непрекидно) хоризонтално оптерећење дуж теменог пресека свода. На основу нумеричких вредности хоризонталног потиска елементарних лукова, одређује се одговарајућа апроксимативна функција (задовољавајућег степена тачности), те се њеном интеграцијом добија укупни меродавни потисак.

□ Вредности хоризонталног потиска и вертикалног оптерећења разних делова свода добијају се на основу одговарајућих коефицијената афинитета одређених обликом сводних поља.

□ Дејство свода на појединачне ослонце добија се збрајањем утицаја припадајућих делова свода.

У складу с наведеним, афин свод у целини представља сложу конструкцију, али његови саставни делови су заправо просте геометрије – цилиндрични сводови. Стога се целокупно испитивање може свести на чисто геометријско разматрање облика свода.

Притом се, без угрожавања сигурности свода, изоставља испитивање унутрашњих дејстава, представљених потпорном површи унутар свода, што омогућава једноставност целокупног прорачуна те брзо предвиђање потисака свода.

---

Овде изнете методолошке поставке, које се односе на раванске проблеме – лукове, подробније се разрађују и примењују у главама **II**, **III** и **IV**, док се други део, који се односи на просторне проблеме – сводове, темељније обрађује у главама **V** и **VII**.

---

## Нацрт разматраних лукова и сводова

*Што мени не пође за руком, биће могућно позванијима и способнијима.* [94, стр. 514]

Милутин Миланковић

На овом месту је, у складу с постављеним предметом и циљевима истраживања, дат нацрт лукова и сводова који ће се обрађивати у овој дисертацији. Разматрају се различити облици симетричних лукова<sup>1</sup> чија је средишња линија (оса) образована од једног или више тангентно надовезаних кружних лукова (полицентрични лукови, односно лукови из више средишта; нпр. тзв. елипсасти и тјудорски лукови). Средиште лука може бити у коначности или у бесконачности; уколико је средиште у бесконачности, кружни лук постаје прав (раван) лук. Испитивање равнотеже лукова подељено је у три целине: (I) псеудолукови (табела 1а,б), (II) преломљни лукови (табела 1в) и (III) изведени полицентрични лукови (табела 1г,д).

**Псеудолукови.** У оквиру прве целине испитују се конструкције које својим обликом не подсећају на лук, али имају лучно дејство (хоризонтални потисак). Полази се од *равног* (хоризонталног и правог) лука, као најпростијег облика. Испитивање се спроводи у складу с усвојеном радијалном и вертикалном стереотомијом (в. табелу 1а).


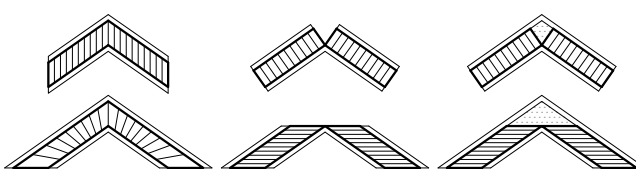
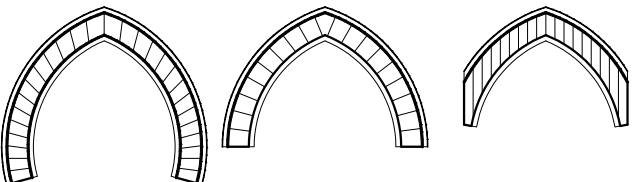
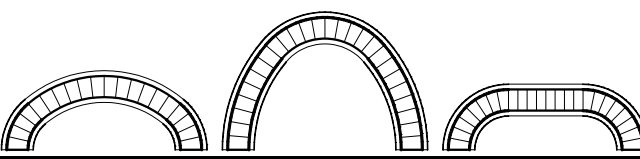
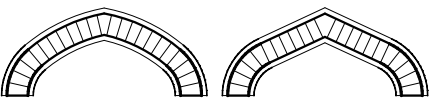
Затим се разматрају различити облици *троугластих* лукова (в. табелу 1б). Испитује се утицај вертикалне, нормалне, радијалне и хоризонталне стереотомије, те се за сваки случај утврђује својствен облик потпорне линије. Такође се изводе изрази који описују минималну потребну дебљину троугластих лукова, те се дају нумеричке вредности у односу на распон и нагиб лука.

---

<sup>1</sup> Готичка архитектура је усвојена као одредница, јер је то период у којем се, након увођења преломљеног лука, развија највећа разноликост засвојених конструкција.

**Преломљени лукови.** У оквиру друге целине испитује се равнотежа *преломљених* (шиљастих) лукова, тј. лукова из двају средишта, који су главна одлика готичке архитектуре. Подробно се обрађују радијална, нормална и вертикална стереотомија (в. табелу 1в). Разматрањем су обухваћени и сегментни и потковичасти преломљени лукови (у складу с вертикалном стереотомијом нису обрађени потковичасти облици).

Табела 1. Преглед разматраних лукова

Равни лукови стр. 37 – 41.	
Троугласти и троугаони лукови стр. 42 – 61.	
Преломљени лукови стр. 65 – 107.	
Лукови из трију средишта стр. 115 – 126.	
Тјудорски лукови стр. 127 – 144.	

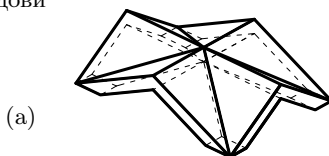
**Изведени полицентрични лукови.** Трећу целину представљају различити облици лукова из више средишта, који су изведени састављањем претходно поменутих облика лукова. Ови лукови представљају склоп трију или четирију саставних деоница, које могу бити делови кружног (средиште кривине је у коначности) или правоуг (средиште је у бесконачности) лука. Обухваћени су *елипсасти*

лукови (лукови из трију средишта; тзв. сочивасти или кошарасти лукови), образовани надовезивањем трију кружних деоница различитог полупречника. Као посебни случај обрађује се псеудолук из трију средишта, образован у виду склопа делова равног и кружног лука (в. табелу 1г). Најсложенији облици готичких лукова су тзв. *тјудорски* лукови (преломљени лукови из четирију средишта), који су образовани спајањем делова преломљених (кружних или троугаоних) и кружних лукова (в. табелу 1д). Овде се као посебни случај обрађује псеудолук из четирију средишта.

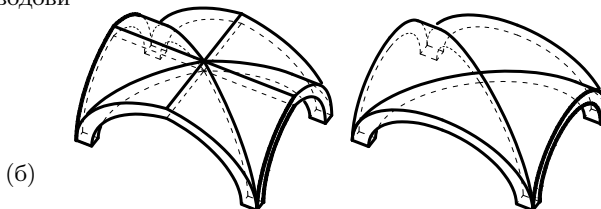
**Афини сводови.** Афини сводови, као што је претходно наведено, представљају склоп образован од делова међусобно афиних цилиндричних сводова – међу којима се може успоставити и одговарајући конструкцијски афинитет. Начела дејствовања као и испитивање равнотеже њихових меродавних делова биће утврђена на примеру (простих) крстастих (квадрипартитних) сводова у глави V. Тако се разматрања која ће бити спроведена на троугаоним и преломљеним луковима (одељак 7.1 и поглавље 10), уз усвојену вертикалну стереотомију, примењују у испитивању равнотеже крстастих сводова над правоугаоном основом (сводним пољем). Испитивање је подељено је у две целине: (I) троугаони крстasti сводови (табела 2а) и (II) преломљени крстasti сводови (табела 2б), где ободни лукови (профили, водиле, генератрисе) сводова (подужног и попречног) редом имају облик троугаоног и преломљеног лука. Као посебни случај преломљеног крстастог свода, биће обрађен и полукружни крстasti свод.

**Табела 2.** Преглед разматраних простих крстастих сводова

Троугаони крстasti сводови  
стр. 147 – 154.



Преломљени крстasti сводови  
стр. 155 – 165.



Затим ће у глави **VI** бити размотрени могући начини образовања различитих склопова афиних сводова. Непосредном применом истраживања спроведеног на простим крстастим сводовима, а уз успостављање одговарајућег конструкцијског афинитета, пружа се могућност за стварање модела за пројектовање веома сложених афиних сводова, што је разматрано у глави **VII**.

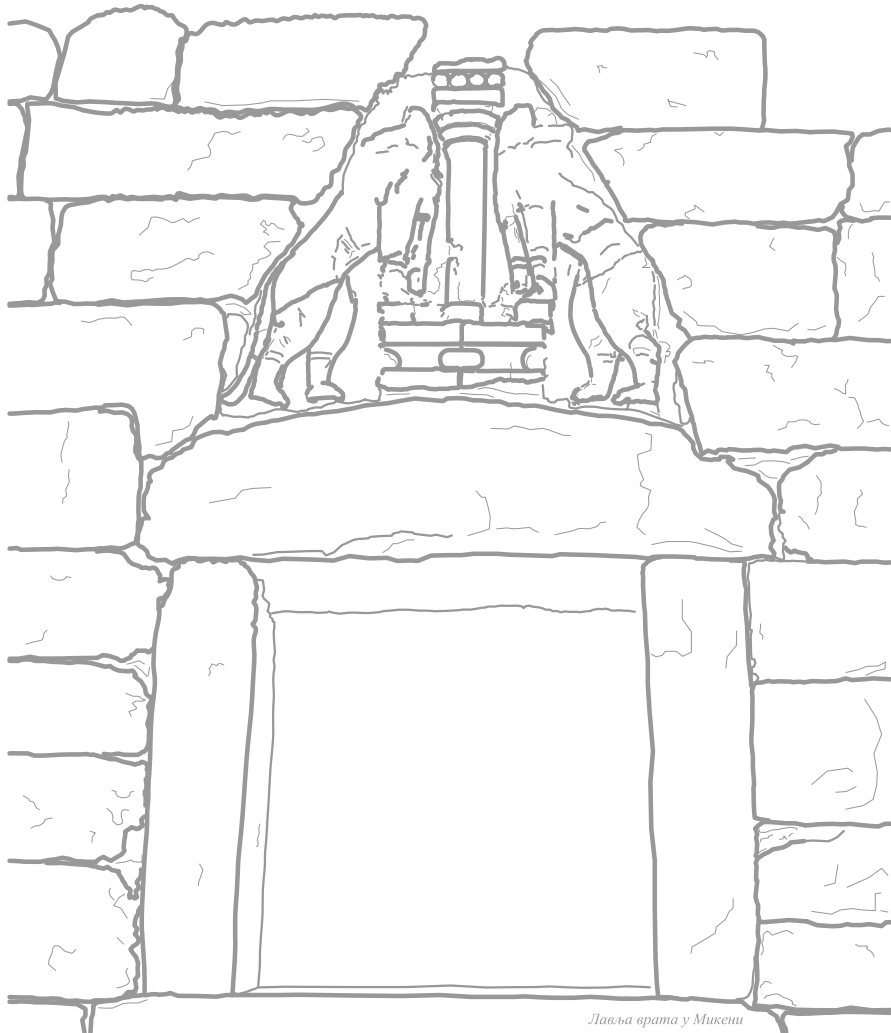




## Глава II

---

### Псеудолукови





## Равни лукови

### 6.1 Раван лук с радијалним спојницама

Истраживачи осамнаестог века су на основу претпоставки којима се занемарује утицај трења и кохезије на спојницама међу тесаницама закључили да је за стабилност равног лука потребно да све спојнице буду конкурентне, тј. да се морају зракасто (радијално) пружати из исте тачке (в. слику 1а и [29, 30, 87, 128]). Под тим утицајем је такав начин извођења равних лукова постао уобичајен,<sup>1</sup> а овде ће бити размотрен у складу с теоријом потпорне линије.

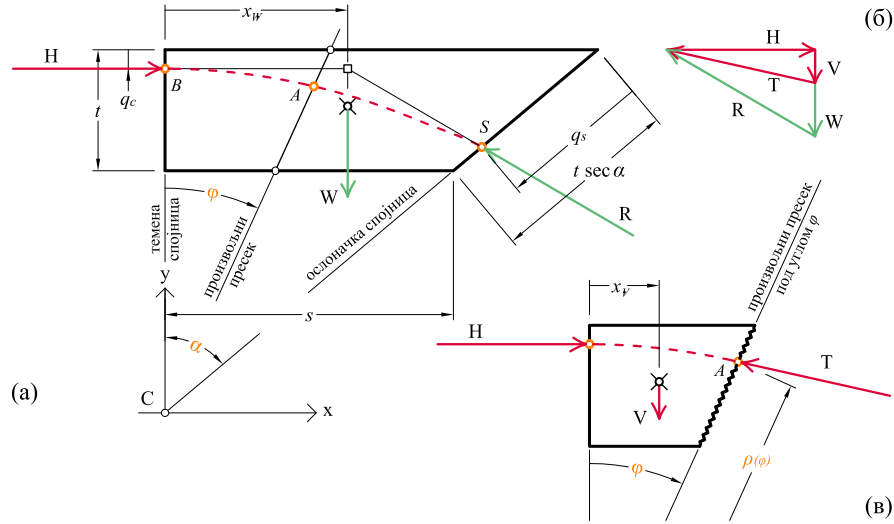
Монолитни равни лук који нема отпорност на затезање, те преноси само притисак, приказан је на слици 7а. Дебљина лука одређена је величином  $t$ , док дужина  $s$  представља половину његовог распона (с обзиром на интрадос). Угао  $\alpha$  представља угао између нагнуте ослоначке спојнице и вертикалне темене спојнице. Исходиште поларног координатог система постављено је у средиште лука  $C$ , из којег се радијално пружају спојнице. Угао  $\varphi$ , мерен од вертикалне осе симетрије (темене спојница) према ослонцу, представља угаону координату која одређује произвољни пресек, као што је приказано на слици 7а. Величине  $q_c$  и  $q_s$ , где је  $q_c < q_s \cos \alpha$ , представљају редом удаљености од екстрадоса нападних тачака  $B$  и  $S$  хоризонталне силе  $H$  која делује у теменом пресеку и реакције  $R$  на ослоначкој спојници.

Из једнакости  $r_e \cos \psi = t + s \cos \alpha$ , која представља ординату пресечне тачке поларне осе (тј. произвољног пресека под углом  $\psi$ ) и хоризонталне праве која представља екстрадос (изражен у поларним координатама), одређена је радијална удаљеност између тачке  $C$  и екстрадоса, а што је дато следећим изразом:

$$r_e(\psi) = (t + s \cot \alpha) \sec \psi. \quad (1)$$

На исти начин, из једнакости  $r_i \cos \psi = s \cos \alpha$  одређена је удаље-

<sup>1</sup> Узгред, може се наћи још у римској архитектури (в. [60]).



**Слика 7.** Раван лук с радијалним спојницама: (а) геометријски чиниоци, (б) план сила, (в) коначни део лука, од ослоначког до произвољног пресека под углом  $\varphi$

ност између тачке  $C$  и интрадоса:

$$r_i(\psi) = s \cot \alpha \sec \psi. \quad (2)$$

Тежина  $V$  коначног, горњег, дела лука, између теменог пресека и произвољног пресека одређеног углом  $\varphi$ , представљена је оговарајућом површином лука (слика 7в); може се израчунати као разлика површина двају правоуглих троуглова, према следећем изразу:

$$V(\varphi) = \int_0^\varphi \frac{1}{2} (r_e^2(\psi) - r_i^2(\psi)) d\psi = \frac{1}{2} \tan \varphi (t + 2s \cot \alpha). \quad (3)$$

Апсциса  $x_V$  тежишта коначног дела лука, односно тежишта површине која одговара тежини  $V$ , изводи се на следећи начин:

$$\begin{aligned} x_V(\varphi) &= \frac{1}{3V(\varphi)} \int_0^\varphi (r_e^3(\psi) - r_i^3(\psi)) \sin \psi d\psi \\ &= \frac{1}{2} t \sec^2 \psi (3s \cot \alpha (s \cot \alpha + t) + t^2) \Big|_0^\varphi \frac{1}{3V(\varphi)} \\ &= \frac{\tan \varphi [3s \cot \alpha (t + s \cot \alpha) + t^2]}{3(t + 2s \cot \alpha)}. \end{aligned} \quad (4)$$

Када вредност угла  $\varphi$  достигне величину угла  $\alpha$ , добијају се тежина  $W$  половине лука и апсциса  $x_W$  придруженог тежишта, тако

да једначине (3) и (4) постају:

$$W = \frac{1}{2} t (t \tan \alpha + 2s) \quad (5)$$

и

$$x_W = \frac{1}{6} \left[ s \left( 3 - \frac{t}{2s \cot \alpha + t} \right) + 2t \tan \alpha \right]. \quad (6)$$

Претпостављајући (усвајајући) положај нападних тачака  $B$  и  $S$  сила  $H$  и  $R$ , респективно, из равнотеже момената половине лука за тачку  $S$  на ослонцу, може се одредити величина хоризонталног потиска  $H$ , дата следећим изразом:

$$\begin{aligned} H &= \frac{W [\sin \alpha (t \sec \alpha - q_s) + s - x_W]}{t - \cos \alpha (t \sec \alpha - q_s) - q_c} \\ &= \frac{t [3s^2 - 3q_s \sin \alpha (t \tan \alpha + 2s) + 2t \tan \alpha (t \tan \alpha + 3s)]}{6 (q_s \cos \alpha - q_c)}, \quad (7) \end{aligned}$$

где су тежина  $W$  половине лука и апсцида  $x_W$  придруженог тежишта дате изразима (5) и (6).

Размотримо сада коначни (горњи) део равног лука до произвољног пресека под углом  $\varphi$ , приказаног на слици 7в. Резултантна сила  $T$  на произвољном пресеку уз придружену нападну тачку  $A$  одређује се из равнотеже момената односно сила за коначни део лука; то се може извести или графички на плану сила (слика 7б,в) или аналитички решавањем једначина равнотеже. Према томе, равнотежа момената за тачку  $A$  дата је следећом једнакошћу:

$$H(s \cot \alpha - \rho(\varphi) \cos \varphi - q_c + t) = V(\varphi)(\rho(\varphi) \sin \varphi - x_V(\varphi)) \quad (8)$$

из које се одређује удаљеност  $\rho(\varphi)$  између потпорне линије и средишта лука  $C$ . Тиме је одређен израз (у поларним координатама) који описује потпорну линију у равном луку:

$$\rho(\varphi) = \frac{Hs \cot \alpha + H(t - q_c) + V(\varphi)x_V(\varphi)}{H \cos \varphi + V(\varphi) \sin \varphi}, \quad (9)$$

где су тежина  $V(\varphi)$ , апсциса  $x_V(\varphi)$  и хоризонтална сила  $H$  дате једначинама (3), (4) и (7). Минимална потпорна линија се постиже када је  $q_c = 0$  и  $q_s = t/\cos \alpha$ . У том случају, одговарајућа (минимална) вредност хоризонталног потиска  $H_{min}$  износи:

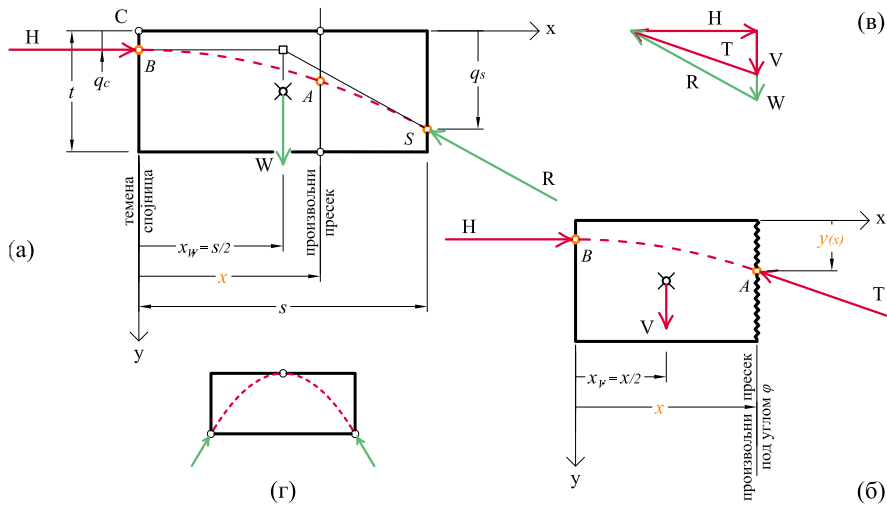
$$H_{min} = \frac{1}{6} (3s^2 - t^2 \tan^2 \alpha). \quad (10)$$

Уз то, израз за потпорну линију дат једначином (9) постаје:

$$\rho_{min}(\varphi) = \frac{t^3 + \cot \alpha \left\{ s [t^2 - 3 s \cot \alpha (s \cot \alpha + t)] - t \cot \alpha \tan^2 \varphi [3 s \cot \alpha (s \cot \alpha + t) + t^2] \right\}}{\cos \varphi (t^2 - 3 s^2 \cot^2 \alpha) - 3 t \cot^2 \alpha \sin \varphi \tan \varphi (2 s \cot \alpha + t)}. \quad (11)$$

## 6.2 Раван лук с паралелним тј. вертикалним спојницама

У посебном случају, када је  $\alpha = 0$ , односно када су ослоначке спојнице вертикалне, добија се облик греде, која, уз пукотине (уобичајено на средини распона), такође дејствује као раван лук (в. [60]). Вертикална стереотомија, уз правоугли координатни систем, примерена је у том случају (в. слику 8). У складу с тим, произвољни вертикални пресек је одређен величином  $x$ , а функција  $y(x)$  одређује потпорну линију.



**Слика 8.** Раван лук с паралелним спојницама и вертикалном стереотомијом: (а) геометријски чиниоци, (б) коначни део лука до произвољног пресека на удаљености  $x$ , (в) план сила, (г) минимална потпорна линија

Сада тежина половине лука износи  $W = st$ , а апсциса одговарајућег тежишта је  $x_W = s/2$ . Из равнотеже момената за тачку  $S$

одређује се величина хоризонталног потиска:

$$H = \frac{t s^2}{2(q_s - q_c)}. \quad (12)$$

Тежина коначног дела лука до произвољног пресека на удаљености  $x$  је  $V(x) = t x$ , а апсциса придруженог тежишта је  $x_V(x) = x/2$ . У складу са сликом 8б, равнотежа момената за тачку  $A$  дата је једнакошћу  $H(y(x) - q_c) = V(x) x/2$ , те је израз за потпорну линију је следећи:

$$y(x) = \frac{q_s - q_c}{s^2} x^2 + q_c. \quad (13)$$

Гранична (минимална) потпорна линија се постиже када је  $q_c = 0$  и  $q_s = t$  (в. слику 8г), а одговарајућа минимална вредност хоризонталног потиска тада износи  $H_{min} = s^2/2$ . Уз то се израз за потпорну линију, дат једначином (13), поједностављује у следећи облик:

$$y_{min}(x) = \frac{t}{s^2} x^2, \quad (14)$$

те се јасно види да заузима облик параболе. Како је наведено у уводној глави ове дисертације, не постоји размештај зглобова на интрадосу и екстрадосу којим би се успоставио механизам слома равног лука, било с радијалним или с паралелним спојницама. Стога је тражење минималне дебљине беспредметно, будући да у постављеном теоријском оквиру раван лук може имати бесконачно малу дебљину.

## Троугласти и троугаони лукови

### 7.1 Троугаони лук: вертикална стереотомија

Размотримо половину троугаоног лука приказаног на слици 9а. Усвојен је правоугли координатни систем с почетком на интрадосу теменог пресека, док је произвољни пресек одређен координатом  $x$ . Угао  $\alpha$  представља нагиб лука. Величина  $q$  одређује положај нападне тачке  $B$  хоризонталне силе  $H$  на теменом пресеку.

Равнотежа момената за тачку  $S$  дата је следећом једнакошћу:  $H(s \tan \alpha + q) = Ws/2$ , где је тежина половине лука  $W = st \sec \alpha$ . Према томе, величина хоризонталног потиска је:

$$H = \frac{s^2 t}{2 \cos \alpha (s \tan \alpha + q)}. \quad (15)$$

Размотримо сада коначни део лука до произвољног пресека на удаљености  $x$ , приказан на слици 9б. Тежина овога дела лука је  $V = xt \sec \alpha$ . На основу равнотеже момената за тачку  $A$ , дату следећом једнакошћу:  $Hx = Vx/2$ , изводи се израз за потпорну линију:

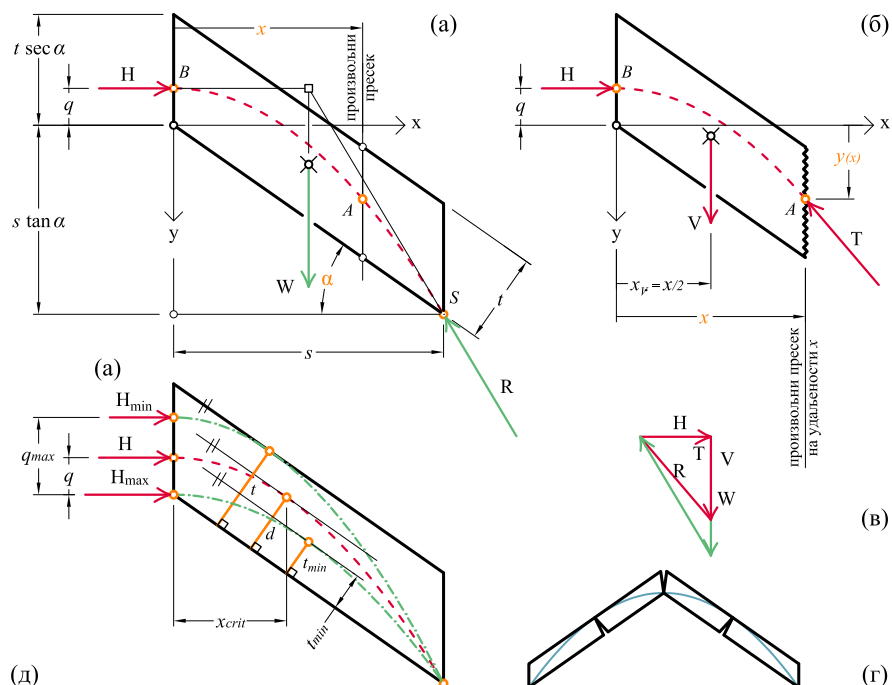
$$y(x) = x^2 \frac{s \tan \alpha + q}{s^2} - q. \quad (16)$$

Ово је једначина параболе, као и у случају равнога лука с вертикалним спојницама (в. претходни одељак 6.2 и израз (13)). Ово су одраније познати резултати (в. [60, 72, 133]) који важе за лукове једнообразне вертикалне дебљине, али су дати овде због свеобухватности целокупног испитивања.

#### 7.1.1 Минимална дебљина троугаоног лука према вертикалној стереотомији

Како би се одредила минимална дебљина лука или минимални потисак (в. следећи пододељак 7.1.2), неопходно је одредити тачку





**Слика 9.** Троугаони лук према вертикалној стереотомији: (а) геометријски чиноици, (б) коначни део лука до произвољног пресека на удаљености  $x$ , (в) план сила, (г) механизам слома, (д) одређивање минималне дебљине и минималног хоризонталног потиска

потпорне линије која је најудаљенија од интрадоса и чија је тангента паралелна с екстрадосом, као што је приказано на слици 9д. Извод једначине (16) даје правац тангенте на потпорну линију:

$$y'(x) = \frac{2x(s \tan \alpha + q)}{s^2}. \quad (17)$$

Изједначавање десне стране једначине (17) и нагиба екстрадоса, датог са  $\tan \alpha$ , уз решавање по  $x$ , даје апсцису  $x_{crit}$  тачке потпорне линије на опасном (критичном) пресеку:

$$x_{crit} = \frac{s^2 \tan \alpha}{2(s \tan \alpha + q)}. \quad (18)$$

Увраштавање  $x_{crit}$  у једначину (16) даје ординату тачке на опасном пресеку:

$$y_{crit} = \frac{s^2 \tan^2 \alpha}{4(s \tan \alpha + q)} - q. \quad (19)$$

Како би се одредила гранична потпорна линија, неопходно је одредити одговарајући механизам слома (в. слику 9г) односно гранично стање равнотеже. Када је претпостављена минимална дебљина, нападна тачка  $B$  хоризонталне силе  $H$  на теменом пресеку мора бити постављена на његов доњи крај, тако да је  $q = 0$ , као што је приказано на сликама 9г,д. Одатле се потпорна линија удаљава од интрадоса, затим додирује екстрадос, и враћа се интрадосу у тачки  $S$  на ослоначком пресеку. Према томе, једначине (18) и (19) се поједностављују у следећи облик:

$$x_{crit} = \frac{s}{2} \quad (20)$$

и

$$y_{crit} = \frac{1}{4}s \tan \alpha. \quad (21)$$

У складу с једначинама (20) и (21), максимална управна удаљеност  $d$  између потпорне линије (на опасном пресеку) и интрадоса је следећа:

$$d = (x_{crit} - y_{crit} \cot \alpha) \sin \alpha = \frac{\cos \alpha (s \tan \alpha + 2q)^2}{4(s \tan \alpha + q)}. \quad (22)$$

Ово је дебљина потребна да се обухвати гранична потпорна линија. Стога је десна страна једначине (22) изједначена с  $t$ ; решавање по  $t$  даје минималну дебљину:

$$t_{min}(\alpha) = \frac{1}{4}s \sin \alpha. \quad (23)$$

### 7.1.2 Минимални хоризонтални потисак троугаоног лука према вертикалној стереотомији

За дату довољну (већу од минималне) дебљину лука, минимални хоризонтални потисак одговара (минималној) потпорној линији која има највећу стрелу и најмањи распон [27, 61]. Стога је потребно да величина  $q$  буде највећа могућа за коју одговарајућа потпорна линија остаје у оквиру граница лука. У том случају потпорна линија додирује екстрадос, а тангента потпорне линије у тачки опасног пресека поклапа се с екстрадосом. Хоризонтална удаљеност

$d_h$  између критичне тачке и екстрадоса дата је следећим изразом:

$$d_h = (y_{crit} + t \sec \alpha) \cot \alpha - x_{crit}, \quad (24)$$

где су  $x_{crit}$  и  $y_{crit}$  редом дати изразима (18) и (19). Потребно је да је ова удаљеност једнака нули, тј. да је  $d_h = 0$ . Решавањем по  $q$  добија се максимална вредност:

$$q_{max} = \frac{1}{2} \sec \alpha \left[ t - s \sin \alpha + \sqrt{t(2s \sin \alpha + t)} \right] \quad (25)$$

и тада је одговарајући минимални хоризонтални потисак дат следећим изразом:

$$H_{min} = \frac{s^2 t}{t + s \sin \alpha + \sqrt{t(2s \sin \alpha + t)}}. \quad (26)$$

Када је претпостављена минимална дебљина (дата изразом (23)), тј. када је  $t = s/4 \sin \alpha$ , израз за придружени минимални хоризонтални потисак се упрошћава из једначине (15) или (26), те се добија  $H = s^2/8$ .

## 7.2 Троугласти лукови: нормална стереотомија

У оквиру овог поглавља су, у складу с нормалном стереотомијом, испитана два проблема: нагнути прави лук и (потпуни) троугаони лук, које су донекле истражили Јанг [132], Барлоу [10] и, скорије, Хуерта [72].

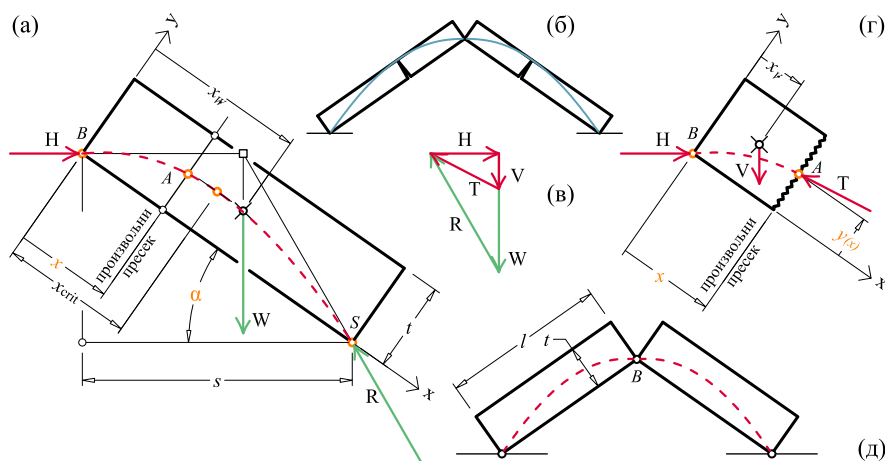
### 7.2.1 Нагнути прави лук

Томас Јанг је, под псеудонимом [72], 1807. године објавио рад [132] који се бави различитим облицима лажних лукова и псеудолукова. Један од разматраних проблема био је стабилност двају правих лукова од опеке нагнутих један на други (в. слику 10). На основу геометријске конструкције, која се испоставља нетачном [72], Јанг је закључио да је у случају отвора облика једнакостраничног троугла (нагибни угао је  $60^\circ$ ) 15 опека стабилно док 16 губи равнотежу на шестој спојници одозго [132, стр. 247]. Барлоу [10] је истраживао исти проблем, али је само дао нумерички резултат за нагиб од  $45^\circ$ . Он је закључио да дебљина мора бити 0,1464 од дужине, а да се опасни пресек јавља на удаљености једнакој 0,3535 дужине мерено од темена; узгред, напоменуо је да је ова дебљина довољна и било за који други нагибни угао [10, стр. 165–166]. Недавно је Хуерта расправљао о Јанговом резултату, те је закључио да је разлика између његовог решења и тачног мала, и да тачан прорачун, који обухвата решавање трансцендентне једначине за добијање граничне дебљине, даје веома блиско размеру  $1/6$  (за однос дебљине и дужине половине лука) и положај опасног пресека на приближно  $1/4$  дужине одозго [72, стр. 417].

Иако је геометрија нагнутог правог лука проста, математичка обрада овог наизглед једноставног проблема до сада није пружена, те ће стога овде бити подробно изведена. Размотримо два нагута равна лука дужине  $l$ , дебљине  $t$  и полураспона  $s$ , наслоњена један на други под углом  $\alpha$ , као што је приказано на слици 10. Њихова заједничка (додирна) тачка  $B$  и две ослоначке тачке одређују јединствену потпорну линију. Хоризонтална сила  $H$  једина је која може бити пренета у темену; с друге стране, коса реакција  $R$  делује у ослоначкој тачки  $S$  (в. слику 10). План сила приказан на слици 10в графички изражава равнотежу система.

У складу с правцем спојница (између опека коначних димензија у Јанговом проблему) управним на праву осу лука, усвојени су нормална стереотомија и правоугли координатни систем с почетком у

тачки  $B$ . Апсиса је постављена дуж интрадоса (в. слику 10а,г), те удаљеност  $x$  одређује положај произвољног пресека паралелног с ординатом.



**Слика 10.** Нагнути прави лук: (а) геометријски чиниоци, (б) механизам слома и минимална дебљина, (в) план сила, (г) коначни део лука до произвољног пресека на удаљености  $x$ , (д) два нагнута права лука наслоњена један о другог с приказаном потпорном линијом

Равнотежа момената за тачку  $S$  дата је следећом једнакошћу:  $H \sin \alpha l + W \sin \alpha l/2 = W \cos \alpha l/2$ , где је  $W = lt$  тежина половине лука, а  $l = s \sec \alpha$ . Одатле следи да је величина хоризонталног потиска  $H$  следећа:

$$H = \frac{t(s - t \sin \alpha)}{2 \sin \alpha}. \quad (27)$$

Може се закључити да је  $H = 0$  када је  $t = s \csc \alpha$ , односно када вертикална нападна линија тежине  $W$  пролази кроз тачку  $S$ .

Размотримо сада коначни део лука до произвољног пресека на удаљености  $x$ , тежине  $V(x) = xt$ , приказан на слици 10г. Равнотежа момената за тачку  $A$  представљена је следећом једнакошћу:

$$Hx \sin \alpha - Hy(x) \cos \alpha = V(x) \sin \alpha \left( y(x) - \frac{t}{2} \right) + \frac{1}{2} V(x)x \cos \alpha, \quad (28)$$

где су хоризонтална сила  $H$ , дата једначином (27), и тежина  $V(x)$  разложене на правац координатних оса. Из претходне једнакости

може се одредити удаљеност  $y$  између потпорне линије и интрадоса, што даје једначину потпорне линије у нагнутом правом луку:

$$y(x) = \frac{x^2 \cos \alpha - s x}{t \cos \alpha - 2 x \sin \alpha - s \cot \alpha}. \quad (29)$$

Ово је рационална функција која представља хиперболу (подробнији опис њених својстава дат је у Додатку **Б** и на слици **82**). Опасни пресек, у којем је потпорна линија најближа екстрадосу, одређује се као максимум једначине (29) (за стварну грану хиперболе која одговара потпорној линији). Извод једначине (29) је следећи:

$$y'(x) = \frac{\cot \alpha (s - t \sin \alpha)(s - 2 x \cos \alpha) - 2 x^2 \sin \alpha \cos \alpha}{(2 x \sin \alpha + s \cot \alpha - t \cos \alpha)^2}. \quad (30)$$

Из  $y'(x) = 0$ , решава се позитивна вредност  $x$ , што представља апсцису опасног пресека:

$$x_{crit} = \frac{\cot \alpha}{2} \left\{ t - s \csc \alpha + \frac{t - s \csc \alpha + \sqrt{(t - s \csc \alpha)^2 + 4 s \cot \alpha \cos \alpha}}{2 \sec \alpha \sqrt{(s - t \sin \alpha) [s (\cot^2 \alpha + 2) - t \cos \alpha \cot \alpha]}} \right\}. \quad (31)$$

Уврштавањем израза (31) у израз (29) добија се ордината потпорне линије на месту опасног пресека, што представља њено највеће растојање од интрадоса:

$$y_{crit} = \frac{\cot \alpha}{2 \sin \alpha} \left\{ \frac{s \sin \alpha \cos \alpha - \left[ t \cos \alpha + \sqrt{(t \cos \alpha)^2 + 4 s \cot \alpha \cos \alpha} \right]}{2 \sqrt{(s - t \sin \alpha) [s (2 + \cot^2 \alpha) - t \cos \alpha \cot \alpha]}} \right\}. \quad (32)$$

Изједначавање израза (32) с дебелином  $t$ , решавање по  $t$  и дељење са  $s$  даје минимални однос дебелине и полураспона:

$$t/s_{min}(\alpha) = \frac{1}{2} \tan \left( \frac{\alpha}{2} \right). \quad (33)$$

На основу тога добијају се минималне пропорције односно минимални однос дебелине  $t$  и дужине  $l$  нагнутог правога лука:

$$t/l_{min}(\alpha) = \frac{1}{2} \tan \left( \frac{\alpha}{2} \right) \cos \alpha. \quad (34)$$

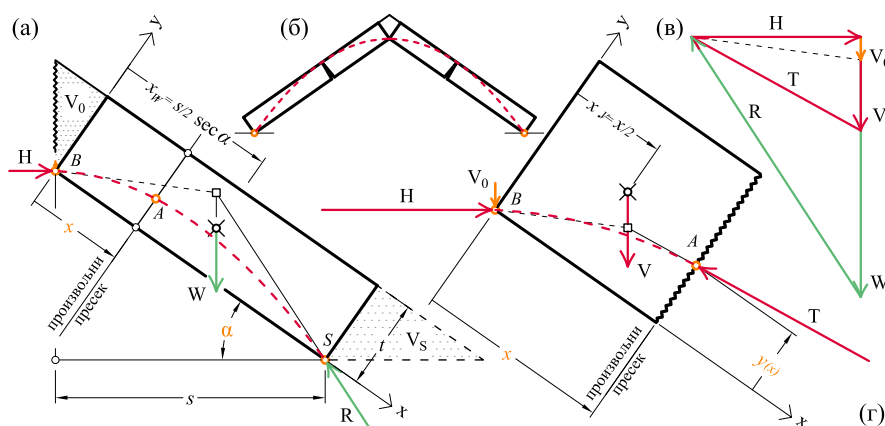
Види се да вредности дате једначинама (33) и (34) зависе искључиво од нагибног угла  $\alpha$ . Када је претпостављена минимална дебелина, апсциса  $x_{crit}$  опасног пресека, дата једначином (31), упрошћава се у:

$$x_{crit}(t_{min}) = \frac{1}{2} s = \frac{1}{2} l \cos \alpha, \quad (35)$$

што значи да зглоб (пукотина) настаје на половини дужине полураспона мерене уздуж лука од његовог темена (в. слику 10б). Више појединости у вези с резултатима као и одређеним геометријским својствима потпорне линије у нагнутом правом луку дато је у Додатку Б на стр. 234.

### 7.2.2 Троугаони лук према нормалној стереотомији

Уколико се испуна у виду кључног камена дода на врх псеудо-лука разматраног у претходном одељку, образоваће се троугаони лук. Претпостављено је да се оптерећење од испуне равномерно преноси на обе стране лука, те се део испуне изнад нападне тачке  $B$  хоризонталне силе у вертикалном теменом пресеку може посматрати као тачкасто оптерећење које делује у вертикалној оси симетрије лука. Будући да се разматра само половина лука, тежина половине испуне замењена је вертикалном силом  $V_0$  која делује у тачки  $B$ , као што је приказано на слици 11г. Услед тога сила која делује у темену има и хоризонталну и вертикалну компоненту ( $H$  и  $V_0$ ). Овде ће бити размотрен само случај у којем гранична потпорна линија пролази кроз интрадос теменог пресека (што одговара луку минималне дебљине); одговарајући механизам слома приказан је на слици 11б.



Слика 11. Троугаони лук према нормалној стереотомији: (а) геометријски чиниоци, (б) механизам слома и минимална потпорна линија, (в) план сила, (г) коначни део лука до произвољног пресека на удаљености  $x$ ; силе су учетворостручене на сликама (в,г) у односу на слику (а)

Тежина  $V_0$ , представљена површином одговарајућег троугла, је:

$$V_0 = \frac{1}{2} t^2 \tan \alpha. \quad (36)$$

На основу равнотеже момената за тачку  $S$ , изводи се израз за величину хоризонталног потиска:

$$H = \frac{\frac{sW \cos \alpha}{2 \cos \alpha} + sV_0 - \frac{1}{2}tW \sin \alpha}{s \tan \alpha} = \frac{st}{2 \sin \alpha}, \quad (37)$$

где је  $V_0$  дато једначином (36) а тежина  $W$  половине лука (односи се на правоугаони део) је  $W = st \sec \alpha$ . Равнотежа момената за тачку  $A$  дата је следећом једнакошћу:

$$Hx \sin \alpha - Hy(x) \cos \alpha - V_0 y(x) \sin \alpha - V_0 x \cos \alpha - V(x) \frac{x}{2} \cos \alpha - V(x) \left( y(x) - \frac{t}{2} \right) \sin \alpha = 0, \quad (38)$$

где је  $V(x) = xt$  тежина коначног дела лука до пресека на удаљености  $x$ , док је  $H$  дато једначином (37). У складу с тим, израз за потпорну линију је следећи:

$$y(x) = \frac{\cot \alpha (sx - x^2 \cos \alpha)}{2x \cos \alpha + s \cot^2 \alpha + t \sin \alpha}, \quad (39)$$

што је рационална функција која представља хиперболу.<sup>1</sup> Како би се одредила минимална дебљина, опасна тачка је одређена као максимум једначине (39); извод једначине (39) је следећи:

$$y'(x) = \frac{s^2 \cot^3 \alpha + s \cos \alpha (t - 2x \cot^3 \alpha) - 2x \cos^2 \alpha (t + x \cot \alpha)}{(s \cot^2 \alpha + t \sin \alpha + 2x \cos \alpha)^2}, \quad (40)$$

те је на основу  $y'(x) = 0$ , решена позитивна вредност  $x$ , која представља апсцису опасног пресека:

$$x_{crit} = \frac{1}{2} \tan \alpha \left[ \frac{\sqrt{(s \csc^3 \alpha + s \csc \alpha + t)(s \cot^2 \alpha \csc \alpha + t)} - s \cot^2 \alpha \csc \alpha}{s \cot^2 \alpha \csc \alpha - t} \right]. \quad (41)$$

Уврштавањем једначине (41) у једначину (39) добија се ордината тачке на опасном пресеку:

$$y_{crit} = \frac{1}{2} \left[ t + s \csc^3 \alpha - \sqrt{(s \csc^3 \alpha + s \csc \alpha + t)(s \cot^2 \alpha \csc \alpha + t)} \right]. \quad (42)$$

<sup>1</sup> Њене асимптоте (једна је коса) се могу одредити у складу с поступком описаним у Додатку Б.

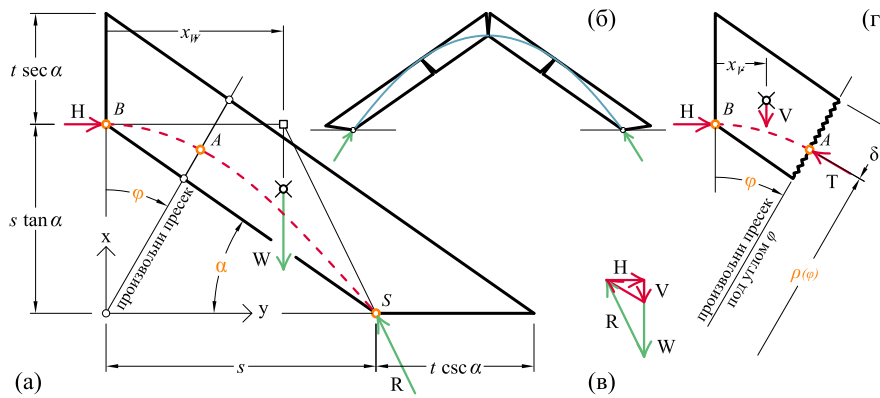


Изједначавањем једначине (42) с дебелином  $t$ , решавањем по  $t$  и дељењем са  $s$  добија се минимални однос дебљине и распона у зависности од нагибног угла:

$$t/s_{min}(\alpha) = \frac{1}{4} \sin \alpha. \quad (43)$$

### 7.3 Троугаони лук: радијална стереотомија

Размотримо половину троугаоног лука приказану на слици 12а. У складу с радијалном стереотомијом, спојнице се зракасто пружају из средишта лука, те је усвојен поларни координатни систем с исходиштем у половини ослоначке линије лука. Положај произвољног пресека одређен је углом  $\varphi$ , мереним од теменог ка ослоначком пресеку. Положај нападних тачака  $B$  и  $S$  који одговара минималној дебљини лука, једини ће бити разматран; стога хоризонтална сила  $H$  у темену и реакција  $R$  у ослонцу делују на интрадосу, као што је приказано на слици 12а.



**Слика 12.** Троугаони лук према радијалној стереотомији: (а) геометријски чиниоци, (б) лук минималне дебљине, механизам слома и минимална потпорна линија, (в) план сила, (г) коначни део лука до произвољног пресека под углом  $\varphi$

На основу следеће једнакости:  $r \cos \psi = -x \tan \alpha + s \tan \alpha$ , која представља пресек интрадоса и произвољног радијалног правца под углом  $\psi$ , решена је поларна координата тачке на интрадосу:

$$r_{in}(\psi) = \frac{s \sin \alpha}{\cos(\alpha - \psi)}. \quad (44)$$

На исти начин се на основу једнакости:  $r \cos \psi = \tan \alpha (s - r \sin \varphi) + t \sec \alpha$ , која представља пресек екстрадоса и радијалног правца, добија поларна координата тачке на екстрадосу:

$$r_{ex}(\psi) = \frac{t + s \sin \alpha}{\cos(\alpha - \psi)}. \quad (45)$$

Тежина  $V(\varphi)$  коначног дела лука представљена је разликом површина одговарајућих троуглова (под интрадосом односно екстрадосом), а изводи се на следећи начин:

$$\begin{aligned} V(\varphi) &= \int_0^\varphi \frac{1}{2} (r_{ex}^2(\psi) - r_{in}^2(\psi)) d\psi \\ &= -\frac{1}{2} t \tan(\alpha - \psi) (2s \sin \alpha + t) \Big|_0^\varphi \\ &= \frac{t \sin \varphi (2s \sin \alpha + t)}{2 \cos \alpha \cos(\alpha - \varphi)}. \end{aligned} \quad (46)$$

Апсциса  $x_V$  тежишта коначног дела лука, изводи се на следећи начин:

$$\begin{aligned} x_V(\varphi) &= \frac{1}{3V(\varphi)} \int_0^\varphi (r_{ex}^3(\psi) - r_{in}^3(\psi)) \sin \psi d\psi \\ &= \frac{1}{2} t \sec(\alpha - \psi) [3s \sin \alpha (s \sin \alpha + t) + t^2] \\ &\quad (2 \tan \alpha \sin \psi + \cos \alpha \sec(\alpha - \psi)) \Big|_0^\varphi \frac{1}{3V(\varphi)} \\ &= \frac{\sin \varphi [3s \sin \alpha (t + s \sin \alpha) + t^2]}{3(2s \sin \alpha + t) \cos(\alpha - \varphi)}. \end{aligned} \quad (47)$$

С обзиром на једначине (46) и (47), када вредност угла  $\varphi$  достигне  $\pi/2$ , добијају се тежина  $W$  половине лука и апсциса  $x_W$  одговарајућег тежишта:

$$W = V(\varphi = \pi/2) = \frac{t(t \csc \alpha + 2s)}{\cos \alpha} \quad (48)$$

и

$$x_W = x_V(\varphi = \pi/2) = \frac{3s \sin \alpha (s \sin \alpha + t) + t^2}{3(2s \sin \alpha + t) \sin \alpha}. \quad (49)$$

На основу равнотеже момената за тачку  $S$  добија се величина хоризонталног потиска:

$$H = \frac{W(s - x_W)}{s \tan \alpha} = \frac{st}{2 \sin \alpha} - \frac{t^3}{6s \sin^3 \alpha}. \quad (50)$$

У складу са сликом 12г, из равнотеже момената за тачку  $A$  следи:  $H(s \tan \alpha - \rho(\varphi) \cos \varphi) = V(\varphi)(\rho(\varphi) \sin \varphi - x_V(\varphi))$ . На основу тога се изводи израз за потпорну линију (изражен у поларним коорди-

натама):

$$\rho(\varphi) = \frac{s \tan \alpha \left\{ \frac{\sin^2 \varphi \sec^2(\alpha - \varphi) [t \csc \alpha (t \csc \alpha + 3s) + 3s^2] +}{3s^2 \csc^2 \alpha - t^2 \csc^4 \alpha} \right\}}{\cos \varphi (3s^2 \csc^2 \alpha - t^2 \csc^4 \alpha) + 3s \sec \alpha \sin^2 \varphi \sec(\alpha - \varphi) (t \csc \alpha + 2s)}. \quad (51)$$

Као што је наведено, за одређивање минималне дебљине потребно је одредити тачку потпорне линије чија се тангента подудара с ексж-традосом. Међутим, како аналитичко одређивање овде није познато, решења су добијена нумерички, итеративним поступком.<sup>2</sup> На основу нумеричких резултата за нагибне углове од 5° до 85° (на сваких 5°) успостављен је однос између нагибног угла  $\alpha$  и минималне дебљине троугаоног лука; ова веза може бити приближно представљена (апроксимирана), са задовољавајућим степеном тачности, следећим изразом:

$$t/s_{min} \approx 0,2481381 \cdot \sin \alpha - 3,518043 \cdot 10^{-10}. \quad (52)$$

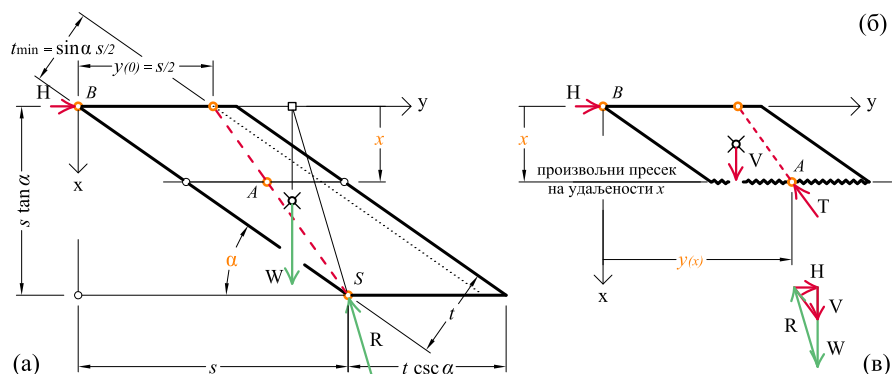
<sup>2</sup> Прорачун је спроведен по угледу на поступак изведен у одељцима 12.2 и 12.3 (уп. слике 12а,б и 25д,ђ). Наиме, лук је у првом кораку подељен на три деонице, које су пресецима подељене на одређени број поддеоница. За сваки пресек се рачуна положај потпорне линије (односно положај нападне тачке одговарајуће резултате) и њена удаљеност од екстрадоса. Затим се у складу с удаљеношћу тачке најближе екстрадосу мења дебљина лука те смањује обухват средње деонице (опасне области). Овај поступак се понавља док се не постигне жељени степен тачности (овде су резултати добијени с тачноћу  $10^{-12}$ ).

### 7.4 Троугласти лукови: хоризонтална стереотомија

Уколико је конструкција образована од елемената у хоризонталним редовима – слојевима (паралелне хоризонталне спојнице), примерена је примена хоризонталне стереотомије. На овај начин, у складу с теоријом потпорне линије, Миланковић [93] је обрадио проблем потпорних зидова, а по угледу на то овде ће бити обрађени тзв. лажни лукови. У складу с тим, усвојен је правоугли координатни систем с почетком на интрадосу у вертикалној оси симетрије лука. Притом је положај произвољног пресека одређен апсцисом  $x$  мереном одозго надолу, као што се види на сликама 13, 14 и 15. Три различита случаја засебно су испитана у наредним пододелцима.

#### 7.4.1 Два наспрамно постављена паралелопипеда

У првоме случају разматрају се два нагнута паралелопипедна блока, ослоњена један на други у једној заједничкој тачки  $B$ , која на тај начин образују лажни (троугласти) лук приказан на слици 13.



Слика 13. Лажни троугласти лук према хоризонталној стереотомији: (а) геометријски чиниоци, (б) коначни део лука до произвољног пресека на удаљености  $x$ , (в) план сила

Из равнотеже момената за тачку  $S$  изводи се хоризонтални потисак:

$$H = \frac{W \left( \frac{s}{2} - \frac{t}{2 \sin \alpha} \right)}{s \tan \alpha} = \frac{1}{2} t \csc \alpha (s - t \csc \alpha), \quad (53)$$

где је  $W = s t \sec \alpha$  тежина једног паралелопипеда. Може се закључити да је  $H = 0$  када је  $t = s \sin \alpha$ .

Тежина  $V$  коначног дела лука до пресека на растојању  $x$  је:

$$V(x) = \frac{xt}{\sin \alpha}. \quad (54)$$

У складу са сликом 13б, из равнотеже момената за тачку  $A$  дату следећом једнакошћу:  $Hx = V(x) [y(x) - \frac{1}{2}(t \csc \alpha + x \cot \alpha)]$ , изводи се израз за потпорну линију:

$$y(x) = \frac{1}{2} \cot \alpha x + \frac{s}{2}. \quad (55)$$

Ово је линеарна једначина, независна од дебљине  $t$ . Према томе, потпорна линија, можда неочекивано, почиње на удаљености  $y(0) = s/2$  од вертикалне осе симетрије,<sup>3</sup> и наставља праволинијски ка тачки  $S$  на интрадосу ослоначке спојнице, као што се види на слици 13а. Тако је потпорна линија на врху најудаљенија од интрадоса, те је минимална дебљина оваквог лука следећа:  $t/s_{\min} = \frac{1}{2} \sin \alpha$ .

#### 7.4.2 Лажни троугаони лук

Слично случају испитаном у § 7.2.2, троугаони лук може бити образован додавањем испуне на врх лука разматраног у претходном пододељку. Према томе, тежина половина испуне, означена са  $V_0$ , делује у тачки  $B$ , као што је приказано на слици 14, а дата је следећим изразом:

$$V_0 = \frac{t^2}{2 \sin \alpha \cos \alpha}. \quad (56)$$

Тежина  $W$  половине лука је:

$$W = \frac{st}{\cos \alpha}. \quad (57)$$

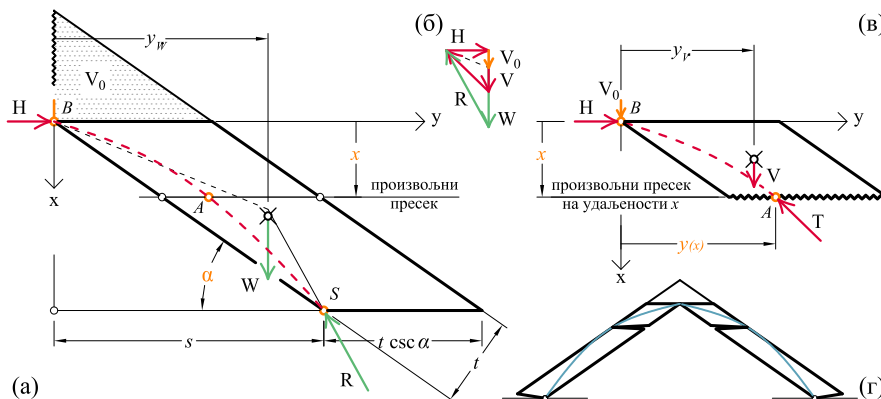
Из равнотеже момената за тачку  $S$  представљену следећом једнакошћу:  $Hs \tan \alpha = W [\frac{s}{2} - \frac{t}{2 \sin \alpha}] + sV_0$ , изводи се хоризонтални потисак:

$$H = \frac{st}{2 \sin \alpha}. \quad (58)$$

Из равнотеже момената за тачку  $A$  представљену следећом једнакошћу:  $Hx - V_0 y(x) = V(x) [y(x) - \frac{1}{2}(\frac{t}{\sin \alpha} + \frac{x}{\tan \alpha})]$ , изводи се једначина потпорне линије:

$$y(x) = \frac{tx \csc \alpha + x^2 \cot \alpha + sx}{t \sec \alpha + 2x}, \quad (59)$$

<sup>3</sup> До сличног закључка дошао је Миланковић приликом испитивања вертикалног потпорног зида на чијем врху делује хоризонтална сила (в. [93]).



**Слика 14.** Троугаони лук према хоризонталној стереотомији: (а) геометријски чиниоци, (б) план сила, (в) коначни део лука до произвољног пресека на удаљености  $x$ , (г) лук минималне дебљине, механизам слома и минимална потпорна линија

која, као и у претходном случају, представља хиперболу.

Када је претпостављена минимална дебљина, потпорна линија додирује екстрадосу у тачки која је најудаљенија од интрадоса. Стога је потребно одредити ту тачку. Хоризонтална удаљеност (у правцу ординате) између потпорне линије и интрадоса дата је следећим изразом:

$$y_1(x) = y(x) - x \cot \alpha. \quad (60)$$

Тачка најближа екстрадосу (истовремено најудаљенија од интрадоса) одговара максимуму функције (60). Извод једначине (60) је следећи:

$$y_1'(x) = \frac{st \sec \alpha - 2tx \csc \alpha - 2x^2 \cot \alpha}{(t \sec \alpha + 2x)^2}. \quad (61)$$

Максимална вредност  $y_1$  се добија када је  $y_1'(x) = 0$ , те се решавањем по  $x$  одређује апсциса опасног пресека који садржи тачку најближу екстрадосу:

$$x_{crit} = \frac{1}{2} \sec \alpha \left[ \sec \alpha \sqrt{t \cos^2 \alpha (2s \sin \alpha + t)} - t \right]. \quad (62)$$

Уврштавањем једначине (62) у једначину (59) добија се ордината тачке потпорне линије на опасном пресеку:

$$y_{crit} = \frac{s}{2}. \quad (63)$$

У складу с једначинама (63) и (62), максимална ортогонална удаљеност потпорне линије од интрадоса је:

$$\begin{aligned} d &= (y_{crit} - x_{crit} \cot \alpha) \sin \alpha \\ &= \frac{1}{2} \left( -\sec \alpha \sqrt{t \cos^2 \alpha (2s \sin \alpha + t)} + s \sin \alpha + t \right). \end{aligned} \quad (64)$$

За претпостављену минималну дебљину лука, ову вредност је потребно изједначити с дебљином лука  $d = t$  (слика 14г); решавање по  $t$  и дељење са  $s$  даје минималну дебљину лука у виду односа дебљине  $t$  и полураспона  $s$  у зависности од нагиба  $\alpha$ :

$$t/s_{min} \alpha = \frac{1}{4} \sin \alpha. \quad (65)$$

### 7.4.3 Лажни полулук

Уколико се половина лука разматраног у претходном поделуку (в. слику 14) посматра као засебна конструкција, онда и припадајућа испуна изнад  $y$ -осе такође делује као целина (а не као половина). У складу с тим, тежина  $V_0$  испуне,<sup>4</sup> дата изразом (56), наноси се у припадајуће тежиште (одговарајућег троугла) као што је приказано на слици 15а.

Равнотежа момената за тачку  $S$  дата је следећом једнакошћу:  $Hs \tan \alpha = V_0 \left( s - \frac{t}{3 \sin \alpha} \right) + W \left( \frac{s}{2} - \frac{t}{2 \sin \alpha} \right)$ , где је укупна тежина  $W$  дата изразом (57). Одатле се изводи израз за хоризонтални потисак:

$$H = \frac{\cot \alpha (3s^2 t \sec \alpha - t^3 \csc^2 \alpha \sec \alpha)}{6s}. \quad (66)$$

Може се закључити да је  $H = 0$  за  $t = s \sin \alpha \sqrt{3}$ .

Равнотеже момената за тачку  $A$  дата је следећом једнакошћу:

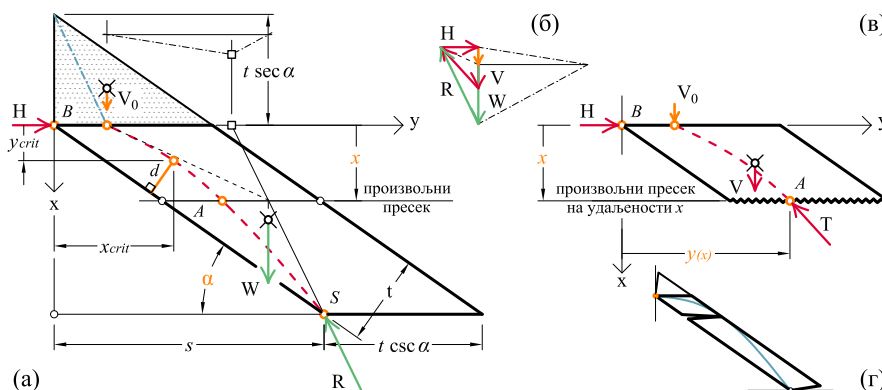
$$Hx - V_0 \left( y(x) - \frac{t}{3 \sin \alpha} \right) = V(x) \left[ y(x) - \frac{1}{2} \left( \frac{t}{\sin \alpha} + \frac{x}{\tan \alpha} \right) \right]. \quad (67)$$

Решавањем величине  $y$  добија се израз за потпорну линију:

$$y(x) = \frac{t \csc \alpha (s t \sec \alpha - t x \csc \alpha + 3 s x) + 3 s x^2 \cot \alpha + 3 s^2 x}{3 s (t \sec \alpha + 2 x)}, \quad (68)$$

<sup>4</sup> Ваља напоменути да ова испуна такође може бити посматрана као троугаона конструкција с хоризонталним слојевима; придружена потпорна линија је дуж (в. [92]) која почиње у горњем темену и завршава у трећини доње стране троугла, као што је приказано на слици 15а.





**Слика 15.** Лажни полулук: (а) геометријски чиниоци, (б) план сила, (в) коначни део лука до произвољног пресека на удаљености  $x$ , (г) полулук минималне дебљине, механизам слома и минимална потпорна линија

која, и у овом случају, има облик хиперболе.

Хоризонтална удаљеност потпорне линије од интрадоса дата је једначином (60), где је  $y(x)$  сада одређено једначином (68). Њен извод је:

$$y_1'(x) = \frac{t \sec \alpha (3s^2 - 2st \csc \alpha - 6sx \cot \alpha - t^2 \csc^2 \alpha) - 6s x^2 \cot \alpha}{3s(t \sec \alpha + 2x)^2}, \quad (69)$$

а када је  $y_1'(x) = 0$ , решавање по  $x$  даје апсцису опасног пресека који садржи тачку најближу екстрадосу:

$$x_{crit} = \frac{\sqrt{3} \sqrt{st \csc \alpha (3s^2 - 3s^2 \cos(2\alpha) - 2t^2 - st \sin \alpha)} - 3st}{6s \cos \alpha}. \quad (70)$$

Уврштавањем израза (70) у једначину (68) добија се ордината опасне тачке:

$$y_{crit} = \frac{s}{2} - \frac{t^2}{6s \sin^2 \alpha}. \quad (71)$$

С обзиром на изразе (71) и (70), највећа ортогонална удаљеност

$d$  између потпорне линије и интрадоса је следећа:

$$d = (y_{crit} - x_{crit} \cot \alpha) \sin \alpha$$

$$= \frac{\left\{ \begin{array}{l} 3st - t^2 \csc \alpha + \\ \sin \alpha \left[ 3s^2 - \sqrt{3} \sqrt{st \csc^3 \alpha \left( 3s^2 - 3s^2 \cos(2\alpha) - \right)} \right] \end{array} \right\}}{6s}. \quad (72)$$

Када је претпостављена минимална дебљина, онда је  $d = t$ ; стога решавање по  $t$  те дељење са  $s$  даје минимални однос дебљине и распона:

$$t/s_{min}(\alpha) = \left[ \sqrt{6(\sqrt{6} + 3)} - \sqrt{6} - 3 \right] \sin \alpha, \quad (73)$$




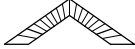

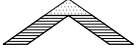

који зависи само од нагиба  $\alpha$ .

### 7.5 Преглед резултата: троугаони и троугласти лукови

На основу израза изведених у претходним поглављима, који описују вредности минималне дебљине за различите облике троугаоних и троугластих лукова, израчунате су одговарајуће нумеричке вредности. Њихов упоредни приказ, с обзиром на примењену стереотомију и нагибни угао  $\alpha$ , дат је у табели 3. Одговарајући изрази и облици потпорне линије такође су назначени.

Може се закључити да вертикална, нормална и хоризонтална стереотомија дају истоветне вредности минималне дебљине троугаоних лукова, иако, у складу с примењеном стереотомијом, нити у околини ослонца нити у околини темена, нису обухваћени истоветни делови лука (в. слике у табелама 1б и 3). С друге стране, радијална стереотомија захтева приближно 0,745% мању дебљину. Поређењем резултата у случају двају паралелоипеда нагнутих један на други, према нормалној и хоризонталној стереотомији, може се закључити да нормална стереотомија захтева приближно 30–50% мању дебљину него хоризонтална стереотомија. Поређењем резултата за троугаони лук с примењеном нормалном стереотомијом, са резултатом добијеним уз претпоставку којом се занемарује трење (в. [98]), закључује се да лук истог облика код којег је узето у обзир и трење, захтева приближно 50–60% мању дебљину.

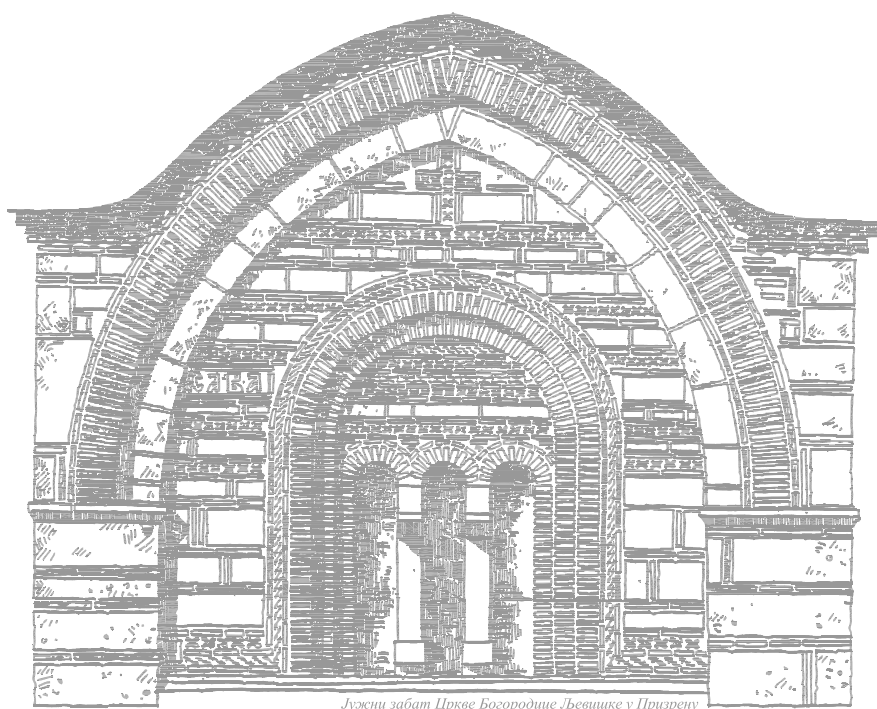
Табела 3. Минимална дебелина  $t/s$  троугаоних и троугластих лукова различитог нагибног угла  $\alpha$ 

стереотомија	вертикална	нормална	нормална	радијална	хоризонтална	хоризонтална	хоризонтална
облик лука	троугаони лук	два нагнута права лука	троугаони лук	троугаони лук	два нагнута паралелопи- педа	троугаони лук	полулук
							
израз	$\frac{1}{4} \sin \alpha$	$\frac{1}{2} \tan \left( \frac{\alpha}{2} \right)$	$\frac{1}{4} \sin \alpha$	j. (52)	$\frac{1}{2} \sin \alpha$	$\frac{1}{4} \sin \alpha$	j. (73)
облик	парабола	хипербола	хипербола	кубика	права	хипербола	хипербола
15°	0,064705	0,065826		0,064223	0,129410		0,069528
30°	0,125000	0,133975		0,124069	0,250000		0,134317
45°	0,176777	0,207107		0,175460	0,353553		0,189953
60°	0,216506	0,288675		0,214894	0,433013		0,232644
75°	0,241481	0,383663		0,239683	0,482963		0,259480

Празна поља имају истоветне вредности као она у првој врсти истога реда

## Глава III

### Преломљени лукови





## Преломљени лук: радијална стереотомија

### 8.1 Геометријска својства преломљеног лука према радијалној стереотомији

У овом поглављу испитан је преломљени лук код којег су спојнице, односно произвољни пресеци, конкурентне са средиштем лука. Како би на преломљени лук могао бити примењен геометријски тј. статички приступ у испитивању равнотеже, који подразумева извођење граничне потпорне линије, прво се морају испитати његова геометријска својства. Услед симетрије лука, у даљем разматрању посматрана је само половина лука приказана на слици 16а, где су назначени битни геометријски чиниоци.  $R$  и  $t$  означавају редом полупречник (средишње линије тј. осе) лука и његову дебљину. *Минимална дебљина лука*, одређена односом дебљине и полупречника,  $t/R$ , представља најмању теоријски могућу дебљину лука, која је од посебног значаја у овој дисертацији.

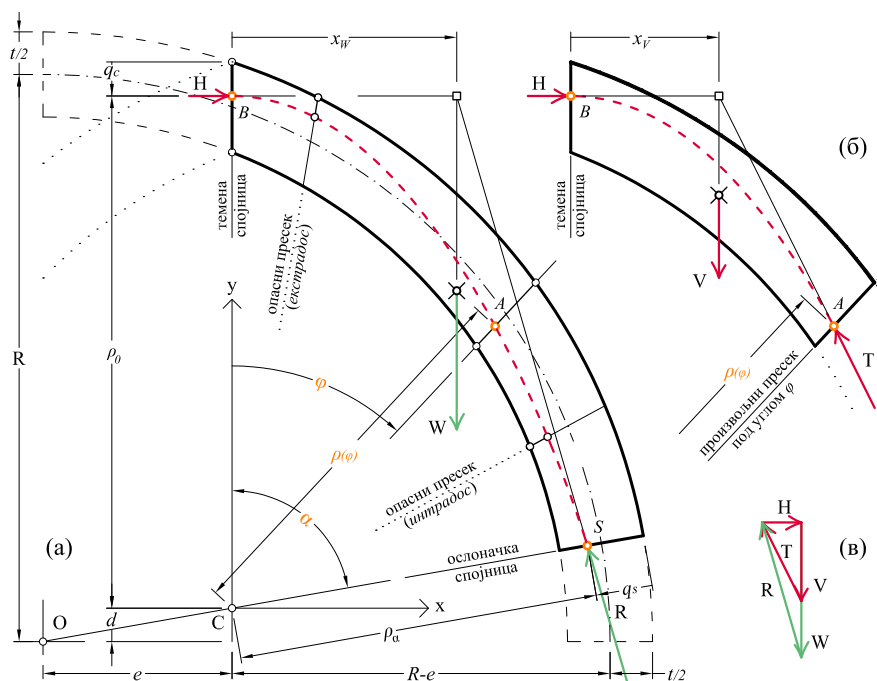
Угао  $\alpha$  представља *обухватни угао* половине лука, односно половину средишњег угла лука, те је комплементаран нагибном углу ослонца тј. ослоначке спојнице. Ако је обухватни угао  $\alpha$  мањи односно већи од  $90^\circ$  (дакле средишњи угао мањи односно већи од  $180^\circ$ ) лукови су редом *сегментни* (недовршени, непотпуни; в. слику 25) односно *потковичастни* (превршени, препуни; в. слику 27ђ).

Величина  $e$ , која изражава одступање од полукружног облика, представља хоризонталну удаљеност између средишта  $O$  осе лука и средишта  $C$  лука. Основно својство преломљеног лука је његов *ексцентрицитет*, као мера преломљености (зашиљености) лука, а означен је са  $\xi$ ; по [112] представља однос између дужине  $e$  и полупречника одговарајућег полукружног лука, те је дат следећим изразом:  $\xi = e/(R - e)$ .

У складу с радијалном стереотомијом, спојнице се зракасто пружају из средишта  $C$  лука, те је усвојен поларни координатни систем. Угао  $\varphi$  одређује положај и правац произвољног пресека, а

мерен је од вертикалне осе симетрије лука (темени пресек, темена спојница) према ослонцу (ослоначки пресек, ослоначка спојница).

Претпостављањем положаја тачака  $B$  и  $S$ , као редом нападах тачака хоризонталне силе  $H$  која делује у темену и реакције  $R$  на ослонцу, од бесконачног броја могућих потпорних линија [61], једнозначно је одређена једна (приказана испрекиданом линијом на слици 16а,б). План сила приказан на слици 16в графички изражава равнотежу система (половине лука).



**Слика 16.** Преломљени лук из два средишта према радијалној стереотомији: (а) геометријски чиниоци, (б) коначни део лука до произвољног пресека под углом  $\varphi$ , (в) план сила који представља равнотежу половине лука односно његовог коначног дела

Премда радијална стереотомија уобичајено налаже коришћење поларних координата, испоставило се да то у случају преломљених

<sup>1</sup> Као што је наведено у поглављу 2, силе морају бити конкурентне како би равнотежа била задовољена. Стога се нападне линије резултантне силе  $T$ , хоризонталне силе  $H$  и силе  $V$  која представља тежину коначног дела лука, секу у једној тачки (в. слику 16б; уочити паралелизам између правца сила на плану сила на слици 16в и нападах линија сила у оквиру верижног полигона на слици 16а,б).



лукова није погодно, будући да даје веома дугачке изразе (услед увођења двају чиниоца, удаљености  $e$  и обухватног угла  $\alpha$ , који разликују преломљене од полукружног лука). Стога је предстојеће аналитичко моделирање проблема спроведено на основу правоуглог координатног система као погоднијег, с почетком смештеним у средиште  $C$  лука, као што је приказано на слици 16а.

**Координате крајева произвољног пресека.** У складу с положајем произвољног пресека под углом  $\varphi$  (в. слику 16а), из једначине круга екстрадоса  $(x + e)^2 + (y + d)^2 = R_{ex}^2$  решене су апсциса и ордината, и одабрана су следећа, позитивна, решења:

$$x_{ex}(y) = \sqrt{R_{ex}^2 - (d + y)^2} - e \quad (74a)$$

$$y_{ex}(x) = \sqrt{R_{ex}^2 - (e + x)^2} - d, \quad (74b)$$

где је  $R_{ex} = R + t/2$  полупречник круга екстрадоса, а  $d = e \cot \alpha$ . Ординате  $y_r(x)$  тачака дуж пресека под произвољним углом  $\varphi$  дате су следећом једнакошћу:  $y_r(x) = x \cot \varphi$ ; решење једначине  $y_r(x) = y(x)$ , која представља пресек екстрадоса и радијалног правца, даје апсцису  $x_{rex}$  тачке на екстрадосу у функцији угла  $\varphi$ :

$$x_{rex}(\varphi) = \left[ \sqrt{R_{ex}^2 - d^2 + 2 d e \cot \varphi + (R_{ex}^2 - e^2) \cot^2 \varphi} - e \right] \sin^2 \varphi - d \sin \varphi \cos \varphi. \quad (75)$$

С друге стране, ордината  $y_{rex}$  је следећа:

$$y_{rex}(\varphi) = x_{rex}(\varphi) \cot \varphi. \quad (76)$$

На исти начин, на основу једначине интрадоса  $(x + e)^2 + (y + d)^2 = R_{in}^2$  следи:

$$x_{in}(y) = \sqrt{R_{in}^2 - (d + y)^2} - e \quad (77a)$$

$$y_{in}(x) = \sqrt{R_{in}^2 - (e + x)^2} - d, \quad (77b)$$

где је  $R_{in} = R - t/2$  полупречник круга интрадоса. Пресек интрадоса и радијалног правца даје апсцису  $x_{rin}$  тачке на интрадосу:

$$x_{rin}(\varphi) = \left[ \sqrt{R_{in}^2 - d^2 + 2 d e \cot \varphi + (R_{in}^2 - e^2) \cot^2 \varphi} - e \right] \sin^2 \varphi - d \sin \varphi \cos \varphi, \quad (78)$$

а њена ордината  $y_{rin}$  је:

$$y_{rin}(\varphi) = x_{rin}(\varphi) \cot \varphi. \quad (79)$$

**Тежина коначног дела преломљеног лука.** Тежина  $V$  коначног (горњег) дела лука, између темене спојнице и произвољног пресека под углом  $\varphi$ , представљена је површином одговарајућег дела прстена лука (в. слику 16б), и може се рачунати на основу следећег израза:

$$V(\varphi) = V_1(\varphi) + V_2(\varphi) - V_3(\varphi) - V_4(\varphi). \quad (80)$$

Како би се обухватили и сегментни и потковичасти лукови, који редом имају оштар односно туп обухватни угао  $\alpha$ , изнађено је погодно збрајање појединачних површина које дају површину коначног дела лука, као и лука у целини (в. слику 17).<sup>2</sup>

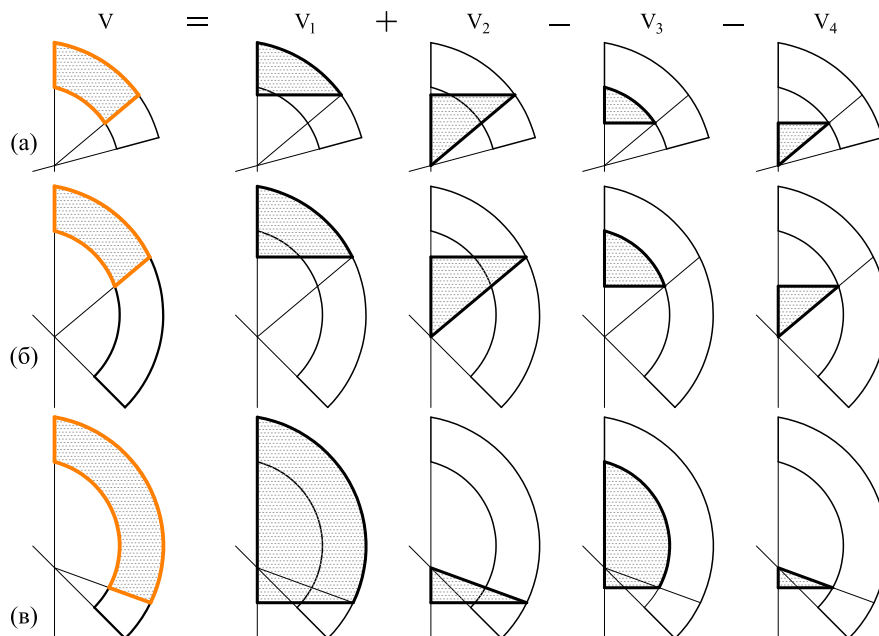
Површина  $V_1$  између  $y$ -осе и круга екстрадоса, од темена до тачке одређене с  $y_{rex}(\varphi)$ , следећа је:

$$\begin{aligned} V_1(\varphi) &= \int_{y_{rex}(0)}^{y_{rex}(\varphi)} x_{ex}(y) dy \\ &= \frac{1}{2} \left[ (d+y) \sqrt{R_{ex}^2 - (d+y)^2} + R_{ex}^2 \arcsin \left( \frac{d+y}{R_{ex}} \right) - 2ey \right] \Big|_{y_{rex}(0)}^{y_{rex}(\varphi)} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ (d+y_{rex}) \left[ 2e - \sqrt{R_{ex}^2 - (d+y_{rex})^2} \right] - e \sqrt{R_{ex}^2 - e^2} - \right. \\ &\quad \left. R_{ex}^2 \left[ \arcsin \left( \frac{d+y_{rex}}{R_{ex}} \right) - \arcsin \left( \frac{\sqrt{R_{ex}^2 - e^2}}{R_{ex}} \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (81)$$

где је  $y_{rex}$  дато једначином (76), а  $y_{rex}(0) = \sqrt{R_{ex}^2 - e^2} - d$  је ордината темена на екстрадосу. Површина  $V_2$  троугаоног дела под екстрадосом (правоугли троугао с оштрим углом у тачки  $C$ ), а с обзиром на једначине (75) и (76), дата је следећим изразом:

$$V_2(\varphi) = \frac{1}{2} x_{rex}(\varphi) y_{rex} = \frac{1}{2} x_{rex}^2(\varphi) \cot \varphi. \quad (82)$$

<sup>2</sup> Притом је интеграција вршена с обзиром на ординату (а не апсцису).



**Слика 17.** Разлагање површине коначног дела преломљеног лука:  
 (а)  $\alpha < \pi/2$  и  $\varphi < \alpha$ , (б)  $\alpha > \pi/2$  и  $\varphi < \alpha$ , (в)  $\alpha > \varphi > \pi/2$

Даље, површина  $V_3$  између  $y$ -осе и круга интрадоса је следећа:

$$\begin{aligned}
 V_3(\varphi) &= \int_{y_{rin}(0)}^{y_{rin}(\varphi)} x_{in}(y) dy \\
 &= \frac{1}{2} \left[ (d+y) \sqrt{R_{in}^2 - (d+y)^2} + \left[ R_{in}^2 \arcsin\left(\frac{d+y}{R_{in}}\right) - 2ey \right] \right] \Big|_{y_{rin}(0)}^{y_{rin}(\varphi)} \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ (d+y_{rin}) \left[ 2e - \sqrt{R_{in}^2 - (d+y_{rin})^2} \right] - e \sqrt{R_{in}^2 - e^2} - \left[ R_{in}^2 \left[ \arcsin\left(\frac{d+y_{rin}}{R_{in}}\right) - \arcsin\left(\frac{\sqrt{R_{in}^2 - e^2}}{R_{in}}\right) \right] \right] \right\}, \quad (83)
 \end{aligned}$$

где је величина  $y_{rin}$  дата једначином (79), а  $y_{rin}(0) = \sqrt{R_{in}^2 - e^2} - d$  представља ординату интрадоса у темену. Површина  $V_4$  троугаоног

дела<sup>3</sup> под интрадосом, а с обзиром на једначине (78) и (79), следећа је:

$$V_4(\varphi) = \frac{1}{2} x_{rin}(\varphi) y_{rin} = \frac{1}{2} x_{rin}^2(\varphi) \cot \varphi. \quad (84)$$

Уврштавањем једначина (81–84) у једначину (80) добија се тежина  $V$  коначног дела лука до произвољног пресека под углом  $\varphi$ :

$$V(\varphi) = \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} (d + y_{rex}) \left[ 2e - \sqrt{R_{ex}^2 - (d + y_{rex})^2} \right] - \\ (d + y_{rin}) \left[ 2e - \sqrt{R_{in}^2 - (d + y_{rin})^2} \right] - \\ R_{ex}^2 \left[ \arcsin \left( \frac{d + y_{rex}}{R_{ex}} \right) - \arcsin \left( \frac{\sqrt{R_{ex}^2 - e^2}}{R_{ex}} \right) \right] + \\ R_{in}^2 \left[ \arcsin \left( \frac{d + y_{rin}}{R_{in}} \right) - \arcsin \left( \frac{\sqrt{R_{in}^2 - e^2}}{R_{in}} \right) \right] - \\ e \sqrt{R_{ex}^2 - e^2} + e \sqrt{R_{in}^2 - e^2} + \cot \varphi (x_{rex}^2 - x_{rin}^2) \end{array} \right\}. \quad (85)$$

**Тежиште коначног дела преломљеног лука.** Апсциса  $x_V$  тежишта горњег коначног дела лука тежине  $V$  (в. слику 16б), може се рачунати на следећи начин:

$$x_V(\varphi) = \frac{V_1(\varphi) x_{V_1}(\varphi) + V_2(\varphi) x_{V_2}(\varphi) - V_3(\varphi) x_{V_3}(\varphi) - V_4(\varphi) x_{V_4}(\varphi)}{V(\varphi)}. \quad (86)$$

<sup>3</sup> Уочити да је слика 17в у сагласности с једначином (80), будући да је вредност  $\cot \varphi$ , која учествује у једначинама (82) и (84), негативна када је угао  $\varphi$  већи од  $\pi/2$ .

Апсциса  $x_{V_1}$  тежишта дела  $V_1$  добија се на следећи начин:

$$\begin{aligned}
x_{V_1}(\varphi) &= \frac{1}{2V_1(\varphi)} \int_{y_{rex}(0)}^{y_{rex}(\varphi)} x_{ex}^2(y) dy \\
&= \frac{1}{3}(d+y)^3 - eR_{ex}^2 \arcsin\left(\frac{d+y}{R_{ex}}\right) \Bigg|_{y_{rex}(0)}^{y_{rex}(\varphi)} - \frac{1}{2V_1(\varphi)} \\
&\quad \left\{ R_{ex}^2 \left[ e \arcsin\left(\frac{d+y_{rex}}{R_{ex}}\right) + \sqrt{R_{ex}^2 - e^2} \right] + \right. \\
&\quad \left. e \arcsin\left(\frac{\sqrt{R_{ex}^2 - e^2}}{R_{ex}}\right) \right\} + \\
&\quad \left\{ (d+y_{rex}) \left[ e\sqrt{R_{ex}^2 - (d+y_{rex})^2} - R_{ex}^2 - e^2 \right] + \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{3} \left[ (d+y_{rex})^3 - (R_{ex}^2 - e^2)^{3/2} \right] \right\} \\
&= \frac{\left\{ (d+y_{rex}) \left[ 2e - \sqrt{R_{ex}^2 - (d+y_{rex})^2} \right] - e\sqrt{R_{ex}^2 - e^2} \right\}}{\left\{ R_{ex}^2 \left[ \arcsin\left(\frac{d+y_{rex}}{R_{ex}}\right) - \arcsin\left(\frac{\sqrt{R_{ex}^2 - e^2}}{R_{ex}}\right) \right] \right\}}.
\end{aligned} \tag{87}$$

Апсциса  $x_{V_2}$  тежишта које одговара делу  $V_2$ , представљеном правоуглим троуглом, дата је следећим изразом:

$$x_{V_2}(\varphi) = \frac{1}{3} x_{rex}(\varphi). \tag{88}$$

По угледу на израз за  $x_{V_1}$ , изведен у једначини (87), апсциса  $x_{V_3}$  тежишта дела  $V_3$  може се извести из:

$$x_{V_3}(\varphi) = \frac{1}{2V_3(\varphi)} \int_{y_{rin}(0)}^{y_{rin}(\varphi)} x_{in}^2(y) dy, \tag{89}$$

док је, слично једначини (88), апсциса  $x_{V_4}$  тежишта дела  $V_4$  следећа:

$$x_{V_4}(\varphi) = \frac{1}{3} x_{rin}(\varphi). \tag{90}$$

Према томе, аналитички израз за апсцису тежишта  $x_V$  горњег коначног дела преломљеног лука до произвољног пресека под углом  $\varphi$ , уврштавањем израза (81–85) и (87–90) у једначину (86), добија

следећи облик:

$$x_V(\varphi) = \frac{\left( \begin{array}{l} R_{ex}^2 \left[ e \arcsin \left( \frac{d + y_{rex}}{R_{ex}} \right) + \sqrt{R_{ex}^2 - e^2} - \right. \\ \left. e \arcsin \left( \frac{\sqrt{R_{ex}^2 - e^2}}{R_{ex}} \right) \right] - \\ R_{in}^2 \left[ e \arcsin \left( \frac{d + y_{rin}}{R_{in}} \right) + \sqrt{R_{in}^2 - e^2} - \right. \\ \left. e \arcsin \left( \frac{\sqrt{R_{in}^2 - e^2}}{R_{in}} \right) \right] - \\ (d + y_{rex}) \left[ R_{ex}^2 + e^2 - e \sqrt{R_{ex}^2 - (d + y_{rex})^2} \right] + \\ (d + y_{rin}) \left[ R_{in}^2 + e^2 - e \sqrt{R_{in}^2 - (d + y_{rin})^2} \right] + \\ \frac{1}{3} \left[ (d + y_{rex})^3 - (R_{ex}^2 - e^2)^{3/2} \right] - \\ \frac{1}{3} \left[ (d + y_{rin})^3 - (R_{in}^2 - e^2)^{3/2} \right] + \\ \frac{1}{3} x_{rex}^3 \cot \varphi - \frac{1}{3} x_{rin}^3 \cot \varphi \end{array} \right)}{\left( \begin{array}{l} (d + y_{rex}) \left[ 2e - \sqrt{R_{ex}^2 - (d + y_{rex})^2} \right] - \\ (d + y_{rin}) \left[ 2e - \sqrt{R_{in}^2 - (d + y_{rin})^2} \right] - \\ R_{ex}^2 \left[ \arcsin \left( \frac{d + y_{rex}}{R_{ex}} \right) - \arcsin \left( \frac{\sqrt{R_{ex}^2 - e^2}}{R_{ex}} \right) \right] + \\ R_{in}^2 \left[ \arcsin \left( \frac{d + y_{rin}}{R_{in}} \right) - \arcsin \left( \frac{\sqrt{R_{in}^2 - e^2}}{R_{in}} \right) \right] - \\ e \sqrt{R_{ex}^2 - e^2} + e \sqrt{R_{in}^2 - e^2} + (x_{rex}^2 - x_{rin}^2) \cot \varphi \end{array} \right)}. \quad (91)$$

**Тежина и тежиште половине лука.** Тежина  $W$  половине лука приказане на слици 16а добија се када угао  $\varphi$  заузме вредност обу-

хватног угла  $\alpha$ , те се једначина (85) упрошћава у следећу:

$$\begin{aligned}
 W &= V(\varphi = \alpha) \\
 &= \frac{1}{2} \left[ R_{ex}^2 \arcsin \left( \frac{\sqrt{R_{ex}^2 - e^2}}{R_{ex}} \right) - R_{in}^2 \arcsin \left( \frac{\sqrt{R_{in}^2 - e^2}}{R_{in}} \right) + \right. \\
 &\quad \left. e \sqrt{R_{in}^2 - e^2} - e \sqrt{R_{ex}^2 - e^2} - 2 R t \arcsin(\cos \alpha) \right].
 \end{aligned} \tag{92}$$

Поред тога се апсциса  $x_W$  тежишта половине лука из једначине (91) упрошћава у следећу:

$$\begin{aligned}
 x_W &= x_V(\varphi = \alpha) \\
 &= \frac{\left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{3} (e^2 + 2 R_{ex}^2) \sqrt{R_{ex}^2 - e^2} - \\ &\frac{1}{3} (e^2 + 2 R_{in}^2) \sqrt{R_{in}^2 - e^2} - \\ &e R_{ex}^2 \left[ \arcsin \left( \frac{\sqrt{R_{ex}^2 - e^2}}{R_{ex}} \right) - \arcsin(\cos \alpha) \right] + \\ &e R_{in}^2 \left[ \arcsin \left( \frac{\sqrt{R_{in}^2 - e^2}}{R_{in}} \right) - \arcsin(\cos \alpha) \right] - \\ &\frac{2}{3} (R_{ex}^3 - R_{in}^3) \cos \alpha \end{aligned} \right\}}{\left[ R_{ex}^2 \arcsin \left( \frac{\sqrt{R_{ex}^2 - e^2}}{R_{ex}} \right) - R_{in}^2 \arcsin \left( \frac{\sqrt{R_{in}^2 - e^2}}{R_{in}} \right) + \right. \\
 &\quad \left. e \sqrt{R_{in}^2 - e^2} - e \sqrt{R_{ex}^2 - e^2} - 2 R t \arcsin(\cos \alpha) \right]}.
 \end{aligned} \tag{93}$$

**Преломљени лук правог обухватног угла** ( $\alpha = \pi/2$ ). У најчешћем случају, када је обухватни угао  $\alpha$  прав, израз за тежину  $W$  половине лука, дат једначином (92), упрошћава се у следећи облик:

$$W(\alpha = \pi/2) = \frac{1}{2} \left[ \begin{aligned} &R_{ex}^2 \arcsin \left( \frac{\sqrt{R_{ex}^2 - e^2}}{R_{ex}} \right) - e \sqrt{R_{ex}^2 - e^2} - \\ &R_{in}^2 \arcsin \left( \frac{\sqrt{R_{in}^2 - e^2}}{R_{in}} \right) + e \sqrt{R_{in}^2 - e^2} \end{aligned} \right], \tag{94}$$

а израз за апсцису  $x_W$  тежишта, дат једначином (93), упрошћава се у:

$$x_W(\alpha = \pi/2) = \frac{\begin{bmatrix} \frac{1}{3} (e^2 + 2 R_{ex}^2) \sqrt{R_{ex}^2 - e^2} - \\ e R_{ex}^2 \arcsin \left( \frac{\sqrt{R_{ex}^2 - e^2}}{R_{ex}} \right) - \\ \frac{1}{3} (e^2 + 2 R_{in}^2) \sqrt{R_{in}^2 - e^2} + \\ e R_{in}^2 \arcsin \left( \frac{\sqrt{R_{in}^2 - e^2}}{R_{in}} \right) \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} R_{ex}^2 \arcsin \left( \frac{\sqrt{R_{ex}^2 - e^2}}{R_{ex}} \right) - e \sqrt{R_{ex}^2 - e^2} - \\ R_{in}^2 \arcsin \left( \frac{\sqrt{R_{in}^2 - e^2}}{R_{in}} \right) + e \sqrt{R_{in}^2 - e^2} \end{bmatrix}}. \quad (95)$$

## 8.2 Хоризонтални потисак и потпорна линија у преломљеном луку према радијалној стереотомији

Како би одговарајуће испитивање могло да буде спроведено, неопходно је одредити потпорну линију, односно извести аналитички израз којим је она описана. Претпостављајући (непознати) положај нападних тачака  $B$  и  $S$  редом сила  $H$  и  $R$  (в. слику 16а), из равнотеже момената половине лука за тачку  $S$  на ослонцу, одређује се величина хоризонталног потиска  $H$  који делује у темену:

$$H = \frac{W (\rho_\alpha \sin \alpha - x_W)}{\rho_0 - \rho_\alpha \cos \alpha}, \quad (96)$$

где су тежина  $W$  половине лука и апсциса  $x_W$  придруженог тежишта редом дати једначинама (92) и (93). Величине  $\rho_0$  и  $\rho_\alpha$  у изразу (96) одређују претпостављени положај тачака  $B$  и  $S$ , односно удаљеност потпорне линије на темену и ослонцу од средишта  $C$  лука, и редом су дате следећим изразима:

$$\rho_0 = \rho(\varphi = 0) = \sqrt{R_{ex}^2 - e^2} - d - q_c, \quad (97a)$$

$$\rho_\alpha = \rho(\varphi = \alpha) = R_{ex} - \sqrt{d^2 + e^2} - q_s, \quad (97b)$$

где је  $q_c$  вертикална удаљеност тачке  $B$  од екстрадоса, док  $q_s$  представља удаљеност тачке  $S$  од екстрадоса дуж ослоначке спојнице



(в. слику 16а). Даље је резултантна сила  $T$  на произвољном пресеку под углом  $\varphi$ , уз припадајућу нападну тачку  $A$ , једнозначно одређена равнотежом сила односно момената за коначни део лука.<sup>4</sup> Према томе, равнотежа момената за тачку  $A$  дата је следећом једнакошћу:

$$V(\varphi)(\rho(\varphi) \sin \varphi - x_V(\varphi)) = H(\rho_0 - \rho(\varphi) \cos \varphi). \quad (98)$$

На основу тога се одређује удаљеност  $\rho(\varphi)$  између потпорне линије и средишта  $C$  лука, што представља једначину потпорне линије унутар преломљеног лука:

$$\rho(\varphi) = \frac{H\rho_0 + V(\varphi)x_V(\varphi)}{H \cos \varphi + V(\varphi) \sin \varphi}, \quad (99)$$

где су величине  $V(\varphi)$ ,  $x_V(\varphi)$ ,  $H$  и  $\rho_0$  редом дате једначинама (85), (91), (96) и (97а); уврштавањем ових израза у једначину (99) може се добити једначина потпорне линије у развијеном облику (који овде није приказан због своје дужине).

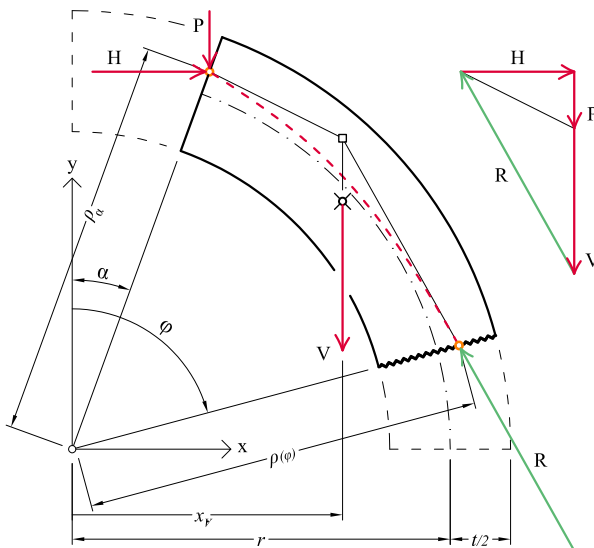
Међутим, једначином (96) се не претпоставља гранична вредност хоризонталног потиска који одговара граничној (минималној) дебљини лука. Према томе, ни датим изразом (99) се не претпоставља гранична потпорна линија; стога су величине  $q_c$  и  $q_s$ , које редом учествују у изразима (97а) и (97б), непознате. Како би се одредила гранична потпорна линија која одговара минималној (граничној) дебљини лука, потребно је на основу механизма слома који одговара одабраном облику лука (в. поглавље 11) одредити њихове вредности. У ту сврху биће изведени одговарајући нумерички поступци, који су подробно обрађени у поглављу 12.

<sup>4</sup> Ово може бити спроведено било графичким путем на плану сила (в. слику 16б,в) или аналитички решавањем једначина равнотеже.

## Преломљени лук: нормална стереотомија

У овом поглављу испитан је преломљени лук код којег се спојнице, односно произвољни пресеци, зракасто пружају из средишта осе (средишње линије) лука, те су стога управне (нормалне) на њу. Имајући у виду да у складу с нормалном стереотомијом исечак кружног прстена представља основни чинилац лука, прво ће његова равнотежа бити размотрена.

### 9.1 Исечак кружног прстена



Слика 18. Исечак кружног прстена: (а) геометријски чиниоци, (б) план сила

Површина исечка кружног прстена, између угла  $\alpha$  и произвољ-

ног пресека под углом  $\varphi$  једнака је:

$$V(\varphi) = r t (\varphi - \alpha). \quad (100)$$

Апсциса  $x_V$  тежишта које одговара површини  $V$  дата је следећим изразом:

$$\begin{aligned} x_V(\varphi) &= \frac{4}{3} \frac{r_{ex}^3 - r_{in}^3}{r_{ex}^2 - r_{in}^2} \frac{\sin\left(\frac{\varphi - \alpha}{2}\right)}{\varphi - \alpha} \sin\left(\frac{\alpha + \varphi}{2}\right) \\ &= \frac{(12 r^2 + t^2) (\cos \varphi - \cos \alpha)}{12 r (\alpha - \varphi)}, \end{aligned} \quad (101)$$

где су  $r_{ex}$  и  $r_{in}$  полупречници интрадоса и екстрадоса.

Равнотеже момената за нападну тачку  $A$  резултанте  $R$  на произвољном пресеку под углом  $\varphi$  дата је следећом једнакошћу:

$$\begin{aligned} V(\varphi)(\rho(\varphi) \sin \varphi - x_V(\varphi)) + P(\rho(\varphi) \sin \varphi - \rho_\alpha \sin \alpha) - \\ H(\rho_\alpha \cos \alpha - \rho(\varphi) \cos \varphi) = 0, \end{aligned} \quad (102)$$

те се одатле изводи израз за потпорну линију у исечку кружнога прстена:

$$\rho(\varphi) = \frac{V(\varphi)x_V(\varphi) + \rho_\alpha (P \sin \alpha + H \cos \alpha)}{(P + V(\varphi)) \sin \varphi + H \cos \varphi}, \quad (103)$$

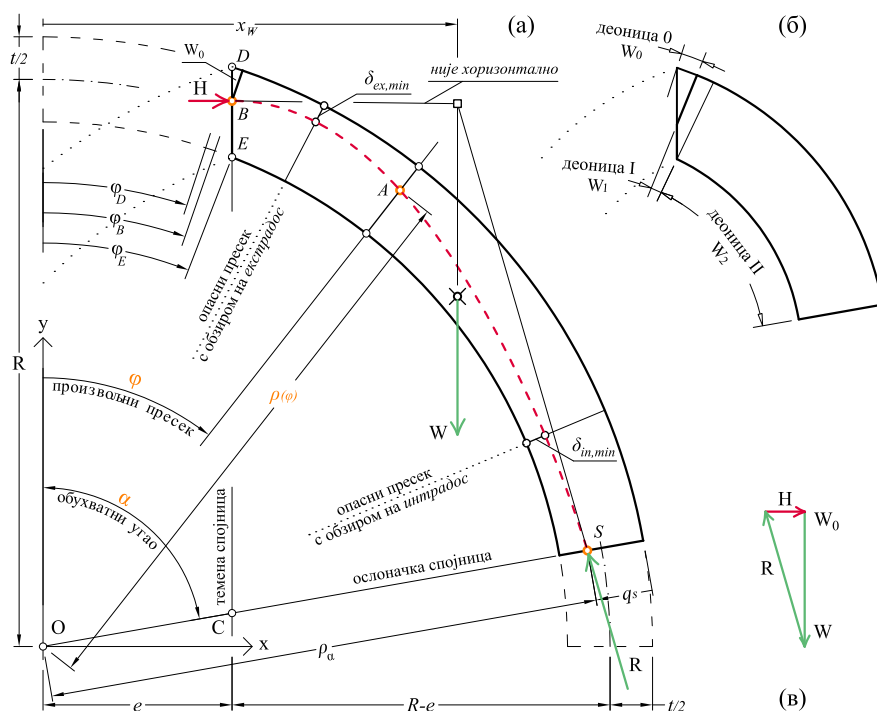
где је  $\rho_\alpha$  удаљеност потпорне линије (односно нападне тачке за силе  $H$  и  $P$ ) од средишта кружног прстена која одговара углу  $\alpha$ .

## 9.2 Геометријска својства преломљеног лука према нормалној стереотомији

На слици 19 приказана је половина преломљенога лука с назначеним геометријским својствима у складу с примењеном нормалном стереотомијом. Координатни почетак поларног координатног система постављен је у тачку  $O$ , која је средиште осе лука, док је угао  $\varphi$  угаона координата, којом се одређује произвољни пресек.

**Деонице лука.** Када је примењена нормална стереотомија, погодно је, у општем случају, лук поделити на три деонице: деоница 0, деоница I и деоница II, представљене редом одговарајућим површинама прстена лука:  $W_0$ ,  $W_1$  и  $W_2$ , као што је приказано на слици 19б. Наиме, с обзиром на то да се лук посматра као монолитан, део лука изнад нападне тачке  $B$  хоризонталне силе  $H$  у темену,

може се представити тачкастим оптерећењем које делује у вертикалној оси симетрије лука.<sup>1</sup> У испитивање је уврштена половина овога дела, представљена деоницом 0, будући да се разматра само половина лука, те је њен утицај представљен вертикалном силом  $W_0$  која делује у тачки  $B$ , као што се види на слици 20а,б. Тиме сила која делује у темену има и вертикалну ( $W_0$ ) и хоризонталну ( $H$ ) компоненту.



**Слика 19.** Преломљени лук према нормалној стереотомији: (а) геометријски чиниоци, (б) подела лука на деонице, (в) план сила

У складу са сликом 19а, углови који одговарају горњем (тачка  $E$ ) и доњем (тачка  $D$ ) крају теменог пресека дати су следећим изразима:

$$\varphi_E = \arcsin \left( \frac{e}{R_{in}} \right), \quad (104a)$$

$$\varphi_D = \arcsin \left( \frac{e}{R_{ex}} \right), \quad (104б)$$

<sup>1</sup> Као што је урађено и у случају троугаоног лука у § 7.2.2.

где су  $R_{ex} = R + t/2$  и  $R_{in} = R - t/2$  редом полупречници екстрадоса и интрадоса. С друге стране, положај нападне тачке  $B$ , дат вертикалном удаљеношћу  $q_c$  мереном од екстрадоса (од тачке  $D$ ), одређује угао  $\varphi_B$ :

$$\varphi_B = \arctan \left[ \frac{e}{\sqrt{(R + t/2)^2 - e^2 - q_c}} \right]. \quad (105)$$

Према томе, пресек између деоница 0 и I одређен је углом  $\varphi_B$  а пресек између деоница I и II одређен је углом  $\varphi_E$ .

**Тежина коначног дела лука.** Тежина  $W_0$ , која делује као тачкасто оптерећење у темену, представљена је површином криволинијскога троугла, која се добија као разлика површина кружног исечка и троугла:

$$\begin{aligned} W_0 &= \int_{\varphi_D}^{\varphi_B} \frac{1}{2} R_{ex}^2 d\varphi - \int_{\varphi_D}^{\varphi_B} \frac{1}{2} \frac{e^2}{\sin^2 \varphi} d\varphi \\ &= \frac{1}{2} R_{ex}^2 (\varphi_B - \varphi_D) + \frac{e^2}{2} (\cot \varphi_B - \cot \varphi_D) \\ &= \frac{1}{2} \left[ R_{ex}^2 (\varphi_B - \varphi_D) + e^2 (\cot \varphi_B - \cot \varphi_D) \right]. \end{aligned} \quad (106)$$

С обзиром на то да ова сила делује у тачки  $B$ , апсциса одговара величини  $e$ :

$$x_{W_0} = e. \quad (107)$$

У зависности од положаја произвољног пресека, односно у оквиру које деонице се он налази, израчунава се одговарајућа тежина коначног дела лука.

Уколико је произвољни пресек под углом  $\varphi$  у оквиру деонице I (те не сече интрадос, него темену спојницу и екстрадос), одговарајућа тежина  $V_1(\varphi)$  између темена и тог пресека представљена је криволинијским четвороуглом (в. слику 20а):

$$\begin{aligned} V_1(\varphi) &= \frac{1}{2} \int_{\varphi_B}^{\varphi} \left( R_{ex}^2 - \frac{e^2}{\sin^2 \varphi} \right) d\varphi \\ &= \frac{1}{2} \left[ R_{ex}^2 (\varphi - \varphi_B) + e^2 (\cot \varphi - \cot \varphi_B) \right]. \end{aligned} \quad (108)$$

Када произвољни пресек достигне крај деонице I, односно када угао  $\varphi$  достигне вредност угла  $\varphi_D$ , добија се тежина  $W_1$  деонице I, па једначина (108) добија следећи облик:

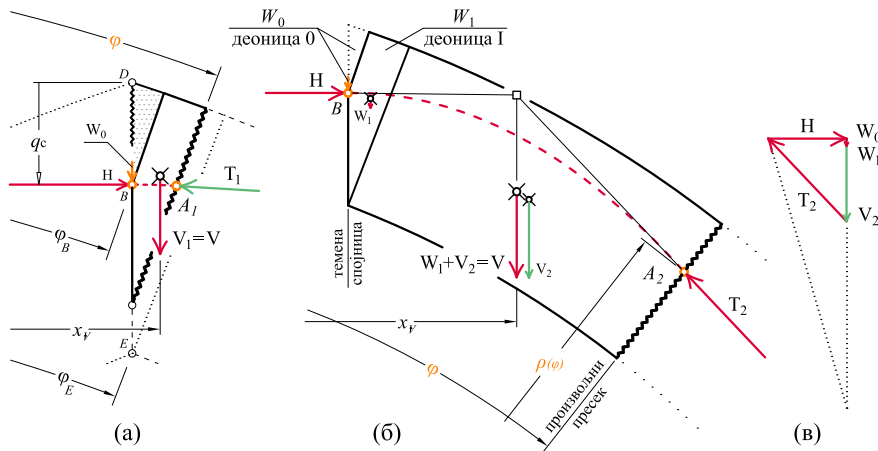
$$W_1 = \frac{1}{2} \left[ R_{ex}^2 (\varphi_E - \varphi_B) + e^2 (\cot \varphi_E - \cot \varphi_B) \right]. \quad (109)$$

С друге стране, уколико је произвољни пресек постављен у оквиру деонице II (в. слику 20б), одговарајућа тежина представљена је збиром површине  $W_1$  деонице I криволинијског четвороугла (једначина (109)) и површине  $V_2(\varphi)$  исечка кружног прстена у оквиру деонице II; притом је тежина  $V_2(\varphi)$  дата следећим изразом:

$$V_2(\varphi) = \frac{1}{2} \int_{\varphi_E}^{\varphi} (R_{ex}^2 - R_{in}^2) d\varphi = R t (\varphi - \varphi_E). \quad (110)$$

Тежина  $W_2$  деонице II добија се када угао  $\varphi$  достигне вредност угла  $\alpha$ , па једначина (110) добија следећи облик:

$$W_2 = R t (\alpha - \varphi_E). \quad (111)$$



**Слика 20.** Равнотежа коначног дела лука у складу с нормалном стереотомијом: (а) коначни део теменог дела лука до произвољног пресека у оквиру деонице I (троструко увеличано у односу на слику 19а; силе нису сразмерне), (б) коначни део лука до произвољног пресека у оквиру деонице II (двоструко увеличано у односу на слику 19а), (в) план сила

У складу с изведеним изразима (108), (109) и (110), тежина  $V$

горњег коначног дела лука, између теменог пресека и произвољног пресека под углом  $\varphi$ , може се израчунати према следећим изразима:

$$\begin{aligned} V(\varphi) &= V_1(\varphi) && \text{за } \varphi_B < \varphi \leq \varphi_E, \quad (112a) \\ V(\varphi) &= W_1 + V_2(\varphi) \\ &= \frac{1}{2} \left[ R_{ex}^2 (\varphi_E - \varphi_B) + e^2 (\cot \varphi_E - \cot \varphi_B) \right] + R t (\varphi - \varphi_E) \\ &&& \text{за } \varphi_E < \varphi < \alpha. \quad (112b) \end{aligned}$$

**Тежиште коначног дела преломљеног лука.** Када се разматра тежина  $V_1$  (једначина (112a)), која је део деонице I, апсциса  $x_{V_1}$  тежишта одговарајућег криволинијског четвороугла рачуна се на следећи начин:

$$\begin{aligned} x_{V_1}(\varphi) &= \frac{1}{3V_1(\varphi)} \int_{\varphi_B}^{\varphi} \left( R_{ex}^3 - \frac{e^3}{\sin^3 \varphi} \right) \sin \varphi d\varphi \\ &= e^3 \cot \varphi - R_{ex}^3 \cos \varphi \Big|_{\varphi_B}^{\varphi} \frac{1}{3V_1(\varphi)} \\ &= \frac{1}{3V_1(\varphi)} \left[ e^3 (\cot \varphi - \cot \varphi_B) - R_{ex}^3 (\cos \varphi - \cos \varphi_B) \right] \\ &= \frac{2 \left[ e^3 (\cot \varphi - \cot \varphi_B) - R_{ex}^3 (\cos \varphi - \cos \varphi_B) \right]}{3 \left[ R_{ex}^2 (\varphi - \varphi_B) + e^2 (\cot \varphi - \cot \varphi_B) \right]} \\ &&& \text{за } \varphi_B < \varphi \leq \varphi_E, \quad (113) \end{aligned}$$

где је тежина  $V_1(\varphi)$  дата изразом (108). На исти начин рачуна се и апсциса  $x_{W_1}$  тежишта тежине  $W_1$  (дате изразом (109)):

$$\begin{aligned} x_{W_1} &= \frac{1}{3W_1} \int_{\varphi_B}^{\varphi_E} \left( R_{ex}^3 - \frac{e^3}{\sin^3 \varphi} \right) \sin \varphi d\varphi \\ &= \frac{2 \left[ e^3 (\cot \varphi_E - \cot \varphi_B) - R_{ex}^3 (\cos \varphi_E - \cos \varphi_B) \right]}{3 \left[ R_{ex}^2 (\varphi_E - \varphi_B) + e^2 (\cot \varphi_E - \cot \varphi_B) \right]}. \quad (114) \end{aligned}$$

Уколико се посматра тежина  $V_2$ , дата једначином (110), апсциса

$x_{V_2}$  припадајућег тежишта изводи се на следећи начин:

$$\begin{aligned} x_{V_2}(\varphi) &= \frac{1}{3V_2} \int_{\varphi_E}^{\varphi} (R_{ex}^3 - R_{in}^3) \sin \varphi \, d\varphi = (R_{in}^3 - R_{ex}^3) \cos \varphi \Big|_{\varphi_E}^{\varphi} \frac{1}{3V_2} \\ &= \frac{(R_{in}^3 - R_{ex}^3) (\cos \varphi - \cos(\varphi_E))}{3Rt(\varphi - \varphi_E)} \quad \text{за } \varphi_E < \varphi \leq \alpha. \end{aligned} \quad (115)$$

У оквиру деонице I, апсциса  $x_V$  тежишта коначног дела лука тежине  $V$ , дата је једначином (113); с друге стране, њена вредност с обзиром на деоницу II рачуна се у складу с једначином (116):

$$\begin{aligned} x_V(\varphi) &= X_{V_1}(\varphi) \quad \text{за } \varphi_B < \varphi \leq \varphi_E, \quad (116a) \\ x_V(\varphi) &= \frac{W_1 x_{W_1} + V_2(\varphi) x_{V_2}(\varphi)}{V(\varphi)} \\ &= \frac{2 \left[ \begin{aligned} &e^3 (\cot(\varphi_E) - \cot(\varphi_B)) + (R_{in}^3 - R_{ex}^3) \cos \varphi + \\ &R_{ex}^3 \cos(\varphi_B) - R_{in}^3 \cos(\varphi_E) \end{aligned} \right]}{3 \left[ e^2 (\cot(\varphi_E) - \cot(\varphi_B)) + 2Rt(\varphi - \varphi_E) + R_{ex}^2 (\varphi_E - \varphi_B) \right]} \\ &\quad \text{за } \varphi_E < \varphi \leq \alpha. \end{aligned} \quad (116b)$$

где су вредности  $V_2(\varphi)$ ,  $x_{V_2}(\varphi)$ ,  $V(\varphi)$ ,  $W_1$  и  $x_{W_1}$  дате редом једначинама (110), (115), (112b), (109) и (114).

**Тежина и тежиште половине лука.** Тежина  $W$  половине лука добија се када вредност угла  $\varphi$  достигне величину обухватног угла  $\alpha$ , и тада једначина (112b) постаје:

$$\begin{aligned} W &= V(\varphi = \alpha) \\ &= \frac{1}{2} \left[ R_{ex}^2 (\varphi_E - \varphi_B) + e^2 (\cot \varphi_E - \cot \varphi_B) \right] + Rt(\alpha - \varphi_E). \end{aligned} \quad (117)$$

Уз то је апсциса  $x_W$  тежишта половине лука (116b) следећа:

$$\begin{aligned} x_W &= x_V(\varphi = \alpha) \\ &= \frac{2 \left[ \begin{aligned} &e^3 (\cot \varphi_E - \cot \varphi_B) + (R_{in}^3 - R_{ex}^3) \cos \alpha + \\ &R_{ex}^3 \cos \varphi_B - R_{in}^3 \cos \varphi_E \end{aligned} \right]}{3 \left[ e^2 (\cot \varphi_E - \cot \varphi_B) + 2Rt(\alpha - \varphi_E) + R_{ex}^2 (\varphi_E - \varphi_B) \right]}. \end{aligned} \quad (118)$$



**Преломљени лук правог обухватног угла.** У посебном, најчешћем, случају, када је обухватни угао прав ( $\alpha = \pi/2$ ), израз за тежину половине лука дат једначином (117) упрошћава се у следећи облик:

$$W(\alpha = \pi/2) = \frac{1}{2} \left[ R_{ex}^2 (\varphi_E - \varphi_B) + e^2 (\cot \varphi_E - \cot \varphi_B) \right] + Rt \left( \frac{\pi}{2} - \varphi_E \right), \quad (119)$$

а израз за одговарајуће тежиште (једначина (118)) постаје:

$$x_W(\alpha = \pi/2) = \frac{2 [e^3 (\cot \varphi_E - \cot \varphi_B) + R_{ex}^3 \cos \varphi_B - R_{in}^3 \cos \varphi_E]}{3 \left[ e^2 (\cot \varphi_E - \cot \varphi_B) + 2Rt(\pi/2 - \varphi_E) + R_{ex}^2 (\varphi_E - \varphi_B) \right]}. \quad (120)$$

**Кружни (сегментни) лук.** У случају кружног лука, ексцентрицитет  $\xi$  и величина  $e$  једнаки су нули; стога су и углови  $\varphi_E$  и  $\varphi_B$  такође једнаки нули, те се губе деоница 0 (тежина  $W_0$ ) и деоница I (тежина  $W_1$ ). Према томе, тежина коначног дела лука до произвољног пресека износи:  $V(\varphi) = Rt \varphi$ , док се апсциса припадајућег тежишта упрошћава из израза (1166) у следећи облик:

$$x_V(\varphi) = \frac{(R_{in}^3 - R_{ex}^3) (\cos \varphi - 1)}{3 Rt \varphi}. \quad (121)$$

Узгред, тежина половине лука тада износи:  $W = Rt \alpha$ , а апсциса придруженог тежишта упрошћава се из једначине (118) у:

$$x_W = \frac{(R_{in}^3 - R_{ex}^3) (\cos \alpha - 1)}{3 Rt \alpha}. \quad (122)$$

### 9.3 Хоризонтални потисак и потпорна линија у преломљеном луку према нормалној стереотомији

Претпостављајући (непознати) положај нападних тачака  $B$  и  $S$  редом сила  $H$  и  $R$  (в. слику 19а), равнотежа момената половине лука за тачку  $S$  на ослонцу дата је следећом једнакошћу:

$$H(\rho_0 \cos \varphi_B - \rho_\alpha \cos \alpha) = W(\rho_\alpha \sin \alpha - x_W) + W_0(\rho_\alpha \sin \alpha - e) \quad (123)$$

где су тежина  $W$  половине лука и апсциса  $x_W$  придруженог тежишта дати редом једначинама (117) и (118). Два гранична услова, којима се одређује положај нападних тачака  $B$  и  $S$ , односно удаљеност потпорне линије у темену и ослонцу од средишта  $O$  осе лука,

одређена редом величинама  $\rho_0$  и  $\rho_\alpha$ , дата су следећим изразима:

$$\rho_0 = \rho(\varphi = \varphi_B) = \frac{\sqrt{R_{ex}^2 - e^2} - q_c}{\cos \varphi_B}, \quad (124a)$$

$$\rho_\alpha = \rho(\varphi = \alpha) = R_{ex} - q_s. \quad (124b)$$

На основу наведеног, величина хоризонталног потиска  $H$  дата је следећим изразом:

$$H = \frac{W(\rho_\alpha \sin \alpha - x_W) + W_0(\rho_\alpha \sin \alpha - e)}{\rho_0 \cos \varphi_B - \rho_\alpha \cos \alpha}. \quad (125)$$

Даље је, у складу са сликом 20, равнотежа момената за тачку  $A$  дата следећом једнакошћу:

$$H(\rho_0 \cos \varphi_B - \rho \cos \varphi) = V(\varphi)(\rho \sin \varphi - x_V(\varphi)) + W_0(\rho \sin \varphi - e). \quad (126)$$

Коначно, из претходне једнакости одређује се удаљеност  $\rho(\varphi)$  између потпорне линије и средишта  $O$  осе лука, што представља једначину потпорне линије унутар преломљеног лука:

$$\rho(\varphi) = \frac{V(\varphi)x_V(\varphi) + W_0 e + H\rho_0 \cos \varphi_B}{H \cos \varphi + (V(\varphi) + W_0) \sin \varphi}, \quad (127)$$

где су величине  $V(\varphi)$ ,  $x_V(\varphi)$ ,  $W_0$ ,  $H$ ,  $\rho_0$  и  $\varphi_B$  дате редом једначинама (112), (116), (106), (125), (124) и (105); уврштавањем ових израза у једначину (127) може се добити једначина потпорне линије у развијеном облику (који није приказан овде због своје дужине). Према томе, за сваки произвољни пресек може се израчунати удаљеност потпорне линије од екстрадоса и интрадоса, те се може одредити опасни пресек у којем је потпорна линија највише приближена ободу лука. Нумерички поступак за одређивање минималне дебљине преломљених лукова изложен је у поглављу 12.

---

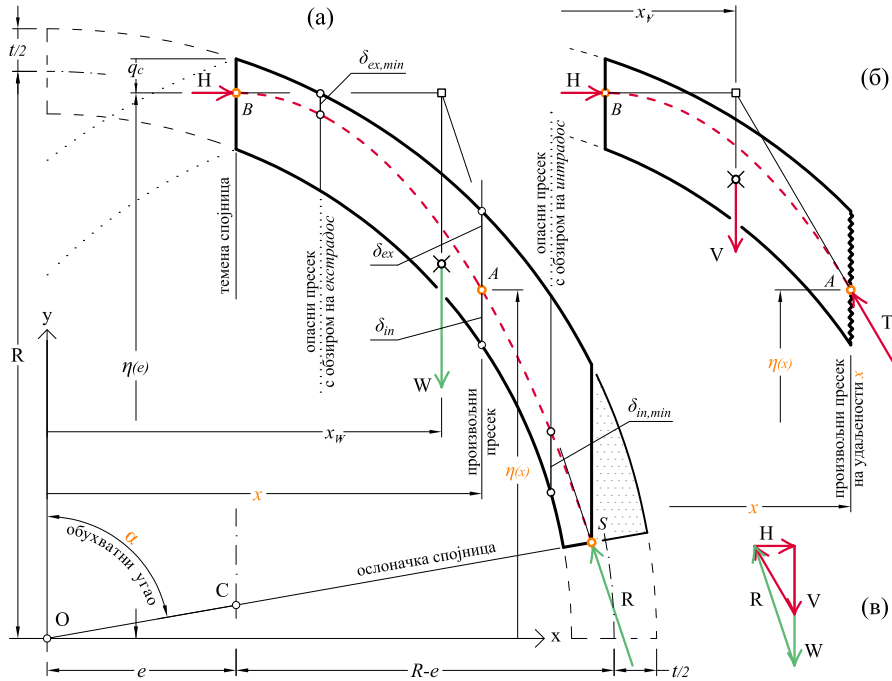
## Преломљени лук: вертикална стереотомија

У овом поглављу испитан је преломљени лук код којег су спојнице (односно произвољни пресеци) паралелне и вертикалне. Будући да је овај вид стереотомије подразумеван у разматрању афиних сводова у глави VII те примењен приликом испитивања равнотеже крстастих сводова у поглављима 16 и 17, хоризонтални потисак је подробније обрађен у односу на испитивање преломљених лукова по радијалној и нормалној стереотомији. С друге стране, због природе вертикалне стереотомије, потковичасти лукови нису узети у разматрање (према томе, највећа вредност обухватног угла  $\alpha$  је  $\pi/2$ ).

### 10.1 Геометријска својства преломљеног лука према вертикалној стереотомији

Геометријски чиниоци преломљеног лука својствени вертикалној стереотомији назначени су на слици 21a. У складу с вертикалном стереотомијом, усвојен је правоугли координатни систем с почетком у средишту  $O$  осе лука. Положај вертикалног произвољног пресека одређен је удаљеношћу  $x$  мереном дуж апсцисе од осе симетрије лука. Ордината тачке потпорне линије одређена је вредношћу  $\eta(x)$ .

**Површина коначног дела лука.** Тежина  $V$  коначног (горњег) дела лука, између темене спојнице на удаљености  $e$ , и произвољног пресека на удаљености  $x$ , представљена је површином одговарајућег дела прстена лука, једнакој разлици криволинијских четвороуглова под екстрадосом и интрадосом, и може се рачунати на основу



Слика 21. (а) Геометријски чиниоци преломљеног лука у складу с вертикалном стереотомијом, (б) коначни део лука до произвољног пресека на удаљености  $x$ , (в) план сила

следећег израза:

$$\begin{aligned}
 V(x) &= \int_e^x \left[ \sqrt{R_{ex}^2 - x^2} - \sqrt{R_{in}^2 - x^2} \right] dx \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \begin{aligned} &R_{ex}^2 \left[ \arctan \left( \frac{x}{\sqrt{R_{ex}^2 - x^2}} \right) - \arctan \left( \frac{e}{\sqrt{R_{ex}^2 - e^2}} \right) \right] + \\ &x \sqrt{R_{ex}^2 - x^2} - x \sqrt{R_{in}^2 - x^2} - \\ &e \sqrt{R_{ex}^2 - e^2} + e \sqrt{R_{in}^2 - e^2} + \\ &R_{in}^2 \left[ \arctan \left( \frac{e}{\sqrt{R_{in}^2 - e^2}} \right) - \arctan \left( \frac{x}{\sqrt{R_{in}^2 - x^2}} \right) \right] \end{aligned} \right\} \\
 &\quad \text{за } 0 < x \leq R_{in} \sin \alpha, \quad (128a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V(x) &= \int_e^x \sqrt{R_{ex}^2 - x^2} dx - \int_e^{R_{in} \sin \alpha} \sqrt{R_{in}^2 - x^2} dx - \int_{R_{in} \sin \alpha}^x x \cot \alpha dx \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \begin{aligned} &R_{ex}^2 \left[ \arctan \left( \frac{x}{\sqrt{R_{ex}^2 - x^2}} \right) - \arctan \left( \frac{e}{\sqrt{R_{ex}^2 - e^2}} \right) \right] + \\ &x \sqrt{R_{ex}^2 - x^2} - e \sqrt{R_{ex}^2 - e^2} + e \sqrt{R_{in}^2 - e^2} - x^2 \cot \alpha + \\ &R_{in}^2 \left[ \arctan \left( \frac{e}{\sqrt{R_{in}^2 - e^2}} \right) - \alpha \right] \end{aligned} \right\} \\
&\quad \text{за } R_{in} \sin \alpha < x \leq (R_{ex} - q_s) \sin \alpha. \quad (1286)
\end{aligned}$$

**Тежиште коначног дела преломљеног лука.** Апсциса  $x_V$  тежишта коначног дела лука (тежине  $V(x)$  дате једначином (128)), изводи се на следећи начин:

$$\begin{aligned}
x_V(x) &= \frac{1}{V(x)} \int_e^x x \left( \sqrt{R_{ex}^2 - x^2} - \sqrt{R_{in}^2 - x^2} \right) dx \\
&= -\frac{1}{3} \left[ (R_{ex}^2 - x^2)^{3/2} - (R_{in}^2 - x^2)^{3/2} \right] \Big|_e^x \frac{1}{V(x)} \\
&= \frac{2}{3} \frac{\left[ (R_{ex}^2 - e^2)^{3/2} - (R_{in}^2 - e^2)^{3/2} \right]}{\left[ (R_{ex}^2 - x^2)^{3/2} + (R_{in}^2 - x^2)^{3/2} \right]} \\
&= \frac{\left\{ \begin{aligned} &R_{ex}^2 \left[ \arctan \left( \frac{x}{\sqrt{R_{ex}^2 - x^2}} \right) - \arctan \left( \frac{e}{\sqrt{R_{ex}^2 - e^2}} \right) \right] + \\ &x \sqrt{R_{ex}^2 - x^2} - x \sqrt{R_{in}^2 - x^2} + \\ &R_{in}^2 \left[ \arctan \left( \frac{e}{\sqrt{R_{in}^2 - e^2}} \right) - \arctan \left( \frac{x}{\sqrt{R_{in}^2 - x^2}} \right) \right] - \\ &e \sqrt{R_{ex}^2 - e^2} + e \sqrt{R_{in}^2 - e^2} \end{aligned} \right\}}{V(x)} \\
&\quad \text{за } e < x \leq R_{in} \sin \alpha, \quad (129a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_V(x) &= \frac{1}{V(x)} \left( \int_e^x x \sqrt{R_{ex}^2 - x^2} dx - \int_e^{R_{in} \sin \alpha} x \sqrt{R_{in}^2 - x^2} dx - \int_{R_{in} \sin \alpha}^x x^2 \cot \alpha dx \right) \\
&= \frac{1}{V(x)} \left[ -\frac{1}{3} (R_{ex}^2 - x^2)^{3/2} \Big|_e^x + \frac{1}{3} (R_{in}^2 - x^2)^{3/2} \Big|_e^{R_{in} \sin \alpha} - \frac{1}{3} x^3 \cot \alpha \Big|_{R_{in} \sin \alpha}^x \right] \\
&= \frac{2}{3} \left\{ R_{ex}^2 \left[ \arctan \left( \frac{x}{\sqrt{R_{ex}^2 - x^2}} \right) - \arctan \left( \frac{e}{\sqrt{R_{ex}^2 - e^2}} \right) \right] + \right. \\
&\quad \left. x \sqrt{R_{ex}^2 - x^2} - e \sqrt{R_{ex}^2 - e^2} + e \sqrt{R_{in}^2 - e^2} - x^2 \cot \alpha + \right. \\
&\quad \left. R_{in}^2 \left[ \arctan \left( \frac{e}{\sqrt{R_{in}^2 - e^2}} \right) - \alpha \right] \right\} \\
&\quad \text{за } R_{in} \sin \alpha < x \leq (R_{ex} - q_s) \sin \alpha. \quad (1296)
\end{aligned}$$

**Површина и тежиште половине лука.** Доследно вертикалној стереотомији, део лука десно од пресека који садржи тачку  $S$  (в. слику 21а) не чини саставни део тежине лука. Сходно томе, тежина  $W$  половине лука се добија када величина  $x$  достигне највећу могућу вредност:  $s = (R_{ex} - q_s) \sin \alpha$ . Тада се једначина (1286) упрошћава у следећи облик:

$$\begin{aligned}
W &= V(x = s) \\
&= \frac{1}{2} \left\{ R_{ex}^2 \left[ \arctan \left( \frac{s}{\sqrt{R_{ex}^2 - s^2}} \right) - \arctan \left( \frac{e}{\sqrt{R_{ex}^2 - e^2}} \right) \right] + \right. \\
&\quad \left. s \sqrt{R_{ex}^2 - s^2} - e \sqrt{R_{ex}^2 - e^2} + e \sqrt{R_{in}^2 - e^2} - s^2 \cot \alpha + \right. \\
&\quad \left. R_{in}^2 \left[ \arctan \left( \frac{e}{\sqrt{R_{in}^2 - e^2}} \right) - \alpha \right] \right\}. \quad (130)
\end{aligned}$$

Уз то је апсциса  $x_W$  тежишта половине лука (1296) следећа:

$$\begin{aligned}
 x_W &= x_V(x = s) \\
 &= \frac{\frac{2}{3} \left[ (R_{ex}^2 - e^2)^{3/2} - (R_{in}^2 - e^2)^{3/2} - (R_{ex}^2 - s^2)^{3/2} + R_{in}^3 \cos \alpha - s^3 \cot \alpha \right]}{\left\{ \begin{array}{l} R_{ex}^2 \left[ \arctan \left( \frac{s}{\sqrt{R_{ex}^2 - s^2}} \right) - \arctan \left( \frac{e}{\sqrt{R_{ex}^2 - e^2}} \right) \right] + \\ R_{in}^2 \left[ \arctan \left( \frac{e}{\sqrt{R_{in}^2 - e^2}} \right) - \alpha \right] + s\sqrt{R_{ex}^2 - s^2} - \\ e\sqrt{R_{ex}^2 - e^2} + e\sqrt{R_{in}^2 - e^2} - s^2 \cot \alpha \end{array} \right\}}.
 \end{aligned} \tag{131}$$

**Преломљени лук правог обухватног угла.** У посебном, најчешћем случају, када је обухватни угао прав ( $\alpha = \pi/2$ ), израз за тежину половине лука дат једначином (130) упрошћава се у следећи облик:

$$W(\alpha = \pi/2) = \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} R_{ex}^2 \left[ \arctan \left( \frac{s}{\sqrt{R_{ex}^2 - s^2}} \right) - \arctan \left( \frac{e}{\sqrt{R_{ex}^2 - e^2}} \right) \right] + \\ R_{in}^2 \left[ \arctan \left( \frac{e}{\sqrt{R_{in}^2 - e^2}} \right) - \pi/2 \right] + \\ s\sqrt{R_{ex}^2 - s^2} - e\sqrt{R_{ex}^2 - e^2} + e\sqrt{R_{in}^2 - e^2} \end{array} \right\}, \tag{132}$$

а израз за одговарајуће тежиште, на основу израза (131), постаје:

$$\begin{aligned}
 x_W &= x_V(\alpha = \pi/2) \\
 &= \frac{2 \left[ (R_{ex}^2 - e^2)^{3/2} - (R_{in}^2 - e^2)^{3/2} - (R_{ex}^2 - s^2)^{3/2} \right]}{3 \left\{ \begin{aligned} &R_{ex}^2 \left[ \arctan \left( \frac{s}{\sqrt{R_{ex}^2 - s^2}} \right) - \arctan \left( \frac{e}{\sqrt{R_{ex}^2 - e^2}} \right) \right] + \\ &R_{in}^2 \left[ \arctan \left( \frac{e}{\sqrt{R_{in}^2 - e^2}} \right) - \pi/2 \right] + \\ &s\sqrt{R_{ex}^2 - s^2} - e\sqrt{R_{ex}^2 - e^2} + e\sqrt{R_{in}^2 - e^2} \end{aligned} \right\}}.
 \end{aligned} \tag{133}$$

## 10.2 Хоризонтални потисак и потпорна линија

Из равнотеже момената за тачку  $S$  добија се израз за хоризонтални потисак:

$$H = \frac{W \left[ (R_{ex} - q_s) \sin \alpha - x_W \right]}{\eta_e - (R_{ex} - q_s) \cos \alpha}, \tag{134}$$

где

$$\eta_e = \sqrt{R_{ex}^2 - e^2} - q_c \tag{135}$$

представља ординату нападне тачке  $B$  хоризонталне силе на темној спојници.

Равнотежа момената за тачку  $A$  дата је следећом једнакошћу:  $H(\eta_e - \eta(x)) = V(x - x_V(x))$ ; одатле се изводи ордината потпорне линије на удаљености  $x$ , што представља једначину потпорне линије унутар преломљеног лука:

$$\eta(x) = \eta_e - \frac{V(x)}{H} (x - x_V(x)), \tag{136}$$

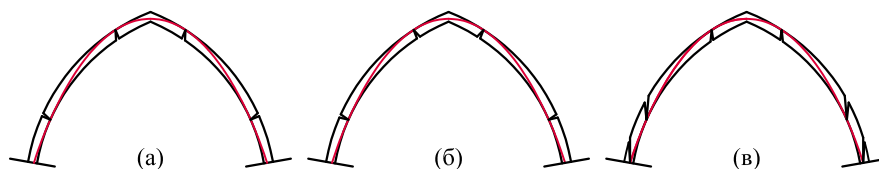
где су величине  $V(x)$ ,  $x_V(x)$ ,  $H$  и  $\eta_e$  редом дате једначинама (128), (129), (134) и (135); уврштавањем ових израза у једначину (136) може се добити једначина потпорне линије у развијеном облику (који није приказан овде због своје дужине).

Нумерички поступак за одређивање минималне дебљине преломљених лукова изложен је у поглављу 12, а појединости које су својствене вертикалној стереотомији издвојене су у одељку 12.5.



## Могући механизми слома преломљених лукова

У овом поглављу обрађени су могући механизми слома својствени преломљеним луковима (в. основне напомене дате на стр. 9–10). Цртежи су израђени уз претпостављени радијални правац пружања пукотина (в. слику 22а), односно у складу с радијалном стереотомијом (в. поглавље 8). У случају нормалне (в. поглавље 9) и вертикалне (в. поглавље 10) стереотомије, размештај зглобова је истоветан, а разликује се правац пружања пукотина (в. слику 22б,в). Такав размештај зглобова својствен је и другим конвексним луковима преломљеног темена, као што су изведени полицентрични лукови обрађени у глави IV.



Слика 22. Правац пружања пукотина с обзиром на примењену стереотомију: (а) радијални, (б) нормални, (в) вертикални

Како би се спровела одговарајућа веза између облика преломљеног лука и механизма слома, у овој дисертацији, преломљени лукови су разврстани према ексцентрицитету као мери преломљености (зашиљености) лука, а у даљој расправи према броју зглобова који се образују када се достигне гранично стање равнотеже. Тако су у уобичајеним речницима архитектуре [20, 34, 36] лукови разврстани на: (а) слабо преломљени односно лукови малог ексцентрицитета (нпр. традиционални „*quinto acuto*“), (б) једнакостранични („*terzo acuto*“ и (в) јако преломљени (нпр. „*recto acuto*“) (в. слике 23 и 28б).

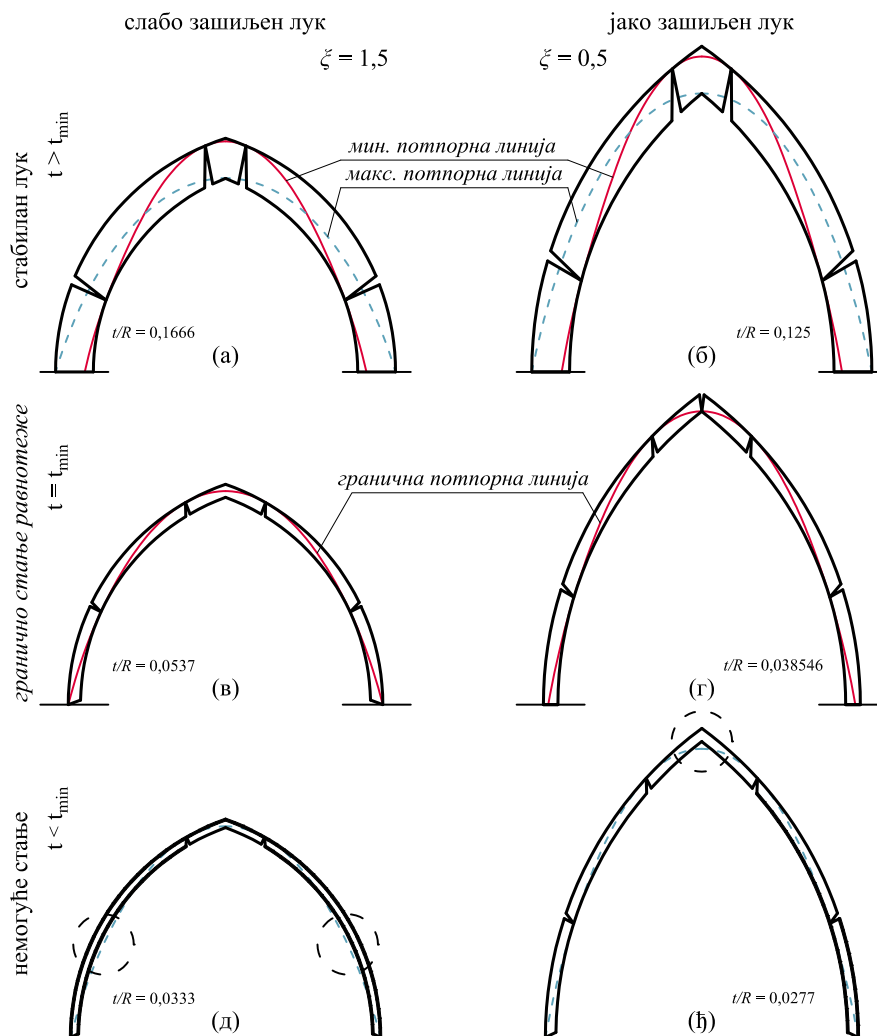
На сликама 23а,б приказани су редом слабо и јако преломљени

лук правог обухватног угла, довољне дебљине (веће од теоријске минималне); у њима су приказане и одговарајућа минимална и максимална потпорна линија. Познато је да код полукружних лукова (нулти ексцентрицитет), када је претпостављена минимална дебљина, гранична потпорна линија пролази кроз екстрадос у темену и на ослонцима, као што се види на слици 25а. Уколико се ексцентрицитет благо повећа, чиме се образује преломљени лук, услед чега потпорна линије не може пролазити кроз екстрадос у темену, минимална потпорна линија додирује екстрадос на обема странама лука у близини темена.

Када је дебљина лука смањена тако да наступа гранично стање равнотеже, минимална и максимална потпорна линија се подударују [112], те дају јединствену, граничну потпорну линију, која додирује границе лука (интрадос или екстрадос) у више од четирију тачака. Тако наступа гранично стање равнотеже, односно лук је на граници слома [58], као што је приказано на сликама 23в,г. Другим речима, у складу с горњом (кинематичком) теоремом пластичности, лук је у стању лабилне равнотеже и доћи ће до слома услед даљег повећања оптерећења или померања [75].

Код слабо преломљених лукова, гранична потпорна линија пролази кроз екстрадос на ослонцима и између интрадоса и екстрадоса у темену, додирујући екстрадос и интрадос још у по двема тачкама, тако образујући шест зглобова, као што се види на слици 23в. Ако се настави с повећањем ексцентрицитета, сила (односно потпорна линија) у темену се удаљава од екстрадоса приближавајући се интрадосу. С друге стране, код јако преломљених лукова, гранична потпорна линија пролази кроз интрадос у темену и између интрадоса и екстрадоса на ослонцима, додирујући екстрадос и интрадос у по двема тачкама, тако образујући пет зглобова, као што је приказано на слици 23г. Дакле, постоје два гранична положаја нападне тачке хоризонталне силе која делује у темену и два гранична положаја реакције на ослонцима. Даље, кад би дебљина лука била још смањена, потпорна линија би изашла из оквира лука и лук би изгубио стабилност (на сликама 23д,ђ претпостављен је замишљени положај потпорне линије). Због тога су стари градитељи, у случају изразито преломљених лукова, увећавали завршац (тзв. кључни камен) или додавали додатно оптерећење у темену [69, 125].

Шта више, може се закључити да у неком случају између двају наведених, потпорна линија додирује једновремено и екстрадос на ослонцима и интрадос на темену, као и екстрадос и интрадос још у

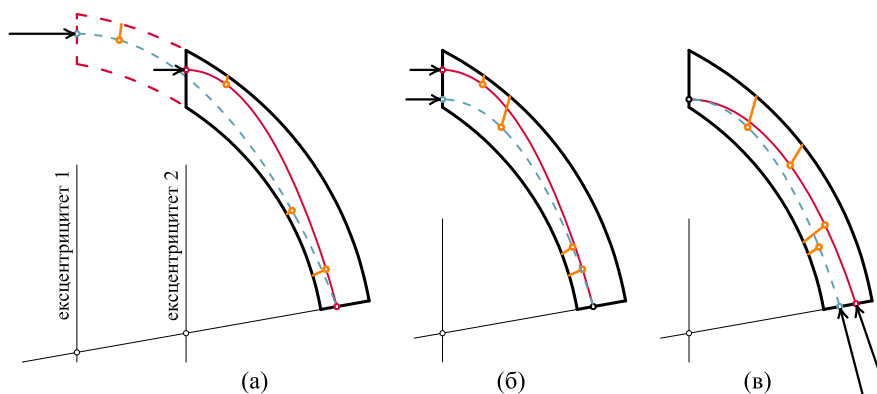


**Слика 23.** Смањивање дебљине лука: (а) и (б) лук дебљине веће од минималне с назначеном минималном и максималном потпорном линијом – стабилан лук, (в) и (г) лук минималне дебљине и придружена гранична потпорна линија – гранично стање равнотеже, на граници слома, (д) и (ђ) лук дебљине мање од минималне – немогуће стање

по два тачкама, образујући тако механизам слома који садржи седам зглобова (в. слику 25в). Такав лук има максималну искоришћеност своје дебљине, те, као што ће бити показано, представља

теоријски најтањи могући (у опсегу уобичајених облика преломљених лукова, искључујући велике вредности ексцентрицитета у случају већих вредности обухватног угла) и стога се може сматрати оптималним за одабрани средишњи угао.

**Чиниоци слома преломљеног лука.** У складу с претходном расправом може се закључити да, поред ексцентрицитета као основног својства преломљеног лука, нападне тачке хоризонталне силе у темену пресеку и реакције на ослонцима (в. [89, 119]) представљају значајне чиниоце слома. Ово је сажето приказано на слици 24. Наиме, ови чиниоци утичу на положај потпорне линије у целини у оквиру лука, те и на величину хоризонталног потиска, мењајући уз то и положај опасних пресека. *Опасни пресек* се односи на пресек (спојницу) лука у којем потпорна линија највише приђе екстрадосу или интрадосу (в. слике 16, 24 и 26).



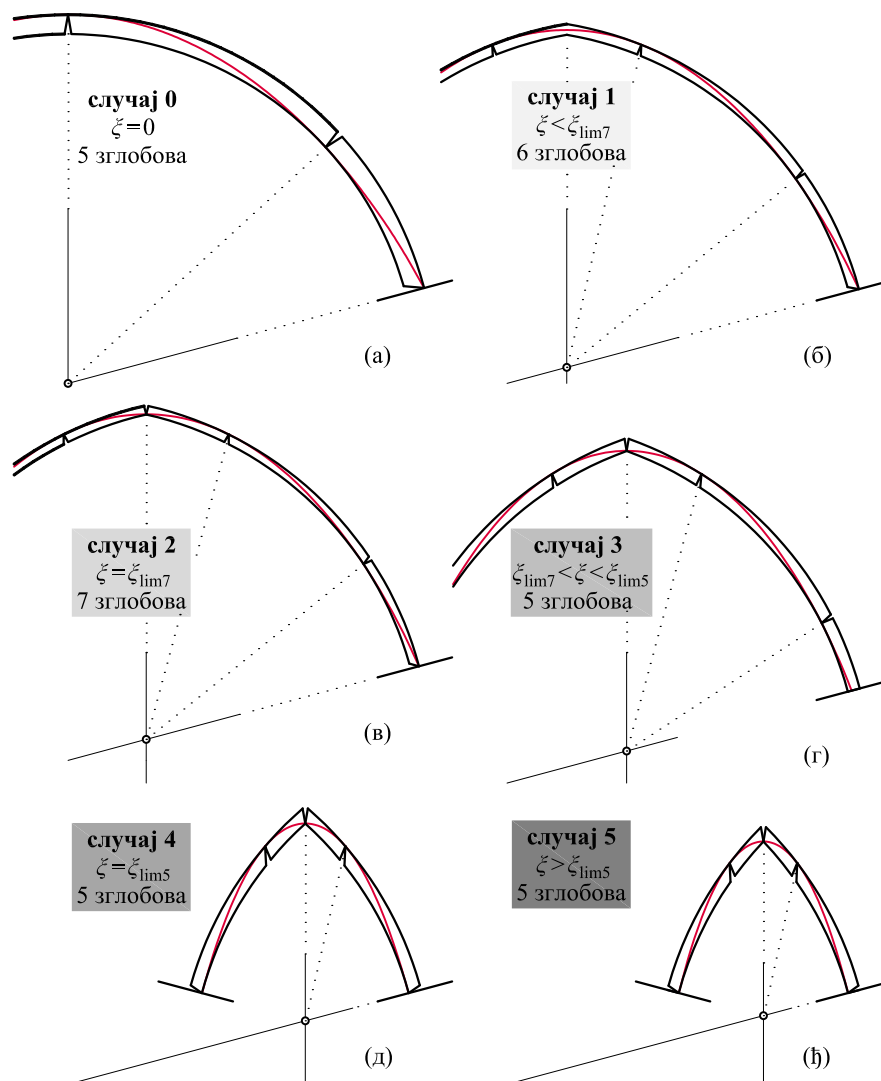
**Слика 24.** Чиниоци који утичу на положај потпорне линије, величину хоризонталног потиска, као и положај опасних пресека: (а) ексцентрицитет, (б) нападна тачка хоризонталне силе у темену, (в) нападна тачка реакције на ослонцу

**Систематизација допустљивих облика слома преломљених лукова.** На основу спроведеног разматрања, може се извести постанак теоријски могућих (допустљивих) механизма слома лукова минималне (граничне) дебљине. Почиње се од кружног, сегментног, лука, приказаног на слици 25а. Благим повећањем ексцентрицитета, добија се преломљени лук, где теоријски настаје шест зглобова, као што је приказано на слици 25б. Како се ексцентрицитет повећава, потпорна линија се у темену удаљава од екстрадоса и приближава

интрадосу; притом се горњи (виши) зглоб, образован на екстрадосу, постепено удаљава од темена, док се доњи (нижи) зглоб, образован на интрадосу, помера ка ослонцима.

За одређену (граничну) вредност ексцентрицитета ( $\xi_{lim7}$ ), када потпорна линија достигне интрадос у темену, настаје гранични механизам слома који садржи седам зглобова (в. 25в). С обзиром на то да потпорна линија не може да изађе изван граница лука, односно да сила у темену не може бити нанета испод интрадоса, даље повећање ексцентрицитета узрокује удаљавање потпорне линије на ослонцима од екстрадоса ка интрадосу; ово, као што ће се видети, такође узрокује повећање минималне дебљине лука. Тако настаје механизам слома који обухвата пет зглобова (в. слику 25г). Даље, доњи зглоб, образован на интрадосу, наставља да се креће ка ослонцу; за одређену вредност ексцентрицитета ( $\xi_{lim5}$ ), достиже ослонац, образујући тако други гранични механизам слома, који садржи пет зглобова (в. слику 25д). Даље повећање ексцентрицитета (в. слику 25ђ) не утиче на механизам слома.

Према томе, за усвојени средишњи угао лука, може се успоставити веза између ексцентрицитета и редоследа настанка механизма слома. Наиме, почевши од сегментног лука (који има нулти ексцентрицитет и механизам слома с пет теоријских зглобова) уз постепено повећавање ексцентрицитета, редом се образују четири различита механизма слома, који садрже шест, седам и пет зглобова (у двама различитим размештајима). Напомиње се да је ово опште правило али да, као што ће бити показано, нису сви механизми заступљени за сваку вредност средишњег угла (в. табелу 16 у Додатку В на стр. 241). Може се закључити да када је претпостављена минимална дебљина потпорна линија пролази кроз један, или посебно кроз два краја (крајње тачке на екстрадосу или интрадосу) ослоначког или теменог пресека. Преглед изведених механизма слома с одговарајућим размештајем зглобова дат је у табели 4. Случаји 4 и 5 представљају истоветни механизам слома, али је случај 4 гранични (онај који се први образује). Штавише, према положају зглобова на темену и ослонцима, могу се разматрати као супротност случају 0, који важи само за полукружне лукове (који су подробно испитани у [24], али су приказани у овој дисертацији због потпуности разматрања). Даље, с обзиром на слику 25, случај 4 може се разматрати као поддео случаја 3, без његовог нижег дела уз ослонце.



**Слика 25.** Могући механизми слома преломљених лукова минималне дебљине и њихове придружене потпорне линије (на примеру обухватног угла од  $75^\circ$ ): (а) кружни односно сегментни лук, (б) зглоб на екстрадосу ослонца, (в) гранични ексцентрицитет  $\zeta_{lim7}$  са седам зглобова, (г) зглоб на интрадосу темена, (д) гранични ексцентрицитет  $\zeta_{lim5}$  са пет зглобова, (ђ) зглоб на интрадосу ослонца и темена

**Табела 4.** Теоријски размештај зглобова с обзиром на могуће механизме слома преломљених лукова

Механизам слома	0		1		2		3		4		5	
Положај зглоба	ек.	ин.	ек.	ин.	ек.	ин.	ек.	ин.	ек.	ин.	ек.	ин.
теме	•					•		•		•		•
опорац	••		••		••					••		••
додатни		••	••	••	••	••	••	••	••		••	
Број зглобова	5		6		7		5		5		5	

## Нумеричко моделирање

У овом поглављу изведен је итеративни поступак за одређивање нумеричких вредности минималне дебљине лука и граничне вредности ексцентрицитета. Разматрање је спроведено за преломљене лукове (из двају средишта), али важи и у случају изведених полицентричних лукова преломљеног темена, какви су обрађени у глави [IV](#).

### 12.1 Одређивање чинилаца прорачуна

Након изванредне математичке разраде, изводећи израз погоднији за итеративни поступак, Миланковић [92] је нумерички израчунао минималну теоријску дебљину полукружног лука. Како се данас итерације могу лако спровести уз помоћ рачунара, прорачун који се односи на изналагање екстремних вредности у смислу диференцирања могу бити изостављени, а итеративни поступак спроведен у ранијој фази прорачуна, односно са сложенијим изразима. Наиме, за сваки (одређени) пресек израчунавају се удаљености потпорне линије (односно нападне тачке резултантне силе) од екстрадоса и интрадоса, редом  $\delta_{ex}(\varphi)$  и  $\delta_{in}(\varphi)$ , те се привремено чувају у одговарајућим списковима (листама). За радијалну стереотомију важе следећи изрази:

$$\delta_{ex}(\varphi) = x_{rex}(\varphi) \csc \varphi - \rho(\varphi), \quad (137a)$$

$$\delta_{in}(\varphi) = \rho(\varphi) - x_{rin}(\varphi) \csc \varphi, \quad (137b)$$

где су  $x_{rex}(\varphi)$ ,  $x_{rin}(\varphi)$  и  $\rho(\varphi)$  редом дати изразима (75), (78) и (99). За нормалну стереотомију важе следећи изрази:

$$\delta_{ex}(\varphi) = R_{ex} - \rho(\varphi), \quad (138a)$$

$$\delta_{in}(\varphi) = \rho(\varphi) - R_{in}, \quad (138b)$$



где је  $\rho(\varphi)$  дато изразом (127). За вертикалну стереотомију важе следећи изрази:

$$\delta_{ex}(x) = R_{ex} - \sqrt{x^2 + \eta(x)^2}, \quad (139a)$$

$$\delta_{in}(x) = \sqrt{x^2 + \eta(x)^2} - R_{in}, \quad (139b)$$

где је  $\rho(\varphi)$  дато изразом (136).

*Опасни пресек* с обзиром на интрадос односно екстрадос односи се на пресек којем одговара минимална вредност  $\delta_{ex}$  односно  $\delta_{in}$ . Штавише, минимална вредност  $\delta_{ex}$ , означена са  $\delta_{ex,min}$ , одређује се као последња вредност у листи  $\delta_{ex}$ , која је мања од следеће у листи (овакав услов примењив је како за позитивне тако и за негативне вредности које настају приликом прорачуна). С друге стране, минимална вредност  $\delta_{in}$ , означена са  $\delta_{in,min}$ , одређује се као најмања вредност у листи  $\delta_{in}$  између опасног пресека с обзиром на екстрадос (пресек којем одговара  $\delta_{ex,min}$ ) и ослонца тј. последње вредности у листи (в. слике 16а и 26а).

Као што је наведено на крају одељка 8.2, вредности  $q_c$  и  $q_s$ , које одређују редом положај нападних тачака  $B$  и  $S$ , непознате су величине. Како је  $q_s$  мерена од екстрадоса ка интрадосу, у правцу ослоничке спојнице, њена максимална вредност је  $t$ . С друге стране, величина  $q_c$  је одређена вертикалном удаљеношћу од екстрадоса, с позитивном вредношћу надоле; будући да потпорна линија не може проћи испод интрадоса на темену, њена највећа могућа вредност је следећа:

$$q_{c,max} = \sqrt{R_{ex}^2 - e^2} - \sqrt{R_{in}^2 - e^2}. \quad (140)$$

Како би се одредила гранична (минимална) дебљина, потребно је мењати дебљину лука и положај наведених нападних тачака у односу на опасне пресеке (в. слику 16а), а с обзиром на величине  $\delta_{ex,min}$  или  $\delta_{in,min}$  које истовремено морају да достигну нулу. Стога је потребно подробније испитати пресеке у околини опасних пресека, којима је одређена *опасна област*.

## 12.2 Одабир опасне области лука

У почетном кораку (у ступњу пре прорачуна), лук је подељен у пет делова (који нпр. имају једнак обухват), као што је назна-

чено дебелим црта-тачка линијама на слици 26а.<sup>1</sup> Сваки од пет делова даље је подељен (пресецима) на одговарајући број подделова, где би требало да већи број подделова (учесталост пресека) одговара опасној области, односно делу лука за који се претпоставља да ће садржати опасни пресек. На слици 26 приказана је подела 3–7–3–7–3.<sup>2</sup> С обзиром на опасни пресек, други претходни и други наредни пресеци (означени танком црта-тачка линијом) усвојени су као гранични пресеци који одређују опасну област за следећу итерацију (в. слику 26б). Уз одговарајућу измену дебљине лука, овај поступак се понавља све док потпорна линија не достигне екстрадос и интрадос са задовољавајући степеном тачности<sup>3</sup> (в. слику 26в).

Како би се постигло одговарајуће постепено сужавање обухвата опасне области у смислу придруженог средишњег (обухватног) угла, који представља угао између придружених граничних пресека опасне области, степен поделе односно величина тог угла прилагођава се у складу с редом величине  $\delta_{ex,min}$  и  $\delta_{in,min}$ . Испоставило се да је прилагођавање величине обухвата опасне области погодно вршити у складу с правилима датим у табели 5.

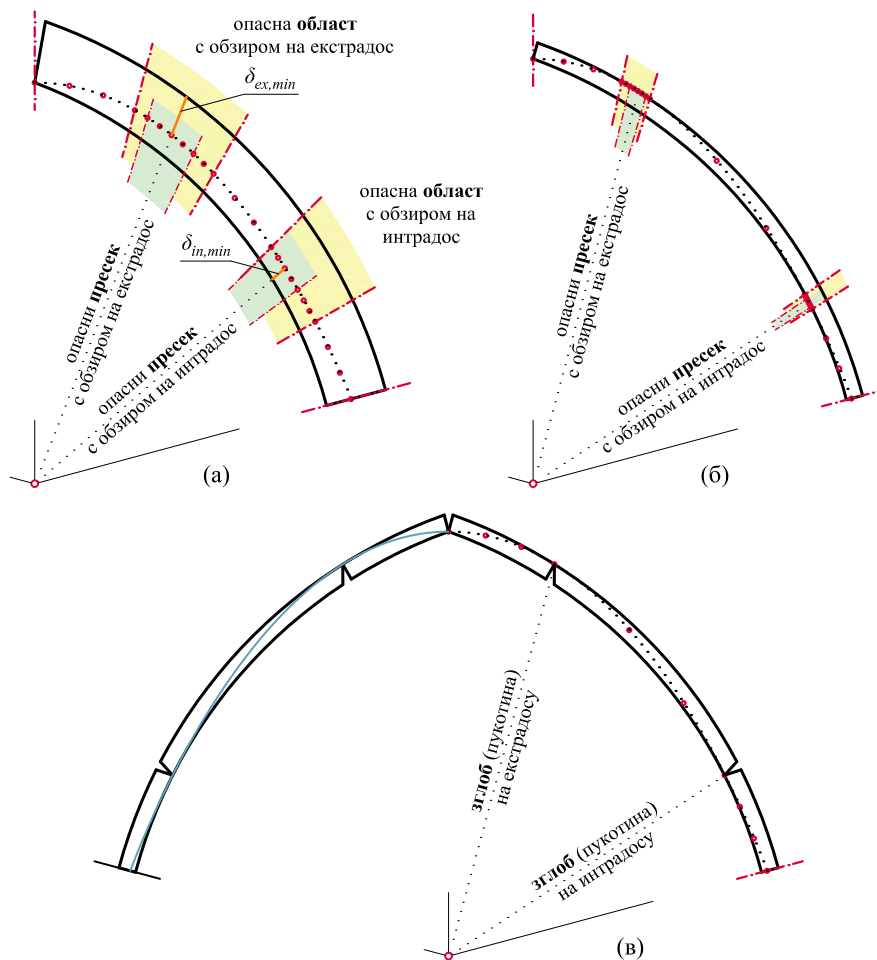
### 12.3 Одређивање минималне дебљине преломљених лукава

Као што је приказано у поглављу 11, када је претпостављена минимална дебљина, потпорна линија пролази кроз крајњу тачку (на интрадосу или екстрадосу) ослоначке или темене спојнице (као што се види на слици 25). Дакле, једна од двеју нападних тачака (које се односе на хоризонталну силу у темену и реакцију на ослонцу) је позната, док се друга поставља за променљиву с обзиром на опасни пресек, а чија промена утиче на положај потпорне линије унутар лука. С друге стране, дебљина лука прилагођава се у односу на други опасни пресек. Према томе, уколико се положај једне нападне тачке мења с обзиром на опасни пресек који се односи на екстрадос, дебљина се мења с обзиром на опасни пресек који се

<sup>1</sup> Разматрање у овом одељку спроведено је на примеру радијалне стереотомије, али, уз незнатне разлике, важи и у случају нормалне и вертикалне стереотомије.

<sup>2</sup> Приликом спровођења прорачуна, број пресека у оквиру опасне области био је између 30 и 100.

<sup>3</sup> У прорачунима спроведеним у оквиру ове дисертације, све вредности (нпр. минимална дебљина, хоризонтални потисак, гранични ексцентрицитет и сл.) рачунате су с тачношћу од  $10^{-12}$  и већом.



**Слика 26.** Одговарајућа подела лука с обзиром на опасне пресеке и одабир опасне области: (а) почетни ступањ: подела лука на делове и подделове, (б) међуступањ: постепено сужавање обухвата опасне области, (в) завршни ступањ: минимална дебљина лука

односи на интрадос, и обрнуто. Премда мењање положаја нападачких тачака утиче на потпорну линију у целини, као што се види на сликама 24б,в, усвојено је да се мењају у односу на ближи опасни пресек, будући да је на тај начин утицај непосреднији. Стога се нападачка тачка *B* хоризонталне силе мења с обзиром на опасни пресек који се односи на екстрадос, а нападачка тачка *S* реакције мења се у складу с опасним пресеком који се односи на интрадос.

Како би се постигла потпорна линија чија је стрела највећа могућа, тежи се минималном потиску [27] (премда ће се минимални и максимални потисак подударати када се достигне гранично стање равнотеже). Стога нападна тачка  $B$  мора бити што ближе екстрадосу на темену, тј. вредност  $q_c$  мора бити што мања, док нападна тачка  $S$  мора бити што ближе интрадосу на ослонцу, тј. вредност  $q_s$  мора бити што већа.

У складу с тим, у случају 1 приказаном на слици 25б, за предстојећу итерацију дебљина се усваја у односу на опасни пресек који се односи на интрадос, а положај нападне тачке  $B$  у темену усваја се с обзиром на опасни пресек који се односи на екстрадос, редом у складу с изразима (141) и (142):

$$t_{int} = t - \delta_{in,min}, \quad (141)$$

$$q_{c,min} = q_c - \delta_{ex,min}, \quad (142)$$

где су  $t$  и  $q_c$  вредности из претходне итерације. С друге стране, у случају 3 приказаном на слици 25г, дебљина се мења у односу на опасни пресек који се односи на екстрадос, а положај нападне тачке  $S$  на ослонцу прилагођава се у односу на опасни пресек који се односи на интрадос, редом у складу с изразима (143) и (144):

$$t_{ext} = t - \delta_{ex,min}, \quad (143)$$

$$q_{s,max} = q_s - \delta_{in,min}. \quad (144)$$

Међутим, када су познате обе нападне тачке, као што је случај код механизма слома датих на сликама 25а,ђ, постоји само један опасни пресек. Тада се дебљина прилагођава у односу на њега, и то према изразима (141) односно (143).

#### 12.4 Одређивање граничног ексцентрицитета преломљених лукова

Како је раније наведено, у случају граничних механизма слома познат је положај потпорне линије (односно нападних тачака резултанти) на темену и ослонцу. Стога је, поред дебљине лука, његов ексцентрицитет променљива коју је потребно мењати (прилагођавати) у свакој итерацији, како би се постигла гранична вредност.

Када се посматра *гранични механизам слома са седам зглобова* (случај 2 приказан на слици 25в), будући да измена ексцентрицитета непосредно утиче на положај нападне тачке хоризонталне

силе у темену, а теме је ближе опасном пресеку који се односи на екстрадос, усвојено је да се прилагођавање вредности ексцентрицитета врши у складу са следећим изразом:

$$\xi_{lim,ex} = \xi + f \cdot \delta_{ex,min}, \quad (145)$$

где је  $\xi$  величина ексцентрицитета из претходне итерације. С друге стране, дебљина се мења с обзиром на опасни пресек који се односи на интрадос, у складу с изразом (141).

С обзиром на други *гранични механизам слома са пет зглобова* (случај 4 приказан на слици 25e), постоји само један опасни пресек, и то с обзиром на екстрадос. Стога се дебљина прилагођава према изразу (143). Поред тога, ексцентрицитет се прилагођава у односу на опасни пресек који се односи на интрадос, у складу са следећим изразом:

$$\xi_{lim,in} = \xi - f \cdot \delta_{in,min}. \quad (146)$$

Наиме, будући да потпорна линија пролази кроз интрадос и на темену и на ослонцу, када је ексцентрицитет мањи од граничне вредности, потпорна линија пролази изван граница лука, и то са унутрашње стране (ка средишту лука). Стога, постепеним увећавањем ексцентрицитета мањег од граничног, у складу с изразом (146), и уз одговарајуће прилагођавање дебљине лука, опасни пресек који се односи на интрадос приближава се ослонцу; када га достигне, постиже се гранична вредност ексцентрицитета. Тако је за одређивање граничног ексцентрицитета испрва довољно познати његову приближну вредност.

У изразима (145) и (146) величина  $f$  је одговарајући коефицијент који представља меру у којој тренутне вредности  $\delta_{ex,min}$  или  $\delta_{in,min}$  утичу на наредну вредност  $\xi$ . Како ред величине  $\delta_{ex,min}$  и  $\delta_{in,min}$  опада, његов ред величине треба да расте; испоставило се да је прилагођавање погодније вршити у складу с правилима датим у табели 5.

У складу с наведеним, може се успоставити шест поступака за шест механизма слома (од којих два имају гранични ексцентрицитет). У табелици 6 је у односу на одговарајући механизам слома дат сажет преглед прилагођавања положаја нападних тачака (датих изразима (140), (142) и (144)), дебљине (одређене изразима (141) и (143)), као и ексцентрицитета (одређених изразима (145) и (146)), које је потребно вршити приликом прорачуна спроведених одговарајућим итеративним поступцима.

**Табела 5.** Прилагођавање величине обухвата (лево) и ексцентрицитета (десно)

сужавање опасне области			гранични ексцентрицитет	
$ \delta_{ex,min} $ или $ \delta_{in,min} $	обухват	$ \delta_{ex,min} $ или $ \delta_{in,min} $	$f$	
$< 10^{-4}$	$10^{-5}$	$< 10^{-14}$	500000	
$< 10^{-10}$	$10^{-7}$	$< 10^{-12}$	50000	
$> 10^{-4}$	$10^{-2}$	$< 10^{-10}$	5000	
		$< 10^{-8}$	500	
		$< 10^{-5}$	50	
		$> 10^{-5}$	5	

**Табела 6.** Чиниоци које је потребно прилагођавати приликом одређивања минималне дебљине и граничног ексцентрицитета

Механизам слома	В на темену ( $q_c$ )		S на ослонцу ( $q_s$ )		Дебљина ( $t$ )	
	интрадос	екстрадос	инт.	екс.	инт.	екс.
0		0		0	$t_{int}$	
1		$q_{c,min}$		0	$t_{int}$	
2	$q_{c,max}$			0	$t_{int}$	$\xi_{lim,ex}$
3	$q_{c,max}$		$q_{s,max}$			$t_{ext}$
4	$q_{c,max}$		t		$\xi_{lim,in}$	$t_{ext}$
5	$q_{c,max}$		t			$t_{ext}$

### 12.5 Одређивање минималне потпорне линије и минималног хоризонталног потиска према вертикалној стереотомији

Као што је наведено у глави 2, у луку дебљине веће од минималне заступљена је минимална потпорна линија (максималне стреле и минималног распона). Стога величине  $q_c$  и  $q_s$  морају бити редом највећа и најмања могућа, а да је притом потпорна линија обухваћена границама лука. На основу тога се може успоставити итеративни поступак којим се одређује минимална потпорна линија, а по угледу на поступак којим се одређује минимална дебљина лука (в. претходни одељак 12.3). Наиме, у свакој итерацији се у односу на положај потпорне линије, мења положај нападних тачака на теменој и ослоначкој спојници. Према томе, величина  $q_{c,max}$ , којом се одређује положај тачке  $B$ , мења се у складу с изразом (140), док се положај тачке  $S$  на ослонцу мења у складу са следећим изразом:

$$q_{s,min} = q_s + \delta_{in,min}, \quad (147)$$

где је  $q_s$  положај тачке  $S$  из претходне итерације.

Као што је показано, минимална потпорна линија додирује екстрадос у околини темена и интрадос у тачки  $K$  између темена и ослонца (в. слику 46в,г,д,ђ). Нека је положај тачке  $K$  одређен углом  $\alpha_{crit}$  који одговара опасном пресеку с обзиром на интрадос, односно дужином  $x_{crit} = R_{in} \sin \alpha_{crit}$ . Уколико испитујемо лукове мањег обухватног угла  $\alpha \leq \alpha_{crit}$  (односно полураспона  $s \leq x_{crit} - e$ ), притом не мењајући остале геометријске чиниоце лука, минимална потпорна линија на дну (ослонцу, или укрсници у оквиру крстастог свода) пролази кроз интрадос, док се у темену подиже (в. слику 46д,ђ,е). Међутим, лукови код којих је  $\alpha \geq \alpha_{crit}$ , имаће истоветну минималну потпорну линију (односно њен део) те придружени минимални хоризонтални потисак. Стога ће се за веће вредности обухватног угла  $\alpha$ , минимална потпорна линија само продужавати, те ће се на ослонцу (или укрсници) удаљавати од интрадоса (в. слику 46г). Дакле, да би се одредило угао  $\alpha_{crit}$  (односно апсциса  $x_{crit}$  одговарајуће тачке  $K$ ), довољно је испитати лук код којег је  $\alpha \geq \alpha_{crit}$  (нпр. лук правога обухватног угла), односно одредити његову минималну потпорну линију у складу с описаним итеративним поступком.

## Преглед резултата: преломљени лукови

У складу са смерницама датим у поглављу 12 начињени су одговарајући итеративни поступци за добијање нумеричких решења уз помоћ рачунара; развијени су у програмском језику Визуал бејсик за апликације (*Visual Basic for Applications*) те се извршавају компајлирањем макроа у Екселовом Визуал бејсик уређивачу (*Excel Visual Basic Editor*) који су повезани с улазним подацима датим у радном листу програма Мајкрософт Ексел (*Microsoft Excel*). Одабиром одговарајућег механизма слома, с обзиром на ексцентрицитет и обухватни угао, спроведен је прорачун за више од сто преломљених лукова, узимајући у обзир и сегментне и потковичасте лукове обухватног угла од 15 до 135 степени с кораком 15 степени.<sup>1</sup> Уобичајени ексцентрицитети преломљених лукова присутних у објектима градитељског наслеђа, као и у средњовековним рукописима [20], и то  $1/5$ ,  $1/4$ ,  $1/3$ ,  $1/2$ ,  $3/5$ ,  $4/5$ ,  $1$ ,  $3/2$ ,  $2$ ,  $5/2$  и  $3$ , посебно су испитани. Шта више, зарад пожељне тачности и целовитог увида у утицај ексцентрицитета на механизме слома и минималну дебљину лука, тамо где је било потребно, у испитивање су уврштене и неуобичајене вредности ексцентрицитета. Ово се посебно односи на ексцентрицитете који одговарају граничним механизмима слома са пет и седам зглобова.

Свеобухватни упоредни преглед минималних дебљина преломљених лукова за примењену радијалну, нормалну и вертикалну стереотомију дат је у табели 7. Може се уочити да је, иако постоји и расте с порастом ексцентрицитета и обухватног угла, разлика између примењених стереотомија незнатна. Подробнији преглед израчунатих теоријских минималних дебљина преломљених лукова у складу с радијалном стереотомијом дат је засебно у Додатку В у табели 16, где су придружени механизми слома назначени нијансама сиве боје (које одговарају нијансама коришћеним на слици 25,

<sup>1</sup> С обзиром на вертикалну стереотомију, нису обрађени потковичасте лукови.



табели 4 и табели 6). Графички приказ лукова минималне дебљине, за различите вредности ексцентрицитета и обухватног угла, дат је такође у Додатку В, у оквиру табела 17 и 18.

Вредности које се односе на кружне лукове (нулти ексцентрицитет,  $\xi = 0$ ) у сагласности су с резултатима датим у [24]. Међутим, поређењем резултата за преломљене лукове с правим обухватним углом датим у [112], где за ексцентрицитет 0,20, 0,60 и 1,00 минимална дебљина,  $t/R$ , редом износи 0,0829, 0,0454 и 0,04, постоји разлика од око 8% за прва два наведена ексцентрицитета и мање од 1% за последњи (уп. с табелом 7).

Упоредни приказ вредности граничних ексцентрицитета,  $\xi_{lim7}$  и  $\xi_{lim5}$ , који редом одговарају граничним механизмима слома са седам и пет зглобова, израчунатих за радијалну, нормалну и вертикалну стереотомију дат је у табели 8. Графички приказ граничних механизма слома за обухватне углове 45, 60 и 75 степени дат је на слици 29, док је гранични механизам слома који одговара правом обухватном углу приказан на слици 27б.

На основу добијених вредности, може се успоставити веза између ексцентрицитета и минималне дебљине, што је графички представљено дијаграмом на слици 27а, који садржи фамилију кривих с обзиром на различите обухватне углове. Увећани приказ дела дијаграма који се односи на сегментне лукове дат је на слици 28, где се може уочити да свака крива има шиљак који одговара граничном ексцентрицитету с обзиром на механизам слома са седам зглобова (односно луку који има максималну искоришћеност своје дебљине).

Веза између обухватног угла и граничног ексцентрицитета, с обзиром на оба гранична механизма слома, приказана је на дијаграму на слици 27г, уз који су засебно истакнуте и нумеричке вредности према радијалној стереотомији. Тако се јасно може одредити механизам слома који одговара одабраним вредностима обухватног угла и ексцентрицитета (уп. с табелом 16). Узгред, закључено је да последња вредност обухватног угла који подразумева образовање механизма слома с пет и седам зглобова приближно износи редом  $80^\circ$  и  $95^\circ$ . Шта више, испоставља се да потковичасти лукови претежно дејствују по механизму слома са шест зглобова (случај 1). С друге стране, сегменти лукови малог обухватног угла (искључујући мале ексцентрицитете) претежно дејствују по механизму слома с пет зглобова (случај 5).

**Табела 7.** Упоредни приказ вредности минималне дебљине  $t/R$  у складу с радијалном, нормалном и вертикалном стереотомијом, за преломљене лукове различитог ексцентрицитета  $\xi$  и обухватног угла  $\alpha$

ексцентрицитет $\xi = e/(R - e)$	$\alpha = 45^\circ$			$\alpha = 60^\circ$		
	радијал.	нормал.	вертик.	радијал.	нормал.	вертик.
0,00	0,00750	0,00750	0,00750	0,02284	0,02285	0,02289
0,10	0,00983	0,00983	0,00983	0,01181	0,01181	0,01183
0,20	0,01817	0,01817	0,01817	0,01880	0,01881	0,01881
0,25	0,02106	0,02107	0,02106	0,02241	0,02242	0,02242
0,33	0,02443	0,02444	0,02444	0,027271	0,02729	0,02729
0,50	0,02743	0,02746	0,02745	0,03353	0,03358	0,03358
0,60	0,02770	0,02774	0,02772	0,03557	0,03564	0,03563
0,80	0,02632	0,02636	0,02634	0,03727	0,03737	0,03735
1,00	0,02356	0,02360	0,02358	0,03709	0,03721	0,03719
1,50	0,01485	0,01487	0,01486	0,03329	0,03342	0,03339
2,00	0,00629	0,00630	0,00630	0,02822	0,02835	0,02832
2,50	*	*	*	0,02332	0,02344	0,02341
3,00	*	*	*	0,01893	0,01902	0,01900

ексцентрицитет $\xi = e/(R - e)$	$\alpha = 75^\circ$			$\alpha = 90^\circ$		
	радијал.	нормал.	вертик.	радијал.	нормал.	вертик.
0,00	0,05369	0,05369	0,05404	0,10748	0,10748	0,10946
0,10	0,03823	0,03821	0,03845	0,08856	0,08846	0,09013
0,20	0,02917	0,02916	0,02932	0,07587	0,07574	0,07717
0,25	0,02587	0,02586	0,02599	0,07090	0,07076	0,07209
0,33	0,02727	0,02729	0,02729	0,06399	0,06385	0,06505
0,50	0,03371	0,03376	0,03376	0,05370	0,05356	0,05457
0,60	0,03608	0,03615	0,03615	0,04902	0,04889	0,04980
0,80	0,03872	0,03882	0,03883	0,04180	0,04167	0,04245
1,00	0,03962	0,03976	0,03978	0,03964	0,03976	0,03978
1,50	0,03850	0,03870	0,03875	0,03855	0,03870	0,03875
2,00	0,03580	0,03604	0,03611	0,03588	0,03605	0,03612
2,50	0,03285	0,03310	0,03315	0,03303	0,03320	0,03329
3,00	0,03002	0,03027	0,03031	0,03038	0,03055	0,03065

\* Блиско троугаоном луку

(Наставак табеле на следећој страни)

Табела 7. (Наставак табеле с претходне стране)

ексцентрицитет $\xi = e/(R - e)$	$\alpha = 105^\circ$		$\alpha = 120^\circ$		$\alpha = 135^\circ$	
	радијал.	нормал.	радијал.	нормал.	радијал.	нормал.
0,00	0,19394	0,19394	0,32761	0,32761	0,53654	0,53654
0,10	0,17271	0,17212	0,30650	0,30352	0,52722	0,51069
0,20	0,15729	0,15637	0,29058	0,28538	0,52204	0,49072
0,25	0,15101	0,14996	0,28398	0,27783	0,52058	0,48231
0,33	0,14205	0,14084	0,27450	0,26694	0,51944	0,47008
0,50	0,12815	0,12673	0,25971	0,24970	0,52087	0,45064
0,60	0,12161	0,12010	0,25278	0,24144	0,52354	0,44133
0,80	0,11120	0,10954	0,24188	0,22807	0,53196	0,43337
1,00	0,10324	0,10147	0,23381	0,21765	0,54365	0,42981
1,50	0,08957	0,08757	0,22105	0,19929	*	*
2,00	0,08081	0,07862	0,21435	0,18721	*	*
2,50	0,07468	0,07232	0,21104	0,17863	*	*
3,00	0,07014	0,06761	0,20983	0,17226	*	*

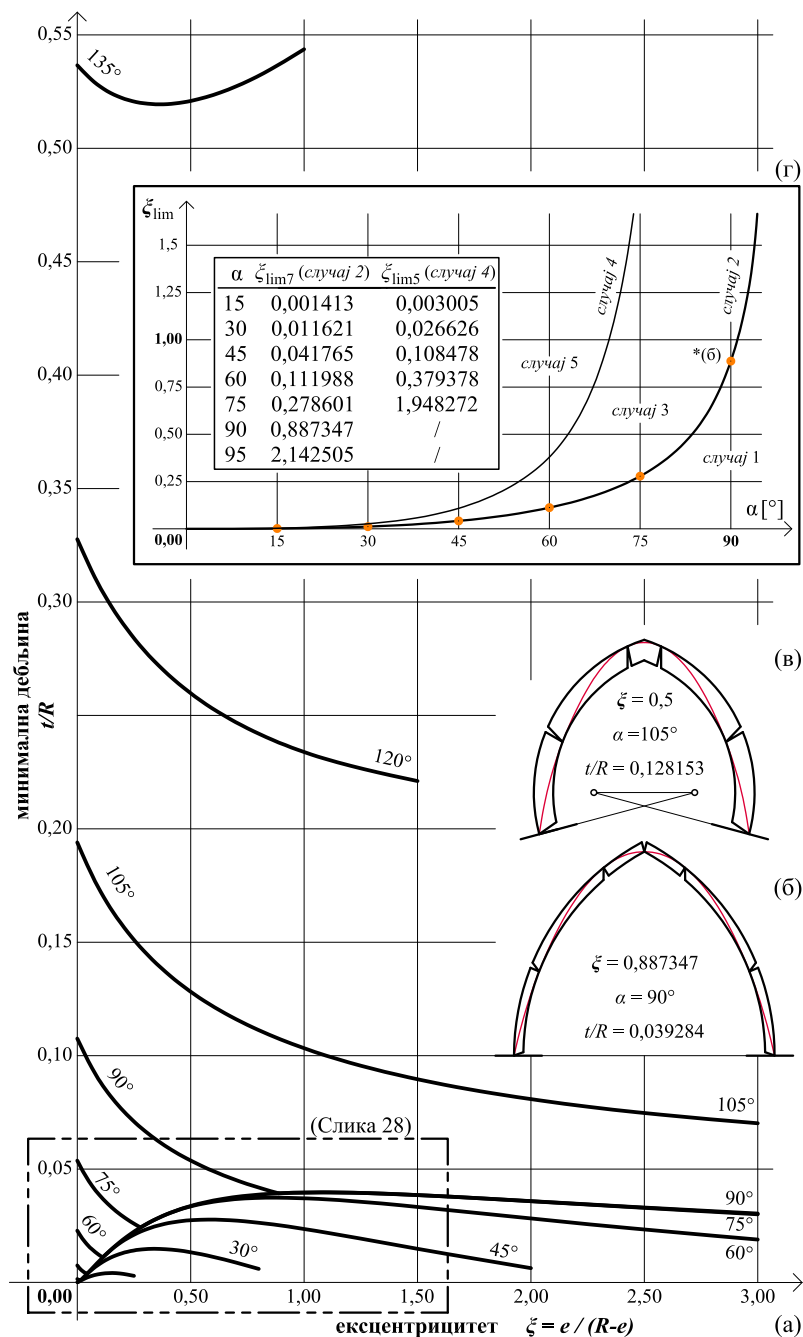
\* Потребна минимална дебљина лука услед преклапања ослонаца премашује практичну могућу вредност  $t_{max} = 2(R - e/\sin \alpha)$ , те такав лук није могућ

Табела 8. Упоредни приказ вредности граничних ексцентрицитета,  $\xi_{lim7}$  и  $\xi_{lim5}$ , уз одговарајућу минималну дебљину лука  $t/R$ 

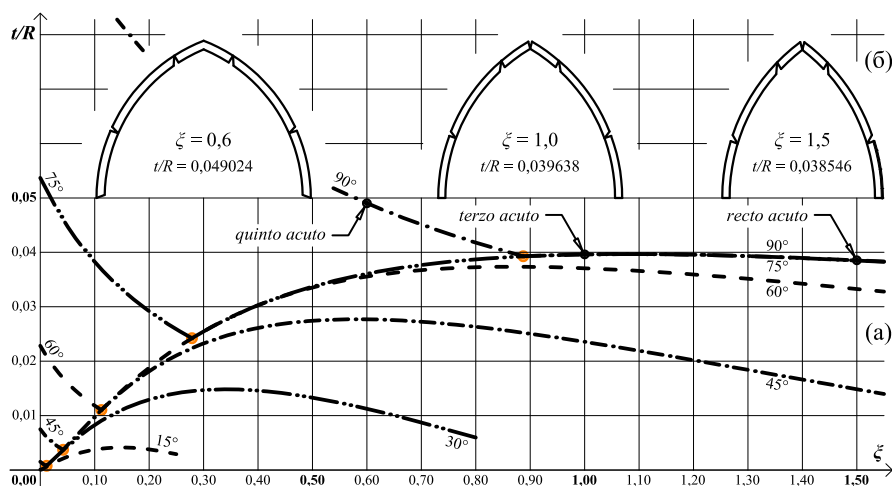
обухватни угао $\alpha$ [°]	$\xi_{lim7}$			$t/R_{min}$		
	радијал.	нормал.	вертик.	радијал.	нормал.	вертик.
15	0,001413	0,001413	0,001413	0,000049	0,000049	0,000049
30	0,011621	0,011621	0,011621	0,000769	0,000769	0,000769
45	0,041765	0,041765	0,041770	0,003727	0,003727	0,003727
60	0,111988	0,111979	0,112068	0,011027	0,011027	0,011036
75	0,278601	0,278402	0,279493	0,024228	0,024229	0,024294
90	0,887347	0,880287	0,902547	0,039284	0,039355	0,039476

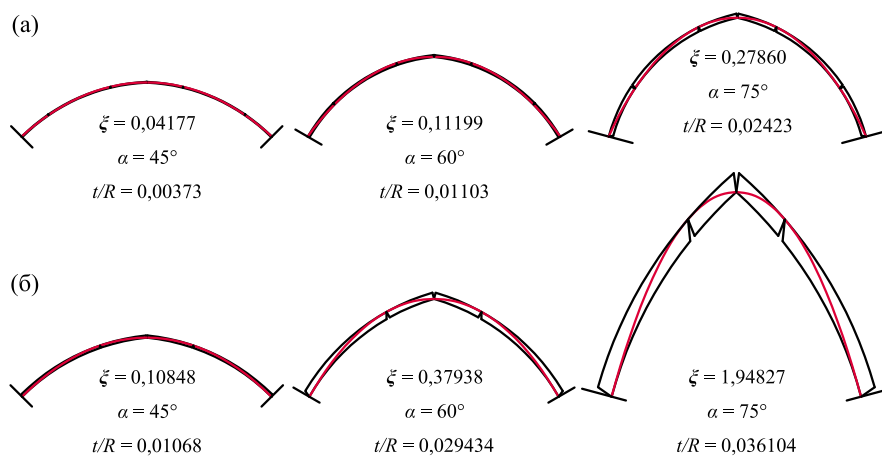
обухватни угао $\alpha$ [°]	$\xi_{lim5}$			$t/R_{min}$		
	радијал.	нормал.	вертик.	радијал.	нормал.	вертик.
15	0,003005	0,003059	0,003093	0,000133	0,000136	0,000138
30	0,026626	0,026626	0,026625	0,002170	0,002170	0,002170
45	0,108478	0,108301	0,108286	0,010680	0,010663	0,010661
60	0,379378	0,378738	0,377673	0,029434	0,029436	0,029387
75	1,948272	1,913199	1,849970	0,036104	0,036542	0,036963



**Слика 27.** (а) Веза између ексцентрицитета  $\xi$  и минималне дебљине  $t/R$  за различите обухватне углове  $\alpha$ , (б) оптимални лук правог средишњег угла, (в) потковичасти лук минималне дебљине, (г) веза између угла  $\alpha$  и граничног ексцентрицитета с обзиром на механизме слома са седам (случај 2) и пет (случај 4) зглобова



Слика 28. (а) Увећани приказ дела дијаграма који се односи на сегментне лукове, (б) минимална дебљина трију најчешћих облика преломљеног лука

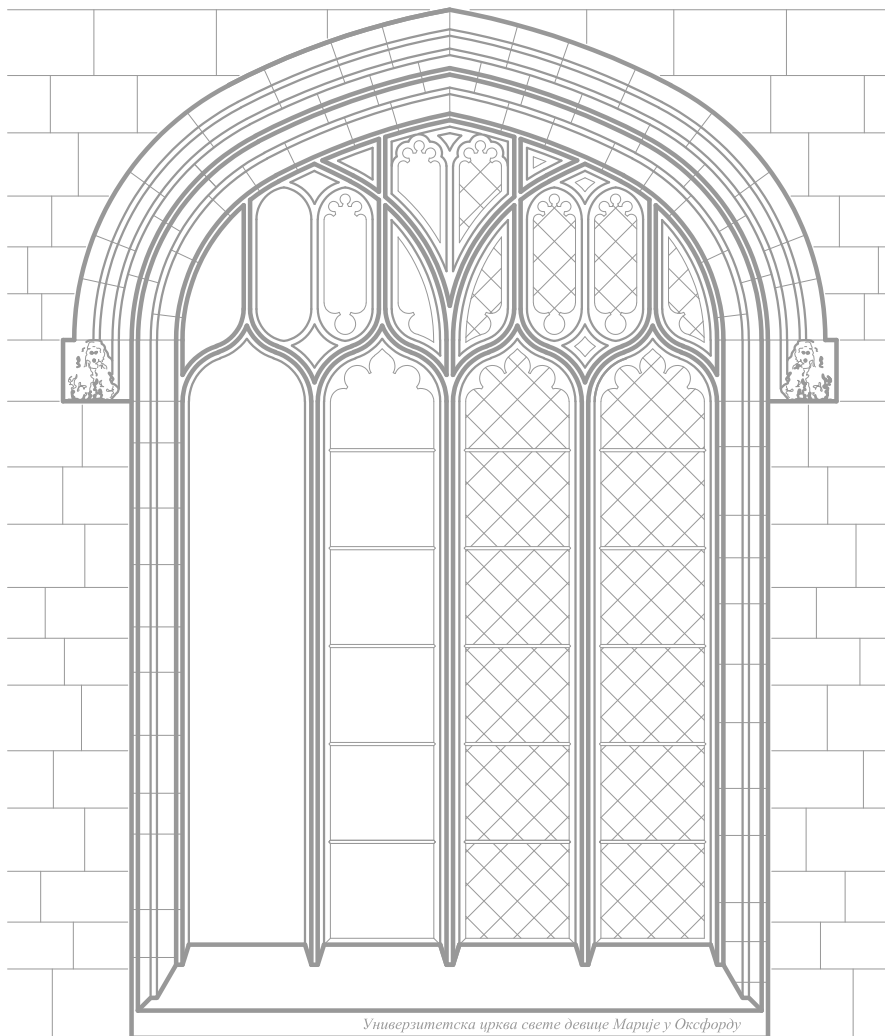


Слика 29. Гранични механизми слома: (а) са седам зглобова (гранични ексцентрицитет  $\xi_{lim7}$ ), (б) с пет зглобова (гранични ексцентрицитет  $\xi_{lim5}$ )



## Глава IV

### Изведени полицентрични лукови







## Лукови из трију средишта

Поред (полу)кружних и преломљених лукова, у објектима градитељског наслеђа јављају се и елиптички лукови, код којих оса има облик половине елипсе. Овакви лукови захтевају сложеније поступке израде тесаника и извођења, те је такав облик приближно представљан елипсастим луковима чију осу чини више кружних лукова (в. слику 1г). Према постоје поједине геометријске конструкције за елипсасте лукове састављене од пет, седам, или пак девет саставних деоница, ипак су најчешћи елипсасте лукови састављени од трију деоница (в. слику 30б), те су само такви обрађени у овој дисертацији.<sup>1</sup> У предстојећем разматрању само ће гранични положај потпорне линије бити подробно испитан.

### 14.1 Елипсасте лукови

#### 14.1.1 Геометријска својства

Елипсасте лукови чине склоп од трију саставних деоница које имају облик исечка кружног прстена (в. одељак 9.1), те се обично називају луковима из трију средишта (тзв. сочивасти, кошарасти, кошарски лукови). Такав симетрични лук састоји се од једне горње (средишње, унутрашње) деонице полупречника  $R$  и двеју доњих (крајњих, спољашњих) деоница полупречника  $r$ , као што је приказано на слици 30а,б,в,г.<sup>2</sup> При томе су могућа два случаја: (а) спљоштени (скраћени) елипсасте лук код којег је горња деоница већег пречника од доње (в. слику 30в) и (б) надвишени (издужени) елипсасте лук,<sup>3</sup> који је ређи, и код којег је доња деоница већег пречника од горње (в. слику 30в). Уколико се посматра половина лука, половина горње деонице понаша се као половина сегментног

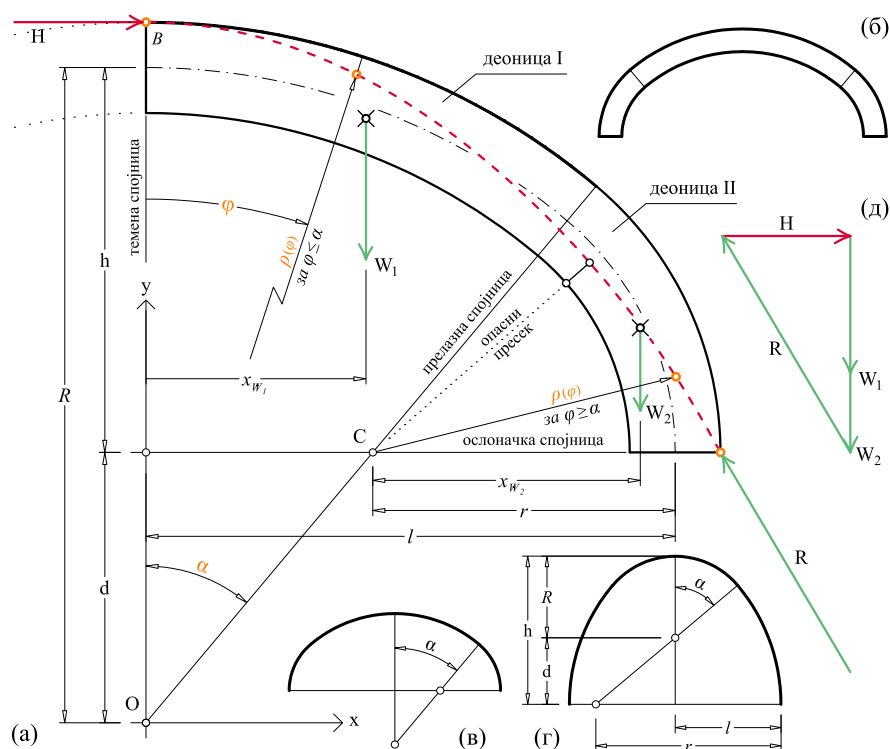
<sup>1</sup> У даљем разматрању појам елипсасте лук односиће се искључиво на њих.

<sup>2</sup> Када су полупречници изједначени добија се полукружни лук.

<sup>3</sup> У посебном односу пречника образује се тзв. египатски лук.

лука, док се доња понаша као исечак кружног прстена (в. одељак 9.1).

На слици 30а приказана је половина елипсаог лука, с назначеним битним геометријским чиниоцима. Његова оса одређена је полураспоном  $l$  и висином (стрелом)  $h$ , као и *прелазним углом*  $\alpha$  између горње и доње деонице (угао  $\alpha$  је уједно обухватни угао горње деонице).



**Слика 30.** Елипсасти лук из трију средишта: (а) геометријски чиниоци, (б) изглед лука, (в) спљоштени елипсасти лук ( $R > r$ ), (г) надвишени елипсасти лук ( $R < r$ ), (д) план сила

Вертикална удаљеност средишта горње деонице од ослоначке линије изражена је следећом једнакошћу:  $d = (l - r) \cot \alpha$ . У складу са сликом 30, на основу једнакости  $\sin \alpha = \frac{l-r}{R-r}$  и  $h = R - d$ , може се извести зависност полупречника  $r$  доње деонице и чинилаца  $l$ ,  $h$  и  $\alpha$  осе елипсаог лука:

$$r = \frac{h \sin \alpha + l (\cos \alpha - 1)}{\sin \alpha + \cos \alpha - 1}. \quad (148)$$

С обзиром на то да се испитује исечак кружног прстена, примениће се нормална стереотомија. Како се спојнице унутар сваке деонице зракасто пружају из припадајућег средишта, приликом испитивања се усвајају два независна поларна координатна система чија се исходишта налазе у средишту одговарајуће деонице, као што се види на слици 30а. У зависности од тога у оквиру које деонице се налази произвољни пресек, одређен углом  $\varphi$ , спроводиће се испитивање.

**Тежина коначног дела лука.** Уколико је произвољни пресек под углом  $\varphi$  у оквиру деонице I полупречника  $R$ , одговарајућа тежина  $V_1$  коначног дела лука (између темене спојнице и пресека) представљена је површином одговарајућег исечка кружног прстена (в. слике 30а и 31а), те је дата следећим изразом:

$$V_1(\varphi) = Rt\varphi. \quad (149)$$

Када произвољни пресек достигне крај деонице I, односно када угао  $\varphi$  достигне вредност угла  $\alpha$ , добија се тежина  $W_1$  деонице I, па израз (149) добија следећи облик:

$$W_1 = V_1(\varphi = \alpha) = Rt\alpha. \quad (150)$$

С друге стране, уколико је произвољни пресек постављен у оквиру деонице II полупречника  $r$  (в. слике 30а и 31в), одговарајућа површина  $V_2$ , између прелазне спојнице под углом  $\alpha$  и произвољног пресека под углом  $\varphi$ , дата је следећим изразом:

$$V_2(\varphi) = rt(\varphi - \alpha). \quad (151)$$

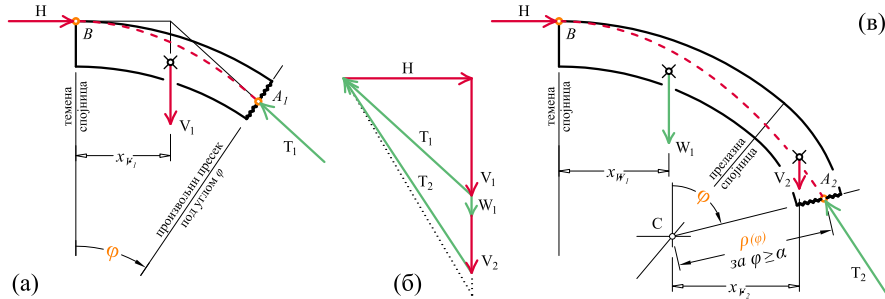
Тежина  $W_2$  деонице II добија се када угао  $\varphi$  достигне вредност  $\pi/2$ , па израз (151) добија следећи облик:

$$W_2 = V_2(\varphi = \alpha) = rt(\pi/2 - \alpha). \quad (152)$$

У складу с изразима (100), (149), (151) и (150), и у односу на положај произвољног пресека, дати су следећи изрази за тежину коначног дела лука до произвољног пресека:

$$V(\varphi) = V_1(\varphi) = Rt\varphi \quad \text{за } 0 \leq \varphi \leq \alpha, \quad (153a)$$

$$V(\varphi) = W_1 + V_2(\varphi) = Rt\alpha + rt(\varphi - \alpha) \quad \text{за } \alpha \leq \varphi \leq \pi/2. \quad (153b)$$



Слика 31. Равнотежа горњег коначног дела лука до пресека под углом  $\varphi$ : (а) у оквиру горње деонице лука; (б) план сила (двоструко увеличан), (в) у оквиру доње деонице лука

**Тежиште коначног дела лука.** На основу израза (101) (апсциса тежишта исечка кружног прстена, за вредност  $\alpha = 0$ ), добија се апсциса  $x_{V_1}$  тежишта коначног дела лука до угла  $\varphi$  у оквиру деонице I:

$$x_{V_1}(\varphi) = \frac{(12R^2 + t^2)(1 - \cos \varphi)}{12R\varphi}. \quad (154)$$

Слично, апсциса  $x_{V_2}$  тежишта површине  $V_2$  у оквиру деонице II је следећа:

$$x_{V_2}(\varphi) = \frac{(12r^2 + t^2)(\cos \varphi - \cos \alpha)}{12r(\alpha - \varphi)}. \quad (155)$$

Када угао  $\varphi$  достигне вредност  $\alpha$ , добија се апсциса  $x_{W_1}$  тежишта деонице I:

$$x_{W_1} = \frac{(12R^2 + t^2)(1 - \cos \alpha)}{12R\alpha}, \quad (156)$$

а када угао  $\varphi$  достигне вредност  $\pi/2$  добија се апсциса  $x_{W_2}$  тежишта деонице II:

$$x_{W_2} = \frac{(12r^2 + t^2)\cos \alpha}{12r(\pi/2 - \alpha)}. \quad (157)$$

У складу с изведеним изразима (154), (156) и (155), апсциса  $x_V$  тежишта коначног дела лука тежине  $V$ , између теменог пресека и произвољног пресека под углом  $\varphi$ , може се израчунати према

следећим обрасцима:

$$x_V(\varphi) = x_{V_1}(\varphi) = \frac{(12R^2 + t^2)(1 - \cos \varphi)}{12R\varphi} \quad \text{за } 0 < \varphi \leq \alpha, \quad (158a)$$

$$x_V(\varphi) = \frac{W_1 x_{W_1} + V_2(\varphi)(l - r + x_{V_2}(\varphi))}{V(\varphi)} \\ = \frac{\left[ r(r-l)(\alpha - \varphi) + (r^2 - R^2) \cos \alpha - \left( r^2 + \frac{t^2}{12} \right) \cos \varphi + R^2 + \frac{t^2}{12} \right]}{(R-r)\alpha + r\varphi} \quad \text{за } \alpha < \varphi \leq \pi/2. \quad (158b)$$

#### 14.1.2 Хоризонтални потисак и потпорна линија

Како је наведено, нападна тачка  $B$  хоризонталне силе  $H$  у темену и нападна тачка  $S$  реакције  $R$  на ослонцу налазе се на екстрадосу. Из равнотеже момената половине лука за тачку  $S$  на ослонцу изводи се израз за величину хоризонталног потиска:

$$H = \frac{W_1(l + t/2 - x_{W_1}) + W_2(r + t/2 - x_{W_2})}{h + t/2} \\ = \frac{t \left\{ \begin{array}{l} 6\pi r^2 - 6\alpha [2r^2 + rt - R(2l + t)] + \\ 3\pi r t - 12(r^2 - R^2) \cos \alpha - 12R^2 - t^2 \end{array} \right\}}{6(2h + t)}. \quad (159)$$

Када се посматра коначни део лука до пресека под углом  $\varphi$ , приказан на слици 31, равнотежа момената за тачку  $A$  дата је следећом једнакошћу:  $H(R_{ex} - \rho \cos \varphi) = V(\varphi)(\rho \sin \varphi - x_V(\varphi))$ . У складу с изразом (103), добијају се обрасци који описују потпорну линију:

$$\rho(\varphi) = \frac{V(\varphi)x_V(\varphi) + H(R + t/2)}{V(\varphi)\sin \varphi + H\cos \varphi} \quad \text{за } 0 < \varphi \leq \alpha, \quad (160a)$$

$$\rho(\varphi) = \frac{V(\varphi)(r - l + x_V(\varphi)) + H(h + t/2)}{V(\varphi)\sin \varphi + H\cos \varphi} \quad \text{за } \alpha < \varphi \leq \pi/2. \quad (160b)$$

где су  $V(\varphi)$ ,  $x_V(\varphi)$  и  $H$  редом дати изразима (153), (158a) и (159). Израз (160a) одређује удаљеност  $\rho(\varphi)$  између потпорне линије у оквиру деонице I и припадајућег средишта  $O$ , док је изразом (160b) одређена удаљеност  $\rho(\varphi)$  између потпорне линије у оквиру деонице II и припадајућег средишта  $C$  (в. слике 30a и 31в).

## 14.2 Псеудолукови из трију средишта

Ако се полупречник горње (средишње) деонице лука усвоји као бесконачно велик, уместо кружног (сегментног) дела добија се равн лук. Тако се образује псеудолук (заравњени лук) из трију средишта, приказан на слици 32г, где се заравњени део понаша као прав лук описан у одељку 6.2, док кружни део дејствује као полулук (исечак кружног прстена правог обухватног угла) описан у одељку 9.1. Како у равном луку не може настати опасни пресек на интрадосу (односно механизам који би довео до слома; в. одељак 6.2), довољно је испитати равнотежу доње, кружне деонице лука уз утицај оптерећења од горње деонице.

### 14.2.1 Геометријска својства

На слици 32а приказана је половина псеудолука из трију средишта, образована од равне деонице I тежине  $W_1$  и кружне деонице II тежине  $W_2$ . Испитује се полулук (деоница II) на који делује резултанта (од правог дела лука), чије су компоненте вертикална сила  $W_1$  и хоризонтална сила  $H$ . Положај нападне тачке  $M$  ове резултанте (односно њених компоненти  $W_1$  и  $H$ ), на *прелазној спојници* (вертикалном пресеку на прелазу с правога на кружни део лука (в. слику 32а) одређен је из равнотеже момената деонице I за тачку  $M$ , те је дат следећим изразом:

$$q_M = \frac{W_1}{H} \frac{l-r}{2}, \quad (161)$$

где  $q_M$  представља вертикалну удаљеност тачке  $M$  од екстрадоса.

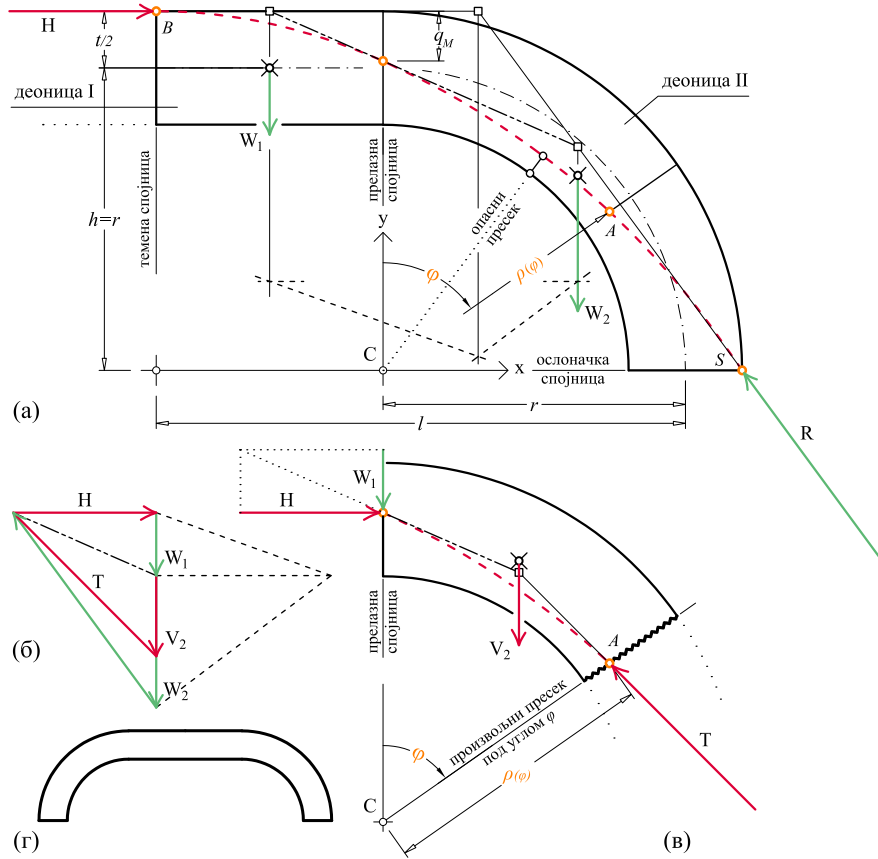
За равну деоницу I усвојена је вертикална стереотомија (в. одељак 6.2), док је за кружни део усвојена нормална стереотомија. Сходно томе, усвојен је поларни координатни систем с почетком у средишту  $C$  кружне деонице.

**Тежина коначног дела лука.** Тежина  $W_1$  равне деонице I, представљена је правоугаоном површином, док је тежина  $W_2$  деонице II, представљена четвртином кружног прстена, те су дате следећим изразима:

$$W_1 = t(l-r), \quad (162a)$$

$$W_2 = r t \pi / 2. \quad (162b)$$

Тежина  $V$  коначног дела лука у оквиру деонице II, од прелазног



Слика 32. Псеудолук из трију средшта: (а) геометријски чиниоци, (б) план сила, (в) издвојени коначни део доње деонице II лука од прелазне спојнице до произвољног пресека под углом  $\varphi$ , (г) изглед лука

вертикалног пресека до произвољног пресека под углом  $\varphi$ , у складу с изразом (100) износи:

$$V(\varphi) = rt\varphi. \tag{163}$$

**Тежиште коначног дела лука.** Апсциса  $x_V$  тежишта коначног дела лука, на основу израза (101), следећа је:

$$x_V(\varphi) = \frac{(12r^2 + t^2)(1 - \cos \varphi)}{12r\varphi}. \tag{164}$$

Апсцисе  $x_{W_1}$  и  $x_{W_2}$  тежишта деонице I и деонице II, респективно,

дате су следећим изразима:

$$x_{W_1} = \frac{l - r}{2}, \quad (165a)$$

$$x_{W_2} = \frac{4(R_{ex}^3 - R_{in}^3)}{3\pi(R_{ex}^2 - R_{in}^2)}. \quad (165b)$$

### 14.2.2 Хоризонтални потисак и потпорна линија

Равнотеже момената за тачку  $S$  дата је следећом једнакошћу:

$$H(r + t/2) = W_1(l + t/2 + x_{W_1}) + W_2(r + t/2 + x_{W_2}), \quad (166)$$

где су  $W_1$ ,  $W_2$ ,  $x_{W_1}$  и  $x_{W_2}$  редом дати изразима (162a), (162b), (165a) и (165b). Одатле је изражена величина  $H$  која представља хоризонтални потисак:

$$H = \frac{t[6l^2 + 6lt + 6(\pi - 3)r^2 + 3(\pi - 2)rt - t^2]}{6(2r + t)}. \quad (167)$$

У оквиру деонице I потпорна линија има облик параболе, као што је показано у одељку 7.1. С друге стране, једначина потпорне линије у оквиру деонице II добија се на основу израза (103), где је  $\rho_\alpha = r + t/2 - q_M$ ,  $\alpha = 0$  и  $P = W_1$ , те је:

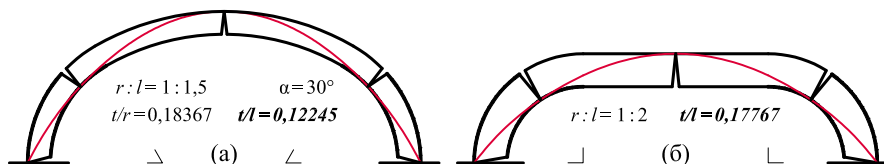
$$\rho(\varphi) = \frac{V(\varphi)x_V(\varphi) + H(r + t/2 - q_M)}{(W_1 + V(\varphi))\sin\varphi + H\cos\varphi}, \quad (168)$$

где су величине  $q_M$ ,  $V(\varphi)$ ,  $x_V(\varphi)$ ,  $W_1$  и  $H$  редом дате изразима (161), (163), (164), (162a) и (167).

### 14.3 Минимална дебљина лукова из трију средишта

С обзиром на глатко теме елипсастих лукова, када је претпостављено гранично стање равнотеже, размештај зглобова (опасних пресека) је у највећем броју случајева исти као код полукружног лука (в. случај 0 на слици 25a). Према томе, минимална потпорна линија пролази кроз екстрадос и на темену и на ослонцима, и притом додирује интрадос у још двама тачкама, теоријски образујући укупно пет зглобова (в. слику 33a). Стога је за одређивање минималне дебљине довољно испитивање удаљености потпорне линије (односно нападне тачке резултантне силе) од интрадоса.





Слика 33. Механизам слома елипсастих лукова минималне дебљине: (а) лук из трију средишта, (б) псеудолук из трију средишта

### Одређивање минималне дебљине лука из трију средишта.

Код елипсастога лука, зглоб на интрадосу може да настане у оквиру горње или доње деонице лука, у зависности од односа њихових величина. Вредности које се привремено чувају у одговарајућим списковима (листама) добијају се на основу следећих израза:

$$\delta_{in} = \rho(\varphi) - R_{in} \quad \text{за горњу деоницу лука, тј. за } \varphi < \alpha, \quad (169a)$$

$$\delta_{in} = \rho(\varphi) - r_{in} \quad \text{за доњу деоницу лука, тј. за } \alpha < \varphi < \pi/2, \quad (169b)$$

где су  $R_{in}$  и  $r_{in}$  редом полупречници интрадоса горње и доње деонице лука, а величина  $\rho(\varphi)$  је дата изразима (160a) и (160b).

**Одређивање минималне дебљине псеудолука из трију средишта.** С обзиром на то да у случају псеудолука из трију средишта зглоб на интрадосу може бити само у оквиру доње, кружне, деонице лука, довољно је испитивање положаја потпорне линије само у њеном оквиру. Према томе, с обзиром на њен положај на прелазном пресеку дат изразом (161), удаљеност потпорне линије од интрадоса рачуна се на следећи начин:

$$\delta_{in} = \rho(\varphi) - r_{in}, \quad (170)$$

где је  $r_{in}$  полупречник средишње линије доње деонице лука, а величина  $\rho(\varphi)$  је дата изразом (168).

За наредну итерацију дебљина лука се усваја у односу на опасни пресек који се односи на интрадос:

$$t = t - \delta_{in,min}, \quad (171)$$

где се  $\delta_{in,min}$  одређује као најмања вредност у листи  $\delta_{in}$ , док је величина  $t$  вредност из претходне итерације.

#### 14.4 Преглед резултата: лукови из трију средишта

У складу с поступцима описаним у поглављу 12, као и изразима датим у претходном одељку, спроведен је прорачун за лукове из трију средишта различитих пропорција, те су добијене нумеричке вредности теоријске минималне дебљине.

**Елипсасти лукови.** Разматрани су различити облици лукова, чије су пропорције представљене односом  $l : h$  полураспона и висине осе лука. Притом су обрађени лукови прелазног угла  $\alpha$  од 30, 45 и 60 степени. У табели 9 дате су вредности минималне дебљине, која је представљена односом  $t/l$  дебљине лука и његовог полураспона. Уз то је величином угла  $\beta_{in}$  назначен положај опасног пресека (зглоба) који настаје на интрадосу. За  $\alpha = 30^\circ$  и  $\alpha = 45^\circ$  зглоб се налази у оквиру доњег дела, док је за  $\alpha = 60^\circ$  у оквиру горњег дела. Графички приказ ових лукова дат је у Додатку Г у табели 19 на страни 245.

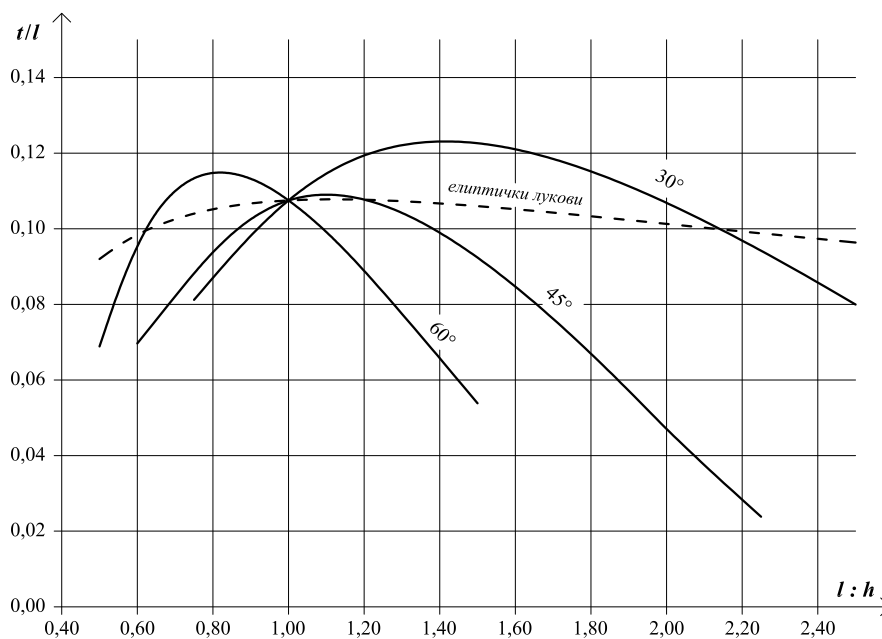
Табела 9. Минимална дебљина  $t/l$  елипсастих лукова

$l : h$	$30^\circ$		$45^\circ$		$60^\circ$	
	$t/l$	$\beta_{in}$	$t/l$	$\beta_{in}$	$t/l$	$\beta_{in}$
0,50					0,06884	73,18
0,60			0,06965	70,46	0,09534	56,08
0,70			0,08211	65,60	0,10995	56,41
0,75	0,08117	64,57	0,08819	63,15	0,11333	56,31
0,80	0,08702	62,34	0,09376	60,85	0,11475	56,05
0,90	0,09811	58,11	0,10249	57,10	0,11320	55,42
1,00	0,10748	54,48	0,10748	54,48	0,10748	54,48
1,25	0,12096	48,33	0,10618	50,59	0,08323	51,19
1,50	0,12261	44,62	0,09234	48,10	0,05383	46,39
1,75	0,11689	41,96	0,07163	46,06		
2,00	0,10683	39,80	0,04706	43,30		
2,25	0,09418	37,92	0,02384	36,96		
2,50	0,07995	36,20				

Поред тога, посебно су обрађени елипсасти лукови чија оса има облик овала класичних пропорција, односно познатих примењиваних геометријских конструкција (в. [68, 83, 88, 113, 120]). Њихов приказ дат је у Додатку Г у табели 20.

Зависност минималне дебљине и облика лука приказана је графички на дијаграму датом на слици 34. Заједничка тачка приказаних кривих одговара полукружном луку (код којег величина прелазног угла нема утицаја;  $l : h = 1$ ). Поред тога, на основу вред-

ности датих у [8], испрекиданом линијом је приказана минимална дебљина елиптичких лукова. Може се уочити да је за прелазни угао  $\alpha = 45^\circ$ , минимална дебљина елипсастих лукова у највећем броју случајева мања у односу на елиптичке, док је у случају  $\alpha = 30^\circ$  и  $\alpha = 60^\circ$  овај однос променљив. Такође, с обзиром на класичне пропорције овала (уп. с табелом 20), елипсasti лукови се углавном испостављају непогоднији од елиптичких лукова.



**Слика 34.** Дијаграм који успоставља везу између минималне дебљине  $t/l$  и облика елипсастог лука (датог прелазним углом  $\alpha$  и односом  $l:h$  полураспона и висине осе лука)

**Псеудолукови из трију средишта.** За различите облике псеудолукова из трију средишта, чије су пропорције представљене односом полупречника  $r$  кружне деонице и полураспона  $l$  (односно односом  $l:h$  полураспона и висине осе лука), израчунате су вредности минималне дебљине. У табели 10, минимална дебљина је представљена односом дебљине лука  $t$  и његовог полураспона  $l$ . Уз то је величином угла  $\beta_{in}$  назначен положај опасног пресека. На дијаграму приказаном на слици 39 на страни 144, црта-тачка линијом приказана је зависност минималне дебљине и пропорција

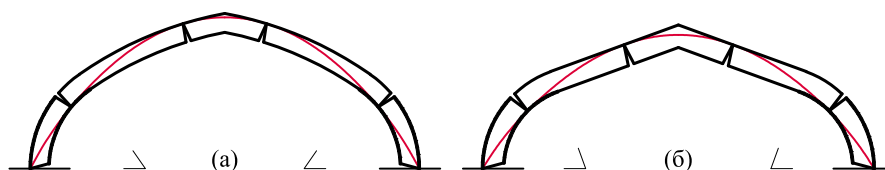
(односно дужине правог дела) псеудолука из трију средишта. Графички приказ ових лукова дат је у Додатку Г у табели 21 на страни 248.

**Табела 10.** Минимална дебљина  $t/l$  псеудолукова из трију средишта

$r : l$	$l : h$	$t/l$	$\beta_{in} [^\circ]$
1:1	1,00	0,10748	54,48
1:1,2	1,20	0,13203	47,14
1:1,25	1,25	0,13728	45,67
1:1,4	1,40	0,15071	42,04
1:1,5	1,50	0,15783	40,14
1:1,6	1,60	0,16368	38,53
1:1,75	1,75	0,17046	36,54
1:1,8	1,80	0,17226	35,96
1:2	2,00	0,17767	33,66
1:2,25	2,25	0,18136	31,92
1:2,5	2,50	0,18274	30,25
1:2,75	2,75	0,18260	28,84
1:3	3,00	0,18144	27,61
1:3,25	3,25	0,17961	26,52
1:3,5	3,50	0,17734	25,54
1:3,75	3,75	0,17478	24,65
1:4	4,00	0,17203	23,84

## Тјудорски лукови

Уколико се код елипсастих лукова уведе преломљено теме уместо глатког, добијају се тзв. тјудорски лукови. Оса таквог лука образована је од четирију кружних лукова (в. слику 36в): два горња лука полупречника  $R$ , који образују преломљено теме, и два доња лука полупречника  $r$ ; стога се називају луковима из четирију средишта. Уколико се полупречник горњег дела лука усвоји као бесконачно велик, добија се псеудолук из четирију средишта (обрађен у одељку 15.2).



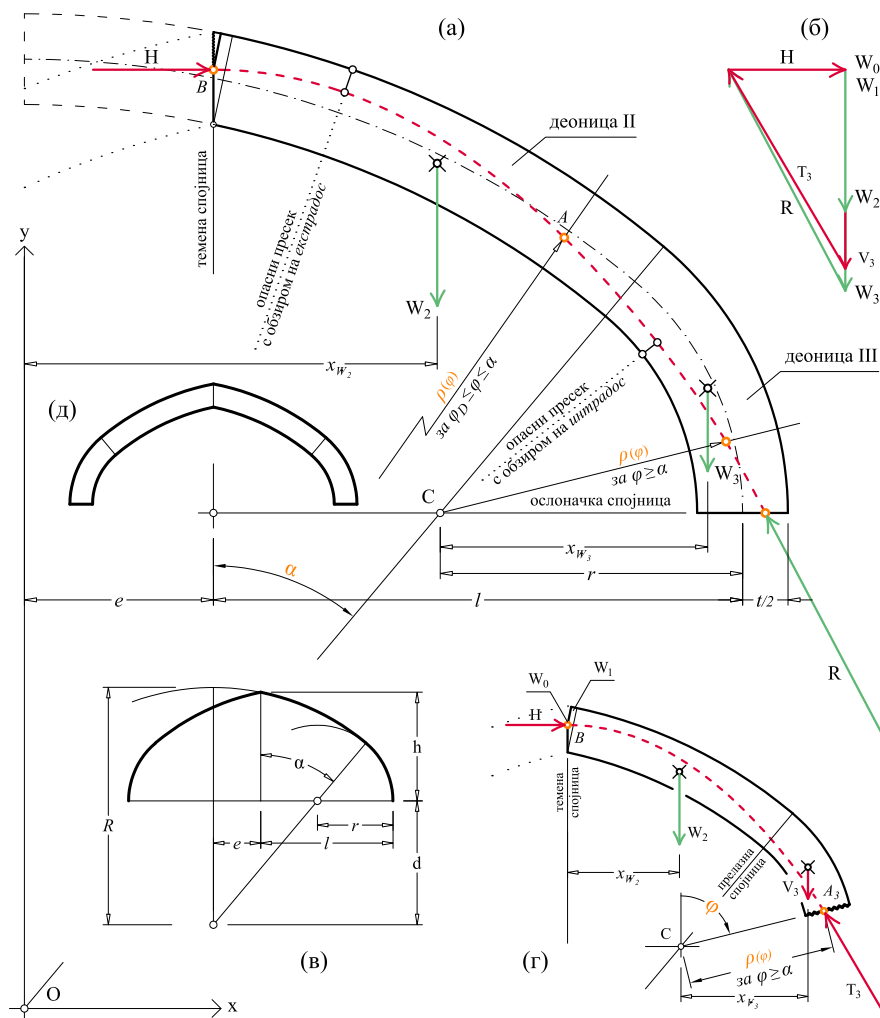
**Слика 35.** Механизам слома тјудорских лукова минималне дебљине: (а) лук из четирију средишта, (б) псеудолук из четирију средишта

### 15.1 Лукови из четирију средишта

#### 15.1.1 Геометријска својства

Оса лука из четирију средишта биће одређена полураспоном  $l$  и висином (стрелом)  $h$ , као и прелазним углом  $\alpha$  између горњег и доњег дела (угао  $\alpha$  је уједно обухватни угао горњег дела лука). Уколико се посматра половина лука приказана на слици 36а, горњи део се понаша као половина преломљеног лука обухватног угла  $\alpha$ , док је доњи део исти као код елипсастих лукова (в. одељке 14.1 и 9.1). По угледу на разматрање спроведено за преломљене лукове уз нормалну стереотомију (в. поглавље 9 и слику 19б), погодно је

половину лука из четирију средишта поделити на четири деонице: три деонице, придружених тежина  $W_0$ ,  $W_1$  и  $W_2$ , које одговарају горњем делу осе и једна деоница, тежине  $W_3$ , која одговара њеном доњем делу (в. слику 36).



**Слика 36.** (а) Геометријски чиниоци лука из четирију средишта, (б) план сила, (в) чиниоци осе лука, (г) коначни део лука до произвољног пресека под углом  $\varphi$ , (д) изглед лука

У складу са сликом 36, може се извести зависност полупречника

$R$  горњег дела лука и датих величина  $l$ ,  $h$ ,  $R$ ,  $r$ ,  $e$  и  $\alpha$ :

$$R = r + (e + l - r) \csc \alpha, \quad (172a)$$

$$h = \sqrt{R^2 - e^2} - (l - r + e) \cot \alpha. \quad (172b)$$

Вертикална удаљеност  $d$  између средишта горњег дела лука и ослоначке линије изражена је следећом једнакошћу:  $d = (R - r) \cos \alpha$ .

Усвојена је нормална стереотомија уз два независна поларна координатна система чији се почаци  $O$  и  $C$  редом налазе у средишту горњег и доњег дела лука, као што се види на слици 36а. У складу с положајем произвољног пресека спроводи се прорачун.

**Тежина коначног дела лука.** У складу с разматрањем спроведеним у поглављу 9, тежина  $V_1$  коначног дела лука у оквиру деонице I ( $\varphi_B \leq \varphi \leq \varphi_E$ ) изражена је изразом (108), док је тежина  $V_2$  коначног дела лука до произвољног пресека у оквиру деонице II ( $\varphi_E \leq \varphi \leq \alpha$ ) дата изразом (110). Притом су тежине  $W_0$ ,  $W_1$  и  $W_2$  деоница 0, I и II, редом дате изразима (106), (109) и (111).

Тежина  $V_3$  између прелазног пресека под углом  $\alpha$  и произвољног пресека под углом  $\varphi$  у оквиру деонице III представљена је површином дела кружног исечка:

$$V_3(\varphi) = r t(\varphi - \alpha). \quad (173)$$

Када угао  $\varphi$  достигне вредност  $\pi/2$ , величина  $V_3$  постаје:

$$W_3 = r t(\pi/2 - \alpha), \quad (174)$$

што представља тежину доњег дела (деонице III) лука из четирију средишта.

Дакле, у складу с наведеним, у зависности од положаја произвољног пресека, тежина  $V(\varphi)$  коначног дела лука дата је следећим изразима:

$$\begin{aligned}
V(\varphi) &= V_1(\varphi) \\
&= \frac{1}{2} \left[ R_{ex}^2 (\varphi - \varphi_B) + e^2 (\cot \varphi - \cot \varphi_B) \right] \\
&\qquad\qquad\qquad \text{за } \varphi_B < \varphi \leq \varphi_E, \quad (175a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V(\varphi) &= W_1 + V_2(\varphi) \\
&= \frac{1}{2} \left[ R_{ex}^2 (\varphi_E - \varphi_B) + e^2 (\cot \varphi_E - \cot \varphi_B) \right] + \\
&\quad R t (\varphi - \varphi_D) \\
&\qquad\qquad\qquad \text{за } \varphi_E < \varphi \leq \alpha, \quad (175b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V(\varphi) &= W_1 + W_2 + V_3(\varphi) \\
&= \frac{1}{2} \left[ R_{ex}^2 (\varphi_E - \varphi_B) + e^2 (\cot \varphi_E - \cot \varphi_B) \right] + \\
&\quad R t (\alpha - \varphi_D) + r t (\varphi - \alpha) \\
&\qquad\qquad\qquad \text{за } \alpha < \varphi \leq \pi/2, \quad (175b)
\end{aligned}$$

где су  $V_1(\varphi)$  и  $V_2(\varphi)$  дати изразима (108) и (110).

Уколико је величина  $e$ , као мера преломљености лука, једнака нули, добија се елипсасти лук из трију средишта, те важи следеће:

$$V(\varphi) = V_2(\varphi) \qquad \text{за } 0 < \varphi \leq \alpha, \quad (176a)$$

$$V(\varphi) = W_2 + V_3(\varphi) \qquad \text{за } \alpha < \varphi \leq \pi/2, \quad (176b)$$

што је у сагласности с обрасцима датим у одељку 14.1.

**Тежиште коначног дела лука.** У складу с разматрањем спроведеним у поглављу 9, апсциса  $x_{V_1}$  тежишта коначног дела лука у оквиру деонице I дата је изразом (113), док је апсциса  $x_{V_2}$  тежишта коначног дела лука до произвољног пресека у оквиру деонице II ( $\varphi_E \leq \varphi \leq \alpha$ ) дата изразом (115). Уз то су апсцисе  $x_{W_0}$ ,  $x_{W_1}$  и  $x_{W_2}$  тежишта деоница 0, I и II, редом дате изразима (107), (114) и (118).

Апсциса  $x_{V_3}$  тежишта коначног дела лука између прелазног пресека под углом  $\alpha$  и произвољног пресека под углом  $\varphi$  (по угледу на израз (155)) у оквиру деонице III је:

$$x_{V_3}(\varphi) = \frac{(12r^2 + t^2)(\cos \varphi - \cos \alpha)}{12r(\alpha - \varphi)}. \quad (177)$$



док је апсциса  $x_{W_3}$  тежишта деонице III дата следећим изразом:

$$x_{W_3}(\varphi) = \frac{\cos \alpha (12r^2 + t^2)}{12(\pi/2 - \alpha)r}. \quad (178)$$

У складу с наведеним, у зависности од положаја произвољног пресека, апсциса  $x_V$  тежишта коначног дела лука може се израчунати према следећим обрасцима:

$$x_V(\varphi) = x_{V_1}(\varphi) \quad \text{за } \varphi_B < \varphi \leq \varphi_E, \quad (179a)$$

$$x_V(\varphi) = \frac{W_1 x_{W_1} + V_2(\varphi) x_{V_2}(\varphi)}{V(\varphi)} \quad \text{за } \varphi_E < \varphi \leq \alpha, \quad (179б)$$

$$x_V(\varphi) = \frac{\left\{ \begin{array}{l} W_1 [x_{W_1} - (R - r) \sin \alpha] + \\ W_2 [x_{W_2} - (R - r) \sin \alpha] + V_3(\varphi) x_{V_3}(\varphi) \end{array} \right\}}{V(\varphi)} \quad \text{за } \alpha < \varphi \leq \pi/2. \quad (179в)$$

Уколико је величина  $e = 0$ , у случају елипсастиг лука из трију средишта, важи следеће:

$$x_V(\varphi) = x_{V_2}(\varphi) \quad \text{за } 0 < \varphi \leq \alpha, \quad (180a)$$

$$x_V(\varphi) = \frac{W_2(x_{W_2} - l + r) + V_3(\varphi)x_{W_3}}{V(\varphi)} \quad \text{за } \alpha < \varphi \leq \pi/2. \quad (180б)$$

### 15.1.2 Хоризонтални потисак и потпорна линија

Из равнотеже момената за тачку  $S$  на ослонцу добија се величина хоризонталног потиска:

$$H = \frac{\left\{ \begin{array}{l} W_0 s + W_1 (e + s - x_{W_1}) + W_2 (e + s - x_{W_2}) + \\ W_3 (r + t/2 - q_s - x_{W_3}) \end{array} \right\}}{\sqrt{R_{ex}^2 - e^2 - q_c - d}}, \quad (181)$$

где је  $s = l + t/2 - q_s$  удаљеност тачке  $S$  од осе симетрије лука, а тежине  $W_0$ ,  $W_1$ ,  $W_2$  и  $W_3$  редом су дате изразима (106), (109), (111) и (174).

У случају елипсастиг лука из трију средишта ( $e = 0$ ) израз (181) се упрошћава у следећи облик:

$$H = \frac{W_2 (s - x_{W_2}) + W_3 (r + t/2 - q_s - x_{W_3})}{R_{ex} - q_c - d}. \quad (182)$$

Равнотежа момената за тачку  $A$  на произвољном пресеку у оквиру

горњег дела лука (деонице I и II) и доњег (деоница III; в. слику 36г) изражена је следећим једнакостима:

$$H(\sqrt{R_{ex}^2 - e^2} - q_c - \rho \cos \varphi) = \left\{ \begin{array}{l} W_0(\rho \sin \varphi - e) + \\ V(\varphi)(\rho \sin \varphi - x_V(\varphi)) \end{array} \right\} \\ \text{за } 0 < \varphi \leq \alpha, \quad (183a)$$

$$H(\sqrt{R_{ex}^2 - e^2} - q_c - \rho \cos \varphi - d) = \left\{ \begin{array}{l} W_0(\rho \sin \varphi + l - r) + \\ V(\varphi)(\rho \sin \varphi - x_V(\varphi)) \end{array} \right\} \\ \text{за } \alpha < \varphi \leq \pi/2. \quad (183b)$$

Одатле следи удаљеност потпорне линије (нападне тачке  $A$  резултанте  $T$ ) на произвољном пресеку под углом  $\varphi$  од тачке  $O$  у оквиру горњег дела лука (деонице I и II) односно удаљеност од тачке  $C$  у оквиру доњег дела (деоница III) лука:

$$\rho(\varphi) = \frac{H(\sqrt{R_{ex}^2 - e^2} - q_c) + W_0 e + V(\varphi) x_V(\varphi)}{H \cos \varphi + (W_0 + V(\varphi)) \sin \varphi} \\ \text{за } 0 < \varphi \leq \alpha, \quad (184a)$$

$$\rho(\varphi) = \frac{H(\sqrt{R_{ex}^2 - e^2} - q_c - d) + W_0(r - l) + V(\varphi) x_V(\varphi)}{H \cos \varphi + (W_0 + V(\varphi)) \sin \varphi} \\ \text{за } \alpha < \varphi \leq \pi/2. \quad (184b)$$

где су величине  $W_0, V(\varphi), x_V(\varphi)$  и  $H$  редом дате изразима (106), (175), (179) и (181).

У случају елипсастог лука, када је  $e = 0$ , важи следеће:

$$\rho(\varphi) = \frac{H(R_{ex} - q_c) + V(\varphi) x_V(\varphi)}{H \cos \varphi + V \sin \varphi} \quad \text{за } 0 < \varphi \leq \alpha, \quad (185a)$$

$$\rho(\varphi) = \frac{H(R_{ex} - q_c - d) + V(\varphi) x_V(\varphi)}{H \cos \varphi + V \sin \varphi} \quad \text{за } \alpha < \varphi \leq \pi/2. \quad (185b)$$

што представља једначину потпорне линије у оквиру лука из трију средишта.

## 15.2 Псеудолукови из четирију средишта

Горњи део половине псеудолука из четирију средишта, приказане на слици 37а, понаша се као половина троугаоног лука (делимично обрађен у § 7.2.2) обухватног угла  $\alpha$ , док је доњи део исти као код лукова из трију и четирију средишта (в. одељке 14.1 и 15.1). Сходно томе је у предстојећем разматрању горњи део испитан у

складу с нормалном стереотомијом уз правоугли координатни систем, док је доњи део испитан у складу с нормалном стереотомијом и придруженим поларним координатним системом.

### 15.2.1 Геометријска својства

**Деонице лука.** Слично претходном случају, половина лука подељена је на четири деонице, као што је приказано на слици 37а. Тространи део лука изнад нападне тачке  $B$  хоризонталне силе  $H$  на теменом пресеку, замењен је тачкастим оптерећењем које делује у оси симетрије лука (попут оног код троугластог лука разматраног у § 7.2.2 и преломљеног лука у поглављу 9). Половина овог дела представља деоницу 0, тежине  $W_0$ , која делује у тачки  $B$  (в. слику 37г), а дата је следећим изразом:

$$W_0 = \frac{1}{2} q_c^2 \sin \alpha \cos \alpha . \quad (186)$$

Међусобна зависност геометријских чинилаца осе (в. слику 37б) псеудолука из четирију средишта дата је следећим обрасцима:

$$h = r \cos \alpha + (l - r + r \sin \alpha) \tan \alpha , \quad (187a)$$

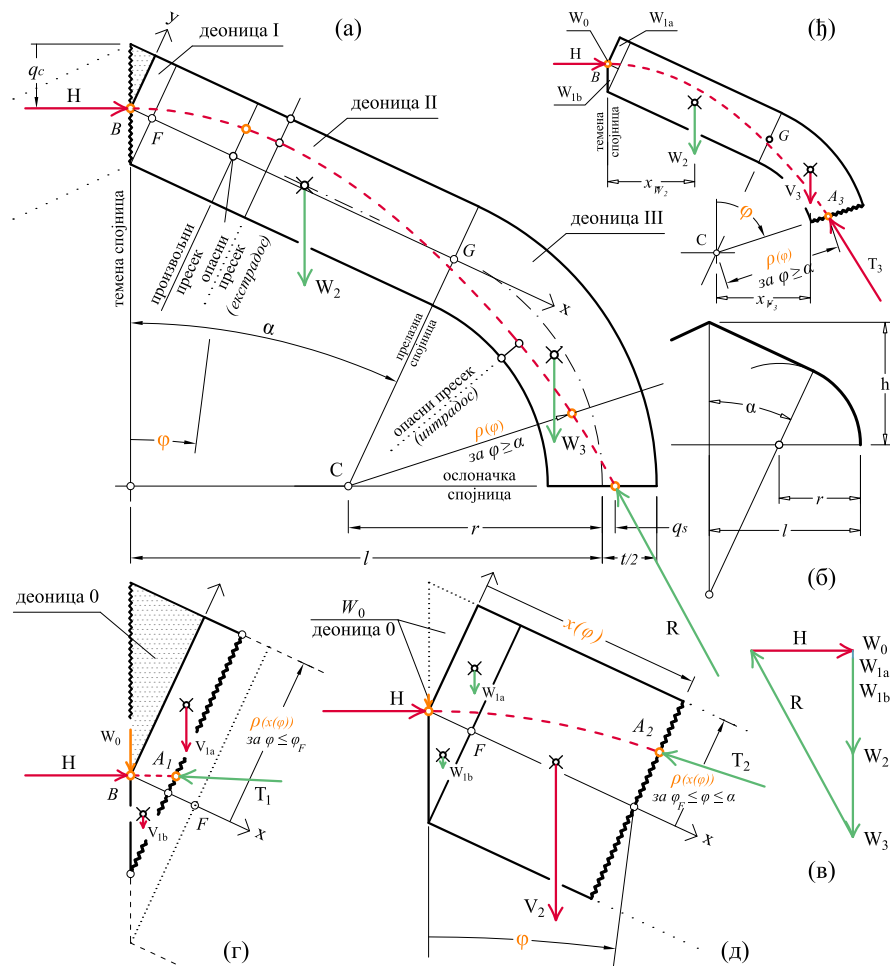
$$r = \frac{l \sin \alpha - h \cos \alpha}{\sin \alpha - 1} . \quad (187б)$$

Почетак правоуглог координатног система, коришћеног за испитивање горњег дела лука (деонице I и II), смештен је у нападну тачку  $B$  хоризонталне силе  $H$  у темену, а  $x$ -оса је постављена у правцу осе правог дела лука (в. слику 37а). Положај тачака  $F$  и  $G$  на  $x$ -оси, које се редом налазе на спојницама између деоница I, II и III (в. слику 37а,б), дат је следећим изразима који представљају њихове апсцисе:

$$x_F = t \tan \alpha - q_c \sin \alpha , \quad (188a)$$

$$\begin{aligned} x_G &= \sin \alpha \left[ \cot \alpha (l - r) + \frac{1}{2} t \sec \alpha + h - q_c \right] \\ &= (l - r) \sec \alpha - q_c \sin \alpha + \frac{1}{2} (2r + t) \tan \alpha . \end{aligned} \quad (188б)$$

С друге стране, почетак поларног координатног система, коришћеног при испитивању доњег дела лука (деоница III), постављен је у тачки  $C$ . Како би се спровело једнообразно испитивање при којем је положај произвољног пресека у оквиру и горњег и доњег



Слика 37. (а) Геометријски чиниоци псеудолука из четирију средшита, (б) пропорције лука, (в) план сила (г) темени део лука (пресек у оквиру деонице I), (д) средњи део лука (пресек у оквиру деонице II), (е) ослоначки део лука (пресек у оквиру деонице III)

дела лука одређен углом  $\varphi$ , следећим обрасцем успостављена је веза правоуглих и поларних координата:

$$x(\varphi) = \left[ (l - r) \cot \alpha + h - q_c + \frac{t}{2} \sec \alpha \right] \sin \varphi \sec(\alpha - \varphi). \quad (189)$$

Тако је угао  $\varphi_F$ , који одговара тачки  $F$  односно њеној апсциси  $x_F$ ,

одређен следећим изразом:

$$\varphi_F = \arctan \left[ \frac{x_F \cos \alpha}{\cot \alpha(l-r) + \frac{1}{2}t \sec \alpha - x_F \sin \alpha + h - q_c} \right], \quad (190)$$

док прелазни угао  $\alpha$  одговара тачки  $G$  (в. слику 37а,ђ).

**Тежина коначног дела лука.** Уколико произвољни пресек на удаљености  $x$  не сече интрадос, те се налази у оквиру деонице I, одговарајућа тежина, представљена површином правоуглог трапеца, може бити растављена на правоугаони део  $V_{1a}$  и троугаони део  $V_{1b}$ , као што је приказано на слици 37г. Њихове величине одређене су следећим изразима:

$$\begin{aligned} V_{1a}(x(\varphi)) &= x(\varphi) q_c \cos \alpha \\ &= \frac{q_c \cos \alpha \sin \varphi}{\cos(\alpha - \varphi)} \left[ \cot \alpha(l-r) + \frac{1}{2}t \sec \alpha + h - q_c \right], \quad (191a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{1b}(x(\varphi)) &= \frac{1}{2} x(\varphi)^2 \cot \alpha \\ &= \frac{1}{2} \frac{\cot \alpha \sin^2 \varphi}{\cos^2(\alpha - \varphi)} \left[ \cot \alpha(l-r) + \frac{1}{2}t \sec \alpha + h - q_c \right]^2. \quad (191b) \end{aligned}$$

Када произвољни пресек достигне крај деонице I, односно када  $x$ -координата достигне вредност  $x_F$  (тада угао  $\varphi$  има вредност  $\varphi_F$ ), добијају се тежине  $W_{1a}$  и  $W_{1b}$ , чији збир представља тежину деонице I (в. слику 37д):

$$W_{1a} = x_F q_c \cos \alpha, \quad (192a)$$

$$W_{1b} = \frac{1}{2} x_F^2 \cot \alpha. \quad (192b)$$

Уколико је произвољни пресек у оквиру деонице II (в. слику 37д), одговарајућа тежина  $V_2$  представљена је правоугаоном површином:

$$\begin{aligned} V_2(x(\varphi)) &= (x(\varphi) - x_F) t \\ &= t \left[ \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\alpha - \varphi)} \left( \frac{\frac{l-r}{\sin \alpha} + r + \frac{t}{2}}{\cos \alpha} - q_c \right) + q_c \sin \alpha - t \tan \alpha \right]. \quad (193) \end{aligned}$$

Када произвољни пресек дође до краја правог дела лука, односно када  $x$ -координата достигне своју највећу могућу вредност  $x_G$  (тада угао  $\varphi$  заузима вредност  $\alpha$ ), добија се тежина  $W_2$  деонице II:

$$W_2 = (x_G - x_F) t = t \sec \alpha \left[ l - r - \left( \frac{t}{2} - r \right) \sin \alpha \right]. \quad (194)$$

Тежина  $V_3$  дела лука у оквиру деонице III и тежина  $W_3$  деонице III, исте су као у случају лука из четирију средишта, те су редом дате изразима (173) и (174).

У складу с наведеним, у зависности од положаја произвољног пресека одређеног углом  $\varphi$ , тежина  $V$  коначног дела лука дата је следећим изразима:

$$V(\varphi) = V_{1a}(\varphi) + V_{1b}(\varphi) \quad \text{за } 0 < \varphi \leq \varphi_F, \quad (195a)$$

$$V(\varphi) = W_{1a} + W_{1b} + V_2(\varphi) \quad \text{за } \varphi_F < \varphi \leq \alpha, \quad (195b)$$

$$V(\varphi) = W_{1a} + W_{1b} + W_2 + V_3(\varphi) \quad \text{за } \alpha < \varphi \leq \pi/2, \quad (195b)$$

где су  $V_{1a}$ ,  $V_{1b}$ ,  $W_{1a}$ ,  $W_{1b}$ ,  $V_2$ ,  $W_2$  и  $V_3$  редом дати изразима (191a–194) и (173). С обзиром на односе дате у изразу (187), могуће је усвојити да улазни чинилац, поред величина  $l$  и  $\alpha$ , буде или величина  $r$  или величина  $h$ .

**Тежиште коначног дела лука.** У складу са сликом 37Г, апсцисе  $x_{V_{1a}}$  и  $x_{V_{1b}}$  тежишта делова  $V_{1a}$  и  $V_{1b}$  у оквиру деонице I, респективно, дате су хоризонталним растојањем од вертикалне осе симетрије лука:

$$\begin{aligned} x_{V_{1a}}(x) &= \frac{1}{2}(x + q_c \sin \alpha) \cos \alpha \\ &= \frac{1}{2} \cos \alpha \left\{ \frac{\sin \varphi}{\cos(\alpha - \varphi)} \left[ \frac{(l - r)}{\tan \alpha} + \frac{1}{2} \frac{t}{\cos \alpha} + h - q_c \right] + q_c \sin \alpha \right\}, \end{aligned} \quad (196a)$$

$$\begin{aligned} x_{V_{1b}}(x) &= \frac{1}{3} x \cos \alpha \\ &= \frac{1}{6} \frac{\sin \varphi}{\cos(\alpha - \varphi)} \left\{ 2 \cos \alpha \left[ \frac{(l - r)}{\tan \alpha} + h - q_c \right] + t \right\}. \end{aligned} \quad (196b)$$

Даље, апсцисе  $x_{W_{1a}}$  и  $x_{W_{1b}}$  тежишта делова  $W_{1a}$  и  $W_{1b}$ , редом су следеће:

$$x_{W_{1a}} = \frac{1}{2} t \sin \alpha, \quad (197a)$$

$$x_{W_{1b}} = \frac{1}{3} (t - q_c \cos \alpha) \sin \alpha. \quad (197b)$$

Апсциса  $x_{V_2}$  тежишта коначног дела  $V_2$  у оквиру деонице II, дата

је следећим изразом:

$$x_{V_2}(x) = \left[ \frac{1}{2} (x + x_F) + \left( q_c \cos \alpha - \frac{t}{2} \right) \tan \alpha \right] \cos \alpha$$

$$= \frac{\left\{ \begin{array}{l} 2 \cos \alpha \cot \alpha \sin \varphi (l - r - q_c \sin \alpha \cos \alpha) + \\ \sin \varphi [2 \sin \alpha (l - r) + 2 r \sin^2 \alpha + t] + \\ 2 \cos^2 \alpha (q_c \sin \alpha \cos \varphi + r \sin \varphi) \end{array} \right\}}{4 \cos(\alpha - \varphi)}, \quad (198)$$

док је апсциса  $x_{W_2}$  тежишта деонице II:

$$x_{W_2} = \frac{1}{2} (r \sin \alpha + \frac{t}{2} \sin \alpha + l - r). \quad (199)$$

На основу изведених једначина, апсциса  $x_V$  тежишта коначног дела у зависности од положаја произвољног пресека одређеног углом  $\varphi$ , дата је следећим изразима:

$$x_V(\varphi) = \frac{V_{1a}(\varphi)x_{V_{1a}}(\varphi) + V_{1b}(\varphi)x_{V_{1b}}(\varphi)}{V(\varphi)} \quad \text{за } 0 < \varphi \leq \varphi_F, \quad (200a)$$

$$x_V(\varphi) = \frac{W_{1a}x_{W_{1a}} + W_{1b}x_{W_{1b}} + V_2(\varphi)x_{V_2}(\varphi)}{V(\varphi)} \quad \text{за } \varphi_F < \varphi \leq \alpha, \quad (200b)$$

$$x_V(\varphi) = \frac{\left[ \begin{array}{l} W_{1a}(x_{W_{1a}} - l + r) + W_{1b}(x_{W_{1b}} - l + r) + \\ W_2(x_{W_2} - l + r) + V_3(\varphi)x_{V_3}(\varphi) \end{array} \right]}{V(\varphi)} \quad \text{за } \alpha < \varphi \leq \pi/2, \quad (200b)$$

где су величине  $x_{V_{1a}}$ ,  $x_{V_{1b}}$ ,  $x_{W_{1a}}$ ,  $x_{W_{1b}}$ ,  $x_{V_2}$ ,  $x_{W_2}$  и  $x_{V_3}$  редом дате изразима (196a–(199)) и (177).

### 15.2.2 Хоризонтални потисак и потпорна линија

Из равнотеже момената за тачку  $S$  добија се величина хоризонталног потиска:

$$H = \frac{\left[ \begin{array}{l} W_0 s + W_{1a} (s - x_{W_{1a}}) + W_{1b} (s - x_{W_{1b}}) + \\ W_2 (s - x_{W_2}) + W_3 \left( r + \frac{t}{2} - q_s - x_{W_3} \right) \end{array} \right]}{h + \frac{t}{2 \cos \alpha} - q_c}, \quad (201)$$

где су величине  $W_0, W_{1a}, W_{1b}, W_2, W_3, x_{W_{1a}}, x_{W_{1b}}, x_{W_2}$  и  $x_{W_3}$  редом дате изразима (186), (192a), (192b), (194), (174), (197a), (197b), (199) и (178).

Равнотежа момената за тачку  $A$  на произвољном пресеку у оквиру горњег дела лука (деонице I и II) и доњег (деоница III; в. слику 36г) изражена је следећим једнакостима:

$$H \sin \alpha x - H \cos \alpha \rho(\varphi) = \begin{bmatrix} W_0(\rho \sin \varphi - e) + \\ V(\varphi)(\rho \sin \varphi - x_V(\varphi)) \end{bmatrix}$$

за  $0 < \varphi \leq \alpha$ , (202a)

$$H(h + t/2 \sec \alpha - q_c - \rho \cos \varphi) = \begin{bmatrix} W_0(l - r + \rho \sin \varphi) + \\ V(\varphi)(\rho \sin \varphi - x_V(\varphi)) \end{bmatrix}$$

за  $\alpha < \varphi \leq \pi/2$ . (202b)

Одатле следи удаљеност потпорне линије (нападне тачке  $A$  резултанте  $T$ ) на произвољном пресеку под углом  $\varphi$  од интрадоса у оквиру горњег, правог дела лука (деонице I и II) односно удаљеност од тачке  $C$  у оквиру доњег дела (деоница III) лука:

$$\rho(\varphi) = \frac{H \sin \alpha x(\varphi) - x(\varphi)(W_0 + V(\varphi)) \cos \alpha + V(\varphi)x_V(\varphi)}{(W_0 + V(\varphi)) \sin \alpha + H \cos \alpha}$$

$$= \frac{\left\{ \begin{array}{l} [(l - r) \cot \alpha + h - q_c + t/2 \sec \alpha] \sin \varphi \sec(\alpha - \varphi) \\ [H \sin \alpha - (W_0 + V(\varphi)) \cos \alpha] + V(\varphi)x_V(\varphi) \end{array} \right\}}{(W_0 + V(\varphi)) \sin \alpha + H \cos \alpha}$$

за  $0 < \varphi \leq \alpha$ , (203a)

$$\rho(\varphi) = \frac{W_0(r - l) + V(\varphi)x_V(\varphi) + H(h + t/2 \sec \alpha - q_c)}{(W_0 + V(\varphi)) \sin \varphi + H \cos \varphi}$$

за  $\alpha < \varphi \leq \pi/2$ . (203b)

што представља једначину потпорне линије у оквиру псеудолука из четирију средишта. Притом су величине  $W_0, x(\varphi), V(\varphi), x_V(\varphi)$  и  $H$  редом дате изразима (186), (189), (195), (200) и (201), док је веза међу величинама  $r, l$  и  $h$  дата изразом (187).

### 15.3 Минимална дебљина тјудорских лукова

С обзиром на зашиљено теме тјудорских лукова, када је претпостављено гранично стање равнотеже, размештај зглобова (опасних пресека) је исти као у случају преломљених лукова (в. слику



25а,б,г). Стога могући механизми слома могу бити одређени истоветним резоновањем, поштујући правац пукотина на месту зглобова у складу с примењеном стереотомијом.

**Одређивање минималне дебљине лука из четирију средишта.** Зглоб може да настане на интрадосу или екстрадосу, и то у оквиру горње или доње деонице лука, у зависности од облика лука. Вредности, тј. удаљености потпорне линије од екстрадоса и интрадоса, које се привремено чувају у одговарајућим списковима (листама), добијају се на основу следећих израза:

$$\delta_{ex} = R_{ex} - \rho(\varphi) \quad \text{за горњи део лука,} \quad (204a)$$

$$\delta_{ex} = r_{ex} - \rho(\varphi) \quad \text{за доњи део лука,} \quad (204б)$$

$$\delta_{in} = \rho(\varphi) - R_{in}, \quad (204в)$$

$$\delta_{in} = \rho(\varphi) - r_{in}. \quad (204г)$$

где су  $R_{ex}$ ,  $R_{in}$ ,  $r_{ex}$  и  $r_{in}$  редом полупречници екстрадоса и интрадоса горње и доње деонице лука, а величина  $\rho(\varphi)$  је дата изразом (203).

**Одређивање минималне дебљине псеудолука из четирију средишта.** За горњи, прави, део псеудолука из четирију средишта, удаљености потпорне линије од екстрадоса и интрадоса дате су следећим изразима:

$$\delta_{ex} = q_c \cos \alpha - \rho(\varphi), \quad (205a)$$

$$\delta_{in} = t - q_c \cos \alpha + \rho(\varphi). \quad (205б)$$

док је за доњи део лука ова удаљеност (као и у претходном случају) одређена изразима (204б) и (204г).

#### 15.4 Преглед резултата: тјудорски лукови

У складу с поступцима описаним у поглављу 12, као и изразима датим у претходном одељку, спроведен је прорачун за лукове из четирију средишта различитих пропорција, те су добијене нумеричке вредности њихове теоријске минималне дебљине.

**Лук из четирију средишта.** За лук из четирију средишта усвојено је да улазни чиниоци прорачуна буду полупречник  $r$  доњег дела лука, полураспон  $l$ , ексцентрицитет  $e$  (однос  $r : l : e$ , односно однос  $l : h$  полураспона и висине осе лука) и прелазни угао  $\alpha$



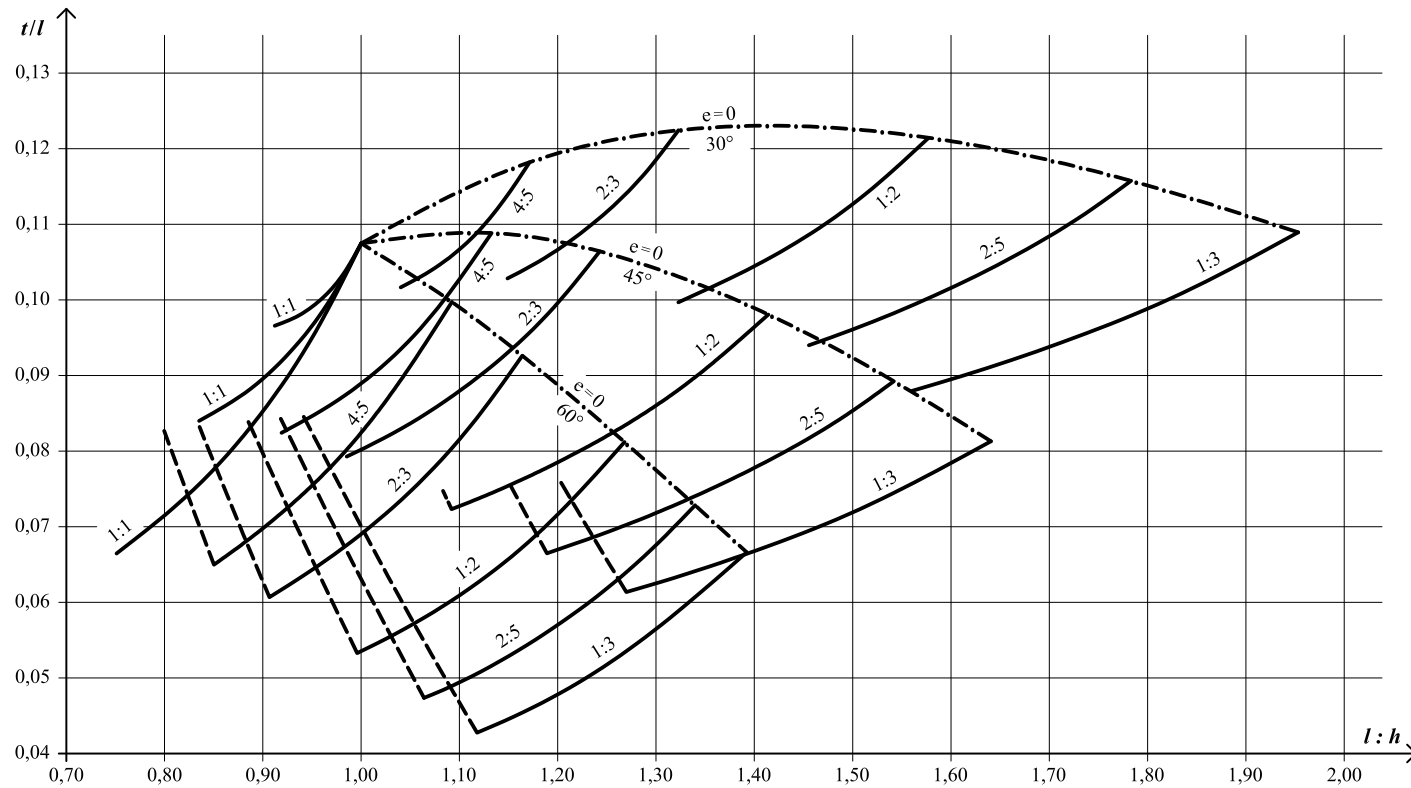
60 степени. За сваки разматрани лук одређен је и положај опасног пресека (зглоба) на интрадосу, а означен је углом  $\beta_{in}$ . Може се закључити да се у случају првих двеју наведених величина прелазног угла  $\alpha$  опасни пресек налази у оквиру доњег дела лука ( $\beta_{in} > \alpha$ ), док је у потоњем случају опасни пресек у близини прелазног пресека, а може бити или у горњем или у доњем делу лука.

На основу добијених вредности, може се успоставити веза између облика тјудорског лука и његове минималне дебљине, што је графички представљено дијаграмом на слици 38, који садржи три фамилије кривих с обзиром на различите прелазне углове. Уз линије је назначен однос  $r : l$  полупречника доњег дела и полураспона лука. Делови кривих приказани пуном линијом односе се на механизам слома са 6 зглобова (в. слику 35а; уп. са сликом 25б); може се уочити да у том случају минимална дебљина опада с порастом ексцентрицитета (односно сразмерна је односу  $l : h$ ). С друге стране, део приказан испрекиданом линијом односи се на механизам слома с 5 зглобова (уп. са сликом 25г); овде је зависност приближно линеарна, а минимална дебљина је сразмерна ексцентрицитету (односно обрнуто сразмерна односу  $l : h$ ). Три црта-тачка линије односе се на нулти ексцентрицитет тј. на елипсасте лукове (уп. с резултатима у табели 9).<sup>3</sup> Може се закључити да за сваки облик лука најмања вредност минималне дебљине одговара прелазу с једног на други механизам слома (заправо граничном механизму слома са седам зглобова). С друге стране највеће вредности минималне дебљине одговарају нултом ексцентрицитету (елипсастим луковима).

**Псеудолук из четирију средишта.** Нумеричке вредности теоријске минималне дебљине, изражене односом  $t/l$  дебљине и полураспона лука, за различите пропорције псеудолукова из четирију средишта дате су у табели 12. Усвојено је да улазни чиниоци прорачуна буду однос  $r : l$  полупречника доњег дела лука и полураспона лука и прелазни угао  $\alpha$  (обухватни угао горњег дела лука). Графички приказ различитих облика минималне дебљине ових лукова дат је у Додатку Д на страни 252.

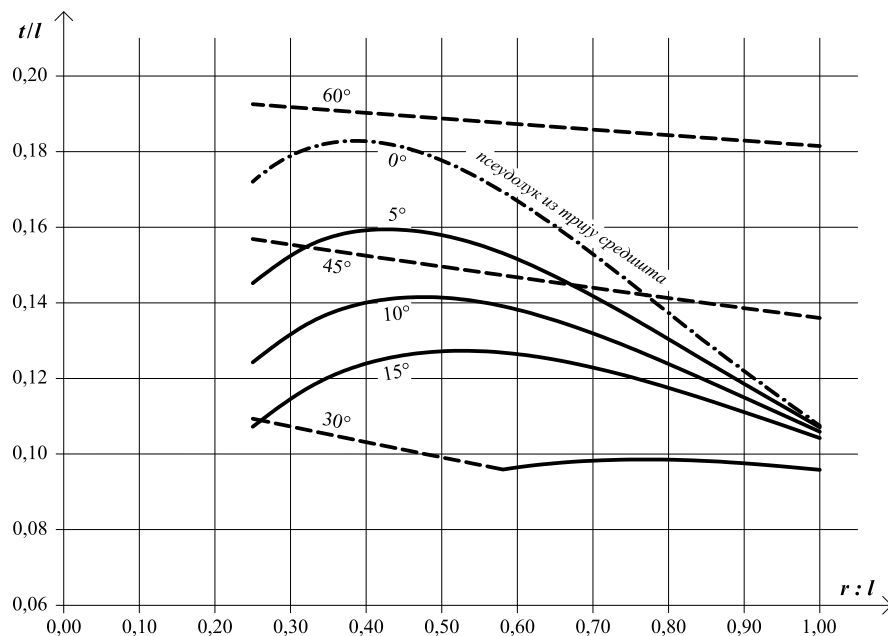
Обухваћене су различите величине прелазног угла, од 0 до 60 степени (где нулти угао одговара поликружном луку). За сваки разматрани лук одређен је и положај опасног пресека (зглоба) на екстрадосу и интрадосу, који су редом означени угловима  $\beta_{ex}$  и  $\beta_{in}$ . Може се закључити да се у свим случајевима опасни пресек с обзиром на екстрадос налази у оквиру горњег дела лука, док се

<sup>3</sup> Заједничко исходиште ових трију линија односи се на полукружни лук.



**Слика 38.** Дијаграм који успоставља везу између минималне дебљине  $t/l$  и облика лука из четирију средишта (датог односом  $l:h$  полураспона и висине лука, прелазним углом  $\alpha$  и ексцентрицитетом  $e$ ; нулти ексцентрицитет одговара елипсастим луковима)





**Слика 39.** Дијаграм који успоставља везу између минималне дебљине  $t/l$  и облика псеудолука из четирију средишта (датог прелазним углом  $\alpha$  и односом  $r:l$  полупречника доњег дела лука и полураспона; нулта вредност угла  $\alpha$  одговара псеудолуковима из трију средишта)

се уочити да је у потоњем случају зависност приближно линеарна те да је минимална дебљина обрнуто сразмерна односу  $r:l$ . Поред тога, у првом случају минимална дебљина опада с порастом прелазног угла, док у другом расте. Такође се може уочити да на промену вредности минималне дебљине већи утицај има величина прелазног угла него однос  $r:l$ . Уз то се с порастом величине прелазног угла смањује разлика између минималне и максималне вредности  $t/l$  која одговара одређеном углу (од приближно 30% за  $\alpha = 5^\circ$  до приближно 5% за  $\alpha = 60^\circ$ ).

## Глава V

---

### Испитивање равнотеже простих крстастих сводова

|

—

|

—

|

—

|

—



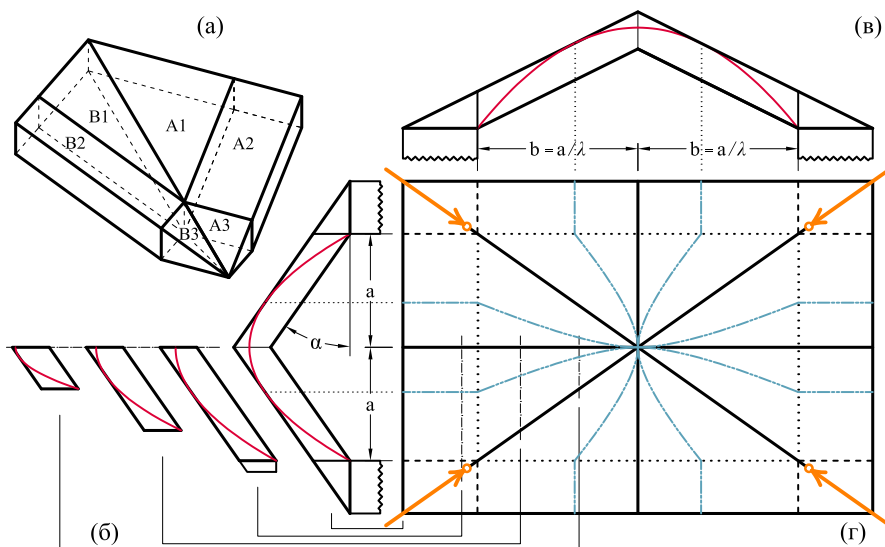
## Троугаони крстасти сводови

Испитивање спроведено у одељку 7.1, где је троугаони лук обрађен у складу с вертикалном стереотомијом, може бити примењено у испитивању равнотеже простог троугаоног крстасти свода образованог од двају троугаоних сводова различитог распона (слика 40). Испитивање се спроводи у складу с методолошким оквиром постављеним у поглављу 4. Наиме, троугаони свод се разматра као систем међусобно независних елементарних троугаоних лукова (који чине свод над сводним пољем) у паралелним вертикалним равнима, чији се појединачних потисци нижу дуж укрснице и посредно се преносе до ослонаца (в. слику 43). С друге стране, потисци подужног и попречног лука непосредно се преносе на ослонаце. Потпорне линије елементарних лукова образују потпорну површ унутар свода, којом је представљен унутрашњи ток сила.<sup>1</sup>

Како су укрснице вертикалне, у основи свода пројигирају се у укрштене дужи представљене дијагоналама правоугаоног сводног поља, као што је приказано на слици 40г. Средиште тј. теме свода одређено је пресеком оса тј. темених линија подужног и попречног свода. Према томе, имајући у виду двоструку симетрију крстасти свода, укрснице деле свод на четири истоветна дела (в. слику 40а,г). Шта више, у складу са сликама 62 и 40, могуће је успоставити афинитет између делова који одговарају подужном своду (распона  $2a$ ) и попречног своду (распона  $2b$ ). Сходно томе, коефицијент  $\lambda$  представља однос распона подужног и попречног свода (односно ободног лука), те износи  $\lambda = b/a$ . Стога је, као што је показано у поглављу 21, за испитивање равнотеже простог крстасти свода довољно испитивање једне његове осмине, а остали делови испитују се с обзиром на пропорције сводног поља.<sup>2</sup>

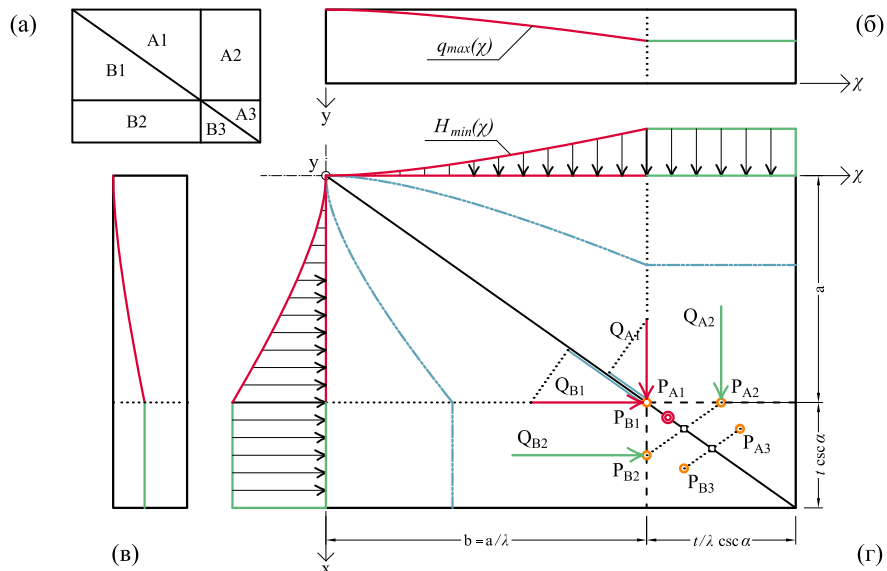
<sup>1</sup> На предстојећим цртежима приказани су сводови минималне дебљине.

<sup>2</sup> Ваља напоменути да се целокупно разматрање, уместо превасходног испитивања меродавног дела па накнадне примене афинитета, може спровести непосредним уметањем коефицијента афинитета  $\lambda$  у одговарајуће изразе.



**Слика 40.** Троугаони крстастии свод минималне дебљине: (а) четвртина свода, (б) подужни ободни лук и пресеци подужног троугаоног свода с придруженим потпорним линијама, (в) попречни ободни лук с назначеном потпорном линијом (г) основа свода (сводно поље)

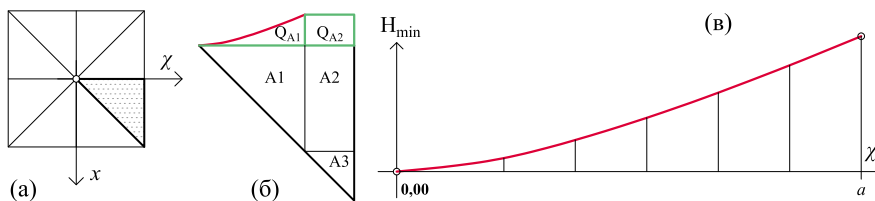
Размотримо четвртину свода чије се оптерећење преноси на припадајући стуб (слике 40а, 41 и 43б). Део  $A_1$  представља део свода који одговара подужном троугаоном своду полураспона  $a$ , од средишта свода до ослонца. Припадајући потисак, чије су хоризонтална и вертикална компонента редом означене са  $Q_{A_1}$  и  $P_{A_1}$ , преноси се на унутрашњи ћошак ослонца, на месту где се доња ивица сводне површи састаје са стубом. Део  $A_2$  одговара подужном троугаоном луку (своду) полураспона  $a$ . Припадајући хоризонтални и вертикални потисак, редом означени са  $Q_{A_2}$  и  $P_{A_2}$ , у виду њихове резултанте преносе се на средиште припадајуће унутрашње ивице стуба. Део  $A_3$  је део свода изнад стуба. Његова тежина делује у тежишту, које се пројцира у тежиште припадајуће троугаоне основе (половина правоугаоне основе стуба), и непосредно се (вертикално) преноси на стуб. С друге стране, како су делови  $B_1$ ,  $B_2$  и  $B_3$  редом афини с деловима  $A_1$ ,  $A_2$  и  $A_3$ , њихово припадајуће десјтво може бити израчунато с обзиром на одговарајући коефицијент  $\lambda$  (в. поглавље 21).



Слика 41. Четвртине троугаоног крстастог свода: (а) шема, (б) темени пресек подужног свода, (в) темени пресек попречног свода, (г) основа с назначеним силама које се преносе на ослонац

### 16.1 Хоризонтални потисак троугаоних крстастих сводова

Прорачун је вршен за меродавни део свода (слика 42), а накнадно су примењени коефицијенти афинитета. Полурапон  $s$  елементарног лука зависи од његовог положаја у односу на средиште свода, који је одређен координатом  $\chi$  (уп. слике 41б, 41г и 42). Када је  $\chi = 0$ , лук је вертикална дуж кроз средиште свода, а када достигне своју максималну вредност  $\chi = a$  остварује се полурапон  $a$  подужног лука.



Слика 42. Меродавни део свода: (а) положај, (б) деонице, (в) дијаграм променљивог дела хоризонталног подељеног оптерећења

Као што је наведено, потисци елементарних лукова надовезују се уздуж укрснице крстастог свода; према томе, хоризонтални потисак  $Q_{A1}$  представља збир хоризонталних потисака елементарних лукова у оквиру дела  $A1$ , и израчунава се на следећи начин:

$$\begin{aligned}
Q_{A1} &= \int_0^a H_{min}(\chi) d\chi \\
&= \frac{t}{6 \sin \alpha} \left\{ 3\chi^2 + \frac{6t\chi}{\sin \alpha} - \frac{2\sqrt{t(2\chi \sin \alpha + t)^3}}{\sin^2 \alpha} \right\} \Big|_0^a \\
&= \frac{t}{6 \sin \alpha} \left\{ 3a^2 + \frac{2(t^2 + 3at \sin \alpha - \sqrt{t(t + 2a \sin \alpha)^3})}{\sin^2 \alpha} \right\},
\end{aligned} \tag{206}$$

Величина хоризонталног потиска  $Q_{A2}$  одговара подужном ободном луку и израчунава се на следећи начин:

$$\begin{aligned}
Q_{A2} &= H_{min}(s = a) \frac{t}{\sin \alpha} \\
&= \frac{a^2 t^2}{\sin \alpha [t + a \sin \alpha + \sqrt{t(t + 2a \sin \alpha)}]},
\end{aligned} \tag{207}$$

где је вредност  $s$  која учествује у  $H_{min}$  (израз (26)) замењена величином  $a$ .

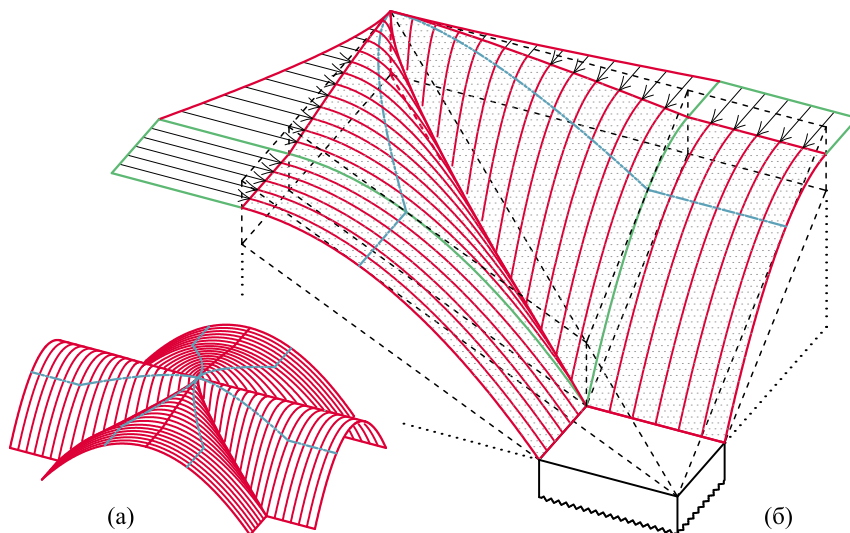
Укупни потисак дела  $A$  једнак је збиру потисака деоница  $A1$  и  $A2$ , те је на основу израза (206) и (207) следећи:

$$\begin{aligned}
Q_A &= Q_{A1} + Q_{A2} \\
&= \frac{a^2 t (7t + 3a \sin \alpha - \sqrt{t(2a \sin \alpha + t)})}{6 \sin \alpha (\sqrt{t(2a \sin \alpha + t)} + a \sin \alpha + t)}.
\end{aligned} \tag{208}$$

Како би била успостављена зависност величине  $Q$  у односу на распон  $s$ , потребно је уврстити вредност  $a = s - t/\sin \alpha$ . Уз то, усвајањем јединичне вредности дужине  $s$ , на основу израза (208), величина меродавног потиска  $Q$  је следећа:

$$Q = \frac{t(t - \sin \alpha)^2 (3 \sin \alpha - \sqrt{t(2 \sin \alpha - t)} + 4t)}{6 \sin^3 \alpha [\sin \alpha + \sqrt{t(2 \sin \alpha - t)}]}. \tag{209}$$

Изведени изрази, као што је напоменуто, важе за меродавни део



**Слика 43.** (а) Аксонометријски приказ потпорне површи троугаоног крстастог свода, (б) четвртина потпорне површи с придруженим подељеним оптерећењем дуж темених пресека

свода тј. осмину крстастог свода над квадратном основом. За друкчије пропорције сводног поља, уз разматрање стварног оптерећења, прорачун се спроведи у складу с алгоритмом описаним у одељку 22.5 на страни 213, као и изразима (238) и (240). Према томе, уколико се разматра крстаста свод над правоугаоном основом, код којег је однос полураспона попречног и подужног свода дат коефицијентом  $\lambda = l/s$ , потисци делова  $A$  и  $B$  су следећи:

$$Q_A = Q \gamma s^2 l, \quad (210a)$$

$$Q_B = Q \gamma l^2 s. \quad (210b)$$

Као што је показано у одељку 21.2 у случају простог крстастог свода (в. слику 64г) потисци управни на правац укрснице се потиру, те је потисак у правцу укрснице тј. дијагонала сводног поља. Према томе је укупни хоризонтални потисак на ослонац дат следећим изразом:

$$\begin{aligned} \Sigma Q &= Q_A \cos \psi + Q_B \sin \psi \\ &= Q \gamma s l \sqrt{s^2 + l^2}, \end{aligned} \quad (211)$$

где угао  $\psi$  представља угао између попречног ободног лука и укрснице, односно  $\tan \psi = \lambda = l/s$ , те је  $\sin \psi = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+1}}$  и  $\cos \psi = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2+1}}$ .

Уколико се претходни израз исказа у зависности од дужине  $s$  и коефицијента афинитета  $\lambda$ , геометријски чинилац постаје  $\lambda\sqrt{1+\lambda^2}$ , те је укупни дијагонални потисак  $R_Q$  на ослонац следећи:

$$R_Q = Q \gamma s^3 \lambda \sqrt{1 + \lambda^2}. \quad (212)$$

### 16.2 Тежина троугаоних крстастих сводова

С обзиром на описани афинитет, запремине делова  $A1$ ,  $A2$  и  $A3$  с једне стране, и делова  $B1$ ,  $B2$  и  $B3$  с друге стране, означене с  $P_{A1}$ ,  $P_{A2}$ ,  $P_{A3}$  и  $P_{B1}$ ,  $P_{B2}$ ,  $P_{B3}$ , редом су једнаке и дате су следећим изразима:

$$P_{A1} = P_{B1} = \frac{t a^2}{2 \cos \alpha} = \frac{t \left( s - \frac{t}{\sin \alpha} \right)^2}{2 \cos \alpha}, \quad (213a)$$

$$P_{A2} = P_{B2} = \frac{t^2 a}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{t^2 \left( s - \frac{t}{\sin \alpha} \right)}{\sin \alpha \cos \alpha}, \quad (213б)$$

$$P_{A3} = P_{B3} = \frac{t^3}{3 \sin^2 \alpha \cos \alpha}. \quad (213в)$$

У складу с овим изразима, тежина меродавног дела (осмина троугаоног крстастог свода) представља збир  $P_A = P_{A1} + P_{A2} + P_{A3}$ , те је уз усвајање јединичне вредности за  $s$ , дата следећим изразом:

$$P = \frac{s^2 t - \frac{t^3}{3 \sin^2 \alpha}}{2 \cos \alpha}. \quad (214)$$

У складу с изразом (240), тежине делова  $A$  и  $B$  су једнаке, те је укупно вертикално оптерећење које се преноси на један ослонац следеће:

$$\Sigma P = 2 P \gamma s l, \quad (215)$$

односно, изражена помоћу полураспона  $s$  подужног свода и пропорције сводног поља  $\lambda$ , укупна тежина  $R_P$  која се преноси на ослонац дата је следећим изразом:

$$R_P = 2 P \gamma s^2 \lambda. \quad (216)$$

### 16.3 Троугаони крстаста свод минималне дебљине

У § 7.1.1 показано је да је минимална дебљина троугаоног лука сразмерна његовом распону (израз (23)). С обзиром на то да је

троугаони свод састављен од низа елементарних троугаоних лукова разматраних у одељку 7.1, при чему (ободни) лук који је најдаљи од средишта крстастог свода има највећи распон, његова минимална дебљина је меродавна за минималну дебљину свода у целини. Штавише, с обзиром на то да се разматра свод једнообразне дебљине, минимални хоризонтални потисак лукова и положај припадајућих нападних тачака на теменом пресеку могу бити редом срачунати на основу израза (26) и (25).

Када је претпостављена минимална дебљина (израз (23)), тј. када је  $t = \frac{1}{4}a \sin \alpha$ , изрази (206–208) се редом упрошћавају у следеће:

$$Q_{A1,min} = \frac{5 a^3}{96}, \quad (217a)$$

$$Q_{A2,min} = \frac{a^3}{32}, \quad (217b)$$

$$Q_{A,min} = \frac{a^3}{12}. \quad (217b)$$

Даље, како је  $a = s - \frac{t}{\sin \alpha}$  и  $t = \frac{1}{4}a \sin \alpha$  следи да је  $a = \frac{4}{5}s$ , па се уврштавањем тога у израз (217b), уз усвајање јединичне вредности за  $s$ , меродавни потисак своди на број<sup>3</sup>  $Q = 16/375$  (уп. с изразом (209)). Према томе је, у складу с изразом (212), хоризонтални потисак троугаоног крстастог свода минималне дебљине следећи:

$$R_{Q,min} = \frac{16}{375} \gamma s^3 \lambda \sqrt{1 + \lambda^2}. \quad (218)$$

Може се закључити да је ова величина независна од нагибног угла  $\alpha$ . С друге стране, уврштавањем  $t = \frac{1}{5}s \sin \alpha$  у израз (214), уз усвајање јединичне вредности за  $s$ , меродавна запремина се своди на  $37/375 \tan \alpha$  (уп. с изразом (214)), те је у складу с изразом (216) минимално вертикално оптерећење које троугаони крстаста свод преноси на стуб следеће:

$$R_{P,min} = \frac{74}{375} \gamma \lambda s^2 \tan \alpha. \quad (219)$$

<sup>3</sup> Уврштавањем  $a = s - \frac{t}{\sin \alpha}$  у  $t = \frac{a}{4} \sin \alpha$  добија се  $t = \frac{1}{5}s \sin \alpha$ ; вредност  $16/375$  могла се добити и непосредним уврштавањем тога у израз (209), уз усвајање јединичне вредности за  $s$ .

## 16.4 Резултати

На основу израза (218) и (219), уз усвојену јединичну запреминску тежину  $\gamma = 1$  и полураспон  $s = 1$ , у табели 13 дате су нумеричке вредности за минимални хоризонтални (дијагонални) потисак и вертикално оптерећење, које одговарају минималној дебљини троугаоног крстастог свода различитих пропорција  $\lambda$  сводног поља.

**Табела 13.** Минимално хоризонтални потисак  $R_Q$  и вертикално оптерећење  $R_P$  троугаоног крстастог свода минималне дебљине и јединичног полураспона  $s$ , за различите нагибне углове  $\alpha$  и пропорције  $\lambda$  сводног поља

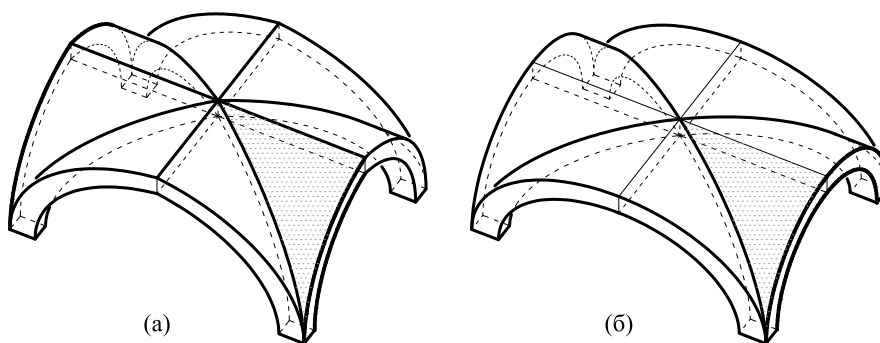
$\alpha$	$\lambda$	1:1	4:3	$\sqrt{2}:1$	3:2	2:1	3:1
15°	$R_{Q,min}$	0,0603	0,0948	0,1045	0,1154	0,1908	0,4048
	$R_{P,min}$	0,0529	0,0705	0,0748	0,0793	0,1058	0,1586
30°	$R_{Q,min}$	0,0603	0,0948	0,1045	0,1154	0,1908	0,4048
	$R_{P,min}$	0,1139	0,1519	0,1611	0,1709	0,2279	0,3418
45°	$R_{Q,min}$	0,0603	0,0948	0,1045	0,1154	0,1908	0,4048
	$R_{P,min}$	0,1973	0,2631	0,2791	0,2960	0,3947	0,5920
60°	$R_{Q,min}$	0,0603	0,0948	0,1045	0,1154	0,1908	0,4048
	$R_{P,min}$	0,3418	0,4557	0,4834	0,5127	0,6836	1,0254
75°	$R_{Q,min}$	0,0603	0,0948	0,1045	0,1154	0,1908	0,4048
	$R_{P,min}$	0,7365	0,9819	1,0415	1,1047	1,4729	2,2094



## Преломљени крстасти сводови

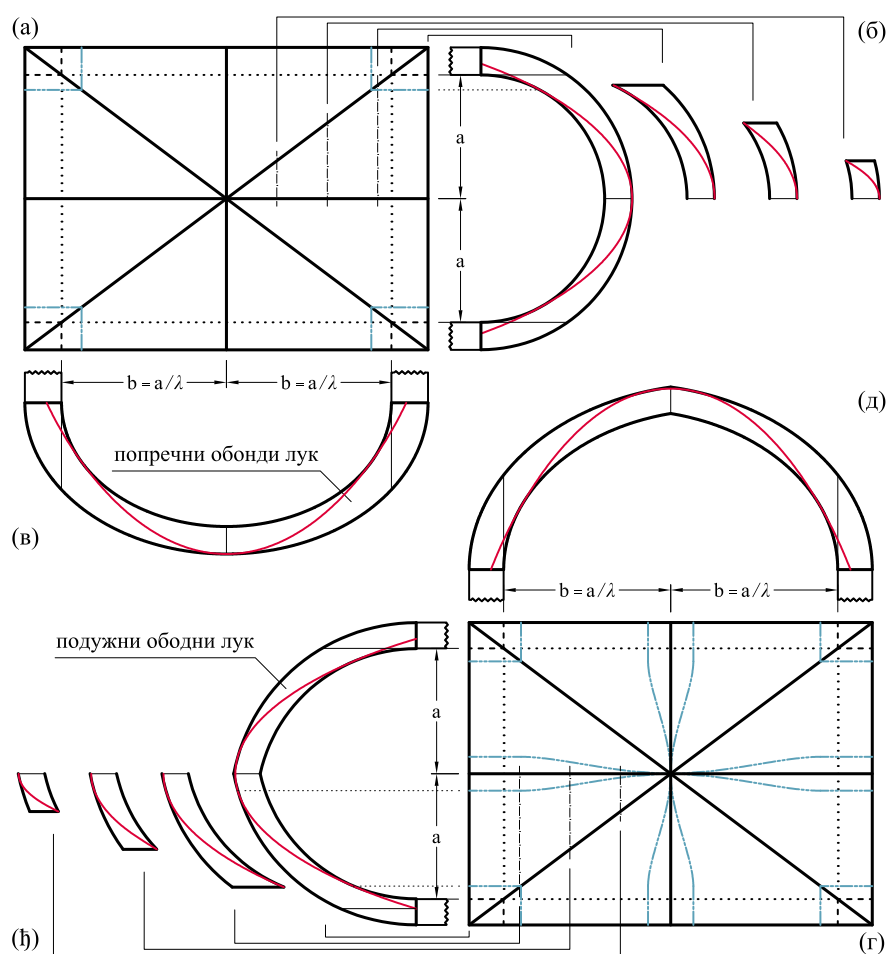
Испитивање равнотеже крстастих сводова образованих од преломљених сводова наликује на поступак описан у претходном поглављу. Међутим, уочљиве су две разлике: у погледу геометријских својстава и, као последица тога, у погледу аналитичких својстава припадајуће потпорне површи односно хоризонталног потиска. За разлику од троугаоних лукова (в. одељак 7.1), код преломљених (и полукружних) лукова није могуће извести аналитички израз за минималну дебљину, односно за минимални хоризонтални потисак, него се ове вредности добијају нумерички итеративним поступком (в. поглавље 10). Стога није могуће аналитички извести образац по којем се мења хоризонтално оптерећење дуж теменог пресека свода.

Ипак, како би се остварила непрекидност потпорне површи, те и хоризонталног оптерећења, могуће је, као што ће бити показано, на основу нумеричких вредности минималног хоризонталног потиска за разне пресеке (елментарне лукове) задовољавајуће учесталости (размака, густине) добити укупни хоризонтални потисак целог свода.



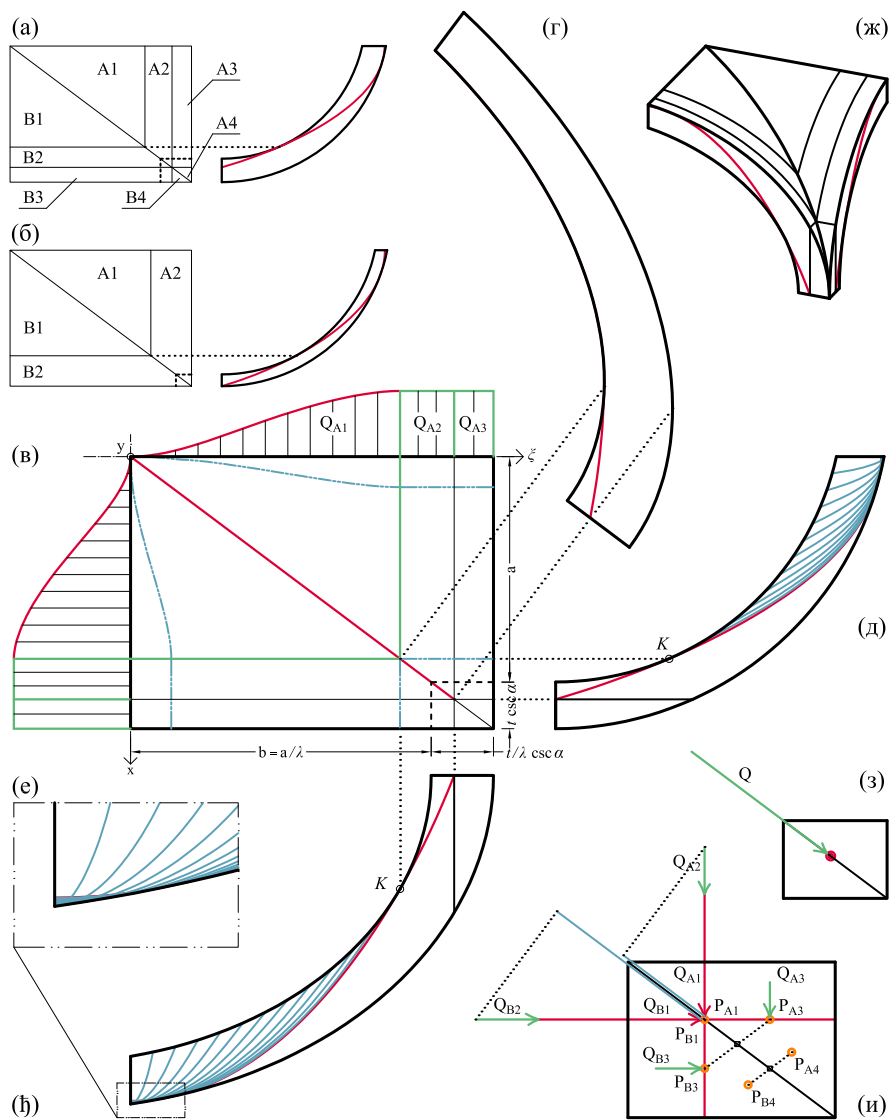
Слика 44. (а) Преломљени и (б) полукружни крстасти свод

Испитивани су сводови чији су ободни лукови (попречни и подужни) право обухватног угла (в. слике 44 и 45, као и слику 5 на стр. 26) и то у складу с вертикалном стереотомијом. Као што је показано, за један такав лук постоји јединствена минимална потпорна линија, која додирује екстрадос у околини темена<sup>1</sup> и интрадос у тачки  $K$  између темена и ослонца (в. слику 46в,г,д,ђ).



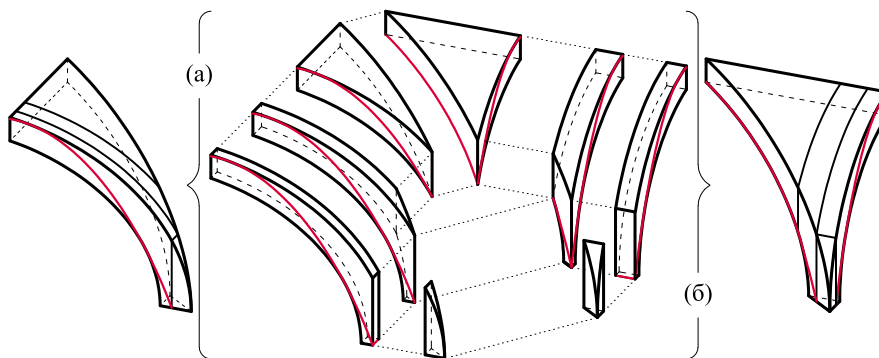
**Слика 45.** Полукружни и преломљени крстасти свод: (а) и (г) основа тј. сводно поље, (б) и (ђ) попречни пресеци подужног свода с припадајућим потпорним линијама, (в) и (д) попречни ободни лук

<sup>1</sup> За нулту вредност ексцентрицитета, у случају полукружног лука, минимална потпорна линија пролази кроз теме на екстрадосу (в. слике 45б,в и 51).



**Слика 46.** Дејства преломљеног крстастог свода: (а) деонице свода, (б) деонице свода (када потпорна линија пролази кроз екстремос ослоначке спојнице), (в) основа четвртине свода с истакнутим подељеним хоризонталним оптерећењем дуж теменог пресека, (г) дијагонални пресек свода (дуж укрснице), (д) подужни ободни лук, (е) попречни ободни лук, (ж) увећани приказ положаја потпорних линија у околини темена, (з) просторни приказ четвртине свода, (и) положај резултујућег дејства на ослонац, (и) дејства на ослонац

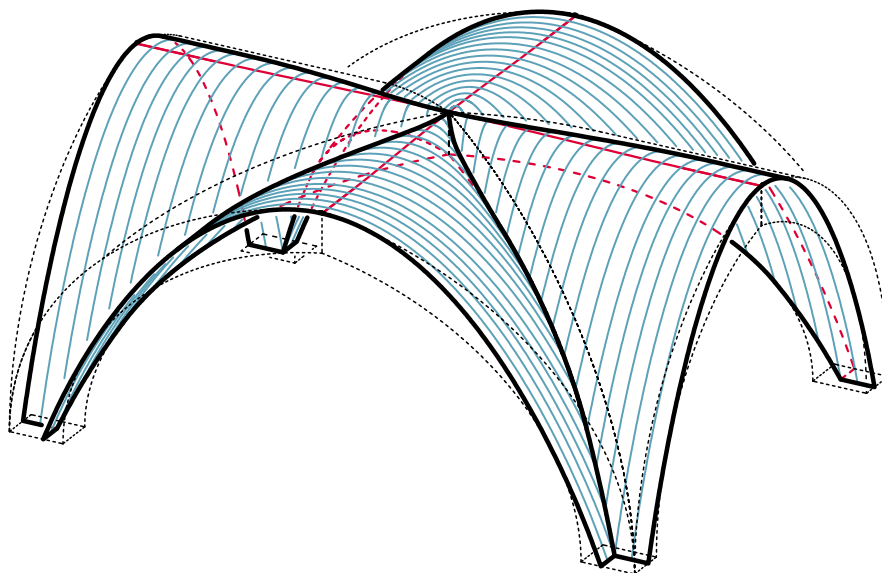
Нека је положај тачке  $K$  одређен углом  $\alpha_{crit}$ , односно дужином  $x_{crit} = R_{in} \sin \alpha_{crit}$ . Уколико испитујемо лукове мањег средишњег угла  $\alpha \leq \alpha_{crit}$  (односно полураспона  $s \leq x_{crit} - e$ ), притом не мењајући остале геометријске чиниоце лука, минимална потпорна линија пролази кроз интрадос на укрсници, док је у темену изнад њега (в. слику 46д,ђ,е). Међутим, лукови чији је обухватни угао већи или једнак углу  $\alpha \geq \alpha_{crit}$ , имаће истоветну минималну потпорну линију (односно њен део) те придружени минимални хоризонтални потисак. Стога ће се за веће вредности обухватног угла  $\alpha$ , минимална потпорна линија само продужавати, те ће се на укрсници удаљавати од интрадоса (в. слику 46г). То значи да се реакције елементарних лукова преломљеног крстастог свода не нижу по доњој ивици укрснице целом њеном дужином (као у случају троугаоног крстастог свода разматраног у претходном поглављу). Тако се резултантно оптерећење свода, сведено на једну силу, не преноси на ћошак стуба него даље од њега, унутар пресека ослонца (стуба), у дијагоналном правцу, као што је приказано на слици 46з,и. Тиме се и део свода који непосредно преноси (само вертикално) оптерећење на стуб смањује, односно не заузима цео део свода над стубом. Даље разматрање је спроведено на примеру простог крстастог свода над правоугаоном основом (слике 44–48); прорачун је вршен за меродавни део свода (слика 49), те су накнадно примењивани коефицијенти афинитета.



**Слика 47.** Склопни приказ четвртине преломљеног крстастог свода: (а) део подужног свода, (б) део попречног свода

У складу с наведеним, четвртина свода може се поделити на четири деонице (1–4), као што је приказано на сликама 46а и 47. Прва деоница обухвата елементарне лукове од темена до лука чија се ми-

нимална потпорна линија подудара с потпорном линијом (заправо њеним горњим делом) ободног лука (лук на удаљености  $x_{crit}$ ). Друга деоница обухвата даље елементарне лукове све док обухватни угао не достигне прав угао (док потпорна линија не достигне раван ослонаца).<sup>2</sup> Трећа деоница обухвата преостале, међусобно истоветне, елементарне лукове до ободног лука. С обзиром на то да је примењена вертикална стереотомија, преостаје део свода који не учествује у елементарним луковима претходних деоница; стога образује четврту деоницу чије је дејство само вертикално и неопредно се преноси на ослонац.<sup>3</sup>



Слика 48. Потпорна површ унутар преломљеног крстастог свода,

### 17.1 Минимални потисак меродавног свода

У оквиру прве деонице величина хоризонталног потиска елементарног лука као и положај тачке у којој потпорна линија додирује

<sup>2</sup> Будући да је минимална потпорна линија на ослоначкој спојници удаљена за величину  $q_{s,max}$  од екстрадоса, овај елементарни лук налазиће се на тој удаљености од ободног лука.

<sup>3</sup> Уколико минимална потпорна линија ободног лука пролази кроз екстрадос на ослоначкој спојници, делови 3 и 4 нестају (в. слику 466).

екстрадос су променљиви, док су у оквиру преосталих деоница то сталне величине, као што се види на слици 46в. Стога је прорачун неопходно спорвести само за прву деоницу, у којој је вредност минималног потиска променљива. Дакле, неопходно је одредити минимални хоризонтални потисак елементарних лукова (в. одељак 12.5), од почетног (на месту  $\alpha_0 = \arcsin(e/R_{in})$ ), који је представљен вертикалном дужи кроз теме свода, до елементарног лука чији је обухватни угао једнак углу  $\alpha_{crit}$ . За преостале деонице вредност подељеног оптерећења добија се непосредно на основу вредности минималног хоризонталног потиска (која је овде непроменљива) и њене дужине распрострања (тј. дебљине деонице).

У оквиру ове дисертације испитани су преломљени лукови различитих ексцентрицитета ( $\xi$ : 0, 1/4, 1/3, 3/5, 1, 3/2) и дебљине ( $t/R$ : од  $t/R_{min}$  до 0,12, односно 0,15 за мање ексцентрицитете). Такође је посебно обрађен и оптимални преломљени лук.

На основу одабраног облика ободног лука (ексцентрицитет  $\xi$  (те тиме и величина  $e$ ) и дебљина  $t/R$ ) одређена је минимална потпорна линија и одговарајући угао  $\alpha_{crit}$  (тачка К у којој додирује интрадос).<sup>4</sup> Уз то је израчуната и удаљеност  $q_{s,max}$  минималне потпорне линије на ослоначкој спојници од екстрадоса.

Као што је наведено у одељку 21.2, меродавно оптерећење односи се на меродавни свод који наткриљује једнакокраки троугао крака једног метра. Сходно томе, за прорачун меродавног свода вредност координате  $\chi$  подударара се с вредношћу координате  $x$ .

Затим је за сваки елементарни лук, чији је положај одређен обухватним углом  $\alpha$  односно удаљеношћу  $\chi = (1 - t/2) \sin \alpha - e$ , и то за усвојен корак увећања обухватнога угла  $0,5^\circ$ , одређена минимална потпорна линија и припадајући минимални хоризонтални потисак.<sup>5</sup> Тако је добијен скуп уређених парова – тачака одређених двама подацима,  $\chi$  и  $H_{min}$ . Другим речима, сваком елементарном луку на удаљености  $\chi$  придружена је вредност минималног хоризонталног потиска  $H_{min}$ , као што је приказано на слици 49в.

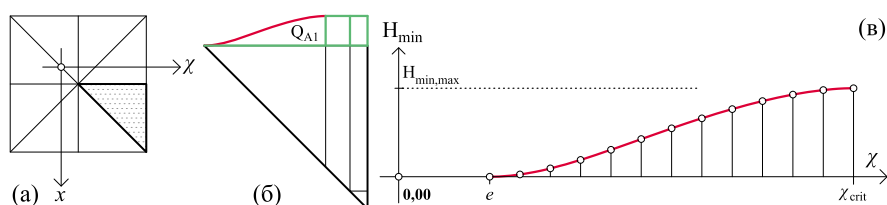
<sup>4</sup> Тачка К, као што је наведено представља границу прве деонице меродавног свода.

<sup>5</sup> Целокупни поступак је аутоматизован и развијен у програмском језику Визуал бејсик за апликације (*Visual Basic for Applications*) те извршаван компајлирањем макроа у Екселовом Визуал бејсик уређивачу (*Excel Visual Basic Editor*) који су повезани с улазним подацима датим у радном листу програма Мајкрософт Ексел (*Microsoft Excel*). Тако је за сваки од 35 испитаних облика лука односно свода испитана равнотежа (израчунат хоризонтални потисак) за у просеку приближно 900 елементарних лукова (укупно преко 32.000). Нумеричке вредности су увезене у програм Волфрам Математика (*Wolfram Mathematica*) те је у њему вршена даља обрада података.

Непрекидност хоризонталног оптерећења дуж темене спојнице свода може се остварити на следећи начин: (а) непосредно, нумеричком интеграцијом (датог скупа тачака), или (б) посредно, одређивањем одговарајуће апроксимативне функције (задовољавајућег степена тачности) те њеном интеграцијом.<sup>6</sup> Показало се да задовољавајућу тачност даје апроксимативна функција у виду полинома шестог степена; ова функција је следећег облика:

$$H_{min}(\chi) = A\chi^6 + B\chi^5 + C\chi^4 + D\chi^3 + D\chi^2 + E\chi + G, \quad (220)$$

а појединачни коефицијенти А–G за различите облике лука дати су у Додатку **Т** у табели 24.



**Слика 49.** Меродавни део преломљеног крстастог свода: (а) положај, (б) деонице, (в) апроксимативна функција подељеног хоризонталног оптерећења

Према томе, хоризонтални потисак  $Q_1$  деонице 1 (уп. слике 46в, 50 и 49б,в) израчунава се на следећи начин:

$$Q_1 = \int_e^{\chi_{crit}} H_{min}(\chi) d\chi. \quad (221)$$

За различите облике ободног лука решења се добијају нумерички, у складу с претходно описаним поступком, а дата су у Додатку **Т** у табели 24.

Потисак  $Q_2$  друге деонице (уп. слике 46в, 50 и 51) представљен је површином правоугаоног дијаграма подељеног оптерећења:

$$Q_2 = H_{min,max}(R_{ex} - q_{s,max} - \chi_{crit}). \quad (222)$$

Слично се израчунава и потисак треће деонице:

$$Q_3 = H_{min,max} q_{s,max}. \quad (223)$$

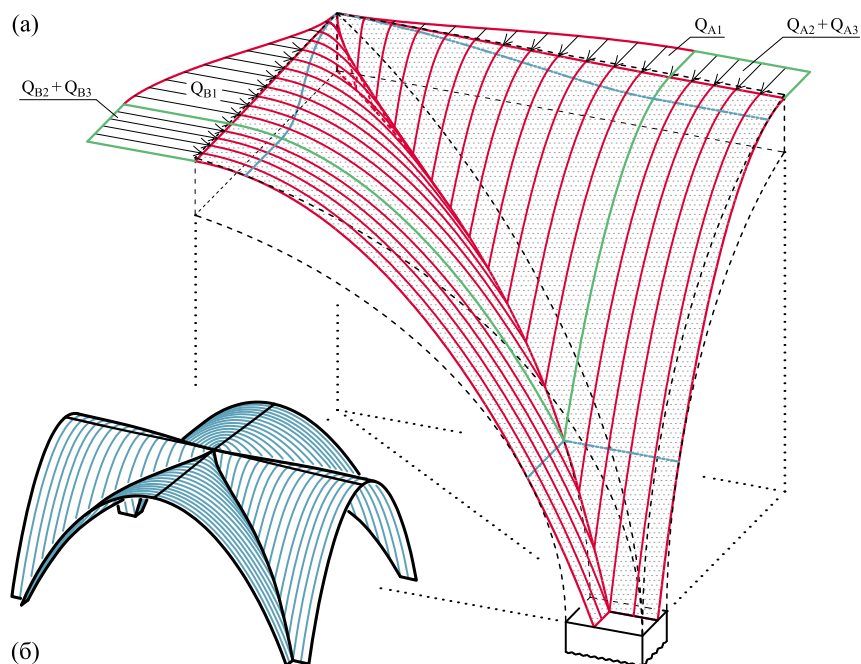
На основу израза (221–223) добија се укупни хоризонтални по-

<sup>6</sup> Оба начина су спроведена, а добијени нумерички резултати су подударни.

тисак  $Q$  меродавног дела свода:

$$\begin{aligned} Q_{R=1} &= Q_1 + Q_2 + Q_3 \\ &= Q_1 + H_{min,max}(R_{ex} - \chi_{crit}). \end{aligned} \quad (224)$$

За различите облике ободног лука нумеричке вредности меродавног потиска дате су у табели 14.



**Слика 50.** Потпорна површ преломљеног крстастог свода: (а) четвртина с приказаним подељеним хоризонталним оптерећењем уздуж теменог пресека попречног и подужног свода; геометријско место опасних пресека на екстрадосу или интрадосу назначени су плавом линијом, (б) приказ у целисти

## 17.2 Запремина меродавног свода

У складу с изразом (128) за површину (односно тежину) преломљеног лука, запремина целокупног свода (односно тежина, уз одговарајућу запреминску тежину употребљеног материјала) може се израчунати збрајањем површина елементарних лукова. Притом је положај елементарног лука, као и до сада, одређен координатом



$\chi$ , те се запремина  $P$  рачуна на следећи начин:

$$\begin{aligned}
P_{R=1} &= \int_e^{R_{in}} V(\chi) d\chi + \int_{R_{in}}^{R_{ex}} V(\chi) d\chi \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} \chi R_{ex}^2 \left[ \arctan \left( \frac{\chi}{\sqrt{R_{ex}^2 - \chi^2}} \right) - \arctan \left( \frac{e}{\sqrt{R_{ex}^2 - e^2}} \right) \right] - \\ \chi R_{in}^2 \left[ \arctan \left( \frac{\chi}{\sqrt{R_{in}^2 - \chi^2}} \right) - \arctan \left( \frac{e}{\sqrt{R_{in}^2 - e^2}} \right) \right] - \\ \chi e \sqrt{R_{ex}^2 - e^2} - \frac{1}{3} (R_{ex}^2 - \chi^2)^{3/2} + R_{ex}^2 \sqrt{R_{ex}^2 - \chi^2} + \\ \chi e \sqrt{R_{in}^2 - e^2} + \frac{1}{3} (R_{in}^2 - \chi^2)^{3/2} - R_{in}^2 \sqrt{R_{in}^2 - \chi^2} \end{array} \right\} \Bigg|_e^{R_{in}} + \\
&\quad \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} \chi R_{ex}^2 \left[ \arctan \left( \frac{\chi}{\sqrt{R_{ex}^2 - \chi^2}} \right) - \arctan \left( \frac{e}{\sqrt{R_{ex}^2 - e^2}} \right) \right] - \\ \chi R_{in}^2 \left[ \frac{\pi}{2} - \arctan \left( \frac{e}{\sqrt{R_{in}^2 - e^2}} \right) \right] + e\chi \sqrt{R_{in}^2 - e^2} - \\ \frac{1}{3} \sqrt{(R_{ex}^2 - \chi^2)^3} + R_{ex}^2 \sqrt{R_{ex}^2 - \chi^2} - e\chi \sqrt{R_{ex}^2 - e^2} \end{array} \right\} \Bigg|_{R_{in}}^{R_{ex}} \\
&= \frac{1}{12} \left\{ \begin{array}{l} (4e^2 - 6eR_{ex} - 4R_{ex}^2) \sqrt{R_{ex}^2 - e^2} + \\ 3R_{ex}^3 \left[ \pi - 2 \arctan \left( \frac{e}{\sqrt{R_{ex}^2 - e^2}} \right) \right] + \\ \sqrt{R_{in}^2 - e^2} (-4e^2 + 6eR_{ex} + 4R_{in}^2) - \\ 3R_{ex}R_{in}^2 \left[ \pi - 2 \arctan \left( \frac{e}{\sqrt{R_{in}^2 - e^2}} \right) \right] \end{array} \right\}, \quad (225)
\end{aligned}$$

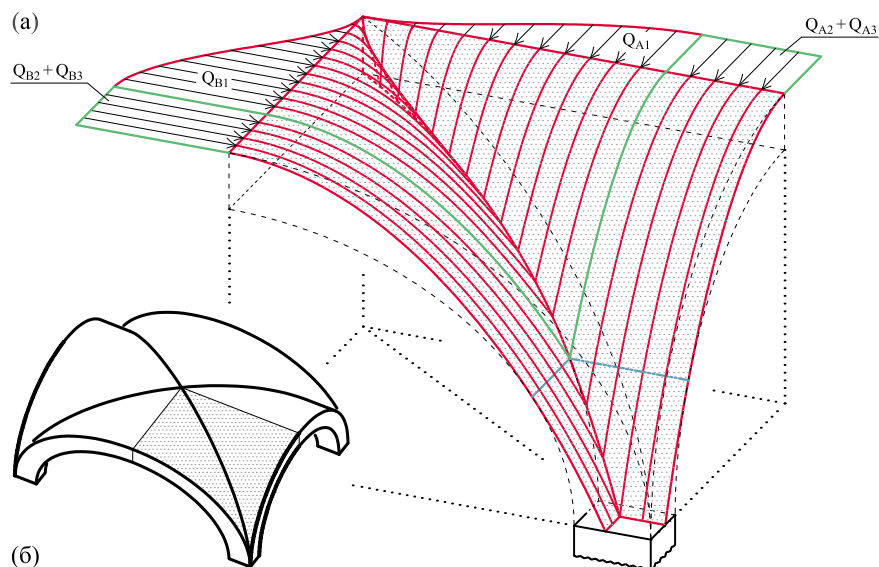
при чему је  $V(\chi)$  у првом и другом сабирку дато редом изразима (128a) и (128b), док је при сређивању израза коришћено следеће:

$$\arctan \left( \frac{\chi}{\sqrt{R_{in}^2 - \chi^2}} \right) = \frac{\pi}{2} \quad \text{када је } \chi = R_{in}, \quad (226a)$$

$$\text{и } \arctan \left( \frac{\chi}{\sqrt{R_{ex}^2 - \chi^2}} \right) = \frac{\pi}{2} \quad \text{када је } \chi = R_{ex}. \quad (226b)$$

Изведени изрази, као што је напоменуто, важе за осмину простог крстастог свода над квадратном основом, који је усвојен за меродавни део афиних сводова који се уз одговарајуће коефицијенте

афинитета преобразује у одговарајући облик. За стварно оптерећење прорачун може бити спроведен у складу с алгоритмом описаним у одељку 22.5 на страни 213, као и изразима (238) и (240).



**Слика 51.** (а) Потпорна површ у четвртини полукружног крстастиг свода с назначеним подељеним хоризонталним оптерећењем уздуж теменог пресека попречног и подужног свода, (б) назначена четвртина полукружног свода

### 17.3 Дијагонални потисак простих крстастих сводова

Укупни хоризонтални потисак на ослонац, у правцу укренице тј. дијагонале сводног поља чије су пропорције одређене коефицијентом  $\lambda = l/s$  а полураспон попречног лука означен са  $s_0$ , дат је следећим изразом:

$$\begin{aligned} \Sigma Q &= Q_A \cos \psi + Q_B \sin \psi \\ &= Q \gamma \lambda \sqrt{1 + \lambda^2} s_0^2, \end{aligned} \quad (227)$$

где угао  $\psi$  представља угао између попречног ободног лука и укренице, односно  $\tan \psi = \lambda$ , те је  $\sin \psi = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+1}}$  и  $\cos \psi = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2+1}}$ .

С друге стране, у складу с изразом (240), тежине делова  $A$  и  $B$  су једнаке, те је укупно вертикално оптерећење које се преноси на

један ослонац следеће:

$$\Sigma P = 2 P \gamma \lambda s_0^3. \quad (228)$$

### 17.4 Резултати

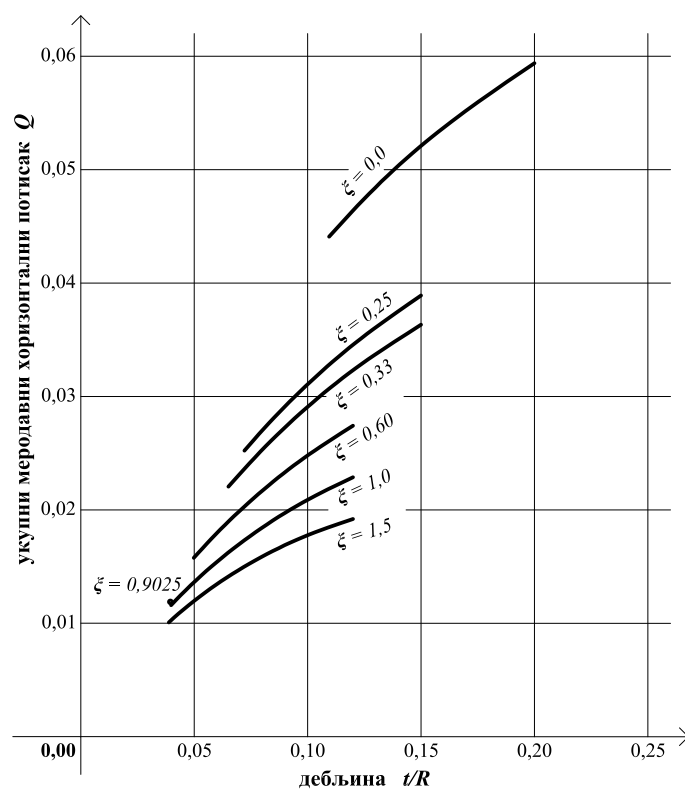
Нумеричке вредности коефицијената и других величина датих у табели 24 у Додатку Ђ, добијене у складу с изразима (221–225), односе се на усвојену јединичну вредност полупречника  $R$ . Како би ове величине могле непосредно да буду примењене у прорачуну, у виду *меродавног оптерећења*, погодно их је свести на јединичну величину полураспона ( $s = 1$ ), при чему је  $s = R + t/2 - e$ . Због тога је потребно уврстити коефицијент  $\zeta = R/s$ ; како је претходно била усвојена јединична вредност полупречника  $R$ , ово се своди на  $\zeta = 1/(1 + t/2 - e)$ . Тако се на основу израза (224) и (225) добијају следећи изрази који представљају меродавно оптерећење, односно оптерећење меродавног дела свода:

$$Q = \zeta^2 Q_{R=1}, \quad (229)$$

$$P = \zeta^3 P_{R=1}. \quad (230)$$

На основу њих су у табели 14 дате меродавне вредности за минимални хоризонтални потисак  $Q$  и вертикално оптерећење  $P$ , као и за величину потиска  $H_{min}$  у ободном луку.

Поред тога је на слици 52 приказан дијаграм на којем се лако може уочити зависност меродавног хоризонталног потиска  $Q$  од дебљине  $t/R$  ободног лука за различите вредности ексцентрицитета  $\xi$ .



Слика 52. Укупни меродавни хоризонтални потисак  $Q$  преломљених сводова, у зависности од дебљине  $t/R$  ободног лука, за различите вредности ексцентрицитета  $\xi$

**Табела 14.** Минимални хоризонтални потисак  $H_{min}$  преломљених лукова, меродавни хоризонтални потисак  $Q$  и меродавно вертикално оптерећење  $P$  преломљених крстастих сводова за различите вредности ексцентрицитета  $\xi$  и дебљине  $t/R$  ободног лука

$\xi$	$t/R$	$H_{min}$	$Q$	$P$
0	<i>0,10946</i>	0,06118	0,04408	0,06118
	0,12	0,06458	0,04639	0,06689
	0,15	0,07276	0,05210	0,08292
	0,20	0,08231	0,05939	0,10887
0,25	<i>0,07209</i>	0,04516	0,02522	0,05411
	0,08	0,04847	0,02701	0,05991
	0,10	0,05582	0,03107	0,07446
	0,12	0,06187	0,03455	0,08879
	0,15	0,06889	0,03890	0,10982
0,33	<i>0,06505</i>	0,04228	0,02205	0,05309
	0,08	0,04866	0,02531	0,06502
	0,10	0,05583	0,02908	0,08078
	0,12	0,06165	0,03231	0,09627
	0,15	0,06827	0,03632	0,11898
0,6	<i>0,04980</i>	0,03704	0,01576	0,05238
	0,05	0,03715	0,01581	0,05258
	0,06	0,04227	0,01796	0,06291
	0,08	0,05086	0,02169	0,08332
	0,10	0,05761	0,02480	0,10335
	0,12	0,06281	0,02741	0,12295
<i>0,90255</i>	<i>0,03948</i>	0,03363	0,01188	0,05290
1	<i>0,03978</i>	0,03464	0,01160	0,05714
	0,04	0,03478	0,01165	0,05746
	0,05	0,04071	0,01364	0,07157
	0,06	0,04584	0,01541	0,08555
	0,08	0,05406	0,01844	0,11304
	0,10	0,06003	0,02089	0,13983
	0,12	0,06419	0,02287	0,16586
1,5	<i>0,03875</i>	0,03801	0,01008	0,07625
	0,04	0,03884	0,01030	0,07866
	0,05	0,04487	0,01198	0,09786
	0,06	0,04987	0,01345	0,11680
	0,08	0,05735	0,01588	0,15382
	0,10	0,06215	0,01776	0,18955
	0,12	0,06486	0,01919	0,22387

Бројеви дати у курсиву односе се на лукове минималне дебљине.

|

—

|

—

|

—

|

—

## Глава VI

---

### Образовање афиних сводова

|

—

|

—

|

—

|

—



---

## Разврставање афиних сводова

Испитивање потпорне површи односно примена метода приказаног у претходном поглављу 17, омогућава различите начине образовања и здруживања делова крстастих сводова у сложеније склопове. Као основа за даљи шири приказ те подробнију обраду у наредним поглављима, на овом месту је извршено разврставање афиних сводова:

### **A. Крстасти сводови:**

- Прости крстасти сводови
- Сложени крстасти сводови
  - Правилни крстасти сводови
  - Неправилни крстасти сводови

### **B. Зракасти сводови:**

- Прости (једнобродни) зракасти сводови – прстенасти сводови
  - Прости прстенасти сводови
    - Затворени прстенасти сводови
    - Отворени прстенасти сводови
      - Прави прстенасти сводови
      - Правилни прстенасти сводови
  - Сложени прстенасти сводови
    - Полуправилни прстенасти сводови
    - Неправилни прстенасти сводови
- Сложени (вишебродни) зракасти сводови

### **V. Неправилни (општи) афини сводови**

## Сложени крстасти сводови

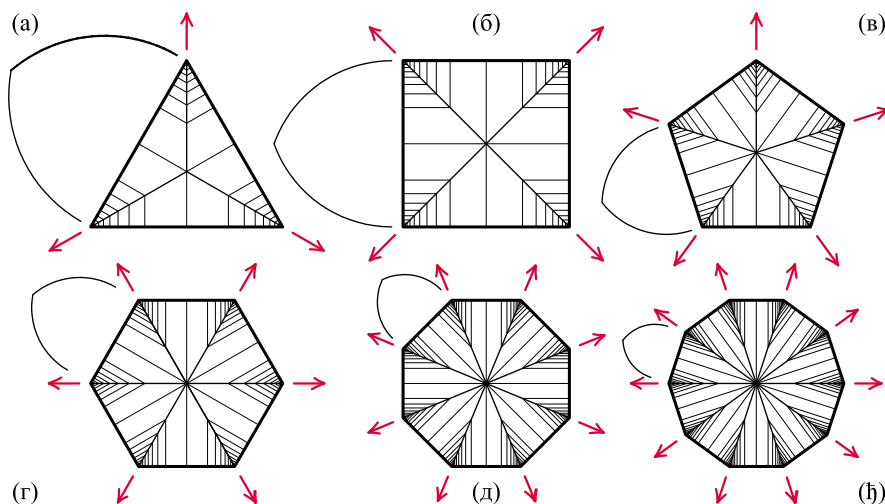
Појам крстасти свод у овој дисертацији коришћен је двојачко: у ужем смислу подразумева *просте крстасти сводове* као сводове над правоугаоном (или квадратном) основом, док у ширем смислу представља *сложене крстасти сводове* тј. сводове настале пресеком трију или више цилиндричних сводова исте висине и конкурентних оса. Сходно томе, укренице крстастих сводова зракасто се пружају из јединственог средишта – темена свода (в. слике 54а и 55а). Тако нпр. постоје троделни (тзв. трипартитни), четвороделни (квадрипартитни) или шестоделни (секспартитни) сводови које редом образују три, четири или шест цилиндричних сводова. Овакви сводови могу бити образовани над правилним или неправилним основама (сводна поља имају облик правилног односно неправилног (разнокраког) многоугла), те као такви могу учествовати у образовању сложенијих засвођених конструкција (в. сводове разматране у поглављима 20 и 22).<sup>1</sup>

### 19.1 Правилни крстасти сводови

У случају када је сводно поље правилно, у образовању свода учествује више истоветних цилиндричних сводова. Најчешће су то прости крстасти сводови над квадратним травејом, али многоугаона основа може имати и већи број страница (нпр. у просторима тзв. централног плана). С обзиром на вишеструку симетрију (радијалну и у односу на вертикалну раван), односно симетрију суседних сводних једара, потисци на ослонцима пружају се (зракасто) у правцу укреница (уп. слику 53 и 64). Дакле, у овом случају нема потребе за успостављањем конструкцијског афинитета међу

<sup>1</sup> У предстојећем разматрању сводови су претежно приказани шематски – у основи, где су приказани без дебљине – у виду цилиндричних површи (чије су водиле средишње линије ободних лукова), док су само на појединим местима (код сложенијих примера сводова) дати и њихови просторни прикази.

саставним деловима свода (коэффициент је јединичан). Шематски прикази основа примера оваквих сводова дати су на слици 53.



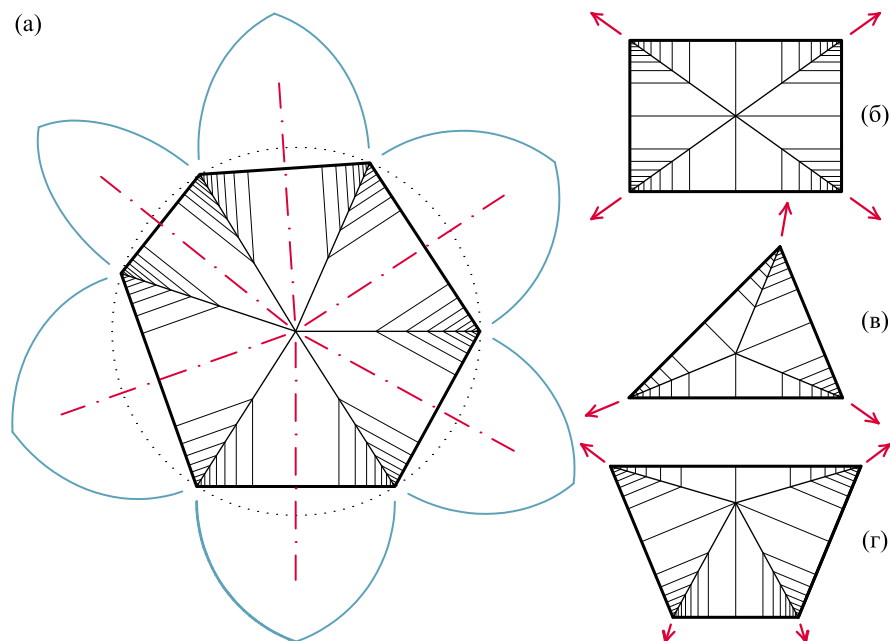
**Слика 53.** Сложених крстасти сводови над правилним основама: (а) троделни, (б) четвороделни, (в) петоделни, (г) шестоделни, (д) осмоделни, (е) десетоделни

## 19.2 Неправилни крстасти сводови

Будући да се разматрају само (цилиндрични) сводови код којих је ободни (периферни, ивични, рубни, чеони) лук управан на осу и да су укрснице сводова конкурентне, основе ободних лукова појединачних сводова представљају тетиве круга са средиштем у пресеку укрсница. Другим речима, ослонци (ослоначке тачке као крајње тачке поменутих тетива) таквога свода нижу се по јединственом кругу, као што је приказано на сликама 54а и 55а. Стога се може закључити да сложени крстасти сводови могу бити образовани над основама које имају облик *тетивних многоуглова* (конвексних многоуглова уписаних у круг).

Сводови над неправилним (разнокраким) основама, због разноликости сводних једара, те и сложенијег прорачуна, ређе су извођени. Међутим, као што је поменуто, уколико су ободни лукови (профили) цилиндричних сводова међусобно афини, између свих (било суседних било несуседних) саставних сводова (тј. једара) сложеног крстастиг свода такође је могуће успоставити афинитет. На-

супрот постојећим сводовима чија сводна поља (тзв. травеји) најчешће немају неправилан облик, овакав приступ пружа велике могућности при образовању сложених сводова.<sup>2</sup>



**Слика 54.** (а) Шематски приказ основе неправилног шестоделног крстастог свода с обореним ободним луковима, (б-г) шематски приказ најчешћих облика сводних поља (травеја) крстастих сводова с приказаним правцем резултујућих дејстава: правоугаоник – прост крстастии свод, једнакокраки троугао – троделни свод и једнакокраки трапез – четвороделни свод

### 19.3 Дејствовање сложеног крстастог свода

Начела дејствовања и конструкцијског афинитета сложених крстастих сводова показана су на примеру четвороделног свода неправилне основе шематски приказаног на слици 55.<sup>3</sup> Сложени кр-

<sup>2</sup> Најчешћи облик сводних поља, претежно у просторима који се подужно пружају (какви су нпр. главни бродови цркава), јесте правоугаони (в. слику 54б). Над оваквим травејом (прост) крстастии свод (у ужем смислу) образују два (привидно четири) цилиндра међусобно управних оса. Подробно испитивање равнотеже оваквих сводова спроведено је у глави V.

<sup>3</sup> Пример прорачуна за замишљено оптерећење оваквог свода дат је у Додатку E.

стасти свод над разнокраком четвороугаоном основом, као што је споменуто, образују четири цилиндрична свода конкурентних оса. Ободни лукови ових цилиндара исте су висине и међусобно су афини, а приказни су у обореним положајима на слици 55а. Стога су међусобно афини и цилиндрични сводови. Притом је за *полазни лук* усвојен доњи лук, а на слици 55в дат је упоредни приказ ових лукова<sup>4</sup> с придруженим коефицијентом афинитета (који се једноставно израчунавају поређењем дужина припадајућих страна основа).

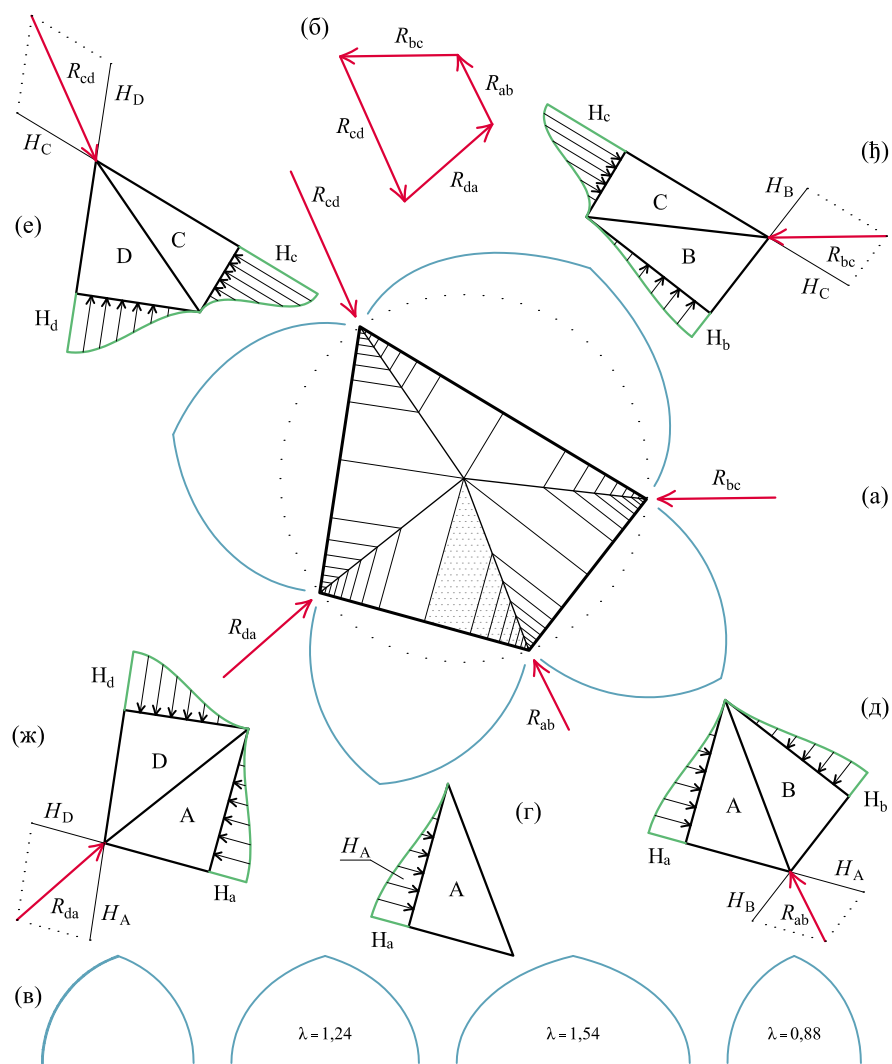
У складу са ставовима наведеним у поглављима 4 и 21, равнотежу сложеног свода могуће је испитати на основу равнотеже једног (карактеристичног) дела – полазног свода над пољем А, означеног шрафуром на слици 55а и засебно приказаног на слици 55г. Претпоставимо да су за полазни лук познати битни чиниоци (нпр. положај минималне потпорне линије, величина хоризонталног потиска ( $H_a$  на сликама 55г,д,ж) и сл.), те да је познато и оптерећење (хоризонтални потисци елементарних лукова, односно подељено оптерећење) које делује дуж темена припадајућег цилиндричног свода ( $H_A$  на слици 55г). Другим речима, претпоставимо да је испитана равнотежа полазног свода, односно познат његов утицај на укрсницу односно ослонац.

На слици 55д шематски је приказан утицај дела сложеног крстастог свода<sup>5</sup> на један ослонац. Како су поља (односно сводови над њима) А и В афина, величине  $H_b$  и  $H_B$  добијају се коришћењем одговарајућег коефицијента афинитета, а у складу с изразима (232) и (233). Резултанта потисака  $H_A$  и  $H_B$  представља дејство тога дела свода односно реакцију  $R_{ab}$  припадајућег ослонца.

Даље су афина и преостала поља (С и D) те се њихова дејства ( $H_C$  и  $H_D$ ) рачунају уз одговарајуће коефицијенте. На сликама 55ђ,е,ж дати су шематски прикази дејства на преостала три ослонца, где су приказана свака два суседна поља која делују на заједнички ослонац (В–С, С–D и D–А). Може се уочити да, у складу с одељком 21.2, потисци свода односно реакције ослонца нису у правцу укрсница. Напоследку, како би целокупни свод био у равнотежи, надовезане реакције ослонца ( $R_{ab}$ ,  $R_{bc}$ ,  $R_{cd}$  и  $R_{da}$ ) морају чинити затворен полигон сила приказан на слици 55б.

<sup>4</sup> Како је полазни лук образован од двају кружних лукова, остали лукови образовани су од одговарајућих делова елипси, издужених или скраћених у односу на полазни круг.

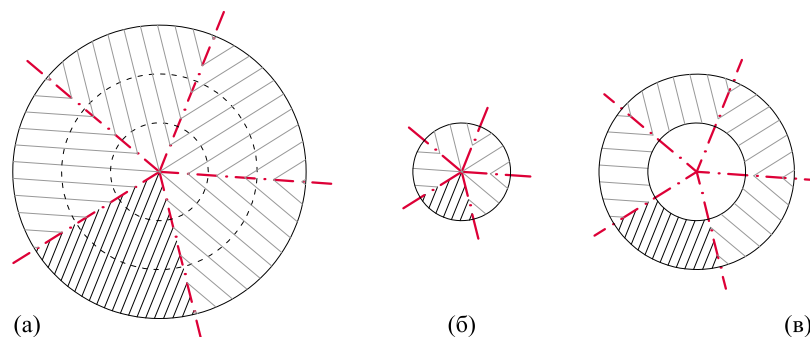
<sup>5</sup> Половине двају цилиндричних сводова, поља А и В, чији се утицај преноси на заједнички ослонац.



**Слика 55.** Сложених (четвороделни) крстаста свод над неправилном (разнокраком) основом: (а) шематски приказ основе с обореним ободним луковима и реакцијама ослонаца, (б) (затворен) полигон сила (реакција ослонаца) који представља равнотежу свода, (в) афинитет међу ободним луковима, (г) полазни свод с припадајућим подељеним оптерећењем, (д-ж) шематски приказ ослонаца с припадајућим деловима свода и њиховим дејствима

## Зракасти и прстенасти сводови

Зракасти (или радијални) сводови су сводови код којих је заступљена радијална симетрија између његових појединих делова (в. слику 56, као и слике 73 и 76). Овакви сводови, односно њихови делови, најчешће се јављају у оквиру опходних тј. кружних бродова цркава (тзв. (де)амбулаторијуми). Притом, овај апсидни део може бити образован од једног прстена тј. опходног брода или више њих (два до три), те може бити једнобродан или вишебродан. Ови концентрични бродови (прстенови) представљају *прстенасте сводове* који се образују здруживањем једнако оријентисаних сложених крстастих сводова укруг надовезаних.<sup>1</sup>



**Слика 56.** Шематски приказ зракастих сводова: (а) сложени (вишебродни) зракасти свод, (б) затворени прстенасти свод, (в) отворени (једнобродни) прстенасти свод

<sup>1</sup> Вишебродни амбулаторијум у целости представља сложен зракаст свод, при чему је дебелина појединих прстенова одређена припадајућим крстастим сводом. Другим речима, уколико је у дебелини прстена више од једног крстастог свода, свод се разматра као сложен зракаст свод, док се прстенасти сводови посматрају као подгрупа зракастих сводова. Због своје разноликости, као и због тога што представљају полазиште за зракасте сводове, на овом месту су издвојени те засебно разматрани.

На слици 56а приказан је тробродни зракасти свод с пет (радијалних, конкурентних) оса симетрије, где је полазни (карактеристични) део свода (двоструко гушће шрафиран) пет пута односно пресликан тј. укруг (радијално) умножен. На сликама 56б и 56в издвојени су његови саставни делови, и то средишњи део, који представља *затворени*<sup>2</sup> прстенасти свод, и средњи прстен односно *отворени* прстенасти свод.

Обод прстена (тј. прстенасте основе) представљају два многоугла – унутрашњи и спољашњи ободни многоугао (на слици 56в представљени су шематски двама концентричним круговима) по којима се нижу ободни ослонци (стубови). У складу с њиховим обликом односно начином образовања основе, прстенасте сводове можемо поделити на: просте (правилне) и сложене (полуправилне и неправилне). Њихова основна својства размотрена су у предстојећим двама одељцима.

### 20.1 Прости прстенасти сводови

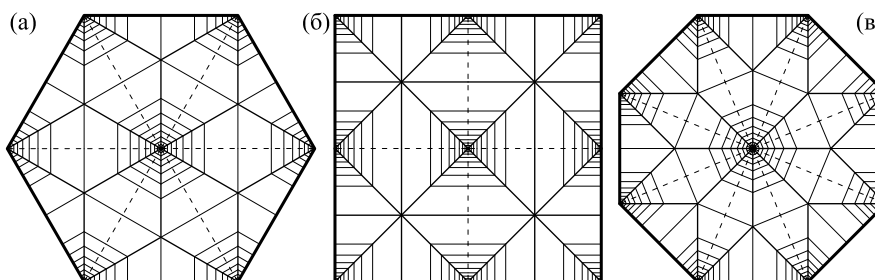
Прости прстенасти сводови, или сводови над правилном прстенастом основом, образују се (простим) умножавањем укруг једног сложеног крстастог свода. Сходно томе, услед добијене (радијалне) симетрије потисци на ослонцима пружају се у правцу укрсница (које се зракасто пружају из средишта основе тј. прстена). На основу облика прстена као и крстастих сводова који их образују, прости прстенасти сводови могу се сврстати у три скупине:

- (А) *Затворени прстенасти сводови*, односно сводови са средишњим ослонцем (в. шематски приказ на сликама 56б и 57)
  - Унутрашњи обод прстена своди се на тачку, те се припадајући ослонци стапају у јединствени – средишњи ослонац.
  - Због симетрије, средишњи ослонац (стуб) је оптерећен само вертикалним дејством (хоризонтални потисци се потиру), док се на ободним ослонцима потисци пружају у правцу укрсница.
  - Сводна поља су троугаона (једнакокрази троугао (слика 54в и 57в); у посебном случају једнакостранични (слика 57а)), или изузетно квадратна (в. слику 57б).
  - Овакви облици свода заступљени су у просторима средишњег плана (нпр. осмоугаона основа у каптолској дворани при

<sup>2</sup> Свод ће бити затворен прстенаст уколико садржи средишњи стуб (в. одељак 20.1 и слику 57), а уколико га нема у средишту зракастог свода биће сложени крстаста (а не зракасти или прстенасти) свод (в. одељак 19.1 и слику 53). Оба случаја разматрана су у одељку 22.4.



катедрали у Велсу и Солзберију; уп. са сликом 57в), или у оквиру апсида двобродних базилика (каква је Јакобинска црква у Тулузу (половина дванаестостране основе)).

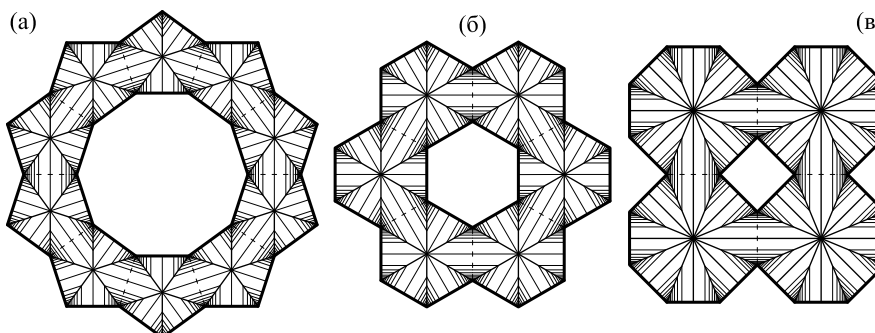


**Слика 57.** Затворени прстенасти сводови (сводови са средишњим ослонцем): (а) шестоделни (6 правилних троделних крстастих сводова), (б) четвороделни (4 правилна проста крста свода), (в) осмоделни (8 једнакокраких троделних крстастих сводова)

(Б) *Правилни прстенасти сводови*

○ Ово су (отворени прстенасти) сводови образовани умножавањем истоветних правилних крстастих сводова (в. слику 58, као и одељак 19.1).

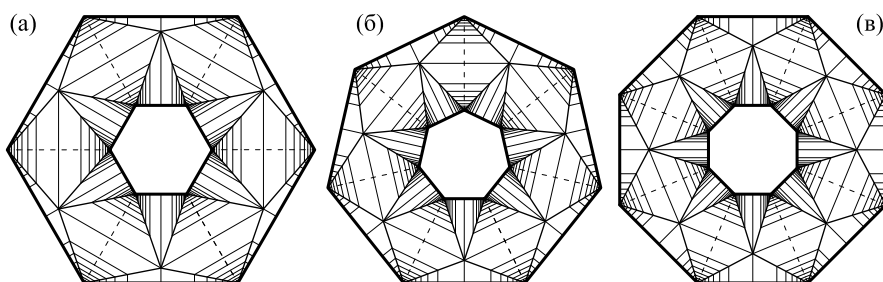
○ Најчешћа су петоделна сводна поља (слика 58а; в. и слику 53в), и то обично код (спољних) опходних бродова односно у случају апсида – радијално постављених малих апсида дуж опходног брода (нпр. у оквиру апсиде Базилике Сен Дени).



**Слика 58.** Правилни прстенасти сводови добијени умножавањем правилних крстастих сводова: (а) десетоделни, (б) шестоделни, (в) четвороделни

(В) *Прави прстенасти сводови*

- Најчешћи облик (отворених) прстенастих сводова, код којих су и унутрашњи и спољашњи ободни многоугао правилни и притом паралелни (в. слику 59).
- У образовању таквих сводова учествују искључиво травеји облика једнакокраког трапеза (в. слику 54г)



Слика 59. Прави прстенасти сводови добијени умножавањем зракастих трапезних сводова: (а) шестоделни, (б) седмоделни, (в) осмоделни

## 20.2 Сложени прстенасти сводови

Сложени прстенасти сводови, или сводови над сложеном прстенастом основом, могу се сврстати у две групе:

(Г) *Полуправилни прстенасти сводови:*

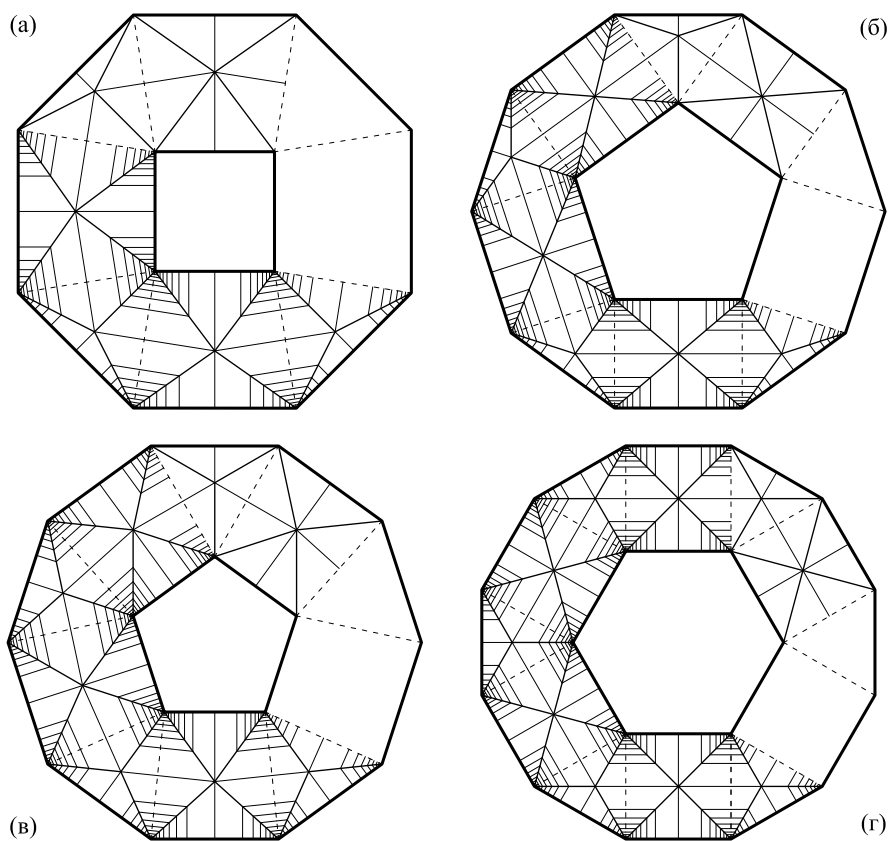
- Сводови код којих су и унутрашњи и спољашњи ободни многоугао правилни, при чему је број страница спољашњег обода једнак двоструком броју унутрашњих (в. слику 60).
- Образовани су искључиво од наизменично постављених четвороугаоних и троугаоних сводних поља; при томе су могући њихови различити облици и међусобни склопови: четвороугаони травеј може бити квадратни, правоугаони или једнакокраки трапез, док троугаони може бити једнакокраки или једнакостранични.

(Д) *Неправилни прстенасти сводови* су сводови којима се осим прстенастог облика основе и правилног унутрашњег ободног многоугла не може придружити неко друго заједничко својство; стога су само наведени неки од могућих склопова:

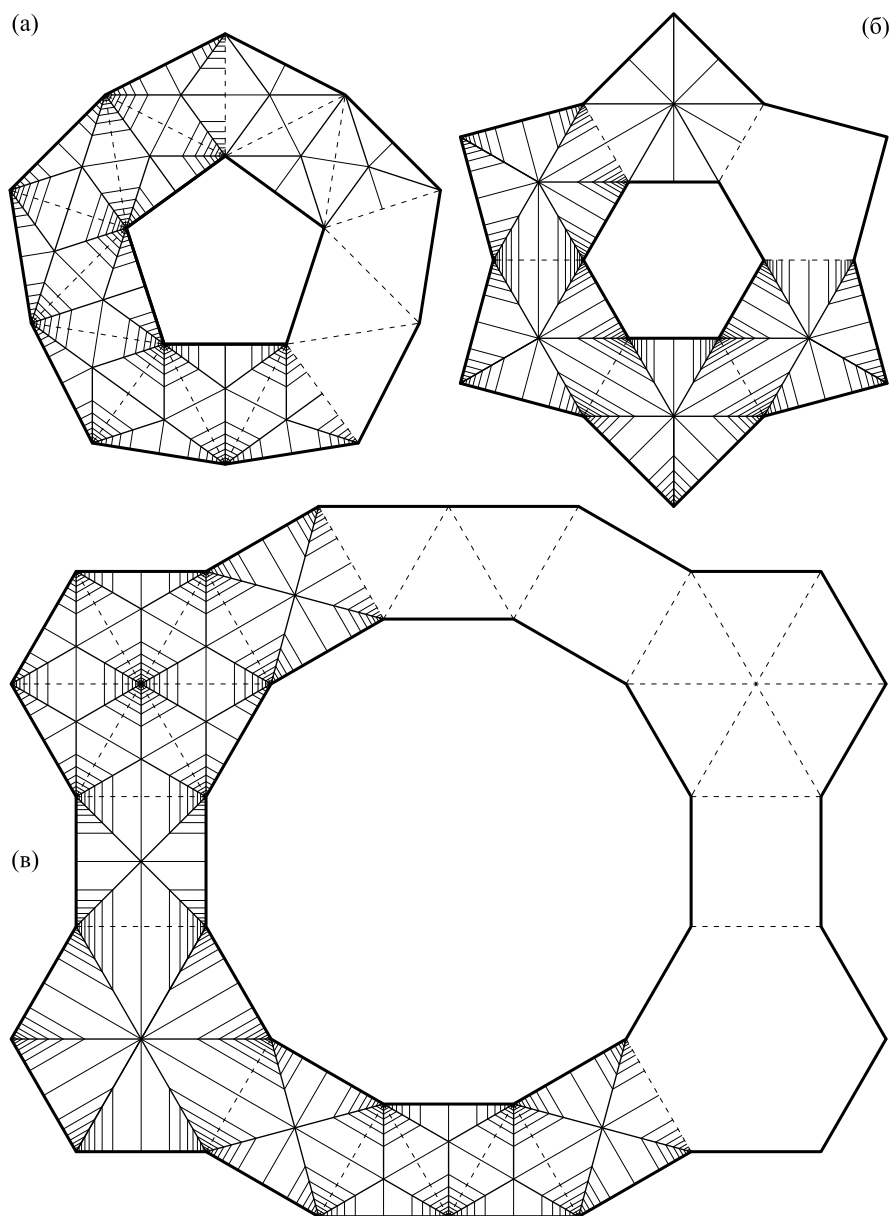
- Прстенасти сводови код којих су умножена истоветна сводна поља, али притом различито оријентисана (слика 61а).
- Сводови код којих су кружно умножени неправилни (али осно симетрични) сложени крстасти сводови (в. слику 61б).

○ Прстенасти сводови код којих су наизменично постављени различити облици сводних поља (нпр. четвороугаона и шестоугаона, квадратна и троугаона или трапезна и петоугаона), а спољашњи ободни многоугао није правилан (в. слику 61в).

Склопови афиних сводова приказани у овој глави служе као примери који указују на разноврсне могућности приликом пројектовања сложених сводова. Изналажење даљих могућих склопова излази из оквира ове дисертације, те остаје за даља истраживања.



**Слика 60.** Полуправилни прстенасти сводови: (а) осмоделни (једнакокраки троугаони и једнакокраки трапезни крстасти сводови), (б) десетоделни (једнакокраки троугаони и правоугаони крстасти сводови), (в) десетоделни (једнакокраки троугаони и трапезни крстасти сводови), (г) дванаестоделни (једнакокраки троугаони и квадратни крстасти сводови)



**Слика 61.** Неправилни прстенасти сводови: (а) супротно оријентисана истоветна сводна поља, (б) кружно умножени осно симетрични сложени крстасти сводови, (в) наизменично постављена различита сводна поља

## Глава VII

---

### Параметарско обликовање сводова



## Конструкцијски афинитет сводова

У овој дисертацији разматра се посебни случај афине трансформације – хоризонтално растезање (дилатација; тзв. елементарно скалирање односно скалирање само по апсциси) равног лика (фигуре). За меру растезања односно трансформације усвојен је коефицијент (количник сличности):

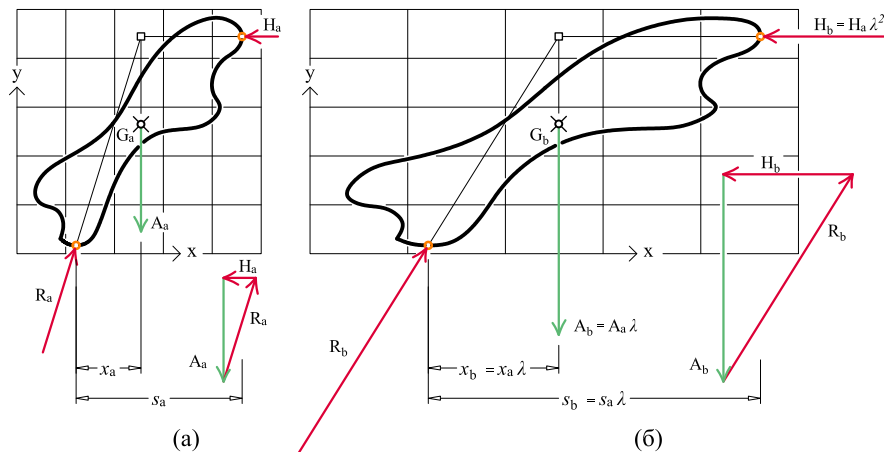
$$\lambda = \frac{b}{a}, \quad (231)$$

који представља однос (дужина или распона) оригинала и његове слике (добијене афином трансформацијом, изобличавањем полазног облика). Како би испитивање афиних сводова могло да буде ваљано спроведено, на овом месту ће бити размотрена својства конструкцијског афинитета међу равним ликовима и међу просторним облицима.

### 21.1 Конструкцијски афинитет равних ликов

Размотримо слику 62а на којој је приказан лик (равна структура) површине  $A_a$ . На њу делују силе које су у равнотежи, и то: сопствена тежина (представљена површином  $A_a$ ) у тежишту  $G_a$ , хоризонтална сила  $H_a$  и реакција  $R_a$ . Уколико се изврши афина трансформација (хоризонтално растезање) ове структуре, све хоризонталне димензије мењају се сразмерно коефицијенту  $\lambda$ . Сходно томе, распон  $s_a$  (хоризонтална удаљеност нападах тачака сила  $R_a$  и  $H_a$ ), апсциса  $x_a$  тежишта  $G_a$  и површина  $A_a$  увећавају у спрам коефицијента  $\lambda$ , тако да распон  $s_b$ , апсциса  $x_b$  тежишта  $G_b$  и површина  $A_b$  афиног лика редом износе  $s_b = s_a \lambda$ ,  $x_b = x_a \lambda$  и  $A_b = A_a \lambda$ . (На слици 62б је коришћен коефицијент  $\lambda = 2$ , те је површина фигуре удвостручена.)

Међутим, придружена хоризонтална сила  $H_b$  се не мења по истом закону; лако се изводи (нпр. из равнотеже момената за нападну



Слика 62. Афина трансформација (хоризонтално растезање) равнога lika: (а) оригинал, (б) придружена афина слика

тачку реакције  $R_a$ ) да је она сразмерна квадрату коефицијента трансформације.<sup>1</sup> Наиме, код оригинала (слика 62а) је  $H_a = \frac{A_a x_a}{h}$ , док је код афине слике  $H_b = \frac{A_b x_b}{h}$ , где је  $h$  вертикална удаљеност између нападних тачака сила  $R_a$  и  $H_a$  (в. слику 62б). Како су и  $A_b$  и  $x_b$  увећани за коефицијент  $\lambda$ , следи да је

$$H_b = H_a \lambda^2. \quad (232)$$

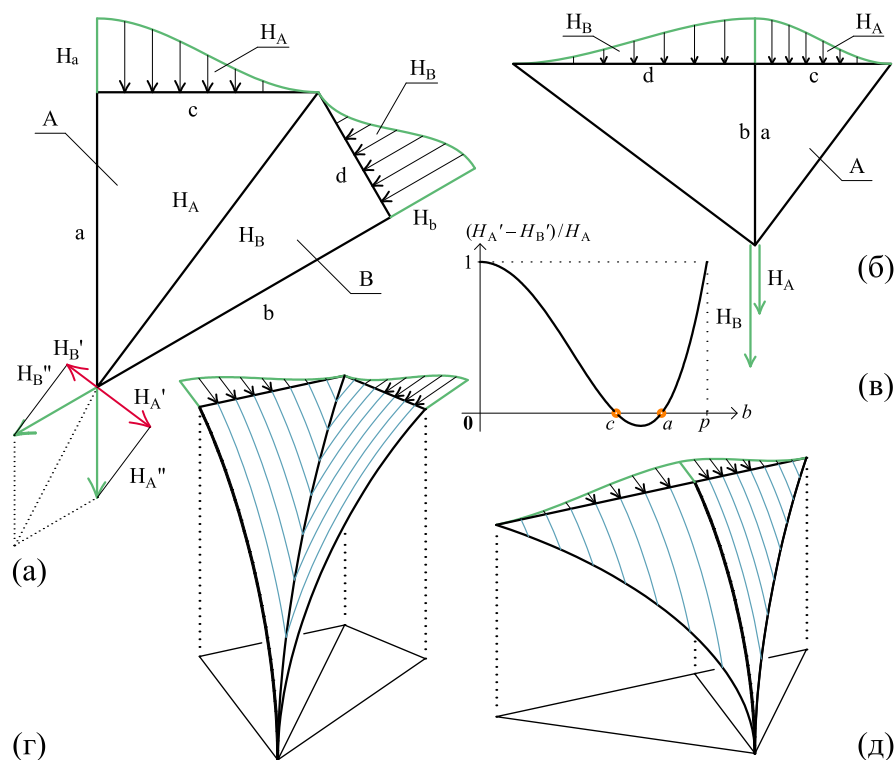
## 21.2 Конструкцијски афинитет просторних облика

Размотримо сада слику 63а,г на којој су дата два поља  $A$  и  $B$ , која представљају основе двеју сучељених просторних конструкција (нпр. суседна поља сложеног крстастог свода) између којих се може успоставити афин однос. Тако су афини и ободни лукови (попречни пресеци, профили сводова) на месту  $a$  и  $b$ , док су њи-

<sup>1</sup> Ваља напоменути да уколико би исти раван лик (слика 62а) био развучен вертикално (у правцу  $y$ -осе) вредност хоризонталне силе не би била промењена. Ово се лако може показати разматрањем равнотеже момената за нападну тачку реакције, при чему делују две силе: хоризонтално сила  $H_c$  и вертикално сила  $A_c$ . Наиме, крак силе  $H_c$  би након вертикалног растезања био увећан за коефицијент  $\lambda$ ; с друге стране, новодобијена површина  $A_c$  такође је сразмерна коефицијенту  $\lambda$  ( $A_c = A_a \lambda$ ), при чему је крак те силе непромењен ( $x_c = x_a$ ). Дакле, из тога следи да хоризонтална сила мора задржати исту вредност.



хове придружене хоризонталне силе,  $H_a$  и  $H_b$ , редом сразмерне квадрату односа  $a$  и  $b$ .



**Слика 63.** Афинитет двају поља  $A$  и  $B$  с придруженим подељеним оптерећењима  $H_A$  и  $H_B$ : (а,г) заједничка укрсница, (б,д) заједнички ободни лук, (в) дијаграм који показује зависност величина потисака управних на правац пресецинице двају поља

Нека на делове  $A$  и  $B$  дуж ивица  $c$  и  $d$  и управно на њих делују позната подељена оптерећења (од суседних делова (половина) свода). Ова дејства се могу представити двама силама,  $H_A$  и  $H_B$ , чије су величине представљене одговарајућом површином дијаграма подељеног оптерећења. У складу с изразима (231) и (232), између њих се може успоставити следећи однос:

$$H_B : H_A = \frac{d b^2}{c a^2} = \frac{B b}{A a}. \quad (233)$$

Ваља истаћи да ће у случају када је  $b = c$  и  $d = a$  ове две силе бити сразмерне односу распона ободних лукова тј. коефицијенту

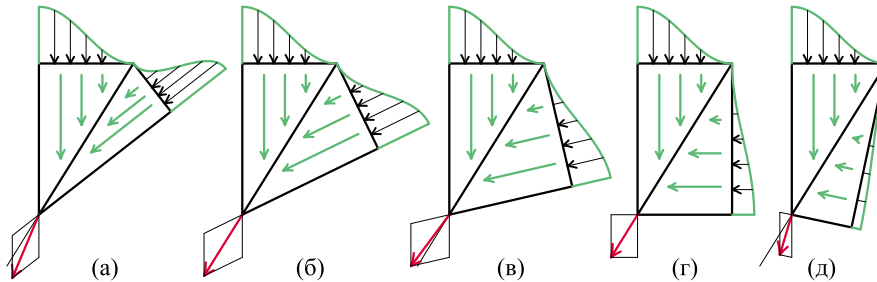
$\lambda = b/a$ , што је дато следећим изразом:

$$H_B = H_A \lambda. \quad (234)$$

Поред тога, ове силе се могу разложити на правац пресечнице поља  $A$  и  $B$  и на њему управни правац. Нека су  $H'_A$  и  $H'_B$  компоненте управне на правац пресечнице, а међу њима важи следећи однос:

$$H'_A : H'_B = \sin \left( \arctan \left( \frac{c}{a} \right) \right) : \frac{b^2 d}{a^2 c} \sin \left( \arctan \left( \frac{d}{b} \right) \right) = \frac{a^2 c^2}{b^2 d^2} = A^2 : B^2, \quad (235)$$

где су  $A$  и  $B$  површине одговарајућих поља. Дакле, може се закључити да се величине  $H'_A$  и  $H'_B$  односе као квадрати површина припадајућих основа. У складу с тим, поље веће површине има већу компоненту потиска управну на правац укрснице. У двама случајевима, када је  $b = a$  или  $b = c$ , површине поља  $A$  и  $B$  биће изједначене, те ће и величине поменутих компоненти бити изједначене.<sup>2</sup> На основу наведеног могући су случајеви дати на слици 64, где је шематски приказан правац резултујућег дејства.



Слика 64. Шематски приказ правца укупног резултујућег потиска с обзиром на однос површина сучељених структура

С друге стране, између компоненти  $H''_A$  и  $H''_B$  у правцу пресечнице може се извести следећи однос:

$$H''_A : H''_B = \cos \left( \arctan \left( \frac{c}{a} \right) \right) : \frac{b^2 d}{a^2 c} \cos \left( \arctan \left( \frac{d}{b} \right) \right) = \frac{a^3 c}{b^3 d} = \frac{A}{B} \lambda^2, \quad (236)$$

где је  $\lambda = b/a$ . Може се закључити да је у посебном случају, када су површине поља  $A$  и  $B$  једнаке и када је  $b = c$  (односно  $a = d$ ),

<sup>2</sup> Ваља истаћи да, дакле, укупни потисак није у правцу укрснице, односно да ће само у двама случајевима бити тог правца.

однос ових компоненти једнак квадрату коефицијента  $\lambda$ . У случају када је  $b = a$ , вредности  $H''_A$  и  $H''_B$  се изједначавају.

Размотримо сада поља А и В, која се уместо дуж укрснице граниче дуж ободног лука, као што је приказано на слици 63б,д. У том случају се, будући да припадају истом цилиндричном своду,  $a$  и  $b$  поклапају, те се десна страна израза (233) своди на размеру дужина  $c$  и  $d$ . Тада су силе  $H_A$  и  $H_B$  паралелне, те се њихова дејства просто збрајају.

**Афинитет меродавног оптерећења.** Силе  $H_A$  и  $H_B$  сматраће се познатима уколико је познато меродавно подељено оптерећење  $Q$  за примењени облик ободног лука као водиле (пресека) цилиндричног свода.<sup>3</sup> Величине ових сила, у односу на меродавни потисак  $Q$ , зависе од облика поља над којим се налази посматрани део свода, тј. од дужина темене линије и ободног лука у односу на меродавне. За *меродавно поље* усвојено је поље облика правоуглог једнакокраког троугла приказано на слици 65б,г, где је  $s$  полураспон ободног лука а  $l$  дужина темене линије (уздуж које делује оптерећење  $Q$ ).

Изразом (233) описује се однос оптерећења двају суседних поља (делова) свода, те би тако сложен афин свод могао бити испитан као низ суседних делова свода. Међутим, како су свака два суседна поља у неком одређеном односу, може се посредно успоставити веза и између двају несуседних поља. Штавише, може се извести свеопшти израз којим би била обухваћена сва поља.

Наиме, свако (троугаоно) поље може се добити помоћу двају<sup>4</sup> афиних трансформација (растења) меродавног поља (без обзира на то да ли је такав (меродавни) троугао уопште заступљен у основи). Тако се меродавно поље, дато на слици 63в, преобразује у облик произвољног поља свода довођењем дужине  $l$  на дужину  $l_{i,j}$ , а потом и довођењем дужине  $s$  на дужину  $s_{i,j}$  (где  $i$  представља редни број ослонца, а  $j$  број њему придруженог поља). Приликом прве трансформације, величина потиска  $H_s$  ободног лука остаје непромењена, те се вредност хоризонталног оптерећења (представљеног површином дијаграма подељеног оптерећења) мења сразмерно односу  $l_{i,j}/l$ . У складу с изразом (232), приликом друге трансформације, величина  $H_s$  се мења сразмерно квадрату односа  $s_{i,j}/s$ . Уз усвајање јединичне вредности (1 м) дужина  $s$  и  $l$ , ове две транс-

<sup>3</sup> В. одељак 17.1, табелу 14 и слику 52.

<sup>4</sup> За део свода над пољем су заправо потребне три трансформације. Међутим, растења по вертикали, као што је показано, не утиче на величину хоризонталног потиска, али га је неопходно узети у обзир при израчунавању запремине свода.

формације хоризонталног потиска могу се представити следећим коефицијентом:

$$\mu_{i,j} = s_{i,j}^2 l_{i,j}. \quad (237)$$

Како је при практичном прорачуну (в. Додатак **Е**) потребно добити вредност сила (изражених нпр. у килоњутнима), неопходно је уврстити и оптерећење услед тежине свода. Дакле, оптерећење разматраног дела свода зависи од меродавног хоризонталног потиска  $Q$  (одређеног усвојеним обликом полазног лука), материјала од којег је начињен свод (одређеног његовом запреминском тежином  $\gamma$ ) и од облика поља које надсвођује (одређеног коефицијентом афинитета  $\mu$ ). Стога је стварни хоризонтални потисак  $H_{i,j}$  ма ког дела свода одређен следећим изразом:

$$H_{i,j} = Q \gamma s_{i,j}^2 l_{i,j} = Q \gamma \mu_{i,j}. \quad (238)$$

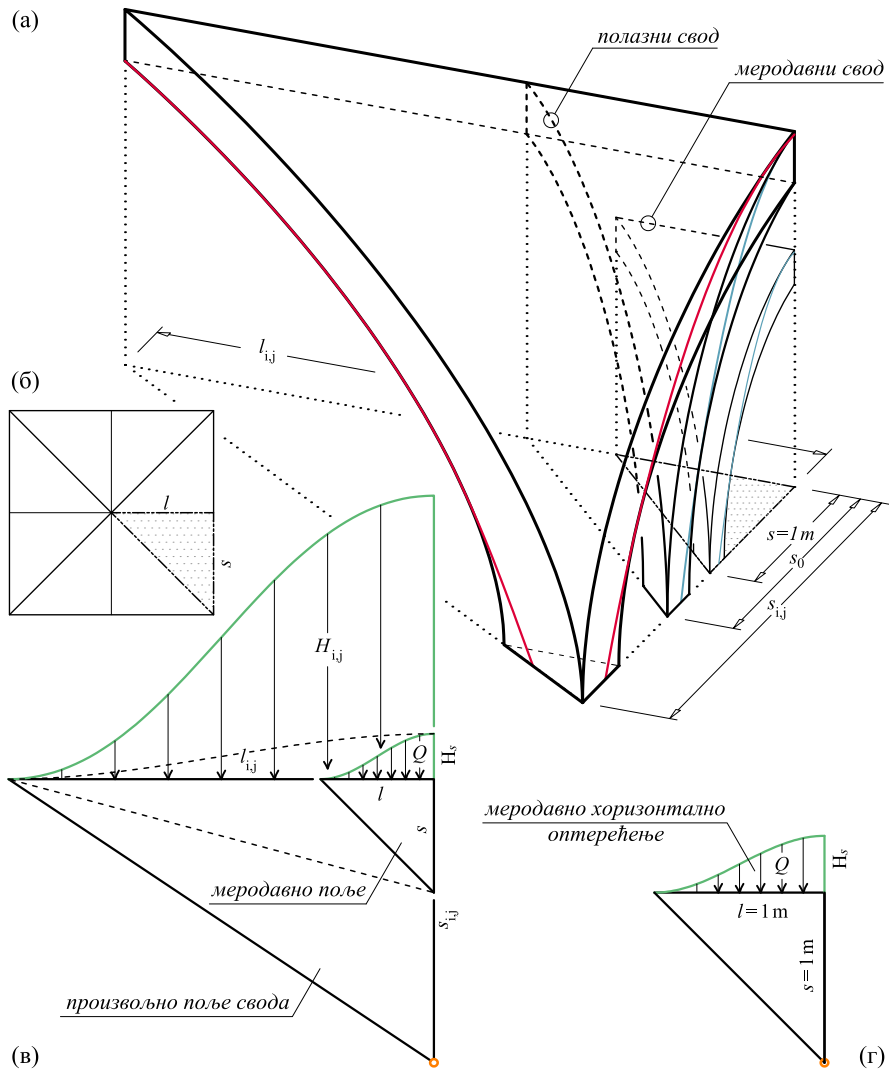
Припадајуће вертикално оптерећење сразмерно је запремини разматраног дела свода која је сразмерна промени дужина страница поља, тј. мења се сразмерно односу  $l_{i,j}/l$  и односу  $s_{i,j}/s$ . Уз то је потребно узети у обзир и растезање по вертикали, које је сразмерно односу  $s_0/s$ , где  $s_0$  представља полураспон полазног лука. Стога се пресликавање запремине свода може представити следећим коефицијентом:

$$\nu_{i,j} = s_0 s_{i,j} l_{i,j}. \quad (239)$$

На основу тога се веза меродавног вертикалног оптерећења  $P$  и тежине  $P_{i,j}$  ма ког дела свода може представити следећим изразом:

$$P_{i,j} = P \gamma s_0 s_{i,j} l_{i,j} = P \gamma \nu_{i,j}. \quad (240)$$

На основу израза (238) и (240) испоставља се да је довољно подробно испитати само меродавни свод. Притом се, за делове афиног свода, уочавају следећи параметри: (а) облик поља које има облик правоуглог троугла, одређеног дужинама  $l$  и  $s$  његових страница, (б) облик полазног лука (ободни лук меродавног свода) који одређује меродавно хоризонтално подељено оптерећење  $Q$  с придруженим полураспоном  $s_0$ , и (в) материјал свода одређен својом запреминском тежином  $\gamma$ . Према томе, Испитивање равнотеже сложеног афиног свода у целини своди се на испитивање облика његове основе. Стога се у наредним двама поглављима разматрају различити облици односно начини образовања основе те могући склопови афиних сводова.



**Слика 65.** Конструкцијски афинитет афиних сводова: (а) упоредни приказ (преобликовање) меродавног свода, полазног свода и произвољног дела свода, (б) меродавно поље у оквиру основе простог крстастог свода над квадратном основом, (в) трансформације меродавног поља и придруженог меродавног подељеног хоризонталног оптерећења  $Q$ , (г) меродавно поље свода на које делује меродавно подељено оптерећење  $Q$

## Пројектовање сложених афиних сводова

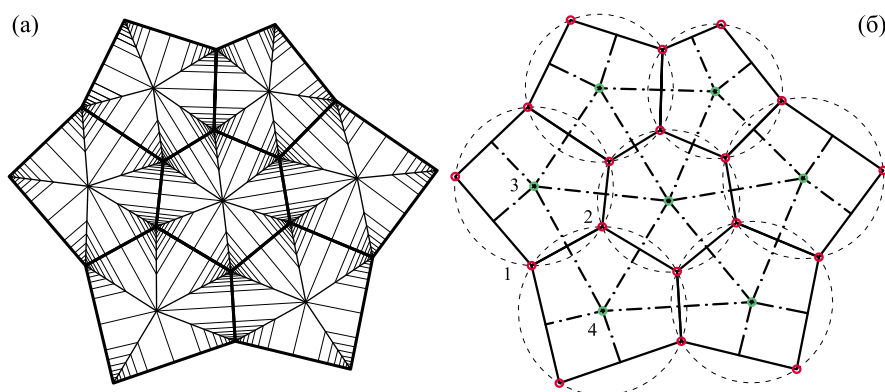
Сложени афини сводови, односно сводови над сложеном основом, представљају склоп образован од различитих сложених крстастих сводова чији су делови (саставни цилиндрични сводови) међусобно афини. У овом поглављу је размотрен поступак пројектовања као и испитивања њиховог дејствовања. Разматрање је прво спроведено на неправилном (општем) афином своду, а затим на сложеном зракастом своду, као примеру на којем је могуће уочити односно остварити извесне правилности.

**Дуалност у основи афиног свода.** Као што је показано, ослонци сложеног крстастог свода леже на кругу; дакле, сводно поље је тетивни многоугао, а ободни лукови свода представљају странице тог многоугла. Стога, приликом здруживања оваквих сводова у сложенију целину, ослонци (различитих сводова) суседни једном посматраном ослонцу морају лежати на круговима који се секу у том ослонцу. Другим речима, ободни лукови појединаих травеја сустичу се на једном заједничком ослонцу (уобичајено је да се на једном ослонцу сустичу три до четири ободна лука).

На слици 71 приказан је сложени неправилни афини свод<sup>1</sup> образован од седам различитих сложених крстастих сводова, и то једног шестоделног и око њега укруг надовезаних шест петоделних сводова. На основи овог свода, шематски приказаној на слици 66, могу се уочити два система линија односно две мреже, и то једна чија су поља многоугаона и друга с троугаоним пољима. Наиме, чворове једне мреже представљају ослонци сводова (нпр. тачке 1 и 2 на слици 66б), док су њене гране (ободни лукови крстастих сводова; нпр. дуж 12) странице сводних поља (која представљају поља тј. ћелије ове мреже). С друге стране, чворови друге мреже су пресечне тачке укрсница (темена крстастих сводова; нпр. тачке 3 и 4),

<sup>1</sup> У оквиру ове дисертације разматрани су само слободностојећи сводови, док ће друкчији услови ослањања бити предмет даљих истраживања.

а темене линије тј. осе (составних цилиндричних) сводова представљају њене гране (нпр. дуж 34). Осе цилиндричних сводова (нпр. дуж 34) представљају симетрале страница сводних поља (нпр. дуж 12), те су тачке које представљају ослонце једнако удаљене од околних оса. Сходно томе, може се закључити да основа свода заправо представља Воронојев дијаграм, где ослонци представљају његове чворове (средишта, генераторе) а мрежа оса ограничава његове ћелије. Уз то ваља напоменути да колико се ободних лукова сустиче у једном ослонцу толико ће Воронојева ћелија (многоугао) која га окружује имати страница. Може се уочити да, с једне стране, сваком пољу мреже ослонаца одговара једно теме крстастог свода, те да, с друге стране, сваком пољу мреже оса (Воронојеве ћелије) одговара један ослонац. Другим речима, сваки чвор једне мреже одговара једном пољу друге мреже, и обрнуто, те следи да су ове две мреже дуалне.<sup>2</sup>



Слика 66. Неправилни сложени свод: (а) шематски приказ основе, (б) дуалност између мреже ослонаца и мреже оса сводова

На основу наведеног може се закључити да, приликом пројектовања сложених афиних сводова, прекривање површине која се наткриљује може бити извршено уз помоћ одговарајућег Воронојевог дијаграма.<sup>3</sup> Уз то, решавање основе свода може бити двојакo спроведено: усвајањем положаја темена крстастих сводова (уз одго-

<sup>2</sup> Ово се може упоредити с дуалним односом између Воронојевог дијаграма и њему одговарајуће Делонеове триангулације, с тим што су у овом случају, уместо око троуглова, кругови описани око тетивних многоуглова.

<sup>3</sup> Тиме пројектовање афиних сводова залази у оквир проблема прекривања равни (теселације), што излази из оквира ове дисертације.

варајуће геометријске граничне услове) те припадајуће мреже оса, или распоређивањем ослонаца (опет уз одговарајућа геометријска ограничења); ови приступи су равноправни (приликом рачунарске обраде), али би предност требало дати потоњем, будући да као полазиште непосредније одсликава организацију простора.

**Дејство свода у целини.** На примеру сложеног крстастог свода (в. одељак 19.3) показана је улога конструкцијског афинитета при испитивању односно обликовању свода. Здруживањем таквих сводова у сложенији склоп, проблем испитивања равнотеже се усложњава. Међутим, будући да су сви делови међусобно афини, тај задатак може бити сведен на разматрање дејстава појединачних делова сводова на ослонаце, узимајући у обзир коефицијенте афинитета. Стога ће прво, у одељку 22.1, бити размотрено дејство на појединачни ослонац.

Испитивање целокупног дејства свода може бити двојако спроведено: (I) испитивањем дејства појединачних сложених крстастих сводова, те збрајањем њихових дејстава на заједнички ослонац, или (II) непосредним испитивањем дејстава припадајућих делова свода на појединачне ослонце. Будући да су приступи, у рачунском смислу, равноправни, оба ће бити приказана у предстојећем разматрању, и то: први ће бити приказан на примеру сложеног неправилног афиног свода (одељак 22.3), док ће други бити приказан на примеру сложеног зракастог свода (одељак 22.4).

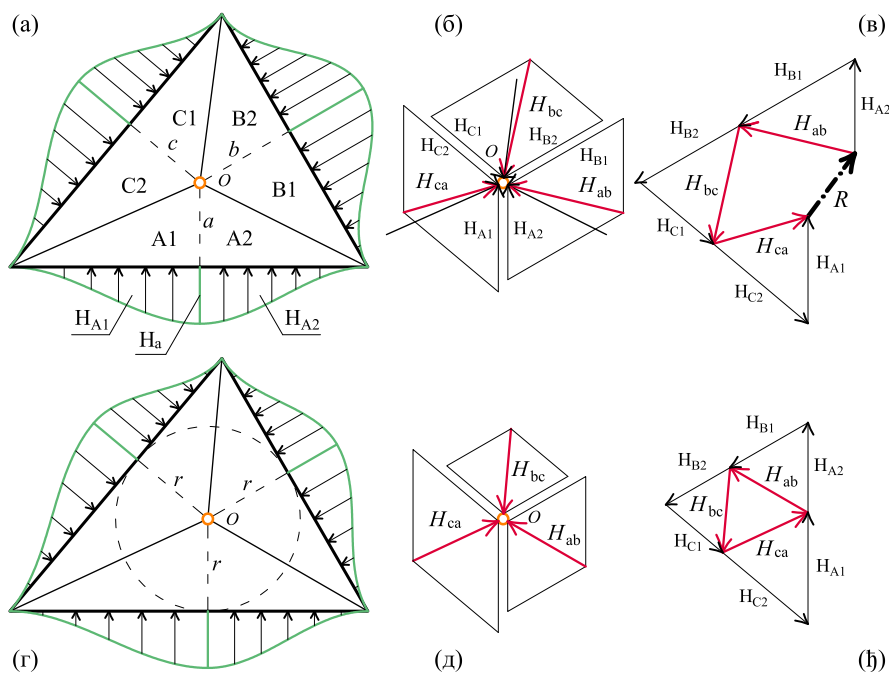
### 22.1 Дејство на појединачан ослонац

У досадашњем излагању су, као основ организације простора, односно обликовања сводова који их наткриљују, разматрана сводна поља представљена многоуглом у чијим теменима су ослонци (в. нпр. слике 53–66). Међутим, испитивање може бити спроведено над пољима ограниченим осами (теменим линијама) цилиндричних сводова који окружују један ослонац и на њега преносе дејство (в. слику 66б). Њихови хоризонтални потисци се слажу (збрајају), те се тако добија укупни хоризонтални потисак (правац и величина) који делује на ослонац. С друге стране, укупно вертикално оптерећење добија се простим збрајањем тежина појединачних делова сводова (узимајући у обзир одговарајуће коефицијенте афинитета), те на овом месту није посебно разматрано.

У оквиру сложених сводова, на један ослонац (стуб) најчешће се преноси дејство (половина) трију или четирију сводова. Без утицаја



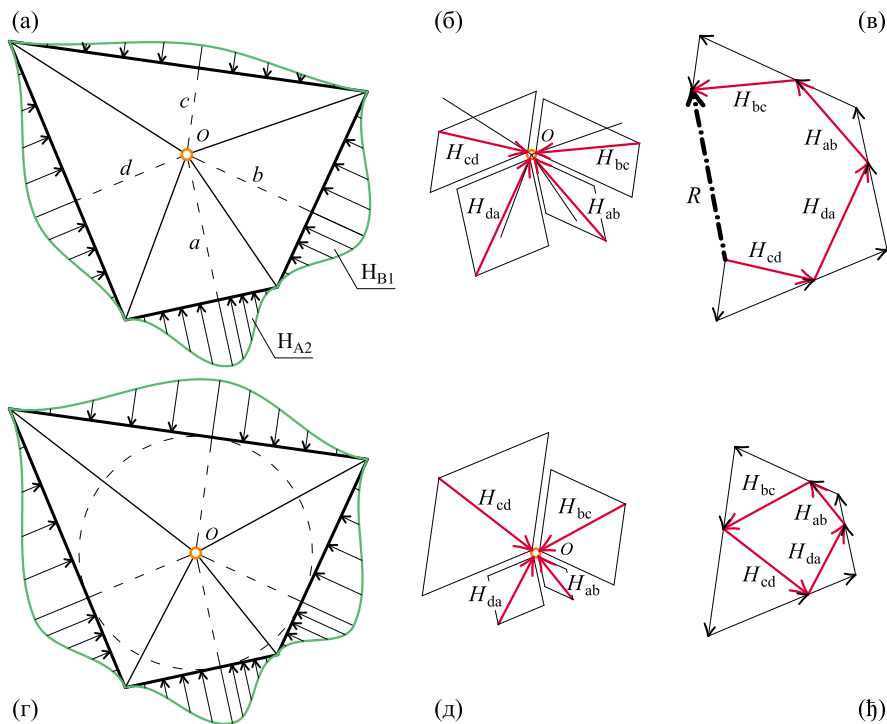
на општост проблема, разматрање ће бити спроведено на (најједноставнијем) примеру ослонца на који делују три свода, приказаном на слици 67а–в (истоветно разматрање може бити праћено и на слици 68а–в на којој је приказан ослонац на који делују четири свода, а исто важи и за ослонце на које делује више сводова).



**Слика 67.** Дејство трију сводова на заједнички ослонац: (а) основа, дејство на ослонац, (б) систем сучељених сила, (в) отворени полигон сила, (г) оптимални положај ослонца, (д) уравнотежени систем сучељених сила, (е) затворени полигон сила

На ослонац  $O$  делују половине трију цилиндричних сводова који су међусобно афини. На делове ових сводова, над пољима  $A_1, A_2, B_1 \dots C_2$  дуж темених линија делује расподељено хоризонтално оптерећење (које замењује дејство уклоњених половина тих сводова). Претпоставимо да је познат облик полазног лука  $a$  као и припадајући хоризонтални потисак  $H_a$ ; уз то је познато и подељено хоризонтално оптерећење  $H_{A_1}$  које делује дуж темене линије свода (односно његове половине) над пољем  $A_1$ . На основу облика основе, а у складу с приказаним у одељку 21.2, могуће је добити димензије потребне за израчунавање коефицијената афинитета који важе

међу пољима  $A_1, A_2, B_1 \dots C_2$ , луковима  $a, b$  и  $c$ , те подељеним оптерећењима  $H_{A1}, H_{A2} \dots H_{C2}$ .



**Слика 68.** Дејство четирију сводова на заједнички ослонац: (а) основа, дејство на ослонац, (б) систем сучељених сила, (в) отворени полигон сила, (г) оптимални положај ослонца, (д) уравнотежени систем сучељених сила, (ђ) затворени полигон сила

Као што је наведено у поглављу 4, претпоставља се да се потисци елементарних лукова концентришу дуж укрсница. Тако се дејства  $H_{A2}$  и  $H_{B1}$  поља  $A_2$  и  $B_1$  збрајају<sup>4</sup> и у виду силе  $H_{ab}$  преносе на ослонац  $O$ . На исти начин се добијају и силе  $H_{bc}$  и  $H_{ca}$ .<sup>5</sup> Векторски збир ових трију сучељених сила,  $H_{ab}$ ,  $H_{bc}$  и  $H_{ca}$ , приказаних на слици 67б, представља укупно (резултујуће) дејство на ослонац. Њихов полигон сила, приказан на слици 67в је отворени, а главни вектор тј. резултанта  $R$  тог система сила, коју представља завршна страница полигона (страница која га затвара), одређује правац и

<sup>4</sup> Сила  $H_{ab}$  може се добити слагањем сила, применом правила паралелограма сила (в. слику 67б) или као резултанта (двостраничног) полигона сила (в. слику 67в).

<sup>5</sup> Уочити на слици 67б да ове три силе не делују у правцу укрсница.

величину дејства на посматрани ослонац. Ваља напоменути да се уместо слагања ових трију сила, могу слагати њихове компоненте – силе  $H_{A1}$ ,  $H_{A2}$ ...  $H_{C2}$ , као што се види на слици 67в. На тај начин се умањује један корак у прорачуну; додатна погодност је што су за ове силе правци отпочетка познати, док се њихове вредности непосредно добијају коришћењем припадајућег коефицијента афинитета.

Приликом пројектовања сложених сводова, битно је испитати утицај на сваки стуб (ослонац) те у складу с тим усвојити његов облик и извршити његово димензионисање. Тако је могуће усвојити и нагнути положај стуба, који би пратио правац резултантног дејства припадајућих сводова.<sup>6</sup>

## 22.2 Оптималан положај ослонаца

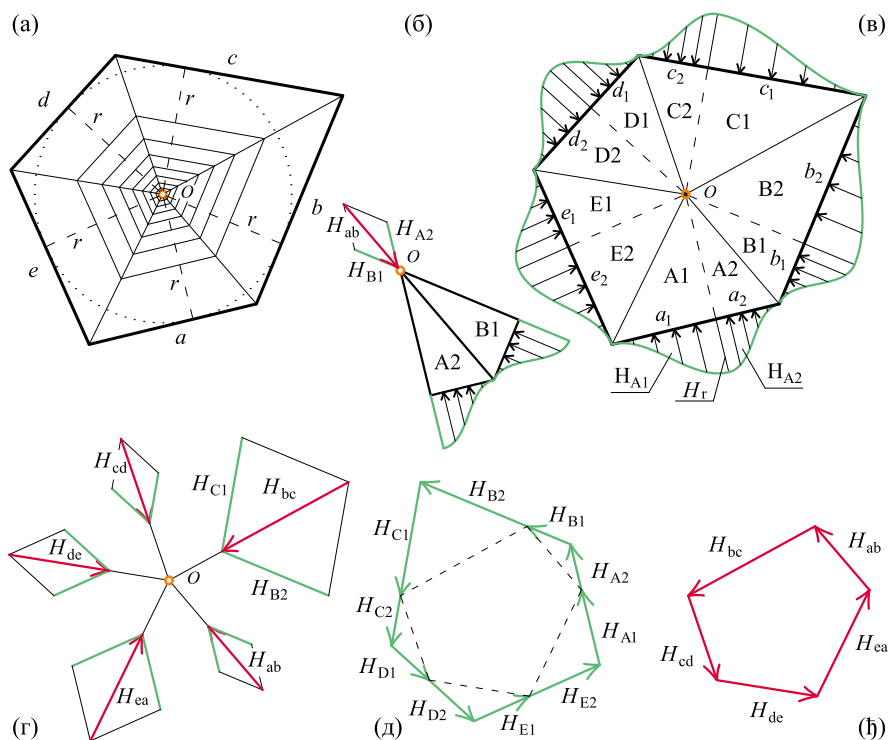
У претходном одељку приказан је општи случај у којем резултантно дејство на ослонац има и хоризонталну и вертикалну компоненту. Овде ће бити размотрен случај у којем се хоризонтални потисци на ослонац потиру, те преостаје само вертикално оптерећење. Наиме, то је могуће у посебном случају: када је многоугао који образују осе (темене линије) припадајућих сводова *тангентни многоугао*,<sup>7</sup> а ослонац се налази у средишту уписаног круга. Тада је векторски збир хоризонталних сила које делују на ослонац једнак нули, односно заступљен је систем уравнотежених сила у равни. Доказ је дат у предстојећем излагању, на примеру петоугаоне основе, а важи за сваки тангентни многоугао (истоветно разматрање може бити праћено и на сликама 67г–ђ и 68г–ђ).

Размотримо многоугао страница  $a, b, c, d$  и  $e$  приказан на слици 69а. Половине од пет цилиндричних сводова (шметски представљених) делују на ослонац у тачки  $O$  која је средиште уписаног круга. На делове ових сводова, над пољима  $A1, A2, B1$ ... $E2$ , дуж темених линија (многоугао  $a - e$ ) делује расподељено хоризонтално оптерећење (које замењује дејство уклоњених половина тих сводова), као што је приказано на слици 69в. Нека је за лукове (профиле тј. водиле цилиндричних сводова) познат хоризонтални потисак  $H_r$ , односно нека је познато меродавно подељено оптерећење  $Q$  за свод таквога пресека. Тада се подељена оптерећења  $H_{A1}, H_{A2}$ ... $H_{E2}$  лако

<sup>6</sup> Овакав приступ је применио Антони Гауди приликом пројектовања стубова у Парку Гвел и цркви Саграда Фамилија.

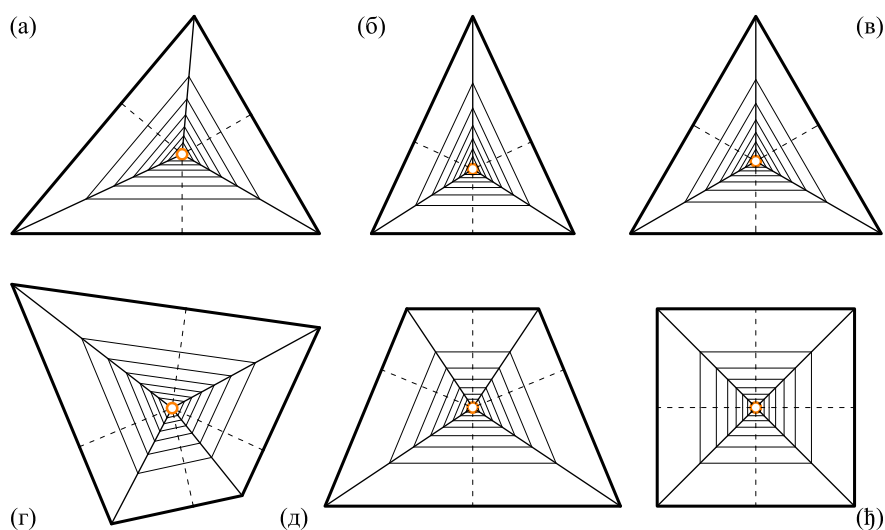
<sup>7</sup> Многоугао у који је могуће уписати круг који додирује све његове странице, односно многоугао чије странице образују тангенте једног круга.

добијају уз одговарајући коефицијент. Имајући у виду да постоји уписани круг (назначен тачкастом линијом), сви сводови (односно лукови  $r$  назначени испрекиданим линијама) који окружују ослонац истог су пресека. Сходно томе, укрснице ових (сваких двају суседних) сводова заузимају правац симетрале њихових темених линија (односно страница тангентног многоугла који представља основу), те су суседна поља ( $A_2$  и  $B_1$ ,  $B_2$  и  $C_1 \dots E_2$  и  $A_1$ ) симетрична у односу на заједничку укрсницу (в. слике 69а–в). Услед тога силе  $H_{a,b}$ ,  $H_{b,c}$ ,  $H_{c,d}$ ,  $H_{d,e}$  и  $H_{e,a}$  делују у правцу одговарајућих укрсница (в. слику 69г) и представљају систем од пет сучељених сила (придружени полигон сила приказан је на слици 69ђ).



**Слика 69.** Оптималан положај ослонца: (а) основа (тангентни многоугао с ослонцем у средишту уписаног круга), (б) дејство двају суседних поља (уз једну укрсницу), (в) расподељено оптерећење дуж темених линија (оса) сводова, (г) систем сучељених сила, (д) затворени полигон сила управних на осе сводова (основи сличан многоугао), (ђ) затворени полигон сила дуж укрсница

Уколико се пак посматрају компоненте ових сила у правцима управним на припадајуће странице основе односно темене линије, дакле силе  $H_{A1}, H_{A2} \dots H_{E2}$  (од којих се заправо пошло), добија се систем од десет сучељених сила. Њихов полигон сила приказан је на слици 69д. Ако се саберу силе истог правца, те означе с  $H_A, H_B, H_C, H_D$  и  $H_E$  (нпр.  $H_A = H_{A1} + H_{A2}$ ), добија се систем од пет сучељених сила. Као што је познато, да би ове силе биле у равнотежи, њихов полигон сила мора бити затворен. У складу с одељком 21.2, њихове величине сразмерне су дужинама припадајућих делова темених линија:  $H_{A1} : H_{A2} : H_{B1} \dots H_{E2} = a_1 : a_2 : b_1 \dots e_2$ . Из тога следи и следеће:  $H_A : H_B \dots H_E = a : b \dots e$ . С обзором на то да се ове силе односе као странице многоугла, а притом је свака управна на придружену страницу, следи да ће полигон сила бити многоугао сличан посматраном многоуглу  $abcde$  и заокренут за прав угао у односу на њега (упореди слике 69а и 69д). Овим је показано да је полигон сила затворен, што је графички услов равнотеже система сучељених сила. Дакле, када је стуб смештен у средишту круга уписаног у многоугао који образују околне темене линије (осе припадајућих цилиндричних сводова) на њега ће деловати само вертикално оптерећење (нема хоризонталних потисака, резултујуће дејство је вертикално).



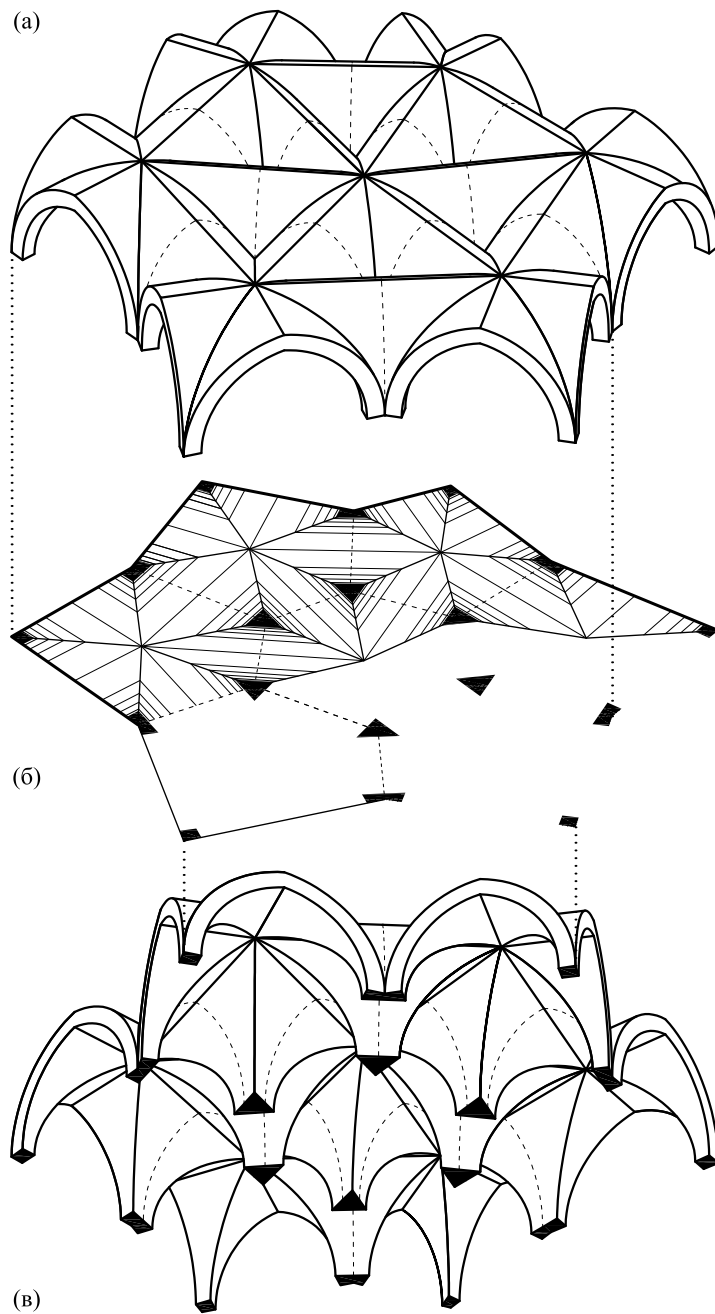
Слика 70. Уравнотежено дејство на заједнички ослонац: (а-в) три свода: разнокрак, једнакокрак и једнакостраничан троугао, (г-ђ) четири свода: разнокрак четвороугао, једнакокрак трапез и квадрат

На слици 70 дати су примери ослонаца са припадајућим деловима околних сводова чији су хоризонтални потисци уравнотежени. Свакако највећу, или бар најједноставнију примену у оквиру сложених афиних (посебно зракастих) сводова, поред правилних многоуглова, имају осно симетричне фигуре – једнакокраки трапез и троугао. Међутим, у понеким случајевима је могуће да и разнокраки многоугао, нпр. разнокраки (тетивни) четвороугао (попут приказаних на сликама 68г и 70г), буде заступљен у оквиру сложеног склопа а притом уравнотежен, као што се може видети на слици 75б,в,ђ. У зависности од одступања положаја стуба од средишта уписаног круга основе мењаће се величина хоризонталног потиска који делује на стуб, односно нагнутост резултанте.

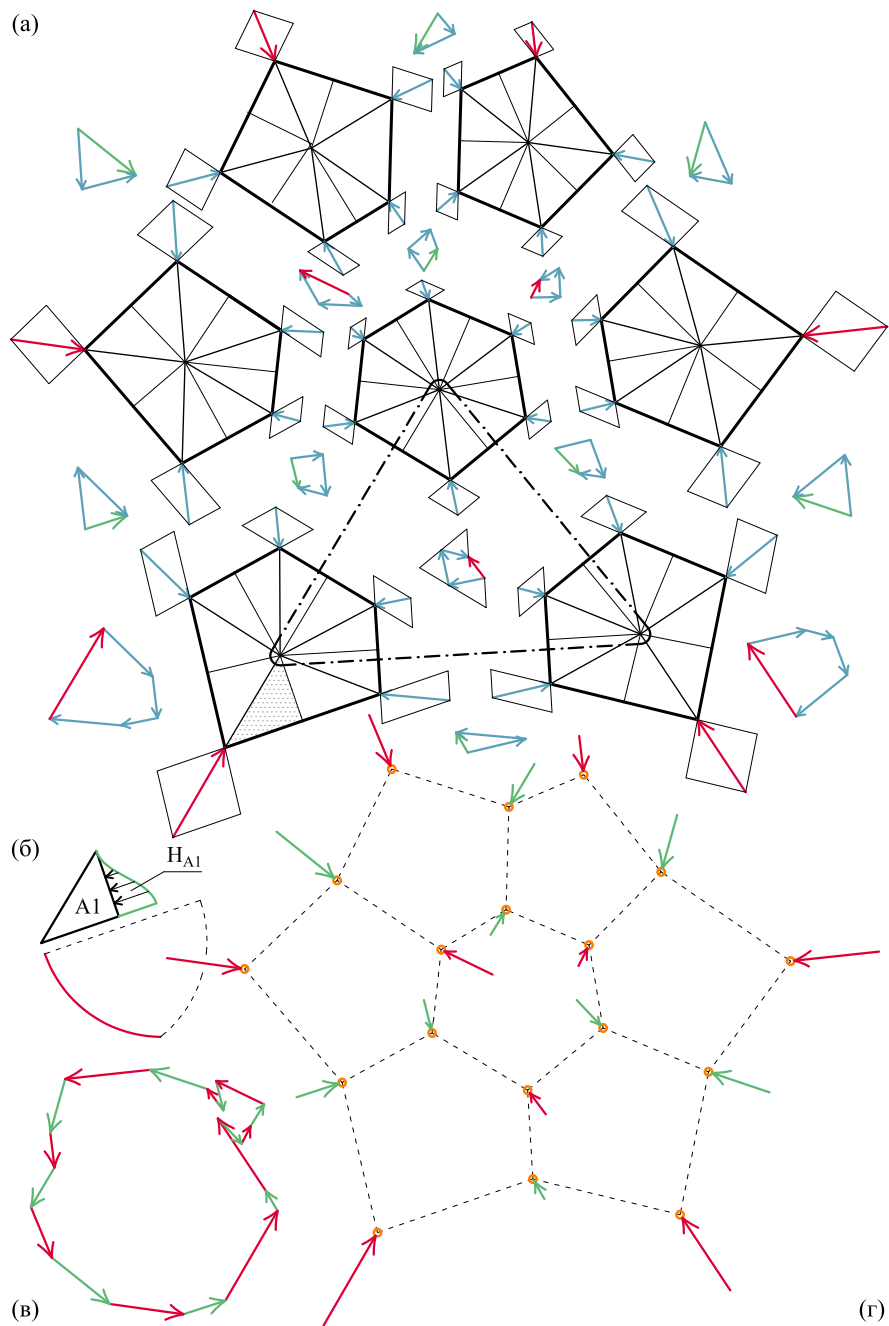
### 22.3 Дејствовање сложеног неправилног афиног свода

У овом одељку је, као пример општег случаја афиног свода, размотрена равнотежа сложеног неправилног свода приказаног на слици 71. Шематски приказ полазног свода над пољем  $A_1$  (шрафирано на слици 72а) односно његовог ободног лука, с припадајућим хоризонталним оптерећењем  $H_{A_1}$ , дат је на слици 72б. Испитивање је спроведено у складу с првим поступком (в. стр. 194). Целокупни свод је разложен на своје саставне делове, на седам сложених крстастих сводова, као што је приказано на слици 72а. Ту је приказано дејство појединачних крстастих сводова на припадајуће ослонце (паралелограм сила дат је уз сваки ослонац у теменима многоуглова који представљају сводна поља појединачних крстастих сводова). Уз то је за сваки ослонац (који је заједнички<sup>8</sup> за два односно три крста свода) дат и полигон сила чија резултанта представља дејство на тај ослонац. Ова дејства засебно су приказана на слици 72г, где се лако може уочити смер појединих сила као и међусобни однос њихових величина. Све ове силе, дванаест спољашњих и шест унутрашњих, надовезане су у јединствени полигон сила приказан на слици 72в. Као што се види, полигон је затворен, што значи да свод у целини представља уравнотежени систем сила.

<sup>8</sup> Може се уочити да су шест унутрашњих стубова заједнички за по три крста свода, док је сваки други спољашњи ослонац (на конкавним деловима ободног многоугла целокупног свода) заједнички двама сводовима; преосталих шест спољашњих ослонаца припада само по једном крстастом своду.



Слика 71. Просторни приказ неправилног сложеног свода: (а) поглед одозго, (б) основа, (в) поглед одоздо



Слика 72. Дејствовање неправилног сложеног свода: (а) разложена основа, (б) полазни свод, (в) затворен полигон сила, (г) ослонци с припадајућим дејствима



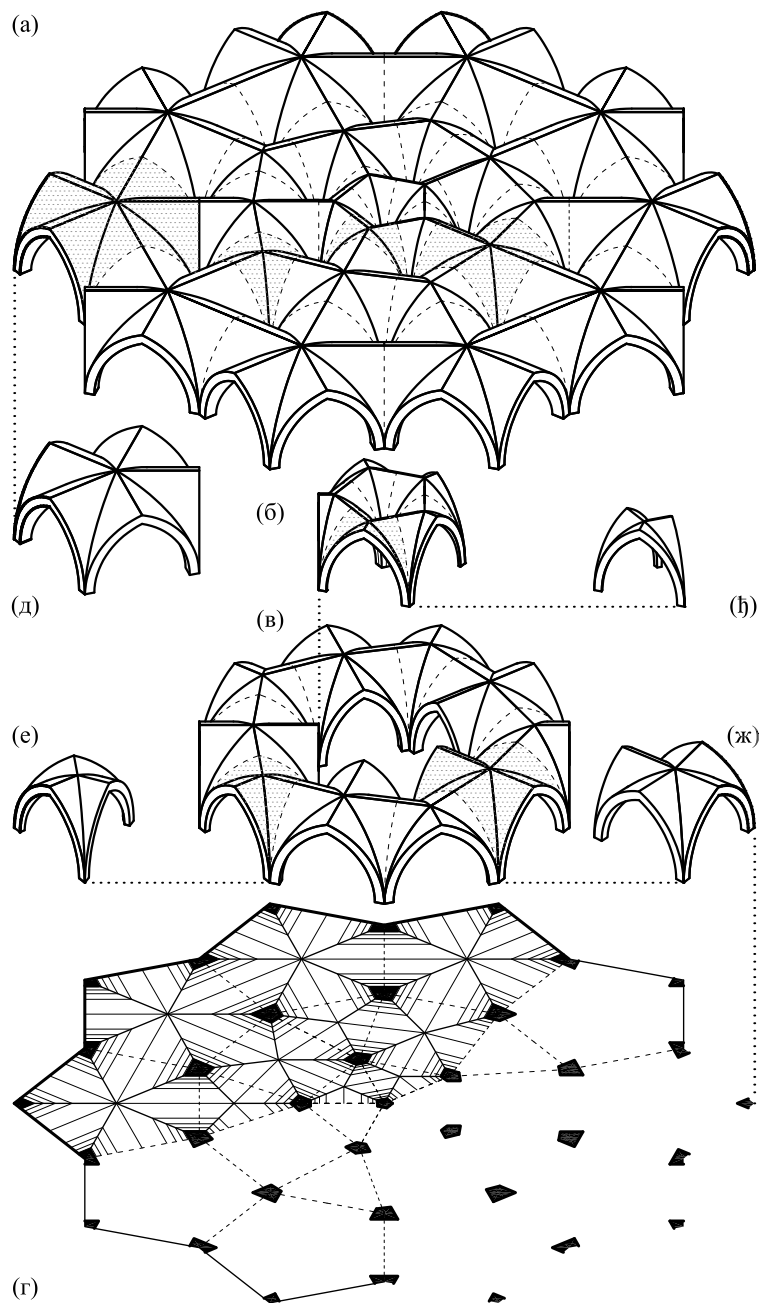
## 22.4 Дејствовање сложеног зракастог свода

У овом одељку разматрана је равнотежа сложеног зракастог свода, и то на два примера у којима је могуће уочити извесне правилности у основи свода. У претходном примеру (неправилни афини свод) није било правилности, те је сваки део свода морао засебно бити испитан. Међутим, као што је наведено, код зракастих сводова постоји својствен део који се укруг, радијално, умножава. Стога је довољно испитати равнотежу тог дела свода, те у односу на његову радијалну симетрију испитати свод у целости.

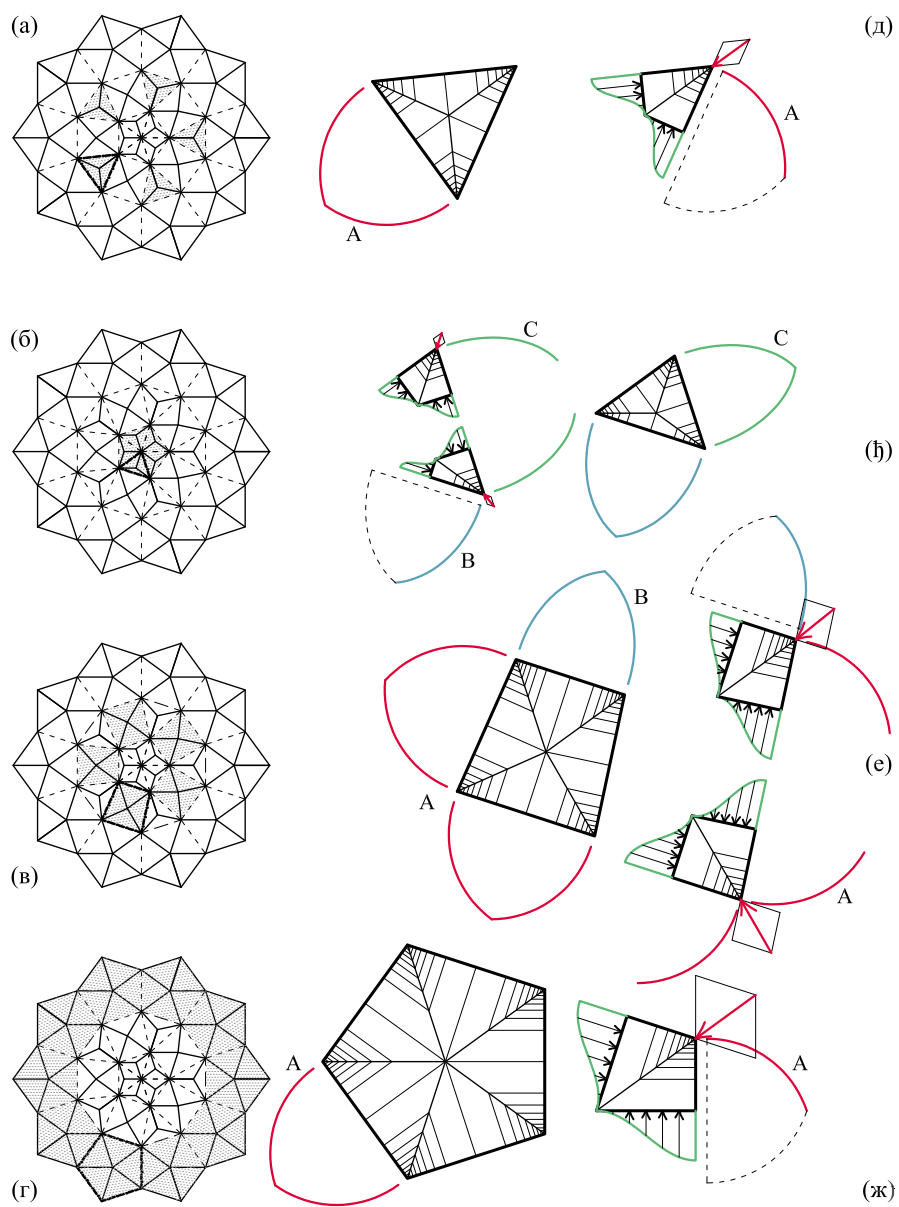
**Пример 1.** Прво ће бити размотрена равнотежа сложенога зракастога свода чији је просторни приказ дат на слици 73, на којој су приказани сви саставни делови (крстасти сводови) свода, као и њихов међусобни однос (веза и положај). Свод се састоји од трију прстенастих сводова (по угледу на шематски приказ са слике 56). Средишњи део чини затворени петоделни прстенасти свод (слика 73б). Средњи прстенасти свод (слика 73в) је полуправилни (уп. са сликом 60в), а састављен је од наизменично постављених (неправилних) троделних (слика 73е) и четвороделних (слика 73ж) крстастих сводова. Спољни прстен је правилни десетоделни (уп. са сликом 58а), састављен од десет правилних петоделних крстастих сводова (слика 73д).

На слици 74а–г дат је размештај наведених саставних делова свода. Претпоставимо да је за полазни лук одабран ободни лук петоделног крстастог свода у спољном прстену (лук А на слици 74ж), као и да је познат меродавни хоризонтални потисак. На основу димензија основе рачунају се потребни коефицијенти афинитета, а затим и подељена оптерећења која делују дуж темених линија (в. слику 74д–ж). Као што је наведено (в. стр. 194), у складу с поступком I, дејствовање свода може бити испитано разлагањем свода на саставне сложене крстасте сводове, разматрањем њихових појединачних дејстава, те збрајањем тих дејстава на појединачним ослоњцима.

С друге стране, у складу с поступком II, могуће је издвојити појединачне ослоњце с припадајућим деловима свода, те непосредно испитати утицаје на њега. На слици 75а дат је шематски приказ основе разматраног зракастог свода, док је на слици 75б назначен његов својствени (умножавани) део састављен од пет различитих делова ( $\alpha - \varepsilon$ ). (Приликом испитивања дејства на појединачан ослонац потребно је водити рачуна о његовом положају, односно да ли су одабраним пољем (у оквиру својственога дела) обухваћени сви



**Слика 73.** Просторни приказ склопа сложеног зракастог свода: (а) целокупни свод, (б) правилни петоделни свод са средишњим стубом, (в) сложени прстенасти свод, (г) основа, (д-ж) петоделни, троделни, правилни троделни и четвороделни сложени крстасти свод



**Слика 74.** Размештај и дејствовање делова сложеног зракастог свода: (а–г) размештај појединачних сводова у основи, (д–ж) сложени крстасти сводови с приказаним ободним луковима; издвојени су и засебно приказани ослонци с припадајућим деловима сводова и њиховим дејствима

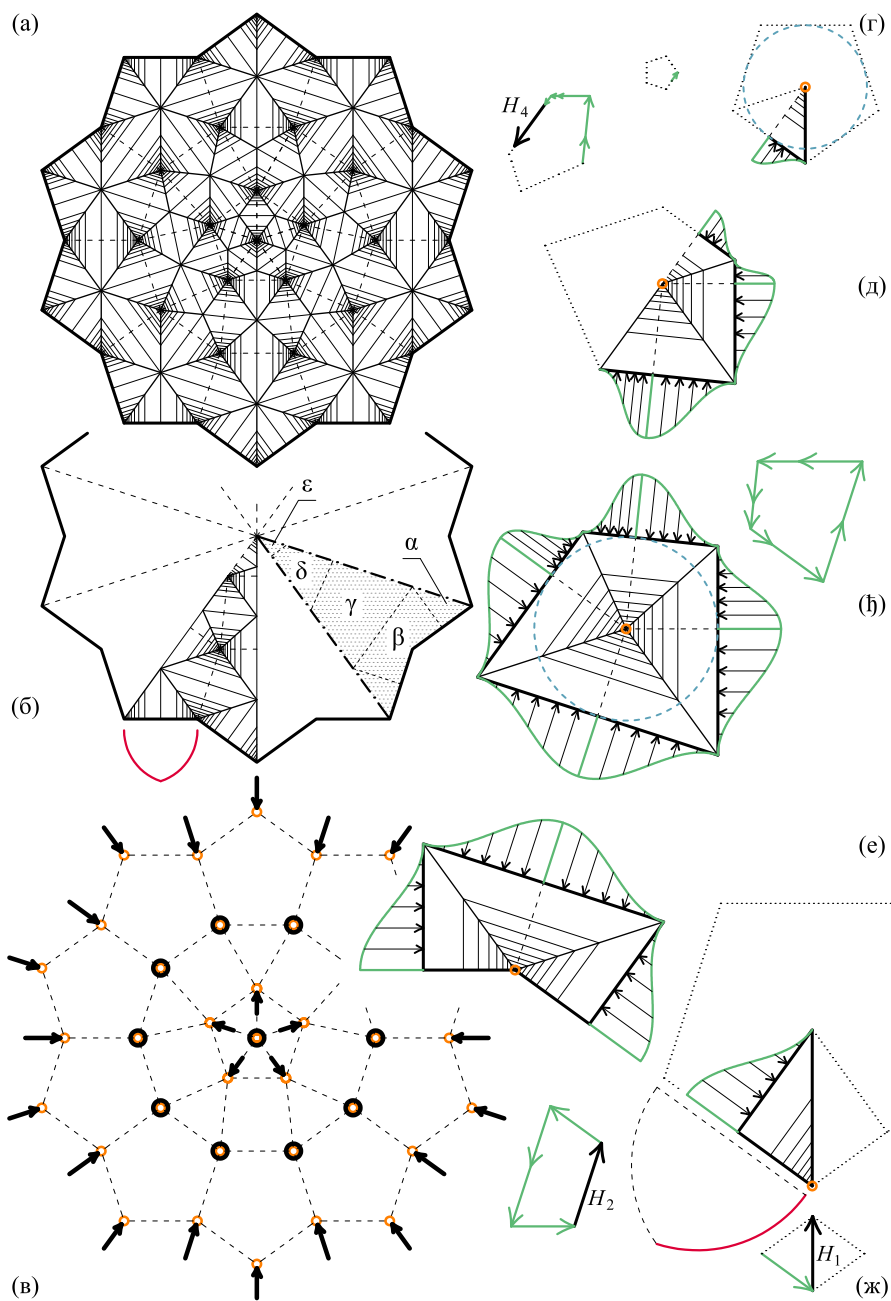
сводови који дејствују на тај ослонац или се ослонац налази на ободу својственог дела када је потребно узети у обзир и утицај суседног (симетричног) дела (приказано тачкастим линијама на сликама 75г,д,ж; то ће бити случај када се граница својственог дела поклапа с укрсноном а не с теменом линијом). Може се уочити да у оквиру својственог дела учествује пет различитих ослонаца. Они су с припадајућим деловима свода издвојени<sup>9</sup> те засебно приказани на сликама 75г–ж. Уз то су приказана и припадајућа оптерећења (која делују дуж темених линија) као и придружени полигони сила.

Свод је образован тако да оквиру делова  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  (приказани на сликама 75ж,е,ђ) учествују цилиндрични сводови истога пресека (облик полазног лука А). Стога су једнаке и силе (потисци лукова)  $H_a$ ,  $H_b$  и  $H_c$ . У оквиру поља  $\alpha$  постоји само један део свода с припадајућим подељеним оптерећењем  $H_{A1}$ ; до њега постоји истоветно поље, те се потисак  $H_1$  на том ослонцу добија помоћу паралелограма сила (слика 75ж). Поље  $\beta$  је симетрично, те реакција ослонца  $H_2$ , која се добија векторским збиром четирију сила  $H_{B1} \dots H_{B4}$ , заузима правац осе симетрије. Будући да темене линије које окружују ослонац у пољу  $\gamma$  одређују тангентни многоугао (в. слику 75ђ), закључује се да се на њему хоризонтални потисци ( $H_{C1} \dots H_{C8}$ ) потиру, те да постоји само вертикално оптерећење. Исто важи и за средишњи затворени прстенасти свод чији део одговара пољу  $\varepsilon$  (в. слику 75г). У оквиру поља  $\delta$  сва три саставна свода су различита, те су и силе  $H_{D1} \dots H_{D5}$  различите величине. Уз дејство суседних (симетричних) сводова чије се оптерећење преноси на заједнички ослонац, добија се сила  $H_4$  која дејствује у правцу поменуте осе симетрије.

Добијене реакција ослонца  $H_1 \dots H_5$  преносе се на шему ослонаца, на којој су приказана сводна поља и ослонци с припадајућим реакцијама, као што се види на слици 75в. С обзиром на то да су све реакције ослонца зракасто оријентисане, може се закључити да се међусобно потиру<sup>10</sup> те да је свод у целини у равнотежи.

<sup>9</sup> У односу на основу овај приказ је увећан два и по пута.

<sup>10</sup> Реакције од спољних двадесет ослонаца се међусобно потиру, као и од унутрашњих пет ослонаца, док на средњих десет ослонаца и на средишњем ослонцу нема хоризонталних потисака.



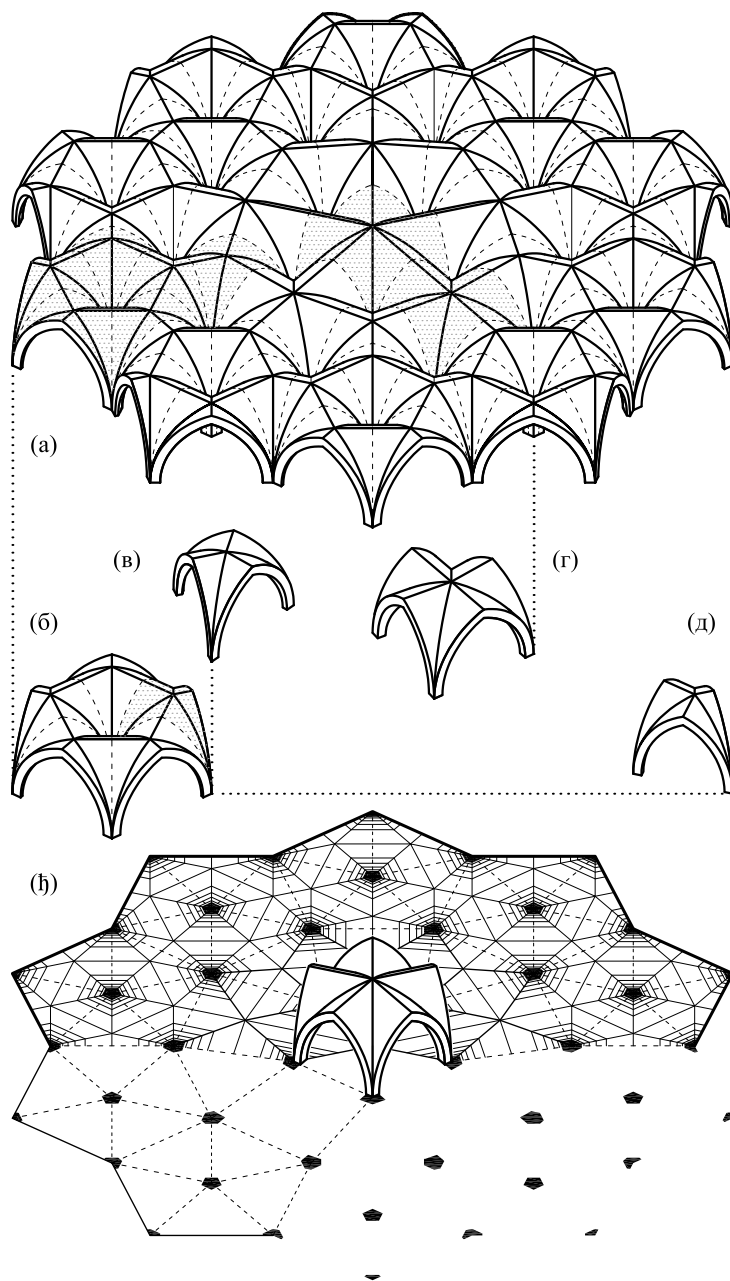
Слика 75. Дејствовање сложеног зракастог свода: (а) шематски приказ основе, (б) умножавани део, (в) основа свода односно ослонци с приказаним реакцијама, (г–ж) издвојени ослонци с припадајућим деловима свода, њиховим дејствима и полигоном сила

**Пример 2.** У овом примеру се разматра зракасти свод приказан на слици 76. У поређењу са зракастим сводем из Примера 1, спољашње димензије целокупног свода и средњи прстен су непромењени. Затворени (средњи) прстенасти свод из Примера 1 овде је уврштен и умножен у оквиру спољашњег прстена, који сада представља сложени (неправилни) прстенасти свод образован од десет петоделних затворених прстенастих сводова (в. слику 76а). С друге стране, правилни петоделни крстасти свод, који је учествовао у спољашњем прстену у Примеру 1, сада је смештен у средиште зракастог свода (в. слику 76ђ).

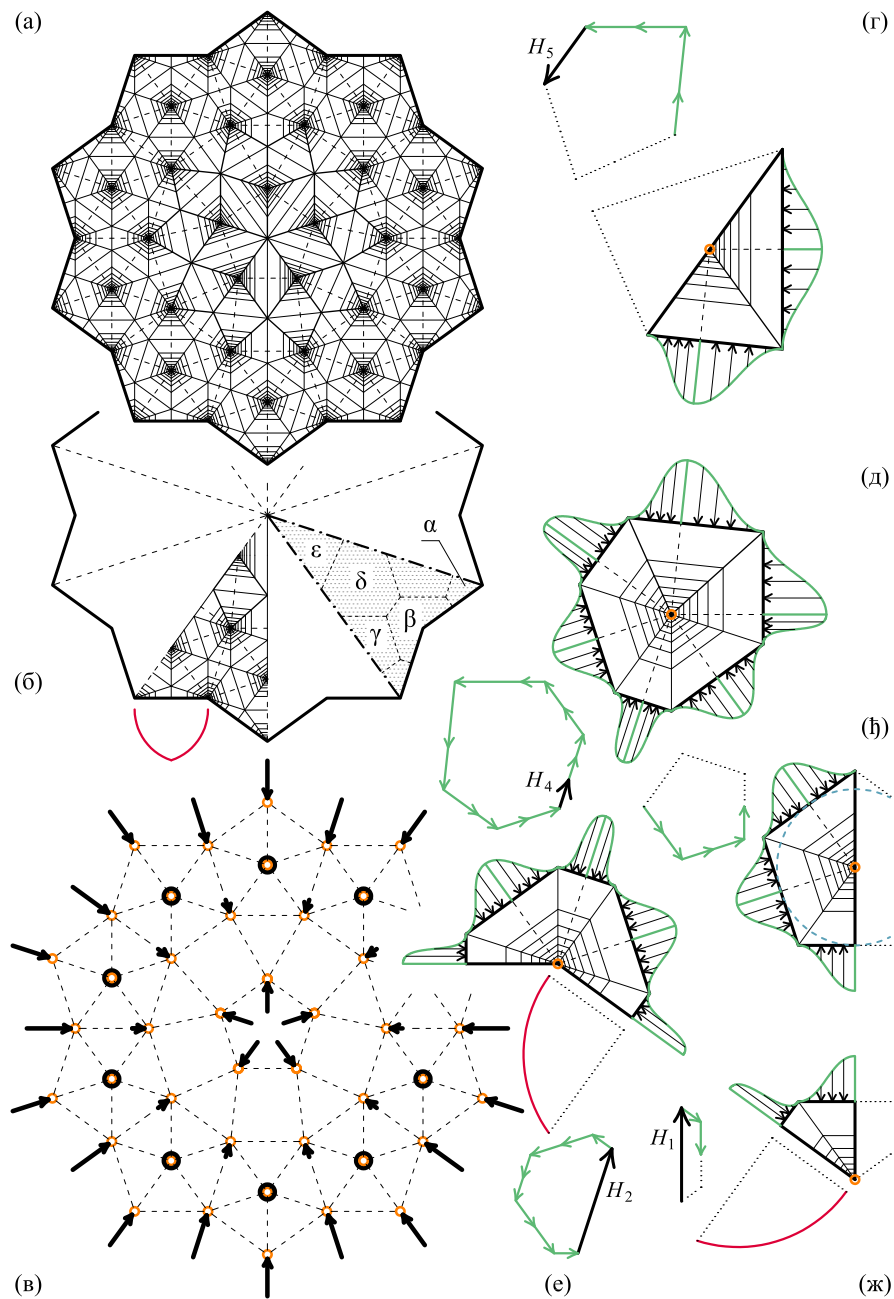
На слици 77а дат је шематски приказ основе, а својствени део, састављен од пет различитих делова ( $\alpha - \varepsilon$ ), назначен је на слици 77б. Може се приметити да су два поља,  $\beta$  и  $\delta$ , обухваћени сви сводови који дејствују на припадајући ослонац, док се у преосталим трима пољима,  $\alpha$ ,  $\gamma$  и  $\varepsilon$ , ослонац налази на ободу својственога дела те је потребно узети у обзир и утицај суседних (симетричних) делова свода. Као и у претходном примеру, ослонци су с околним деловима свода и припадајућим оптерећењима (која делују дуж темених линија) издвојени те засебно приказани на сликама 77г–ж. Уз њих су приказани и придружени полигони сила.

У оквиру поља  $\alpha$  налазе се два дела свода с припадајућим подељеним оптерећењима  $H_{A1}$  и  $H_{A2}$ ; дејства суседних (симетричних) сводова чије се оптерећење преноси на заједнички ослонац, уврштена су (тачкастом линијом) у придружени полигон сила, чија резултанта  $H_1$  представља дејство на тај ослонац (слика 77ж). Поље  $\beta$  је симетрично, те реакција ослонца  $H_2$ , која се добија векторским збиром сила  $H_{B1} \dots H_{B8}$ , заузима правац осе симетрије. Будући да темених линије које окружују ослонац у пољу  $\gamma$  образују тангентни многоугао (в. слику 77ђ), хоризонтални потисци ( $H_{C1} \dots H_{C5}$ , уз оне симетричне делове који нису приказани) се потиру, те постоји само вертикално оптерећење. Пољем  $\delta$  обухваћени су сви сводови чије се дејство преноси на припадајући ослонац; према томе, резултанта  $H_4$  придруженог полигона сила  $H_{D1} \dots H_{D12}$  представља дејство на ослонац. У оквиру поља  $\varepsilon$  дејствују оптерећења  $H_{E1} \dots H_{E4}$ , која уз дејство суседних (симетричних) сводова чије се оптерећење преноси на заједнички ослонац, дају резултанту  $H_5$  која дејствује у правцу поменуте осе симетрије. Добијене реакција ослонаца  $H_1 \dots H_5$  приказане су на шеми ослонаца на слици 77в. Као и у претходном примеру, међусобно се потиру<sup>11</sup> те је свод у целини уравнотежен.

<sup>11</sup> Потиру се реакције спољних двадесет ослонаца, средњих десет и унутрашњих пет, док средишњи ослонци спољашњег прстена примају само вертикална оптерећења.



**Слика 76.** Просторни приказ склопа сложеног зракастог свода: (а) целина, (б) правилни петоделни свод са средишњим стубом, (в) правилни троделни свод, (г) четвороделни сложени крстасти свод, (д) троделни крстасти свод, (h) основа (и правилни петоделни свод)



Слика 77. Дејствовање сложеног зракастог свода: (а) шематски приказ основе, (б) умножавани део, (в) основа свода односно ослонци с приказаним реакцијама, (г–ж) издвојени ослонци с припадајућим деловима свода, њиховим дејствима и полигоном сила



### 22.5 Алгоритам за испитивање општих афиних сводова

Прорачуни равнотеже конструкција сложених геометријских облика могу бити заморни и врло сложени, те их је често немогуће спровести без примене аутоматизованог поступка спроведеног уз помоћ рачунара. На основу спроведених разматрања, може се закључити да је приликом испитивања равнотеже афиних сводова потребно свега неколико улазних чинилаца, а да се остале величине (претежно дужине) неопходне за прорачун добијају на основу димензија и облика сводних поља односно основе свода (представљене цртежом). Имајући то у виду, такав поступак је веома погодан за рачунарску обраду уз помоћ графичких тј. цртачких рачунарских програма или пак софтвера намењеног управљању великим бројем нумеричких вредности.<sup>12</sup> Стога је овде установљен општи поступак тј. алгоритам за испитивање равнотеже односно за пројектовање општих афиних сводова. Алгоритам је представљен дијаграмом тока на слици 78, а у целини обухвата пет ступњева: (I) припрема, (II) утврђивање потребних дужина, (III) унос односно одабир улазних чинилаца свода, (IV) израчунавање, (V) приказивање резултата. Ступњеви (I) и (III) подразумевају рад корисника (пројектанта), док су остали погодни за аутоматизацију.

Ступањ (I) подразумева припрему односно израду цртежа којим је представљена основа свода. На њему је потребно да постоје три врсте података: (i) облик сводних поља односно странице многоуглова који их представљају, (ii) темене линије односно осе цилиндричних сводова и (iii) положај ослонаца (у теменима многоуглова). Заправо је довољно израдити мрежу сводних поља, која представља ставку (i), док је ставке (ii) и (iii) тј. мрежу темених линија и размештај ослонаца могуће и непосредно добити (произвести) на основу ставке (i).

Ступањ (II) обухвата аутоматско утврђивање вредности потребних за прорачун у оквиру ступња (IV). На основу цртежа који представља основу свода, утврђују (читавају) се дужине свих ободних лукова (дужине страница многоуглова који представљају сводна поља) и темених линија, те се складиште (записују, чувају) у одговарајуће спискове (листе).<sup>13</sup>

У оквиру ступња (II) потребно је на основи одабрати дуж која представља полазни лук. Затим је потребно (из претходно одре-

<sup>12</sup> Нпр. Аутокед (*AutoCAD*) уз Аутолисп (*AutoLISP*), Рајносерос (*Rhinoceros*) уз Грасхопер (*Grasshopper*), или Мајкрософт Ексел (*Microsoft Excel*).

<sup>13</sup> В. опис дат у Додатку Е на стр. 256.

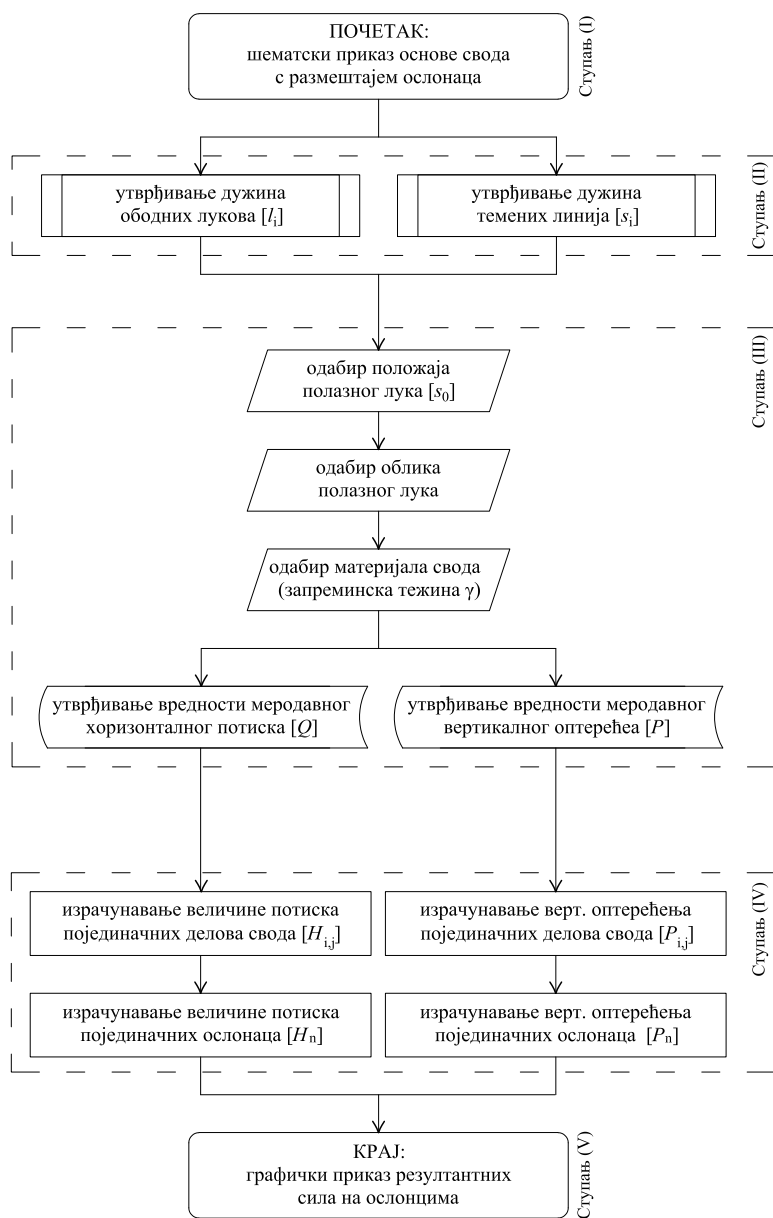
ђеног складишта различитих облика лукова и њихових својстава) одабрати облик полазног лука (односно пресек полазног цилиндричног свода), те материјал од којег је (или ће бити) начињен свод односно његову запреминску тежину  $\gamma$ . У складу с одабраним полазним луком, из складишта се узимају придружене вредности меродавног хоризонталног потиска свода  $Q$  и меродавног вертикалног оптерећења  $P$  (в. нпр. табелу 14 на стр. 167).

У ступњу (IV) се прво израчунавају потребни коефицијенти афинитета, и то на основу дужина (страница и темених линија) утврђених у ступњу (II). На основу тога се израчунавају вредности хоризонталног потиска и вертикалног оптерећења сваког појединачног дела свода. Затим се за сваки појединачни ослонац збрајају оптерећења која се на њега преносе.

На крају се, у ступњу (V), производи цртеж који приказује дати размештај ослонаца с израчунатим припадајућим оптерећењима. Другим речима, на почетну основу се исписују (доцртавају, у одговарајућој размери за силе) стрелице уз које је наведена вредност хоризонталног потиска и вертикалног оптерећења.

Описани поступак је уврштен у графички уређивач алгоритама Грасхопер (*Grasshopper*) који је повезан с Рајносеросом (*Rhinoceros*). Тиме је успостављен интерактивни модел у којем је остварена непосредна веза између измена самог цртежа – основе свода и излазног графичког приказа дејстава на ослонце.<sup>14</sup>

<sup>14</sup> Примери прорачуна дејства односно испитивања неколико афиних сводова различите сложености дати су Додатку Е.



Слика 78. Дијаграм тока испитивања општих афиних сводова



## Глава VIII

---

### Завршна разматрања

|

—

|

—

|

—

|

—

---

## Преглед доприноса дисертације

*Твоје мишљење ме нарочито занима, баш због тога што се са мојим не поклапа. – Та зар верујеш да мислим како су моја учења последња реч сазнања? Она су тек скроман почетак. [94, стр. 325]*

Демокритов одговор Хипократу

У овој дисертацији обрађен је проблем равнотеже засвођених масивних конструкција, који обухвата две уско повезане скупине проблема: (а) равнотежа лукова, као равански проблем, и (б) равнотежа сводова, која представља просторни проблем. У првој је примењена теорија потпорне линије, док је друга заснована на уведеном конструкцијском афинитету. Као исход истраживања начињен је параметарски модел за испитивање равнотеже односно пројектовање сложених афиних сводова.

**Теорија потпорне линије и масивни лукови.** Истраживање приказано у овој дисертацији потврђује да је теорија потпорне линије, премда је превасходно развијана као графички метод, подложна одговарајућој аналитичкој обради, те да је погодна за даљу рачунарску обраду.<sup>1</sup> При разматрању равнотеже лукова, издвојен је проблем одређивања њихове минималне теоријске дебљине када су оптерећени само сопственом тежином, што представља класични инжењерски проблем, у научним оквирима постављен крајем седамнаестог века. С обзиром на то да су досад пружена тачна решења само за два облика лука,<sup>2</sup> у овој дисертацији је подробно испитана равнотежа свих преосталих уобичајених облика лукова (претежно развијених у време готике). Према томе, обрађени су

---

<sup>1</sup> Показано је да је, иако је током двадесетог века сматрана „старом теоријом“ те превасиђеном, данас примерена за испитивање равнотеже засвођених конструкција.

<sup>2</sup> Полукружни (1904, Милутин Миланковић) и елиптички лук (2013, Алексакис и Макрис)

симетрични конвексни лукови чија је средишња линија образована од делова кружних лукова, дакле тзв. лукови из једног, двају, трију и четирију средишта.<sup>3</sup>

Стереотомија, којом се подразумева облик инфинитезималног тесаника лука, издвојена је као битан чинилац који утиче на облик потпорне линије те њену аналитичку обраду. Сходно томе, подробно су обрађена сва три њена уобичајена облика: радијална, нормална и вертикална стереотомија.<sup>4</sup> Преломљени лук се може посматрати окосницом овог дела дисертације, будући да је испитивање његове равнотеже спроведено у складу са свим трима наведеним стереотомијама, те да су на основу њега утврђена својства механизма слома и одговарајући итеративни поступци.

Допринос ове дисертације који се односи на испитивање равнотеже масивних лукова је следећи:

□ У складу с Миланковићевим геометријским приступом, по којем се испитује равнотежа коначног дела лука, пружен је целовит увид у својства потпорне линије те начињен *аналитички модел* за сваки разматрани лук. Одређеније, у оквиру ове дисертације први је пут подробно испитана равнотежа од чак десет скупина облика лукова: (i) равни лукови, (ii) троугласти лукови, (iii) преломљени лукови, (iv) лукови из трију средишта (тзв. елипсasti лукови), (v) псеудолукови из трију средишта, (vi) лукови из четирију средишта (тзв. тјудорски лукови), (vii) псеудолукови из четирију средишта, (viii) драпераста лук, (ix) циклоидни лук и (x) ланчанични лук.

□ Успостављена је јасна веза између облика преломљеног лука и припадајућег *механизма слома*. Показано је да када је претпостављена минимална дебљина преломљеног лука постоје четири механизма слома, с тачно одређеним теоријским бројем зглобова и редоследом појављивања с обзиром на ексцентрицитет. Сходно томе, почевши од сегментног лука (који има нулти ексцентрицитет и пет зглобова), уз постепено повећавање ексцентрицитета, редом се образују механизми слома који садрже шест, седам и пет зглобова (који се јављају у двама различитим размештајима).

□ Будући да рачунарска обрада пружа подробније испитивање, извршено је *нумеричко моделирање* у виду извођења посебних итеративних поступака. С обзиром на то да се вредности минималне

<sup>3</sup> Овим су обухваћени равни, троугласти, преломљени и изведени полицентрични лукови образовани здруживањем више претходно наведених лукова. Уз то су, иако одступају од наведеног описа облика осе лука, у виду додатка, обрађена и два лука чији је облик у вези с кругом, као и ланчанични лук као идеални облик лука.

<sup>4</sup> Код (лажних) троугластих лукова је примењена и хоризонтална стереотомија.



дебљине по правилу одређују нумеричким путем, закључено је да део прорачуна који се односи на изналагање екстремних вредности у смислу диференцирања може бити изостављен, те да итеративни поступак може бити спроведен у ранијем ступњу прорачуна, односно са сложенијим математичким изразима.

- Начињена су четири алгоритма за одређивање минималне дебљине лука (који одговарају установљеним механизмима слома), као и два алгоритма за одређивање граничних механизма слома (те су израчунате вредности придруженог ексцентрицитета).
  - На основу тога је спроведен нумерички прорачун те су добијене тачне вредности минималне дебљине за 122 преломљена лука различитог облика, узимајући у обзир и сегментне и потковичасте лукове. С обзиром на то да је испитивање спроведено за све три стереотомије, међусобно су упоређене одговарајуће вредности, те је закључено да разлике постоје, али да су незнатне и да расту с порастом вредности обухватног угла и ексцентрицитета.
  - Успостављена је веза између ексцентрицитета, обухватног угла и минималне дебљине лука, те је представљена графички, чиме је омогућено јасно разликовање механизма слома с обзиром на облик лука.
  - Показано је да гранични механизам слома са седам зглобова важи само за одређену величину ексцентрицитета. Према томе, за одабрани обухватни угао, представља теоријски најтањи могући лук, који има максималну искоришћеност дебљине.
  - У складу с вертикалном стереотомијом, за лукове веће дебљине од минималне, начињен је алгоритам за одређивање минималног хоризонталног потиска преломљених лукова.
- Увођењем преломљеног врха, као и већег броја средишта, аналитичка обрада проблема знатно се усложњава. Међутим, показано је да се тиме само проширује уобичајени опсег теорије потпорне линије, док суштина проблема и приступ његовом решавању остају непромењени. Тако су, након утврђивања одговарајућих механизма слома, наведени алгоритми, изведени за преломљене лукове (из двају средишта), непосредно примењени за испитивање равнотеже осталих наведених полицентричних лукова. Одређеније, од мноштва обрађених лукова, нумерички резултати дати су за 40 лукова из трију средишта, 17 псеудолукова из трију средишта, 63 лука из четирију средишта и 36 псеудолукова из четирију средишта. Уз то је графички, у виду дијаграма, представљена зависност између облика лука и његове минималне дебљине.
- Испитана је равнотежа равних и троугластих лукова те су изведе-

дени аналитички изрази за потпорну линију и минималну дебљину (нумеричке вредности дате су за 35 лукова). Закључено је да, у зависности од примењене стереотомије, те тиме и обухваћеног дела лука, потпорна линија може бити део праве, параболе, хиперболе или криве трећег реда.

- Поред наведеног, подробно је обрађена равнотежа циклоидног и драперастог лука, те је одређена њихова минимална дебљина.
- Показано је да је сваки ланчанични лук, без обзира на дебљину и однос распона и стреле, стабилан под сопственом тежином.

Дакле, у овој дисертацији је по први пут одређена тачна теоријска минимална дебљина и дат је графички приказ за преко 300 различитих облика лукова.

**Конструкцијски афинитет и масивни сводови.** У оквиру друге скупине проблема уведен је концепт афиних сводова који представљају склоп образован од делова различитих цилиндричних сводова међу којима се може успоставити одговарајући афинитет. Ово ме је придружен и појам конструкцијског афинитета, којим је Ранкинов концепт трансформације структура разрађен те примењен на испитивање сложених сводова.

Овде је предочен допринос ове дисертације који се односи на конструкцијски афинитет и његову примену на испитивање равнотеже односно пројектовање афиних сводова:

- С обзиром на раванске проблеме (лукове), изведена је зависност утицаја на основу односа распона двају придружених афиних лукова.
  - Закључено је да је вертикално оптерећење (сведено на површину лука) сразмерно односу распона лукова.
  - Хоризонтални потисак сразмеран је квадрату односа распона.
- Обрађен је концепт (непрекидне и у деловима глатке) потпорне површи која представља ток сила у оквиру свода, по угледу на потпорну линију у оквиру лука.
- С обзиром на просторне проблеме (сводове), показано је да је равнотежу сложених афиних сводова могуће испитати на основу погодне одабраних једноставнијих делова односно облика.
  - Изведена је зависност утицаја на основу облика сводних поља, односно дужина темене линије и полураспона ободног лука у односу на меродавне
  - За 35 облика преломљеног ободног лука, правог обухватног угла и различитог ексцентрицитета, срачуната је запремина (ме-

родавна запремина) и величина хоризонталног потиска (меродавни потисак) меродавног свода. (Притом су израчунате вредности хоризонталног потиска за преко 30.000 преломљених лукова.)

○ Закључено је да се свако (троугаоно) поље односно део свода над њим може добити помоћу двају афиних трансформација (развлачења, елементарних (хоризонталних) скалирања) меродавног поља.

○ Показано је да је вертикално оптерећење неког дела свода у оквиру афиног свода сразмерно дужини припадајуће темене линије и дужини полураспона ободног лука.

○ Хоризонтални потисак је сразмеран дужини припадајуће темене линије и квадрату дужине полураспона ободног лука.

□ Извршено је разврставање афиних сводова на основу њиховог облика, сложености и саставних делова сводова који учествују у њиховом образовању. Подробно су испитана њихова својства и могући начини образовања и здруживања у сложеније склопове. Уочене су законитости, те су дате смернице за погодан облик сводних поља односно размештај ослонаца, а тиме и обликовање сводова у целини.

○ Показано је да сводно поље у оквиру сложеног афиног свода мора имати облик тетивног многоугла, чије странице представљају ободне лукове (пресеке припадајућих цилиндричних сводова).

○ Закључено је да је неки унутрашњи ослонац сложеног афиног свода оптерећен само вертикалним дејством уколико се налази у средишту круга уписаног у (тангентни) многоугао који образују темене линије припадајућих сводова.

○ Показано је да основа сложеног афиног свода представља Воронојев дијаграм, где ослонци представљају његова средишта, а мрежа темених линија ограничава његове ћелије. Уочена је дуалност у основи афиних сводова: с једне стране, сваком пољу мреже ослонаца одговара једно теме (пресечна тачка припадајућих темених линија) свода, док, с друге стране, сваком пољу мреже темених линија (Воронојеве ћелије) одговара један ослонац.

□ Установљен је општи алгоритам – параметарски модел за испитивање равнотеже односно за пројектовање сложених афиних сводова.

○ На основу израђене основе свода, даљи целокупни прорачун дејстава на ослонце је аутоматизован. Тиме је пројектантски процес у том погледу сведен само на одабир двају чинилаца: (i) облик полазног лука (из претходно одређеног складишта разли-

читих облика лукова и њихових својстава) и (ii) материјал (односно његова запреминска тежина) од којег је (или ће бити) начињен свод.

○ Аутоматизованим добијањем графичког приказа резултантних дејстава на ослонце, омогућен је јасан увид у добијена решења, као и њихова тренутна и непосредна провера. Уврштавањем изведеног алгоритма у Грасхпер повезан с Рајносеросом омогућено је лако решавање најразличитији облика сводова, при чему сложеност геометрије свода, догод је свод афин, не представља ограничење. Тиме архитекте (пројектанти) бивају мање оптерећени конструкцијским ограничењима, те већу пажњу могу усмерити на обликовања архитектонског простора односно ваљано решавање размештаја ослонаца у основи сложеног свода.

**Ограничења изведеног модела.** Ограничења предложеног модела огледају се у искључивој примени на афине сводове, дакле сложене сводове образоване од цилиндричних сводова једнаке висине. Другим речима, искључени су сводови код којих укрснице не леже у вертикалним равнима, будући да подразумевају друкчији пренос оптерећења. Моделом је обухваћена само сопствена тежина свода, без могућих застора. Уз то су разматрани само сводови код којих је над ослонцима заступљена цела дебљина припадајућих сводова, без разматрања могућих преклапања.

**Смернице за даља истраживања.** У вези с испитивањем равнотеже лукова и својствима потпорне линије, овде су наведене смернице за будућа истраживања, којима би се рад дат у овој дисертацији могао проширити, надоградити и допунити.

- Могуће је испитати различите облике додатних спољних оптерећења (тачкаста или подељена) која делују на лук. На пример, могуће је испитати утицај концентрисане силе у темену лука на облик потпорне линије и минималну дебљину лука, или пак уврстити и тежину застора.
- Испитивање равнотеже других, мање заступљених, облика лукова.
- Испитати неке друге (сложене) облике стереотомије.
- У прорачун је могуће уврстити различита својства материјала, којима се нпр. дозвољава и одређени степен прихватања затезања, или ограничава степен трења односно прихватање смичућих сила, те у складу с тим испитати својства потпорне линије и вредности минималне дебљине.

- Премда пре теоријског значаја но практичне неопходности, може се испитати конвергенција итеративних поступака (у вези с потпорном линијом) предложених у овој дисертацији, те понудити могуће унапређење с обзиром на број итерација потребних за добијање решења захтеване тачности.
- Изведени изрази и добијене вредности могу бити искоришћене за испитивање максималног или минималног потиска, односа распона и дебљине или односа тежине и распона, како би се одредио оптимални облик лука у погледу количине коришћеног материјала.

С обзиром на конструкцијски афинитет и испитивање масивних сводова, могући су следећи задаци истраживања:

- Потребно је дати модел за испитивање других облика сводова, као што су крстасти сводови сачињени од цилиндричних сводова различитих висина, затим куполе или манастирски сводови (с отвором или без њега), лепезасти сводови, као и други двоструко закривљени облици сводова.
- Израчунати вредности меродавног оптерећења за друге облике сводова односно њихових ободних лукова.
- Могуће је у прорачун увести одређена ограничења, попут степена изобличења (услед афине трансформације) полазног ободног лука или величину дебљине ослонца у односу на површину сводног поља и сл.
- Испитати степен одступања елиптичких од кружних цилиндричних сводова како би (премда у ограниченом опсегу) била могућа непосредна примена изведеног модела на објекте архитектонског наслеђа у којима сводови нису афини али су обликом њима врло слични.
- Испитати утицај делимичног (у околини ослонаца) или потпуног (над целим сводом) насипа на равнотежу сводова.
- Испитати могућност производње афиних сводова (првенствено њихових елиптичких делова) уз помоћ савремених технологија сечења камена, те тиме умањити ограничења у том погледу.
- Као посебан задатак у крајњем развоју изведеног модела издваја се израда самосталног софтвера који би обухватио све ступеве пројектовања и испитивања сложених афиних сводова.

---

## Закључак

У овој дисертацији закључено је да теорија потпорне линије, из уобичајеног делокруга раванских проблема – лукова, може бити, у виду непрекидне и у деловима глатке потпорне површи, проширена на просторне проблеме – сводове. Показано је да се сложене засвођене конструкције могу образовати као склоп сложених крстастих сводова чији су делови међусобно афини цилиндрични сводови. Штавише, закључено је да се на основу афинитета (сличности) облика саставних делова свода, може непосредно успоставити и одговарајући конструкцијски афинитет. На основу аналитичке обраде проблема показано је да целокупно испитивање равнотеже може бити сведено на разматрање геометријских својстава тј. облика свода. При томе, уколико је ободни лук свода одабраног облика у равнотежи, а саставни делови свода су међусобно афини, свод у целини је такође у равнотежи.

На основу тога, начињен је параметарски модел за пројектовање сложених афиних сводова. Изведени метод, изостављајући испитивање унутрашњих дејстава представљених потпорном површи, знатно поједностављује целокупни прорачун. С обзиром на то да је размештај ослонаца у основи свода главни улазни чинилац, метод је прилагодљив те применљив у пројектовању и савременом обликовању засвођених архитектонских простора.

Закључено је да спроведено мултидисциплинарно истраживање пружа решења теоријских проблема из области засвођених масивних конструкција присутних у области градитељства током последњих трију векова. С друге стране, стварањем параметарског модела који обухвата аутоматизовани прорачун резултантних дејстава на ослонце, начињен је практичан рачунарски алат за лако пројектовање и испитивање сложених афиних сводова, те је тиме успостављена ближа веза између сродних инжењерских струка.

## Глава ІХ

---

### Додаци





## Додатак А

---

### Испитивање равнотеже ланчаничног лука

Од краја седамнаестог века оптимални облик зиданог лука доводи се у везу с обликом ланчанице – криве коју, као што је поменуто, одређује савршено гипка нерастегљива тешка нит (хомоген ланац) окачена о крајеве (в. слику 796). Овај облик сматран је најбољим у смислу постојања искључиво нормалних сила (управних на спојнице), услед чега лук може бити саздан од глатких тесаника. Јакоб Бернули је 1690. године објавио позив за (математичко) одређивање својстава ланчанице, а решења су доставили Јохан Бернули, Хајгенс и Лајбниц. Након Хука и Грегорија, који су нагостили „обртање“ ланчанице (слика 796), те замену затезања притиском, он је заправо први који испитао равнотежу таквог ланчаничног лука. После њега су и други истраживачи, као што су Бусју и Кулон, закључивали да је ланчанични лук идеални облик лука. Подробнији приказ овог проблема може се наћи у [12, 102, 124]. Међутим, у тим испитивањима, проблем је свођен на бесконачно танак лук односно на његову средњу линију. На значај те утицај ове „идеализације“ указао је Салимбени [118], али ова његова напомена није имала даљих последица [12, 124]. Штавише, он је разматрао лук коначне дебљине код којег се јављају само нормалне силе, те је извео диференцијалну једначину која описује његов облик.<sup>1</sup> Поред тога, Миланковић [92] је указао на грешку у математичком моделирању лука у складу с теоријом потпорне линије – када се тежиште инфинитезималних тесаника поставља на оси лука, а заправо се налази на коначној удаљености од ње.

Овде ће у складу с нормалном стереотомијом бити испитана равнотежа ланчаничног лука коначне непроменљиве дебљине.

---

<sup>1</sup> Будући да није познато њено непосредно интеграљење, оптимални облик лука и даље је непознаница.

**Геометријска својства ланчанице.** Ланчаница се уобичајено описује следећим изразом:

$$y(x) = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right), \quad (241a)$$

односно

$$y(\varphi) = a \sec \varphi, \quad (241b)$$

где параметар  $a$  одређује положај темена  $A$  на месту  $(0, a)$  (в. слику 79а на којој је ланчаница приказана црта-тачка линијом;  $y$ —оса правоуглог координатног система с почетком у тачки  $O$  усмерена је обрнуто (надоле) у односу на уобичајене приказе).

Полупречник закривљености  $R$  (растојање између тачака  $C$  и  $E$  мерено у правцу нормале под углом  $\varphi$ ) одређен је следећим изразом:

$$R(y) = \frac{y^2}{a}, \quad (242a)$$

односно

$$R(\varphi) = a \sec^2(\varphi), \quad (242b)$$

при чему је угао  $\varphi$  следећи:

$$\varphi(y) = \arccos\left(\frac{a}{y}\right). \quad (243)$$

**Аналитичко моделирање ланчаничног лука.** На слици 79а приказана је половина монолитног лука дебљине  $t$  чија средишња линија (оса) има облик ланчанице.

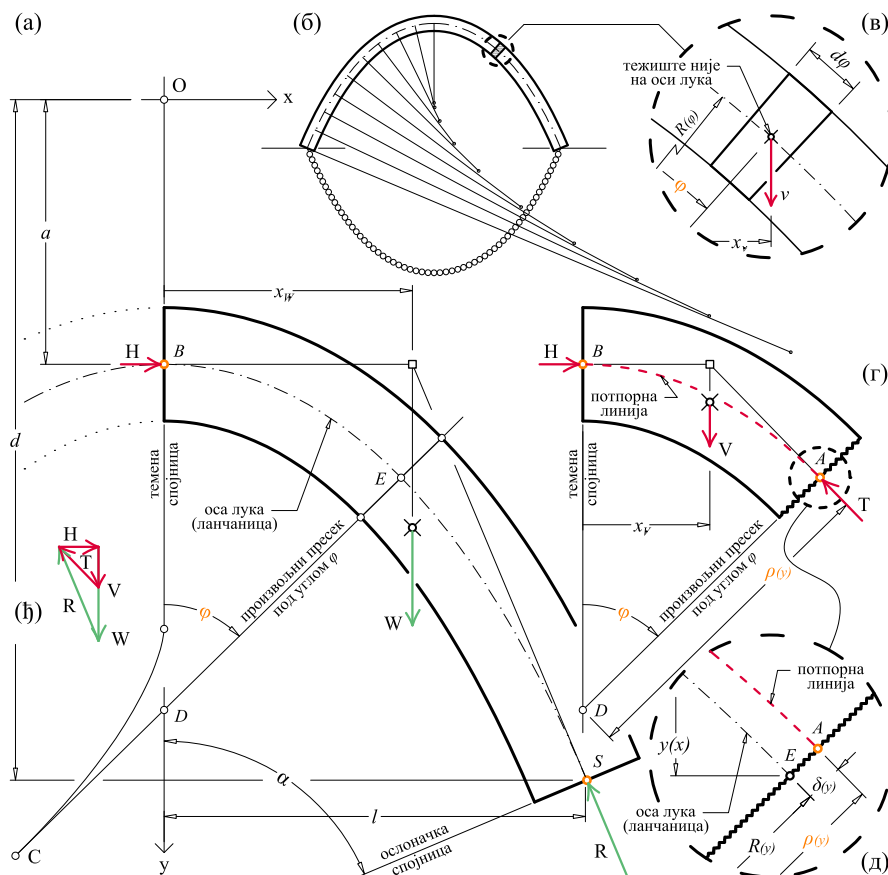
Два бескрајно блиска пресека (в. слику 79б), који заклапају инфинитезимални угао  $d\varphi$  и који су управни на осу лука, одређују инфинитезимални тесаник (који има облик исечка кружног прстена) приказан на слици 79в. Његова тежина  $v$  представљена је одговарајућом површином:

$$v(\varphi) = R(\varphi) t d\varphi. \quad (244)$$

У складу с тим је тежина  $V$  горњег коначног дела лука, између темене спојнице и произвољног пресека под углом  $\varphi$  (в. слику 79г), дата следећим изразом:

$$V(\varphi) = \int_0^\varphi R t \varphi d\varphi = a t \tan \varphi. \quad (245)$$

Као што је познато, удаљеност тежишта исечка кружног прстена



**Слика 79.** Ланчанични лук: (а) геометријски чиниоци ланчанице и ланчаничног лука, (б) ланчаница и ланчанични лук коначне дебљине, (в) инфинитезимални тесаник, (г) коначни део лука, (д) увећани приказ положаја потпорне линије у односу на осу лука, (ђ) план сила

(полупречника  $R$ , дебљине  $t$  и обухватног угла  $\varphi$ ) од средишта прстена износи:

$$\frac{4}{3} \frac{(R + \frac{t}{2})^3 - (R - \frac{t}{2})^3}{(R + \frac{t}{2})^2 - (R - \frac{t}{2})^2} \frac{\sin(\frac{\varphi}{2})}{\varphi} = 2 \left( R + \frac{t^2}{12R} \right) \frac{\sin(\frac{\varphi}{2})}{\varphi}. \quad (246)$$

Када угао  $\varphi$  тежи нули ова удаљеност добија следећу вредност:

$$R + \frac{t^2}{12R}. \quad (247)$$

Према томе, растојање тежишта од средње линије је коначна величина  $\frac{t^2}{12R}$  (в. [92]). У складу с тим је апсциса  $x_v$  тежишта инфинитезималног тесаника (слика 79в) дата следећим изразом:

$$\begin{aligned} x_v(\varphi) &= x(\varphi) + \frac{t^2}{12R} \sin \varphi \\ &= a \cosh^{-1}(\sec \varphi) + \frac{t^2}{12} \sin \varphi \frac{\cos^2 \varphi}{a}. \end{aligned} \quad (248)$$

при чему је  $R$  дато изразом (242б), док је величина  $x(\varphi)$  добијена на основу израза (241а) и (241б).

Апсциса  $x_V$  тежишта коначног дела тежине  $V$  (слика 79г), израчунава се на следећи начин:

$$x_V(\varphi) = \frac{\int_0^\varphi x_v(\varphi)v(\varphi)}{V(\varphi)}. \quad (249)$$

С обзиром на изразе (244) и (248), бројилац у претходном изразу је:

$$\begin{aligned} &\int_0^\varphi a^2 t \sec^2 \varphi \cosh^{-1}(\sec \varphi) + \frac{1}{12} t^3 \sin \varphi \\ &= t \csc \varphi \left( \frac{a^2 \sin \varphi \tan \varphi \cosh^{-1}(\sec \varphi) -}{a^2 \sqrt{\sec \varphi - 1} \sqrt{\sec \varphi + 1} -} \right) \Big|_0^\varphi \\ &= a^2 t \left( \frac{\tan \varphi \cosh^{-1}(\sec \varphi) -}{\csc \varphi \sqrt{\sec \varphi - 1} \sqrt{\sec \varphi + 1} +} \right) \\ &\quad \left( \frac{t^2 \sin(2\varphi)}{24} \right) \Big|_0^\varphi \\ &= a^2 t \left( \frac{\tan \varphi \cosh^{-1}(\sec \varphi) -}{\csc \varphi \sqrt{\sec \varphi - 1} \sqrt{\sec \varphi + 1} +} \right) \\ &\quad \left( \frac{t^2 (1 - \cos \varphi)}{1 + \frac{t^2 (1 - \cos \varphi)}{12 a^2}} \right). \end{aligned} \quad (250)$$

Након уврштавања израза (245) и (250) у израз (249) и сређивања израза добија се апсциса  $x_V$  тежишта коначног дела лука до произвољног пресека под углом  $\varphi$ :

$$x_V(\varphi) = \frac{a}{\tan \varphi} \left( \frac{\tan \varphi \cosh^{-1}(\sec \varphi) -}{\csc \varphi \sqrt{\sec \varphi - 1} \sqrt{\sec \varphi + 1} +} \right) \left( \frac{t^2 (1 - \cos \varphi)}{1 + \frac{t^2 (1 - \cos \varphi)}{12 a^2}} \right). \quad (251)$$

Уврштавањем израза (243) у претходни израз добија се зависност

од  $y$ -координате:

$$x_V(y) = \frac{a^2 + \frac{t^2}{12} \left(1 - \frac{a}{y}\right) - ay}{\sqrt{y^2 - a^2}} + a \cosh^{-1} \left(\frac{y}{a}\right). \quad (252)$$

Тежина  $W$  половине лука (слика 79а) добија се када вредност угла  $\varphi$  достигне угао  $\alpha$ , те израз (245) добија следећи облик:

$$W = t \sqrt{d^2 - a^2}. \quad (253)$$

С друге стране, на основу израза (251), апсциса  $x_W$  тежишта половине лука износи:

$$x_W = \frac{a^2 + \frac{t^2}{12} \left(1 - \frac{a}{d}\right) - ad}{\sqrt{d^2 - a^2}} + a \cosh^{-1} \left(\frac{d}{a}\right). \quad (254)$$

**Хоризонтални потисак и потпорна линија.** Како би одговарајуће испитивање могло да буде спроведено, неопходно је одредити потпорну линију, односно извести аналитички израз којим је она описана. Од безброј могућих потпорних линија усвојена је она која пролази кроз средиште  $B$  темене и средиште  $S$  ослоначке спојнице, у којима редом делују хоризонтална сила  $H$  и реакција  $R$ .

У складу са сликом 79а, равнотежа момената половине лука за тачку  $S$  на ослонцу дата је следећом једнакошћу:

$$H(d - a) = W(l - x_W), \quad (255)$$

где је  $l = a \cosh^{-1} \left(\frac{d}{a}\right)$ . Одатле се може изразити величина  $H$  хоризонталне силе која делује у теменој спојници:

$$H = \frac{W \left(a \cosh^{-1} \left(\frac{d}{a}\right) - x_W\right)}{d - a} = at - \frac{t^3}{12d}, \quad (256)$$

где су тежина  $W$  половине лука и апсциса  $x_W$  придруженог тежишта редом дати изразима (253) и (254).

Резултантна сила  $T$  на произвољном пресеку, уз припадајућу нападну тачку  $A$ , једнозначно је одређена равнотежом сила односно момената за коначни део лука (в. слику 79а,г). Према томе, равнотежа момената коначног дела лука за тачку  $A$  дата је следећом једнакошћу:

$$H(y + x \cot \varphi - a - \rho(\varphi) \cos \varphi) = V(\varphi) (\rho(\varphi) \sin \varphi - x_V(\varphi)), \quad (257)$$

на основу чега величина  $\rho(\varphi)$  износи:

$$\rho(\varphi) = \frac{H(y + x(y) \cot \varphi - a) + V(\varphi) x_V(\varphi)}{H \cos \varphi + V(\varphi) \sin \varphi}, \quad (258)$$

где су величине  $V(\varphi)$ ,  $x_V(\varphi)$  и  $H$  редом дате изразима (245), (251) и (256). Уврштавањем израза (243) у (258) уз  $x(y) = a \cosh^{-1}(\frac{y}{a})$  (добијено из израза (241a)), добија се удаљеност  $\rho(y)$  између потпорне линије и тачке  $D$  (слика 79а,г), што представља једначину потпорне линије унутар ланчаничног лука:

$$\rho(y) = \frac{t^2(a-y)(d-y)\sqrt{y^2-a^2} + ay(at^2-12dy^2)\cosh^{-1}\left(\frac{y}{a}\right)}{(at^2-12dy^2)\sqrt{y^2-a^2}}. \quad (259)$$

**Испитивање тока потпорне линије.** Изведеним изразом (259) се не претпоставља гранична потпорна линија (будући да се њиме описује ток једне одабране потпорне линије). Да би гранична потпорна линија која одговара минималној (граничној) дебљини лука била одређена било би потреба одредити одговарајући механизам слома који одговара ланчаничном луку. Међутим, како ће бити показано, довољно је испитати понашање овако одабране потпорне линије. Наиме, испитаће се удаљеност  $\delta$  потпорне линије од средње линије (осе, ланчанице) лука (в. слику 79д), односно растојање тачака  $A$  и  $E$  које им редом припадају:

$$\begin{aligned} \delta(y) &= \rho(y) - \frac{x(y)}{\sin \varphi} \\ &= \frac{t^2(y-a)(y-d)}{at^2-12dy^2}, \end{aligned} \quad (260)$$

при чему су  $\varphi$  и  $\rho(y)$  редом дати изразима (243) и (259). Први извод претходног израза је:

$$\delta'(y) = \frac{t^2[2ay(12d^2+t^2) - at^2(a+d) - 12dy^2(a+d)]}{(at^2-12dy^2)^2}. \quad (261)$$

Изједначавање с нулом и решавање по  $y$  даје величину ординате којој одговара максимум израза (260):

$$y_{max,\delta} = \frac{a(12d^2+t^2) + \sqrt{a(12d^3-at^2)(12ad-t^2)}}{12d(a+d)}. \quad (262)$$

Уврштавањем вредности (262) у израз (260) добија се највећа удаљеност потпорне линије од осе лука:

$$\delta_{max} = \frac{a(12d^2-t^2) - \sqrt{a(12d^3-at^2)(12ad-t^2)}}{24ad}. \quad (263)$$

Уколико је ова вредност мања од половине дебљине лука ( $\delta_{max} < \frac{t}{2}$ ), лук је стабилан. Како би то било показано, испитаће се следећи

однос:  $\delta_{max} : \frac{t}{2}$ . Рационализовањем бројиоца вредности  $\delta_{max}$  добија се следеће:

$$\frac{2}{t} \frac{\left[ a(12d^2 - t^2) - \sqrt{a(12d^3 - at^2)(12ad - t^2)} \right]}{24ad} \frac{\left[ a(12d^2 - t^2) + \sqrt{a(12d^3 - at^2)(12ad - t^2)} \right]}{\left[ a(12d^2 - t^2) + \sqrt{a(12d^3 - at^2)(12ad - t^2)} \right]} = \frac{t(a-d)^2}{a(12d^2 - t^2) + \sqrt{a(12d^3 - at^2)(12ad - t^2)}}. \quad (264)$$

Може се закључити да је део имениоца под кореном већи од нула, те може бити занемарен имајући у виду да доприноси смањењу вредности целог израза. У складу с тим, имајући у виду да је  $t \leq 2a$ , уз уврштавање највеће могуће вредности ( $t = 2a$ ), важи следеће:

$$\frac{\delta_{max}}{\frac{t}{2}} < \frac{t(a-d)^2}{a(12d^2 - t^2)} < \frac{2a(a-d)^2}{a(12d^2 - t^2)}. \quad (265)$$

Како је  $d > a$  следи да је  $t < 2d$ . Како би се максимизирао претходни израз, уврштено је  $2d$  уместо  $t$  у именилац и занемарена је величина  $a$  у бројиоцу, те се даље добија следеће:

$$\frac{2d^2}{12d^2 - 4d^2} = \frac{1}{4}. \quad (266)$$

Према томе је:

$$\delta_{max} < \frac{1}{8}t. \quad (267)$$

Тиме је показано да се (одабрана) потпорна линија (таква да пролази кроз средиште ослоначке и темене спојнице) у односу на средишњу линију (осу) лука удаљава мање од осмине дебљине лука. То значи да ће потпорна линија увек бити у границама ланчаничног лука, те да је он увек стабилан под својом тежином.

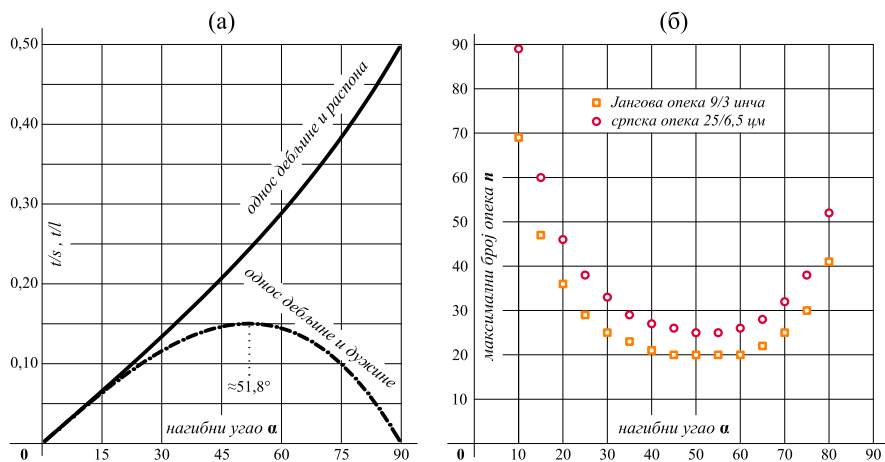
Поред тога, на основу израза (263), када  $t \rightarrow 0$  величина  $\delta_{max} = 0$ , те, као што је познато, лук коначне дебљине прелази у ланчаницу, која теоријски представља минималну дебљину.<sup>2</sup>

<sup>2</sup> Ваља напоменути да у складу с постављеним критеријумом опималности (постојање искључиво нормалних сила) ланчанични лук коначне дебљине није оптималан лук. Ипак, у складу с Куплеовим претпоставкама (трење довољно велико да прими смичуће силе) сваки ланчанични лук, без обзира на однос његове стреле и распона, биће стабилан под сопственом тежином.

## Додатак Б

### Прилог резултатима нагнутог правог лука

Изрази изведени у § 7.2.1 односе се на монолитан нагнут прав лук односно на лук сачињен од елемената инфинитезималне дебљине. Нумеричке вредности за минималну теоријску дебљину за различите вредности нагибног угла  $\alpha$  израчунате су на основу израза (34) и (33) и дате су у табели 15. Штавише, на слици 80 графички је представљена веза минималног односа дебљине према распону ( $t/s$ ) и дужини ( $t/l$ ) лука у зависности од нагибног угла  $\alpha$ .



**Слика 80.** Нагнути прави лукови: (а) график везе минималног односа дебљине према распону ( $t/s$ ) и дужини ( $t/l$ ) лука у зависности од нагибног угла  $\alpha$ , (б) максимални број опека коначних димензија у оквиру нагнутог правог лука

С друге стране, уколико се разматрају опеке коначних димензија, максимални број опека положених у оквиру лука зависи од њихових пропорција. Однос дебљине према дужини ( $t/l$ ) нагнутог



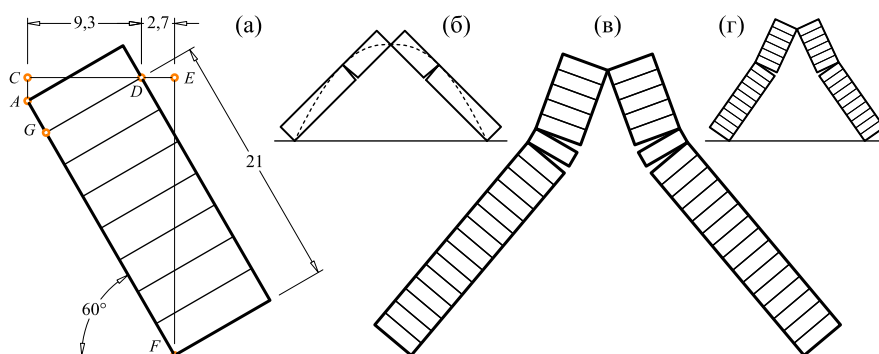
правог лука може се изразити на следећи начин:

$$t/l = \frac{t}{na} = \frac{\lambda}{n}, \quad (268)$$

где је  $n$  број опека дебљине  $a$ , а  $\lambda$  представља пропорције опеке тј. однос њене дебљине и дужине ( $t/a$ ). С обзиром на то да  $t/l$  мора бити веће од  $t/l_{min}$  (израз (34)), максималан број опека пропорција  $\lambda$  дат је следећим изразом:

$$n \leq \frac{\lambda}{t/l(\alpha)}. \quad (269)$$

У свом раду Јанг не наводи непосредно димензије „уобичајене опеке“ коју користи приликом разматрања (у даљем тексту: Јангова опека). Међутим, с обзиром на његову слику 18 [132, табла VIII], прецртану овде на слици 81 (уз додате коте), наведено је да када је под углом од  $60^\circ$  постављено осам уобичајених опека без цемента, дужина CD је 9,3, DE је 2,7, а FG је 21 инч [132, стр. 247]. Према томе, дебљина опеке износи 3 инча (21 подељено са 7), те се могу успоставити следеће једнакости:  $21 \cos 60 - t \cos 30 = 2,7$  и  $t \cos 30 + 3 \cos 60 = 9,3$ . Било из које од двеју једнакости може се закључити да је дебљина  $t$  Јангове опеке (односно дебљина лука) једнака 9 инча. Стога је однос дебљине и дужине Јангове опеке једнак  $3/9$  ( $1/3$ ), а не  $3/8,75$  како је погрешно<sup>1</sup> закључио Хурта [72, стр. 417].



**Слика 81.** (а) Пропорције Јангове опеке (прецртано из [132]), (б) Барлоуово решење за  $\alpha = 45^\circ$ , (в) слом двају нагнутих наспрамно постављених правих лукова направљених од по 21 опеке, (г) Јангово решење за  $\alpha = 60^\circ$  (16 опека није стабилно)

<sup>1</sup> Међутим, ова разлика (8,75 или 9) не утичне на крајње решење.

Јанг је, на основу геометријске конструкције која се испоставља нетачном [72], закључио да је 15 опека стабилно у случају када је  $\alpha = 60^\circ$ , односно да ће 16 опека пасти и да ће пукотина настати на шестој спојници од врха [132, стр. 247] (в. слику 81г). У складу с тим, минималне пропорције нагнутог правог лука у равнотежи су између  $9/45$  и  $9/48$ , односно  $0,2 > t/l > 0,1875$ , док пукотина (зглоб) настаје на  $6/16$  дужине. Недавно је Хурта навео да је разлика између Јанговог и тачног решења мала, те да тачан прорачун даје веома блиско пропорцију  $1/6$  (в. [72, стр. 417]), што је  $3/18 = 1/6 \approx 0,16\dot{6}$ .<sup>2</sup> Међутим, тачно решење за минималну дебљину, на основу израза (34), износи  $t/l = 0,25\sqrt{3} \approx 0,433$ . Према томе, а у складу с изразом (269), чак ће 20 Јангових опека бити стабилно ( $t/l = 3/20 = 0,15$ ), односно 21 опека ће пасти ( $t/l = 3/21 \approx 0,1429$ ). Тиме се тачан резултат ( $3/20$ ) разликује од Хуртиног ( $3/18$ ) за  $\approx 10\%$ , односно допушта чак за једну трећину већи број опека у односу на Јангов резултат ( $3/15$ ).

С друге стране, у складу с изразом (31), када је претпостављена минимална дебљина, закључује се да је опасни пресек (пукотина, зглоб) на  $1/4$  дужине од темена. Међутим, када се разматрају опеке датих (Јангових) пропорција, Хуртина напомена [72, стр. 417] да је положај пукотине приближно на  $1/4$  дужине је тачан, будући да лом настаје око пете опеке (од 21 опеке), односно потпорна линија теоријски сече пету и шесту спојницу изван граница лука (са спољне стране екстрадоса) (в. слику 81в).

С обзиром на нагибни угао  $\alpha = 45^\circ$ , однос минималне дебљине и дужине ( $t/l = 0,14645$ ) као и положај опасног пресека ( $x_{crit} = 0,35355l$ ), који су редом дати изразима (34) и (35), подударују се с Барлоуовим резултатом (в. [10, стр. 165–166]). Међутим, његова напомена да је та дебљина довољна и било за који други нагибни угао [10, стр. 166] испоставља се нетачном (в. табелу 15 и дијаграм приказан на слици 80а). Наиме, извод функције (34) је следећи:

$$t/l'_{min}(\alpha) = \frac{1}{2} \left( \cos \alpha - \frac{1}{1 + \cos \alpha} \right). \quad (270)$$

Изједначавање израза (270) с нулом даје максимум функције (34), што представља величину нагибног угла  $\alpha$  којем одговара теориј-

<sup>2</sup> Ово се такође испоставља нетачним, иако се слика 15 у наведеном раду [72, стр. 417] чини тачном.

ски највећи однос минималне дебљине и дужине ( $t/l$ ):

$$\alpha_{max}(t/l_{min}) = \arccos\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) \approx 51,8^\circ. \quad (271)$$

Максимални број Јангових опека које су у равнотежи у оквиру нагнутог правог лука за различите вредности нагибног угла  $\alpha$  дат је у табели 15. Поред тога су дате и вредности које се односе на опеку уобичајено коришћену код нас, чији је однос дужине и дебљине 25/6,5. Ово је такође графички приказано на слици 80б.

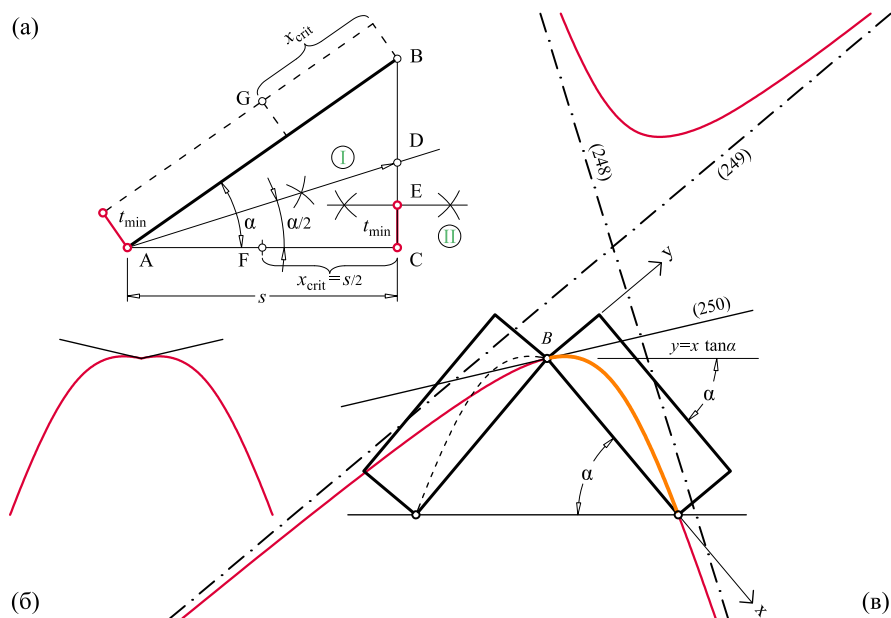
**Табела 15.** Минимални однос дебљине према распону ( $t/s$ ) и дебљине према дужини ( $t/l$ ), као и максимални број опека у нагнутом правом луку за различите вредности нагибног угла  $\alpha$

$\alpha$ [°]	15	22,5	30	35	40	45	50	55	60	67,5	75
$t/s$	0,0658	0,0995	0,1340	0,1576	0,1820	0,2071	0,2332	0,2603	0,2888	0,3341	0,3837
$t/l$	0,0636	0,0919	0,1160	0,1291	0,1394	0,1464	0,1499	0,1493	0,1443	0,1279	0,0993
Јангова опека	47	32	25	23	21	20	20	20	20	23	30
српска опека	60	41	33	29	27	26	25	25	26	30	38

**Геометријска конструкција.** На основу израза (34) и (35), може се извести проста геометријска конструкција, приказана на слици 82а, за одређивање минималне дебљине и положаја опасног пресека нагнутог правог лука. Поступак је следећи: (I) симетралом  $AD$  нагибног угла  $\alpha$  одређује се тачка  $D$  на вертикалној оси симетрије  $BC$  лука, (II) половина (назначена је дуж  $CE$ ) добијене дужи  $CD$  представља минималну теоријску дебљину; (III) када је претпостављена минимална дебљина, пукотина, односно зглоб у тачки  $G$ , налази се на удаљености једнакој половини ( $CF$ ) дужине полураспона  $AC$  од темена лука.

**Геометријска својства потпорне линије.** Овде је размотрено неколико својстава потпорне линије, дате изразом (29), која се односе на њен облик. То је рационална функција која представља хиперболу (в. слику 82в). Будући да је степен бројиоца за један степен већи од имениоца, график функције има косу асимптому; дељење ових двају полинома, занемарујући остатак, даје њен израз:

$$y(x) = -\frac{1}{2} x \cot \alpha + \frac{1}{4 \sin \alpha} [s (2 + \cot^2 \alpha) - t \cos \alpha \cot \alpha]. \quad (272)$$



**Слика 82.** (а) Геометријска конструкција за одређивање минималне дебљине и положаја опасног пресека, (б) шиљак на потпорној линији у темену лука, (в) хиперболичка потпорна линија

Како би се одредила асимптота паралелна ординати, именилац је изједначен с нулом те је решена њена апсциса одређена величином  $x$ :

$$x = \frac{t \cos \alpha - s \cot \alpha}{2 \sin \alpha}. \quad (273)$$

Хуерта је напоменуо да потпорна линија није глатка у темену (тачка  $B$ ) лука образованог од двају нагнутих правих лукова [72, опис уз слику 15 на стр. 247]. У складу с усвојеним координатним системом, нагиб хоризонталне праве кроз тачку  $B$  износи  $\tan \alpha$ . Како би се одредио правац тангенте на потпорну линију у тој тачки (која се поклапа с координатним почетком), величина  $x$  у изразу (30) замењена је нулом; тако је нагиб тангенте дат следећим изразом:

$$\frac{s}{s - t \sin \alpha} \tan \alpha. \quad (274)$$

Вредност  $t \sin \alpha$  је мања од  $s$ , па је  $s/(s - t \sin \alpha)$  увек веће од један. Стога је однос дат изразом (274) већи од  $\tan \alpha$ , па је тангента у темену нагнута и потпорна линија креће благо навише од тачке

*B*, као што је приказано на слици 82в. Према томе, потпорна линија у целини, у оквиру обеју половина лука, има шиљак на месту заједничке тачке, као што се види на слици 82б. С обзиром на то да је хоризонтална сила једина која делује у темену, овај резултат се може чинити помало неприродним, али може бити приписан делу (тежини) лука која је изнад темена.

## Додатак В

---

### Преломљени лукови по радијалној стереотомији: резултати

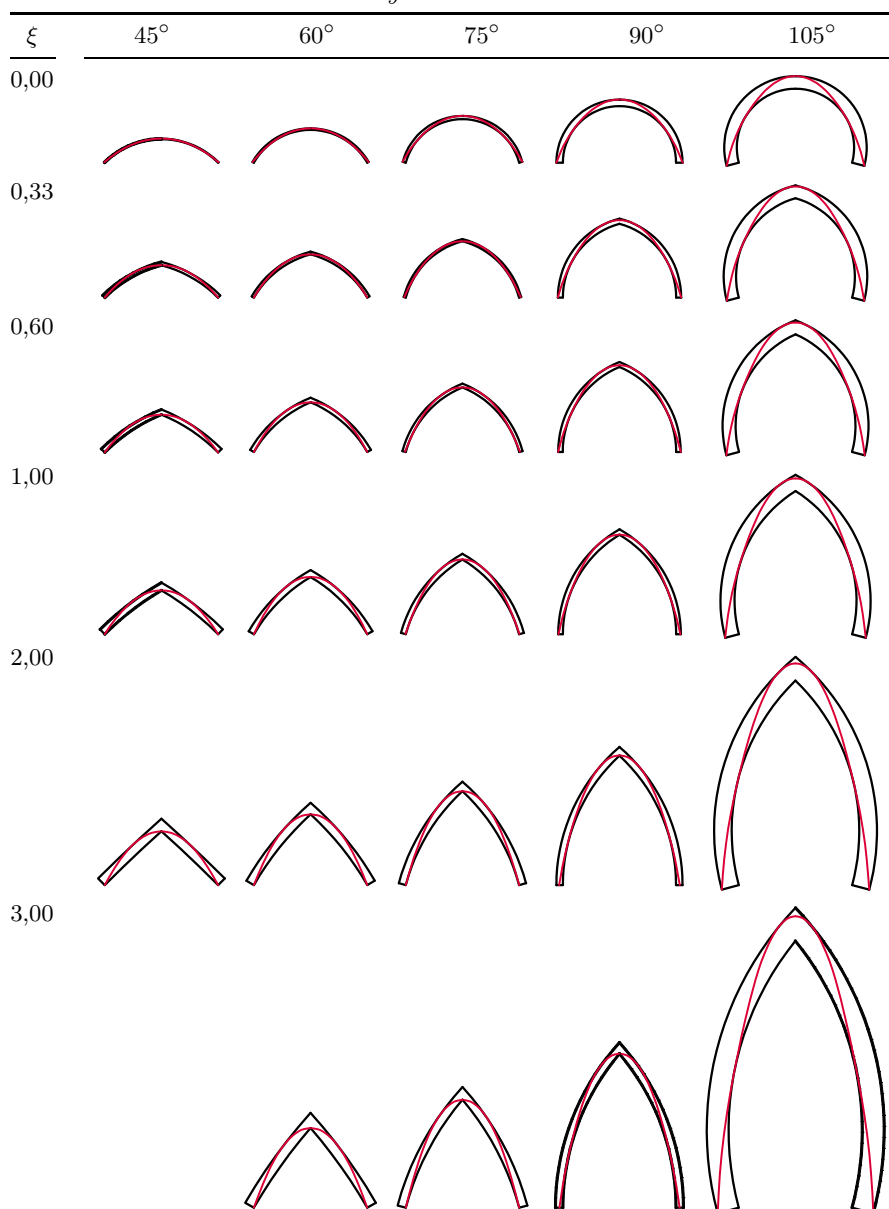
Свеобухватни преглед израчунатих теоријских минималних дебљина преломљених лукова у складу с радијалном стереотомијом дат је у табели 16, где су придружени механизми слома назначени нијансама сиве боје (које одговарају нијансама коришћеним на слици 25, табели 4 и табели 6).

Графички приказ лукова минималне дебљине, за различите вредности ексцентрицитета и обухватног угла, дат је у табелама 17 и 18. Сви приказани лукови имају једнаку светлу ширину отвора.

**Табела 16.** Минимална дебелина  $t/R$  преломљених лукова различитог ексцентрицитета  $\xi$  и обухватног угла  $\alpha$

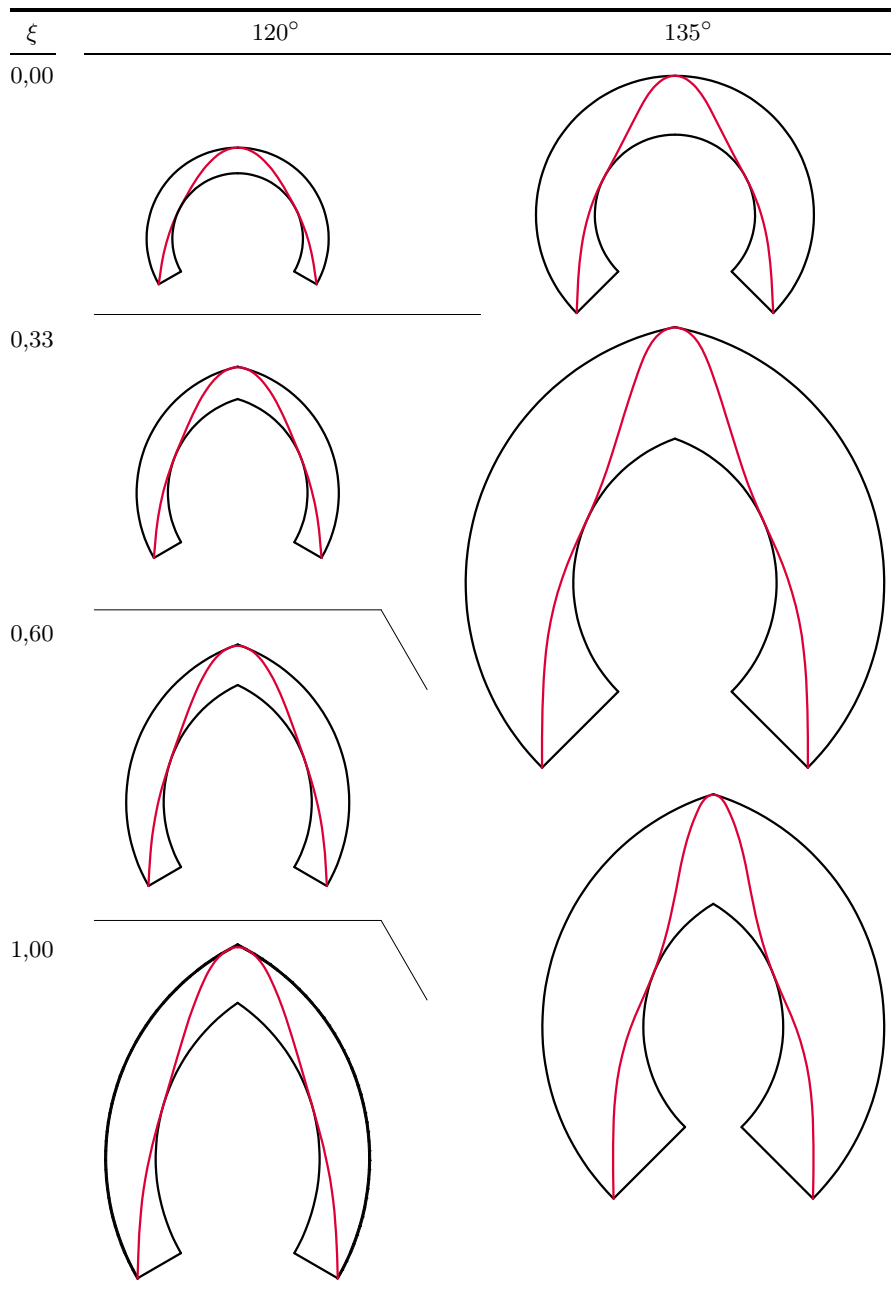
ексцентрицитет $\xi = e/(R - e)$	обухватни угао $\alpha$ [°]								
	15	30	45	60	75	90	105	120	135
0,00	0,000097	0,00153	0,00750	0,02284	0,05369	0,10748	0,19394	0,32761	0,53654
0,0005	0,000075								
0,00141	0,000049								
0,002	0,000078								
0,00301	0,000133								
0,005	0,000252	0,00112	0,00681						
0,01	0,000548	0,00084	0,00623	0,02112					
0,01162		0,00077							
0,02		0,00152							
0,02663		0,00217							
0,04177			0,00373						
0,05	0,002447	0,00441	0,00460	0,01600					
0,10	0,003754	0,00830	0,00983	0,01181	0,03823	0,08856	0,17271	0,30650	0,52722
0,10848			0,01068						
0,11199				0,01103					
0,20	0,003797	0,01296	0,01817	0,01880	0,02917	0,07587	0,15729	0,29058	0,52204
0,25	0,002912	0,01411	0,02106	0,02241	0,02587	0,07090	0,15101	0,28398	0,52058
0,27860					0,02423				
0,33		0,01483	0,02443	0,02727	0,02727	0,06399	0,14205	0,27450	0,51944
0,37938				0,02943					
0,50		0,01330	0,02743	0,03353	0,03371	0,05370	0,12815	0,25971	0,52087
0,60		0,01126	0,02770	0,03557	0,03608	0,04902	0,12161	0,25278	0,52354
0,80		0,00596	0,02632	0,03727	0,03872	0,04180	0,11120	0,24188	0,53196
0,88735						0,03928			
1,00			0,02356	0,03709	0,03962	0,03964	0,10324	0,23381	0,54365
1,50			0,01485	0,03329	0,03850	0,03855	0,08957	0,22105	
1,94827					0,03610				
2,00			0,00629	0,02822	0,03580	0,03588	0,08081	0,21435	
2,50				0,02332	0,03285	0,03303	0,07468	0,21104	
3,00				0,01893	0,03002	0,03038	0,07014	0,20983	

Табела 17. Лукови минималне дебљине





Табела 18. Лукови минималне дебљине



## Додатак Г

---

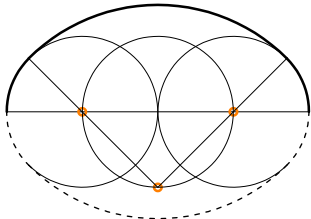
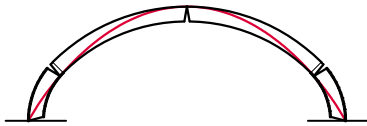
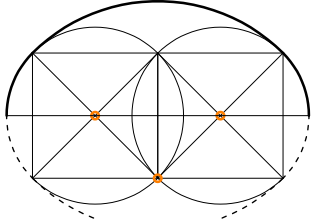
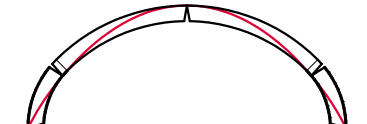
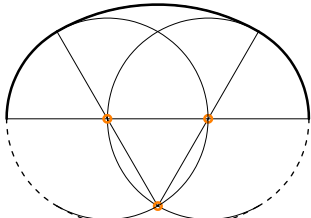
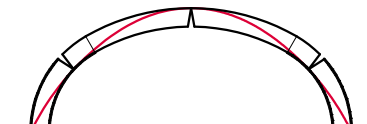
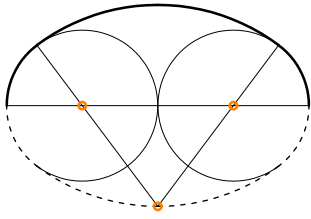
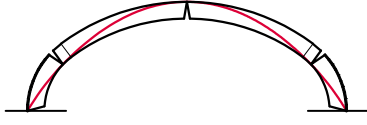
### Графички приказ лукова из трију средишта минималне дебљине

Графички прикази лукова из трију средишта минималне дебљине дати су на наредним странама. У табели 19 приказани су елипсасти лукови, док су у табели 20 приказане најзаступљеније геометријске конструкције овала класичних пропорција и њима одговарајући елипсасти лукови минималне дебљине. Уз то је назначен и положај зглоба (опасног пресека), одређен углом  $\beta_{in}$ , који настаје на интрадосу. У табели 21 приказани су псеудолукови из трију средишта минималне дебљине. Сви приказани лукови истог су распона средишње линије.

Табела 19. Елипсasti лукови минималне дебљине

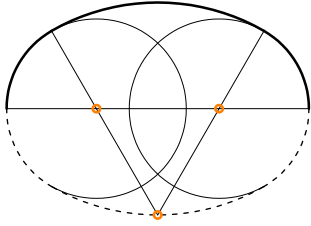
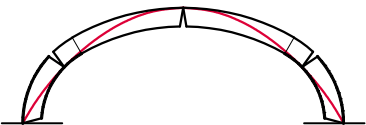
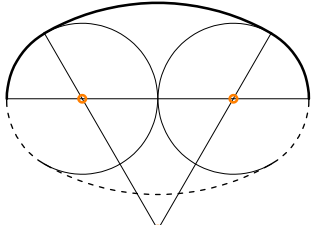
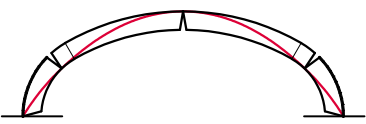
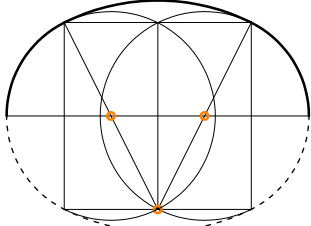
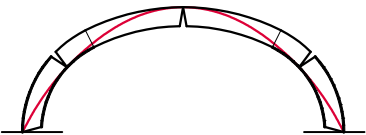
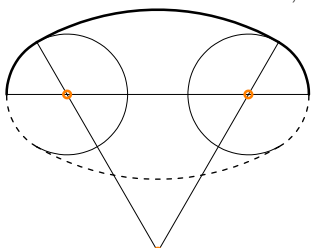
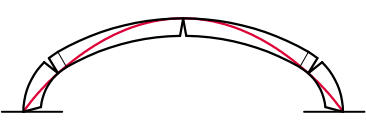
$l : h$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$
0,60			
0,75			
1,00			
1,25			
1,50			
1,75			
2,00			
2,25			
2,50			

**Табела 20.** Минимална дебљина  $t/l$  лукова из трију средишта чија оса има облик класичних овала

изглед класичног овала			лук минималне дебљине		
$\alpha$ [°]	$r : R$	$l : h$	$t/l$	$t/r$	$\beta_{in}$
45	$1 : 1 + \sqrt{2}$	1,414	0,09807	0,19614	48,87
					
45	1:2	1,320	0,10323	0,17623	49,81
					
30	1:2	1,323	0,12245	0,18367	47,08
					
36,87	3:8	1,500	0,11048	0,22095	46,06
					

(Наставак табеле на следећој страни)

Табела 20. (Наставак табеле с претходне стране)

изглед класичног овала			лук минималне дебљине		
$\alpha$ [°]	$r : R$	$l : h$	$t/l$	$t/r$	$\beta_{in}$
30	$3 - \sqrt{3} : 3$	1,423	0,12307	0,20713	45,62
					
30	1:3	1,577	0,12146	0,24291	43,72
					
26,57	1:2	1,309	0,12536	0,18142	46,84
					
30	1:4	1,783	0,11576	0,28939	41,65
					

(Наставак табеле на следећој страни)

**Табела 20.** (Наставак табеле с претходне стране)

изглед класичног овала			лук минималне дебљине		
$\alpha$ [°]	$r : R$	$l : h$	$t/l$	$t/r$	$\beta_{in}$
53,13	8:3	0,667	0,08580	0,04290	65,13
30	2:1	0,804	0,08747	0,06560	62,17

**Табела 21.** Псеудолукови из трију средишта минималне дебљине

$l : h$	$l : h$
1,00	1,25
1,50	1,75
2,00	2,50
3,00	4,00

## Додатак Д

---

### Графички приказ тјудорских лукова минималне дебљине

Графички приказ различитих облика тјудорских лукова минималне дебљине дат је у табелама [22](#) и [23](#).

**Табела 22.** *Тјудорски лукови минималне дебљине*

$r : l : e$	30°	45°	60°
1:1:0			
1:1:1			
4:5:0			
4:5:1			
4:5:3			
4:5:5			
2:3:0			
2:3:1			
2:3:3			

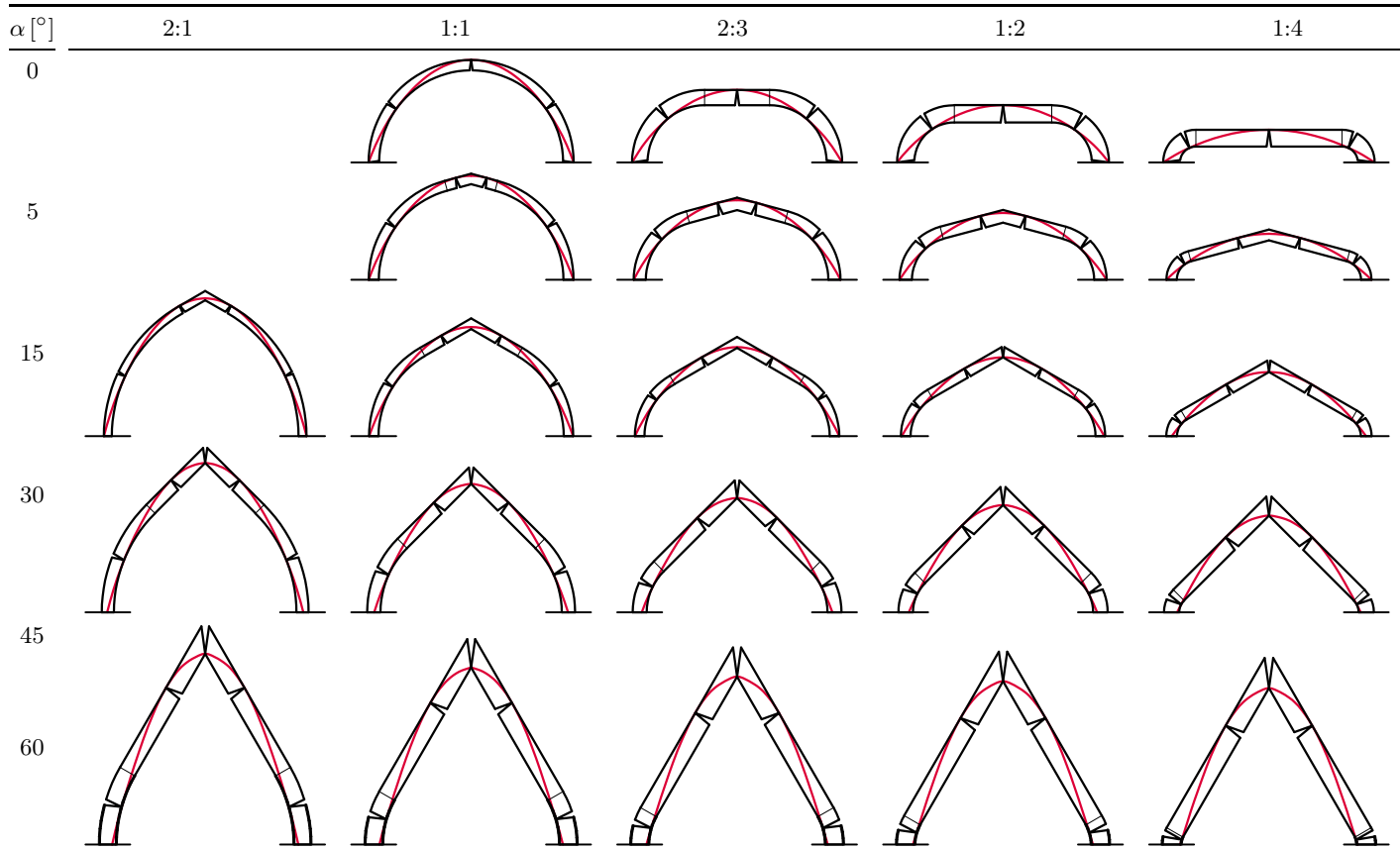
(Наставак табеле на следећој страни)



Табела 22. (Наставак табеле с претходне стране)

$r:l:e$	30°	45°	60°
1:2:0			
1:2:1			
1:2:2			
2:5:0			
2:5:1			
2:5:3			
2:5:5			
1:3:0			
1:3:1			
1:3:3			

Табела 23. Псеудолукови из четирију средишта минималне дебљине



## Додатак Ћ

### Подељено хоризонтално оптерећење

У одељку 17.1, где је обрађен потисак меродавног дела преломљених крстастих сводова, показано је да се утицај уклоњеног дела свода може заменити одговарајућим подељеним хоризонталним оптерећењем дуж теменог пресека свода. Уз то је показано да се променљиви део тог оптерећења може уз задовољавајућу тачност представити одговарајућом апроксимативном функцијом у виду полинома шестог степена, што је дато изразом (220) на стр. 161.

На основу испитивања спроведеног за јединичну вредност полупречника осе лука ( $R = 1$ ), добијени су одговарајући коефицијенти ове функције, те су приказани у табели 24. Уврштавањем одговарајућих коефицијената у израз (220) те његовом интеграцијом добија се величина  $Q_1$  која представља укупан хоризонтални потисак променљивог дела подељеног оптерећења.

У последњој врсти дате су величине  $Q$  укупног хоризонталног подељеног оптерећења (које се односе на  $R = 1$ ). Вредности приказане у одељку 17.4 дате су за јединичну вредност полураспона ободног лука свода ( $s = 1$ ), на основу израза (229). Поред тога, у табели су за сваки облик лука дати и минимална вредност хоризонталног потиска,  $H_{min}^{max}$ , као и положај опасног пресека на интрадосу (односно положај тачке К у којој минимална потпорна линија додирује интрадос) одређен удаљеношћу  $x_{crit}$ .





## Додатак Е

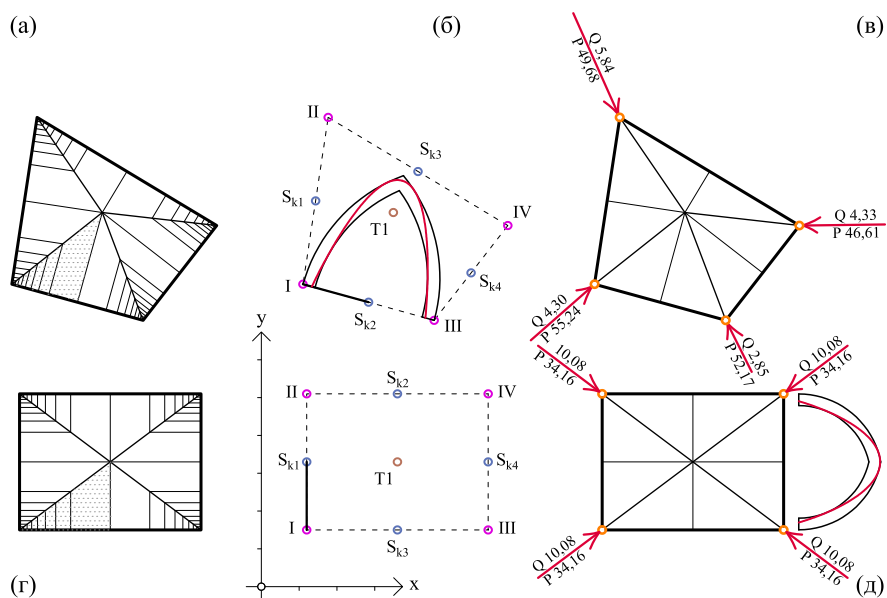
### Примери прорачуна дејства афиних сводова

На овом месту је за замишљено оптерећење, у складу с алгоритмом датим у одељку 22.5, на четирма примерима приказан прорачун дејства афиних сводова. Ступањ (I) алгоритма, који се односи на припрему прорачуна (цртеж основе свода с размештајем ослонаца) израђен је у рачунарском програму Аутокед (*Autodesk AutoCAD*), док су преостали ступњеве, који се односе на сам прорачун, спроведени уз помоћ рачунарског програма Ексел (*Microsoft Excel*). Наиме, у оквиру основе свода, начињена су четири система тачака, и то: ослонци ( $O$ ), темене тачке ( $T$ ), средишње тачке – средишта крајњих страница (ободних лукова) сводних поља ( $S_k$ ) и средишта унутрашњих страница ( $S_s$ ), и то у различитим нивоима (тзв. лејерима). Затим је списак с координатама свих тачака и називима припадајућих нивоа извезен (нпр. у *.csv* облику датотеке), и увезен Ексел за даљу обраду. (Изводи из спроведених прорачуна табеларно су приказани у табелама 25–28.)

Део ступња (II) алгоритма, који се односи на утврђивање дужина  $s$  половина ободних лукова (половине страница многоуглова који представљају сводна поља) и дужина  $l$  темених линија, спроведен је у складу са следећим описом. Увезене тачке, односно њихове придружене координате, разврстане су те су им додељени називи тј. редни бројеви (у складу с порастом  $x$ -координате). У зависности од тога да ли је средишња тачка крајња или унутрашња ( $S_k$  или  $S_s$ ), придружене су јој редом две или једна темена тачка. Затим је унесено колико се средишњих тачака ( $S_k$  и  $S_s$ ) придружује једном ослонцу, те је толики број најближих придружен сваком ослонцу (нпр. у складу са сликом 84 и табелом 27, ослонцу I придружене су две средишње тачке,  $S_{k1}$  и  $S_{k2}$ , а ослонцу II придружене су три средишње тачке,  $S_{k1}$ ,  $S_{k3}$  и  $S_{s2}$ ).<sup>1</sup> Затим су на основу координата придружених тачака срачунате дужине  $s$  и  $l$ .

<sup>1</sup> Када се разматра свод који има само једно сводно поље (као што су сводови из Примера 1 и Примера 2), сваком ослонцу придружене су по две средишње тачке.

У табелама су за сваки свод приказани разматрано меродавно оптерећење и облик полазног лука. Прва врста означава редни број ослонаца, друга до седма координате ослонаца ( $X_O$  и  $Y_O$ ), средишње тачке ободног лука ( $X_S$  и  $Y_S$ ) и темена ( $X_T$  и  $Y_T$ ) појединачног крстастог свода. Коэффициенти афинитета  $\mu$  и  $\nu$ , као и величине хоризонталног потиска  $H$  и вертикалног оптерећења  $P$ , за сваки део свода (у основи поље облика правоуглог троугла) рачунати су на основу изложеног у одељку 21.2 на стр. 190.<sup>2</sup> Величине  $H$  представљају компоненте укупног хоризонталног потиска на појединачан ослонац, чији су правци (угао  $\theta$ , четврта врста здесна у табелама) одређени одговарајућим страницама сводних поља. У другој и трећој врсти здесна дате су компоненте ових сила у правцу апсцисе и ординате ( $H_x$  и  $H_y$ ), а њихов векторски збир представља укупни хоризонтални потисак на ослонац. Укупно вертикално оптерећење добија се простим збрајањем вертикалних оптерећења појединачних делова. Тако је за сваки ослонац укупно (резултујуће) дејство  $R$  представљено уређеном тројком  $R(\theta[^\circ], Q[KN], P[KN])$ .



**Слика 83.** Прорачун дејства простог и сложеног крстастог свода: (а,г) шематски приказ основе, (б) положај ослоначких, темених и средишњих тачака, (в,д) размештај ослонаца свода с назначеним реакцијама ослонаца и њиховим величинама

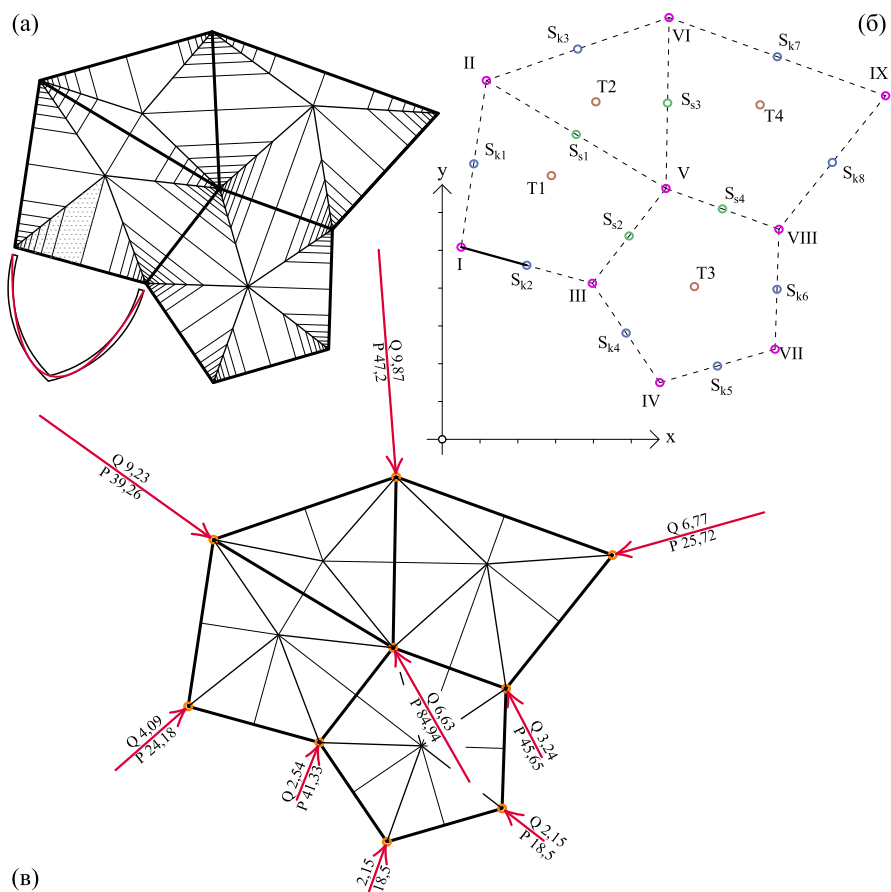
<sup>2</sup> Потоње две вредности могу се добити и непосредно, без претходног срачунавања коэффицијента афинитета (који су због прегледности приказани у табелама),







**Пример 3: сложен афин свод са четири сводним пољима.** Овде је приказан прорачун дејстава сложеног афиног свода сачињеног од четирију крстастих сводова, и то разнокраког четвороделног, разнокраког троделног, једнакокраког трапезног и правилног петоделног. Ослоњен је на укупно девет ослонаца (I–IX; осам ободних и један средишњи), као што се види на шематском приказу основе датом у размери 1:200 на слици 84а. На слици 84б приказан је положај тачака потребних за прорачун, који је представљен у табели 26. За полазни лук, приказан на слици 84а, одабран је преломљени лук минималне дебљине који одговара граничном ексцентрицитету (механизму слома са седам зглобова).



**Слика 84.** Прорачун дејства сложеног афиног свода: (а) шематски приказ основе, (б) положај ослоначких, темених и средишњих тачака, (в) резултујуће дејство на ослонце











## Додатак Ж

### Заравњени сводови

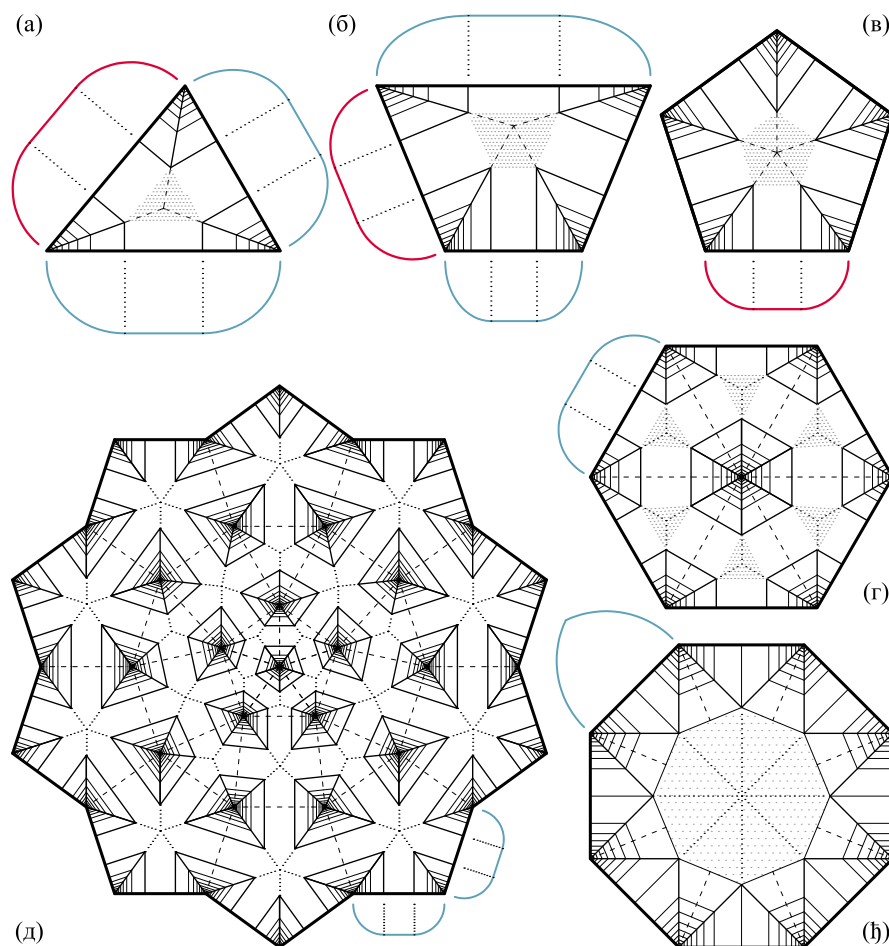
Као посебна група сводова овде су издвојени заравњени сводови. То су сводови код којих ободни лук има облик псеудолука из трију средишта (в. одељак 14.2), односно сводови у оквиру којих постоји *раван свод*. Иако се основе оваквих сводова, приказане на слици 85а–г, не разликују од сложених афиних сводова разматраних у овој дисертацији, у оквиру таванице се добија непрекидна равна површина, што може имати утицај на архитектонско обликовање простора. У зависности од облика свода у оквиру којег се налази, заравњени део (истакнут шрафуром на слици 85а,б,в) може имати различите облике.<sup>1</sup> Овде су кратко размотрена њихова основна својства те наведено неколико примера којима се указује на могућности њихове примене.

Наиме, приликом испитивања сложених крстастих сводова, елементарни лукови су се простирали од темена свода (где је елементарни лук сведен у вертикалну дуж) до ослонаца (где елементарни лук заузима облик ободног лука свода). Међутим, када су ободни лукови заравњени, и теме свода постаје заравњено. Тиме у околини темена свода остаје издвојен део – раван свод, чије дејство није обухваћено елементарним луковима из фамилије ободног лука, као што се види на примеру троделног сложеног крстастог свода приказаног на слици 86а. Равни део овог свода, издвојен на слици 86в, може се посматрати као троделни сложени крстасти свод чији су ободни лукови равни (в. одељак 6.2). Стога су и елементарни лукови унутар њега такође равни, а њихова дејства збрајају се дуж замишљених укреница. Наиме, као што је раније показано, потпорна линија унутар равног лука има облик параболе, те је потпорна површ унутар равног свода образована од ограничених делова правих параболичких коноида, као што је приказано на слици 86в,г. Резул-

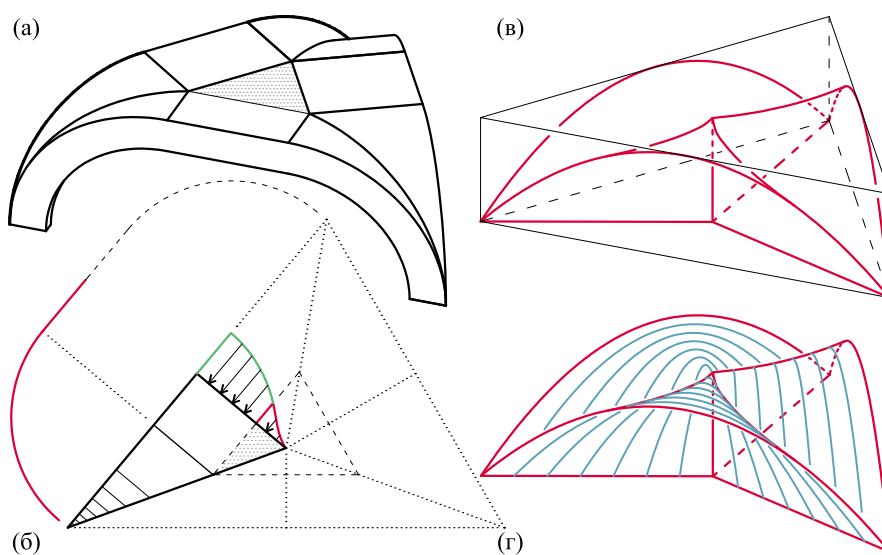
<sup>1</sup> Уколико је заравњени део образован као на слици 85д, претпоставља се да дејствује као манастирски свод; како се претпоставља да манастирски сводови не дејствују на исти начин као крстасти сводови, овакви облици нису овде разматрани.



тантно дејство у теменима основе равног свода даље се збраја са дејствима елементарних лукова (псеудолукови из трију средишта), те се даље преноси дуж укрсница до ослонаца.



**Слика 85.** Заравњени сводови: (а,б,в) шематски приказ основе троделног, четвороделног и петоделног крстастог свода с обореним положајима ободних лукова (уп. са сликом ), (г) затворени шестоделни прстенасти свод (са средишњим ослоном; уп. са сликом 54), (д) сложени зракасти свод (уп. са сликом 77а), (h) осмоделни заравњени свод

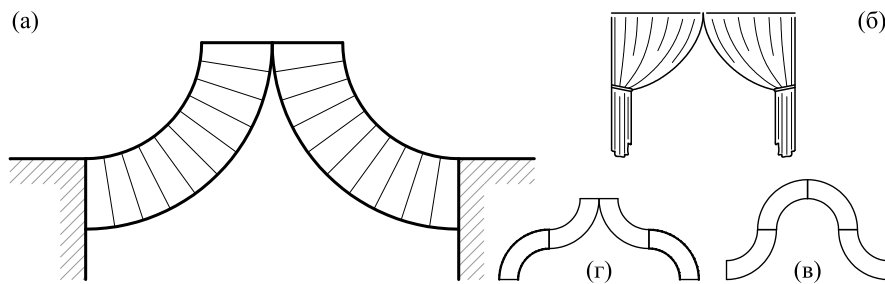


**Слика 86.** Раван свод у оквиру заравњеног троделног зракастог свода свод: (а) просторни приказ (заравњени део је шрафиран), (б) шематски приказ основе: полазни део, (в,г) потпорна површ у оквиру заравњеног дела

## Додатак 3

### Испитивање равнотеже драперастог лука

Приликом испитивања равнотеже масивних лукова обично се разматрају конвексни облици. Међутим, поред њих постоје и различити конкавни или тзв. инфлексионни облици лукова. Стога је овде, у виду примера, приступ коришћен при испитивању равнотеже лукова у овој дисертацији примењен на основни лук конкавног облика – драпераст лук. Овај лук образован је од двају наспрамно постављених исечака кружног прстена, супротно оријентисаних у односу на полукружни лук, као што је приказано на слици 87а. Обликом подсећа на привезану драперију односно дугачку тешку завесу (в. слику 87б), те отуда његов назив. Испитивање његове равнотеже даље може послужити као основа за испитивање других сложенијих облика лукова у којима учествује као саставни део (нпр. звонасти лук или тзв. магарећа леђа приказани на слици 87в,г).



Слика 87. (а) Драпераста лук, (б) драперија, (в) звонасти лук, (г) магарећа леђа

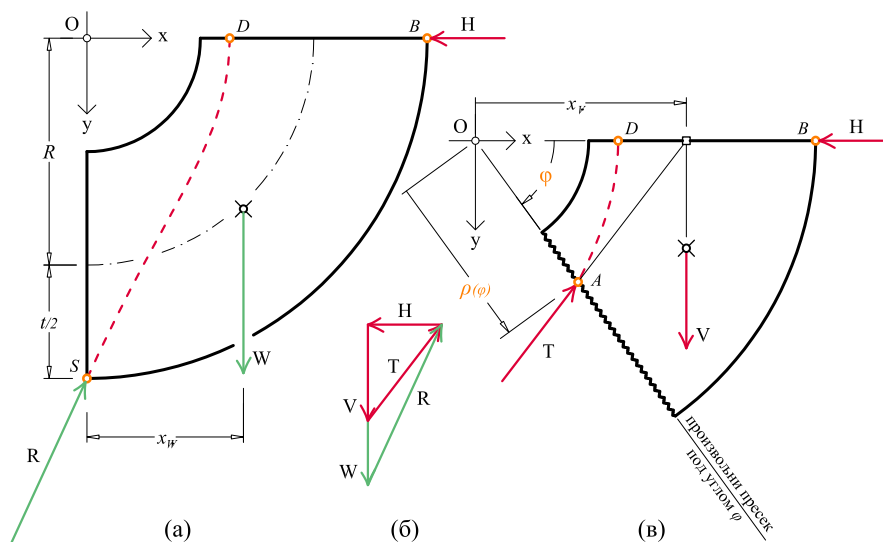
**Аналитичко моделирање.** На слици 88а приказани су геометријски чиниоци половине монолитног драперастог лука. У складу с примењеном нормалном стереотомијом, која подразумева произвољне пресеке управне на осу лука, тежина  $V$  коначног дела лука

до пресека под углом  $\varphi$  је  $V(\varphi) = Rt\varphi$ . Апсциса  $x_V$  тежишта коначног дела лука (слика 88в), добија се на следећи начин:

$$x_V(\varphi) = \frac{2(R + \frac{t}{2})^3 - (R - \frac{t}{2})^3 \sin(\frac{\varphi}{2}) \cos(\frac{\varphi}{2})}{3(R + \frac{t}{2})^2 - (R - \frac{t}{2})^2} = \frac{(12R^2 + t^2) \sin \varphi}{12R\varphi}. \quad (275)$$

Тежина  $W$  половине лука, приказане на слици 88а, добија се када угао  $\varphi$  достигне вредност  $\frac{\pi}{2}$ , те је тада  $W = Rt\frac{\pi}{2}$ . Уз то се апсциса  $x_W$  тежишта половине лука добија упрошћавањем израза (275), те износи:

$$x_W = x_V(\varphi = \frac{\pi}{2}) = \frac{12R^2 + t^2}{6R\pi}. \quad (276)$$



**Слика 88.** (а) Половина драперастог лука с назначеним геометријским чиниоцима, (б) план сила који представља равнотежу половине лука односно његовог коначног дела, (в) коначни део лука до произвољног пресека под углом  $\varphi$

Имајући у виду да се тежи минималној потпорној линији, на падна тачка  $S$  реакције  $R$  претпостављена је на доњем крају ослоначке спојнице. С друге стране, како се половине лука додирују у темену у једној тачки,  $B$ , хоризонтална сила  $H$  мора деловати у њој (в. слику 88а). Према томе, равнотежа момената половине лука за тачку  $S$  дата је следећом једнакошћу:  $H(R + \frac{t}{2}) = Wx_W$ ,

одакле се одређује величина  $H$  хоризонталног потиска:

$$H = \frac{W x_W}{R + \frac{t}{2}} = \frac{12 R^2 t + t^3}{12 R + 6 t}. \quad (277)$$

На слици 88в приказан је коначни део лука, од темена до произвољног пресека под углом  $\varphi$ . Резултантна сила  $T$  на произвољном пресеку, уз припадајућу нападну тачку  $A$ , једнозначно је одређена равнотежом сила односно момената за коначни део лука. Према томе, равнотежа момената за тачку  $A$  дата је следећом једнакошћу:  $H \rho(\varphi) \sin \varphi = V(\varphi)(x_V(\varphi) - \rho(\varphi) \cos \varphi)$ . На основу тога се одређује величина  $\rho(\varphi)$  која представља израз за потпорну линију унутар драперастог лука:

$$\rho(\varphi) = \frac{V(\varphi)x_V(\varphi)}{H \sin \varphi + V(\varphi) \cos \varphi} = \frac{1}{\frac{2}{2R+t} + \frac{12R\varphi \cot \varphi}{12R^2+t^2}}, \quad (278)$$

где су величине  $x_V(\varphi)$  и  $H$  редом дате изразима (276) и (277).

**Минимална дебљина.** Израз (278) не подразумева граничну потпорну линију, која одговара граничној (минималној) дебљини лука. Како би то било одређено, потребно је испитати ток потпорне линије. Стога је удаљеност потпорне линије од екстрадоса представљена следећим изразом:

$$\delta_{ex}(\varphi) = \rho(\varphi) - \left(R - \frac{t}{2}\right). \quad (279)$$

Испитивањем тока ове функције закључено је да се њена минимална вредност добија за  $\varphi = 0$ . То значи да је потпорна линија најближа екстрадосу на врху (горњој хоризонталној ивици) лука, те да је тај положај меродаван за минималну дебљину лука, као што се види на слици 88а,в. У складу с изразом (278), положај потпорне линије на врху лука, означен тачком  $D$ , одређен је следећим изразом:

$$\rho(\varphi \rightarrow 0) = \frac{1}{\frac{2}{2R+t} + \frac{12R}{12R^2+t^2}}. \quad (280)$$

Према томе, потпорна линија не полази наниже од темена лука (тачке  $B$ ), него тек од тачке  $D$ .<sup>1</sup> Даље се изједначавањем израза

<sup>1</sup> Уп. са сликом 13 у § 7.4.1, као и [93].

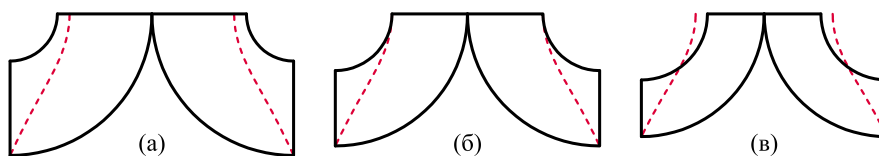
(279) с нулом (односно израза (280) с  $R - \frac{t}{2}$ ), те решавањем по  $t$ , добија следеће:

$$t = \sqrt[3]{2\sqrt{37}R^3 + 11R^3} - \frac{3R^2}{\sqrt[3]{2\sqrt{37}R^3 + 11R^3}} - R. \quad (281)$$

За јединичну вредност полупречникаа ( $R = 1$ ), добија се вредност минималне дебљине драперастог лука  $t/R_{min}$  (представљена односом дебљине и полупречника):

$$t/R_{min} = \sqrt[3]{11 + 2\sqrt{37}} - \frac{3}{\sqrt[3]{11 + 2\sqrt{37}}} - 1 = 0,79829 \approx 4/5. \quad (282)$$

Драпераста лук минималне дебљине, с придруженом потпорном линијом, приказан је на слици 89б, док су на сликама 89а и 89б редом приказани драпераста лук дебљине веће и мање од неопходне.

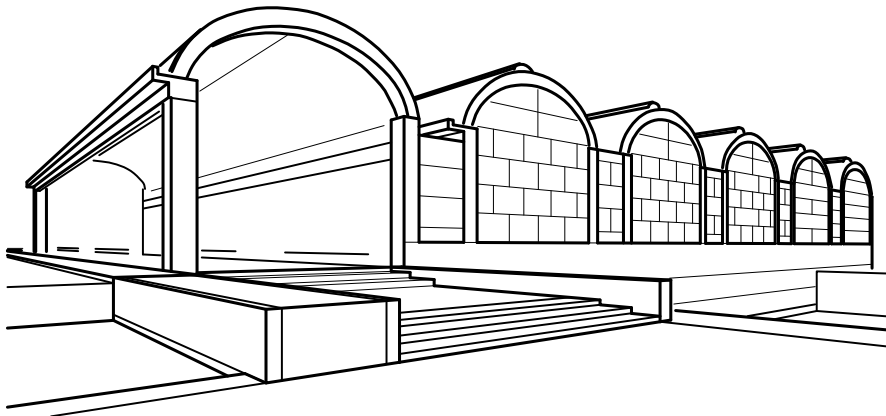


**Слика 89.** (а) Драпераста лук довољне дебљине ( $t/R = 1$ ) – стабилан лук, (б) минимална дебљина и припадајућа гранична потпорна линија – гранично стање равнотеже, (в) недовољна дебљина ( $t/R = 0,6$ ) – немогуће стање

## Додатак И

### Испитивање равнотеже циклоидног лука

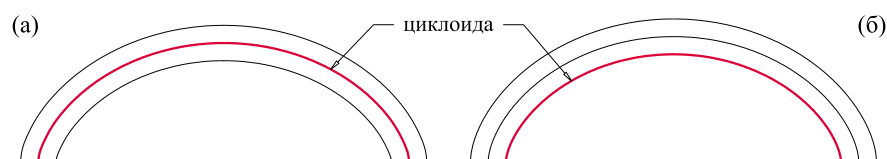
Овде је обрађена равнотежа лука чија средишња линија не садржи кружни лук (као што је то случај са свим луковима разматраним у овој дисертацији), али је изведена на основу круга. Постоје различити облици лукова који мање-више опонашају најзаступљеније лукове. Тако се нпр. елипсастим луковима из више средишта (обрађени у одељку 14.1) приближно представљају елиптички лукови (в. [8]). Један од не тако често примењиваних облика, који такође наликује на елиптички лук, јесте циклоидни лук (в. слике 90 и 92). Наиме, *циклоида* је крива коју описује тачка на кругу који се котрља без клизања дуж праве.



Слика 90. Музеј уметности Кимбел који је пројектовао Луис Кан

Истраживање својстава ове криве, у различитим областима, заокупљало је познате научнике током седамнаестог века; тако је нпр. циклоида позната као решење проблема брахистохроне и таутохроне. Испоставља се да је Галилео изумео ову криву те први предложио њену примену у архитектури, и то за пројекат једно-

распоног моста у Пизи [23, 35]. Данас, вероватно најпознатији циклоидни лук односно свод, јесте онај у Музеју уметности Кимбел у Форт Ворту у Тексасу (в. слику 90), који је пројектовао амерички архитекта Луис Кан у сарадњи с грађевинским инжењером Аугустом Комендантом.<sup>1</sup>



**Слика 91.** Два случаја циклоидног лука: (а) циклоидна оса, (б) циклоидни интрадос

У складу с теоријом потпорне линије, примењеном у овој дисертацији, овде је испитана равнотежа двају случајева циклоидног лука, приказаних на слици 91. У првом случају, средишња линија лука има облик циклоиде, док је у другом случају интрадос тог облика. Притом су лукови једнообразне дебљине у правцу управном на осу односно на интрадос лука. Према томе, интрадос, оса и екстрадос представљају паралелне (еквидистантне) криве. У складу с тим је примењена нормална стереотомија, која подразумева произвољне пресеке (спојнице) управне на осу (односно на интрадос) лука. Добијене вредности минималне дебљине, поређене су с елиптичким, елипсастим и сегментним луковима истих пропорција.

## И.1 Аналитичко моделирање

Прво су у предстојећем одељку размотрена основна геометријска својства циклоиде, а затим су одељцима И.1.2 и И.1.3 обрађена наведена два случаја циклоидног лука.

### И.1.1 Геометријска својства циклоиде

Уобичајени параметарски облик циклоиде је следећи:

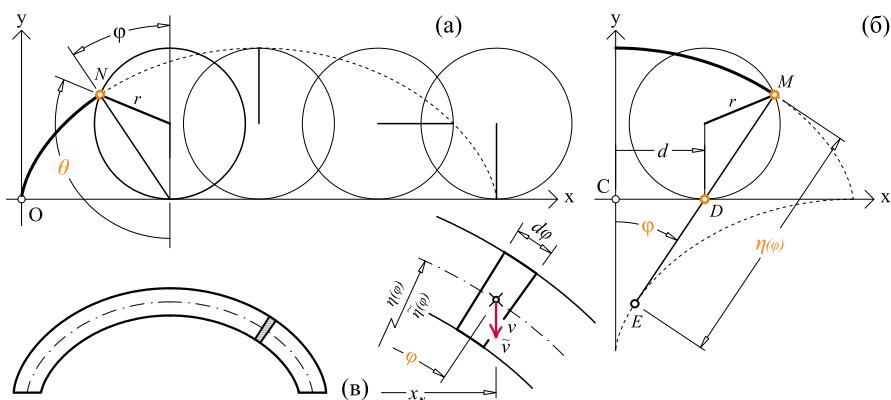
$$x(\theta) = r(\theta - \sin \theta), \quad (283a)$$

$$y(\theta) = r(1 - \cos \theta), \quad (283б)$$

<sup>1</sup> Кан је поновио овај облик циклоидне бетонске љуске у Вулфсон центру за машинско и саобраћајно инжењерство у универзитетском кампусу у Тел Авиву [100].



где  $r$  представља полупречник круга који изводи циклоиду, а  $\theta$  представља угао обртања (котрљања) тог круга, као што је приказано на слици 92а за произвољну тачку  $N$ .



**Слика 92.** Геометријски чиниоци циклоиде: (а) извођење циклоиде, (б) трансформација координатног система, (в) инфинитезимални тесаник циклоидног лука

С обзиром на то да је уобичајено да се испитивање равнотеже лука спроводи од темена према ослонцу, уз зависност од чиниоца који непосредно одређује положај произвољног пресека, погодније је поставити исходиште координатног система у средиште  $C$  лука (в. слику 92б). У складу с тим, израз за циклоиду добија следећи облик:

$$x(\varphi) = r(2\varphi + \sin(2\varphi)), \tag{284a}$$

$$y(\varphi) = r(1 + \cos(2\varphi)), \tag{284б}$$

где угао  $\varphi = \frac{\pi - \theta}{2}$  одређује положај произвољне тачке  $M$  циклоиде, односно положај произвољног пресека, а мерен је од вертикалне осе симетрије лука ка ослонцу (од темене спојнице ка ослоначкој). Уз то је полупречник закривљености  $\eta$  у произвољној тачки циклоиде дат следећим изразом:

$$\eta(\varphi) = 4r \sin(\theta/2) = 4r \cos(\varphi). \tag{285}$$

Поред тога, удаљеност  $d$  између вертикалне осе симетрије лука и тачке  $D$ , која је пресечна тачка правца произвољног пресека и ослоначке линије, дата је следећим изразом:

$$d = r\pi - r(\pi - 2\varphi) = 2r\varphi.$$

## И.1.2 Циклоидни лук циклоидне осе

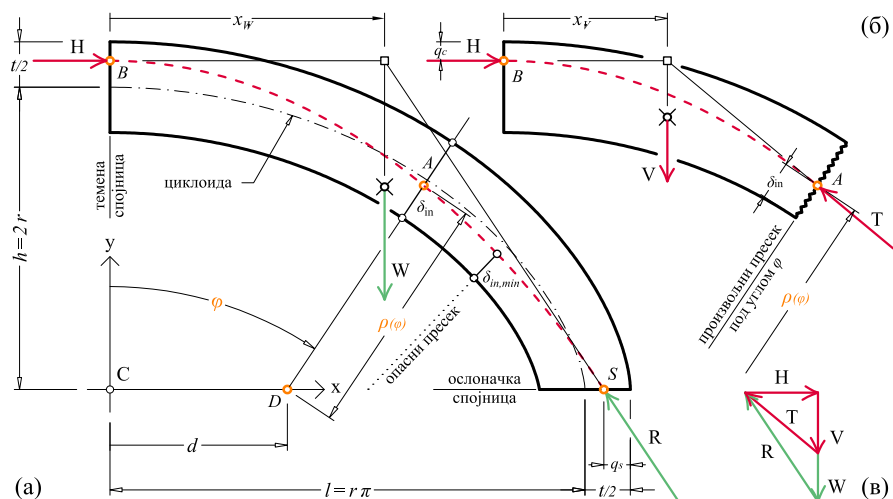
На слици 93а приказана је половина монолитног циклоидног лука дебљине  $t$  чија средишња линија (оса) има облик циклоиде. Пропорције лука, односно његове осе, могу бити представљене односом њене висине (стреле) ( $h = 2r$ ) и полураспона  $l$ ; према томе, однос  $h/l$  је следећи:  $(2r)/(r\pi) = 0,6366$ .

**Тежина и тежиште коначног дела циклоидног лука.** Два бескрајно блиска пресека, који заклапају инфинитезимални угао  $d\varphi$  и који су управни на осу лука, одређују инфинитезимални тесаник приказан на слици 92в. Његова тежина  $v$  представљена је одговарајућом површином:

$$v(\varphi) = \eta(\varphi) t d\varphi. \quad (286)$$

У складу с тим је тежина  $V$  горњег коначног дела лука, између темене спојнице и произвољног пресека под углом  $\varphi$  (в. слику 93б), дата следећим изразом:

$$V(\varphi) = \int_0^\varphi \eta(\varphi) t d\varphi = 4tr \sin \varphi. \quad (287)$$



**Слика 93.** I случај: (а) геометријски чиниоци лука циклоидне осе, (б) коначни део лука до произвољног пресека под углом  $\varphi$ , (в) план сила

Апсциса  $x_v$  тежишта инфинитезималног тесаника дата је следе-

ћим изразом:<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} x_v(\varphi) &= 2r\varphi + \left( \frac{\eta(\varphi)}{2} + \frac{1}{12} \frac{t^2}{\eta(\varphi)} \right) \sin \varphi \\ &= \frac{t^2 \tan \varphi}{48r} + 2r\varphi + r \sin(2\varphi). \end{aligned} \quad (288)$$

Апсциса  $x_V$  тежишта коначног дела тежине  $V$  (слика 93б), израчунава се на следећи начин:

$$x_V(\varphi) = \frac{\int_0^\varphi x_v(\varphi) \eta(\varphi) t d\varphi}{V(\varphi)}. \quad (289)$$

С обзиром на изразе (285) и (288), бројилац претходног израза је:

$$\frac{1}{12} t^3 (1 - \cos \varphi) + \frac{8}{3} t r^2 (1 - \cos^3 \varphi) - 8 t r^2 (1 - \cos \varphi - \varphi \sin \varphi). \quad (290)$$

Према томе, уврштавање израза (287) и (290) у израз (289) даје апсцису  $x_V$  тежишта коначног дела циклоидног лука до произвољног пресека под углом  $\varphi$ :

$$x_V(\varphi) = \frac{(t^2 - 64r^2) \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) + 16r^2(6\varphi + \sin(2\varphi))}{48r}. \quad (291)$$

Тежина  $W$  половине лука приказане на слици 93а добија се када вредност угла  $\varphi$  достигне прав угао, те се израз (287) упрошћава у следећи:

$$W = 4kr. \quad (292)$$

Уз то се апсциса  $x_W$  тежишта половине лука упрошћава из израза (291) у:

$$x_W = \frac{t^2 + 48\pi r^2 - 64r^2}{48r}. \quad (293)$$

**Хоризонтални потисак и једначина потпорне линије.** Како би одговарајуће испитивање могло да буде спроведено, неопходно је одредити потпорну линију, односно извести аналитички израз којим је она описана. Претпостављањем положаја тачака  $B$  и  $S$ , као редом нападних тачака хоризонталне силе  $H$  која делује у темену и реакције  $R$  на ослонцу, једнозначно је одређен положај потпорне линије (приказане испрекиданом линијом на слици 93а,б).

<sup>2</sup> У вези с другим чланом у првоме реду в. израз (247) на стр. 229, као и [92].

План сила приказан на слици 93в графички изражава равнотежу половине лука и његовог коначног дела.

Равнотежа момената половине лука за тачку  $S$  на ослоњу дата је следећом једнакошћу:

$$H \left( \frac{t}{2} + 2r - q_c \right) = W \left( \frac{t}{2} + \pi r - x_W - q_s \right),$$

где је  $q_c$  вертикална удаљеност тачке  $B$  од екстрадоса, док  $q_s$  представља удаљеност тачке  $S$  од екстрадоса дуж ослоначке спојнице (в. слику 93а). Одатле се може изразити величина  $H$  хоризонталне силе која делује у теменој спојници:

$$H = \frac{W [t + 2(\pi r - x_W - q_s)]}{t + 4r - 2q_c} = \frac{t [-t^2 + 24tr - 16r(3q_s - 4r)]}{6(t + 4r - 2q_c)}, \quad (294)$$

где су тежина  $W$  половине лука и апсциса  $x_W$  придруженог тежишта редом дати изразима (292) и (293).

Резултантна сила  $T$  на произвољном пресеку, уз припадајућу нападну тачку  $A$ , једнозначно је одређена равнотежом сила односно момената за коначни део лука (в. слику 93б). Према томе, равнотежа момената коначног дела лука за тачку  $A$  дата је следећом једнакошћу:

$$H \left( \frac{t}{2} + 2r - \rho \cos \varphi - q_c \right) = V(\varphi) (2r\varphi + \rho \sin \varphi - x_V(\varphi)).$$

На основу тога се одређује удаљеност  $\rho(\varphi)$  између потпорне линије и тачке  $D$ , што представља једначину потпорне линије унутар циклоидног лука (случај I):

$$\begin{aligned} \rho(\varphi) &= \frac{H \left( \frac{t}{2} + 2r - q_c \right) + V(x_V - 2r\varphi)}{H \cos \varphi + V \sin \varphi} \\ &= \frac{(t - 2q_c + 4r) \left[ (t^2 - 72r^2) \cos \varphi + 8r(r \cos(3\varphi) - 3t + 6q_s) \right]}{\left\{ 2 \cos \varphi [t^2 - 24tr + 16r(3q_s - 4r)] - \right. \\ &\quad \left. 48r \sin^2 \varphi (t - 2q_c + 4r) \right\}}, \quad (295) \end{aligned}$$

где су величине  $V(\varphi)$ ,  $x_V(\varphi)$  и  $H$  редом дате изразима (287), (291) и (294). Међутим, изразом (294) се не претпоставља гранична вредност хоризонталног потиска  $H$  који одговара граничној (минималној) дебљини лука. Према томе, ни добијеним изразом (295) се не претпоставља гранична потпорна линија; стога су величине  $q_c$

и  $q_s$  непознате. Како би се одредила гранична потпорна линија која одговара минималној (граничној) дебљини лука, потребно је одредити механизам слома који одговара циклоидном луку. С обзиром на то да је облик циклоидног лука (због глатког темена) најсличнији елипсастим (елиптичким или пак полукружним) ликовима усвојен је њима својствен механизам слома (в. случај 0 на слици 25а на стр. 96; као и слику 33а на стр. 123). Наиме, у том случају потпорна линија пролази кроз екстрадос на ослонцима и темену, додирујући интрадос у још двама тачкама, образујући тако пет зглобова (као што је приказано на слици 95а). У складу с тим, величине  $q_c$  и  $q_s$  једнаке су нули. Према томе, када је претпостављена минимална дебљина, једначина потпорне линије, дата изразом (295), упрошћава се у следећи облик:

$$\rho(\varphi)_{\text{lim}} = \frac{(t + 4r) [(t^2 - 72r^2) \cos \varphi + 8r(r \cos(3\varphi) - 3t)]}{2(t^2 - 24tr - 64r^2) \cos \varphi - 48r(t + 4r) \sin^2 \varphi}, \quad (296)$$

а на основу израза (294) добија се величина хоризонталног потиска која одговара минималној дебљини:

$$H_{\text{lim}} = \frac{t^2}{3} - \frac{t^3}{2(t + 4r)} + \frac{8tr}{3}. \quad (297)$$

Шта више, уколико је лук довољне дебљине (веће од минималне), минимални потисак који му одговара одређен је следећим изразом:

$$H_{\text{min}} = \frac{t[t^2 + 24tr - 16r(3q_s - 4r)]}{6(t + 4r)}, \quad (298)$$

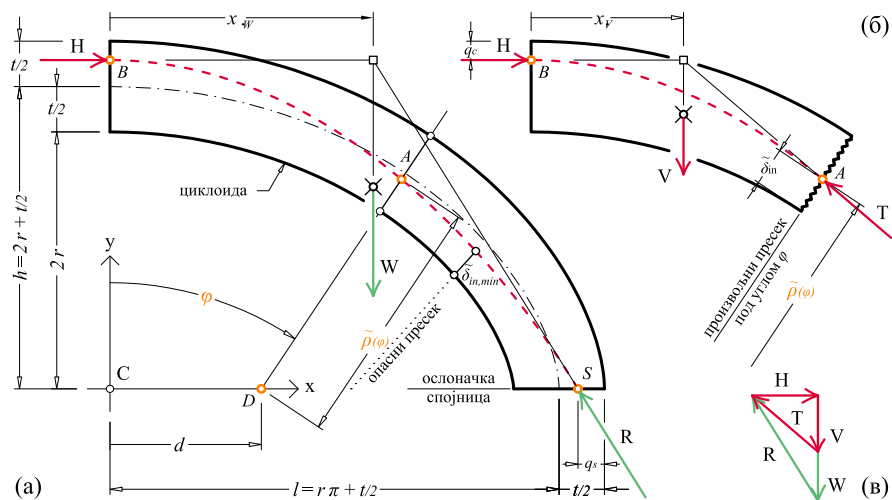
при чему је потребно одредити положај потпорне линије на ослонцу односно нападну тачку  $S$  реакције  $R$  одређену величином  $q_s$ .

### И.1.3 Циклоидни лук циклоидног интрадоса

На слици 94а приказана је половина монолитног циклоидног лука дебљине  $t$  чији интрадос има облик циклоиде. Пропорције лука, односно његове осе, могу бити представљене односом њене висине (стреле) ( $h = 2r + t/2$ ) и полураспона  $l$ ; према томе, однос  $h/l$  је следећи:  $(2r + t/2)/(r\pi + t/2)$ , те се може закључити да пропорције средишње линије зависе од дебљине лука. С обзиром на израз (285), полупречник закривљености  $\tilde{\eta}$  у произвољној тачки средишње линије (која је крива паралелна циклоидном интрадосу)

је следећи:

$$\tilde{\eta}(\varphi) = \eta(\varphi) + \frac{t}{2} = 4r \cos \varphi + \frac{t}{2}. \quad (299)$$



**Слика 94.** II случај: (а) геометријски чиниоци лука циклоидног интрадоса, (б) коначни део лука до произвољног пресека под углом  $\varphi$ , (в) план сила

**Тежина и тежиште коначног дела циклоидног лука.** Тежина инфинитезималног тесаника (слика 92в), је:

$$\tilde{v} = \tilde{\eta} t d\varphi. \quad (300)$$

У складу с тим је тежина  $\tilde{V}$  горњег коначног дела лука до произвољног пресека под углом  $\varphi$  (слика 94б), дата следећим изразом:

$$\tilde{V}(\varphi) = \int_0^\varphi \tilde{\eta} t d\varphi = \frac{t^2 \varphi}{2} + 4tr \sin \varphi. \quad (301)$$

Апсциса  $\tilde{x}_v$  тежишта инфинитезималног тесаника дата је следећим изразом:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_v(\varphi) &= 2r\varphi + \left( \frac{\eta(\varphi)}{2} + \frac{t}{2} + \frac{1}{12} \frac{t^2}{\eta(\varphi)} \right) \sin \varphi \\ &= \frac{2t \sin \varphi (t + 6r \cos \varphi)}{3(t + 8r \cos \varphi)} + 2r\varphi + r \sin(2\varphi). \end{aligned} \quad (302)$$

Апсциса  $\widetilde{x}_V$  тежишта коначног дела тежине  $\widetilde{V}$  (слика 94б), израчунава се на следећи начин:

$$\widetilde{x}_V(\varphi) = \frac{\int_0^\varphi \widetilde{x}_v(\varphi) \widetilde{\eta} t d\varphi}{\widetilde{V}(\varphi)}. \quad (303)$$

С обзиром на изразе (299) и (302), бројилац претходног израза је:

$$\frac{1}{12} t \left\{ 4t^2 - 4(t^2 - 18r^2) \cos \varphi + 6tr \varphi^2 - 9tr \cos(2\varphi) + 9tr + 96r^2 \varphi \sin \varphi - 8r^2 \cos(3\varphi) - 64r^2 \right\}. \quad (304)$$

Према томе, уврштавање израза (301) и (304) у израз (303) даје апсцису  $\widetilde{x}_V$  тежишта коначног дела циклоидног лука до произвољног пресека под углом  $\varphi$ :

$$\widetilde{x}_V(\varphi) = 2r \varphi - \frac{\left\{ 4(t^2 - 18r^2) \cos \varphi - 4t^2 + 6tr \varphi^2 + 9tr \cos(2\varphi) - 9tr + 8r^2 \cos(3\varphi) + 64r^2 \right\}}{6(t\varphi + 8r \sin \varphi)}. \quad (305)$$

Тежина  $\widetilde{W}$  половине лука приказане на слици 94а добија се када вредност угла  $\varphi$  достигне прав угао, те се израз (301) упрошћава у следећи:

$$\widetilde{W} = \frac{\pi t^2}{4} + 4tr. \quad (306)$$

Уз то се апсциса  $\widetilde{x}_W$  тежишта половине лука упрошћава из израза (305) у:

$$\widetilde{x}_W = \frac{4t^2 + \frac{3}{2}\pi^2 tr + 18tr + 48\pi r^2 - 64r^2}{6\left(\frac{\pi t}{2} + 8r\right)}. \quad (307)$$

**Хоризонтални потисак и једначина потпорне линије.** Равнотежа момената половине лука за тачку  $S$  на ослонцу (слика 94а) дата је следећом једнакошћу:

$$\widetilde{H}(t + 2r - q_c) = \widetilde{W}(t + \pi + r - \widetilde{x}_W - q_s).$$

Одатле се може изразити величина  $H$  хоризонталне силе која делује у теменој спојници:

$$\begin{aligned} \widetilde{H} &= \frac{\widetilde{W}(t + \pi + r - \widetilde{x}_W - q_s)}{t + 2r - q_c} \\ &= \frac{t[(6\pi - 8)t^2 - 6\pi t q_s + 3(20 + \pi^2)tr + 32r(4r - 3q_s)]}{24(t - q_c + 2r)}, \end{aligned} \quad (308)$$

где су тежина  $\widetilde{W}$  половине лука и апсциса  $\widetilde{x}_W$  придруженог тежишта редом дати изразима (306) и (307).

Равнотежа момената коначног дела лука за тачку  $A$  (в. слику 94б) дата је следећом једнакошћу:

$$\widetilde{H}(t + 2r - q_c - \widetilde{\rho}(\varphi) \cos \varphi) = \widetilde{V}(\varphi)(2r\varphi - \widetilde{x}_V(\varphi) + \widetilde{\rho}(\varphi) \sin \varphi).$$

На основу тога се одређује удаљеност  $\widetilde{\rho}(\varphi)$  између потпорне линије и тачке  $D$ , што представља једначину потпорне линије унутар циклоидног лука (случај II):

$$\begin{aligned} \widetilde{\rho}(\varphi) &= \frac{\widetilde{H}(t + 2r - q_c) + \widetilde{V}(\varphi)(\widetilde{x}_V(\varphi) - 2r\varphi)}{\widetilde{H} \cos \varphi + \widetilde{V}(\varphi) \sin \varphi} \\ &= \frac{(q_c - t - 2r) \left[ \begin{array}{l} 8(t^2 - 18r^2) \cos \varphi - 6\pi t^2 + 96rq_s - \\ 3t(\pi^2 r - 2\pi q_s - 4r\varphi^2 + 26r) + \\ 2r(9t \cos(2\varphi) + 8r \cos(3\varphi)) \end{array} \right]}{\left\{ \begin{array}{l} \cos \varphi [(6\pi - 8)t^2 - 6\pi t q_s + 3(20 + \pi^2)tr + \\ 32r(4r - 3q_s)] + 12 \sin \varphi (t - q_c + 2r)(t\varphi + 8r \sin \varphi) \end{array} \right\}}. \end{aligned} \quad (309)$$

Када је претпостављена минимална дебљина, једначина потпорне линије, дата изразом (309), упрошћава се у следећи облик:

$$\widetilde{\rho}(\varphi)_{\text{lim}} = \frac{(t + 4r)[(t^2 - 72r^2) \cos \varphi + 8r(r \cos(3\varphi) - 3t)]}{2(t^2 - 24tr - 64r^2) \cos \varphi - 48r(t + 4r) \sin^2 \varphi}, \quad (310)$$

а на основу израза (308) добија се величина хоризонталног потиска која одговара минималној дебљини:

$$\widetilde{H}_{\text{lim}} = \frac{t[t^2(6\pi - 8) + 3tr(20 + \pi^2) + 128r^2]}{24(t + 2r)}. \quad (311)$$

Шта више, уколико је лук довољне дебљине (веће од минималне), минимални потисак који му одговара одређен је следећим изразом:

$$\widetilde{H}_{\text{min}} = \frac{t[(6\pi - 8)t^2 - 6\pi t q_s + 3(20 + \pi^2)tr + 32r(4r - 3q_s)]}{24(t + 2r)}, \quad (312)$$

при чему је потребно одредити положај потпорне линије на ослонцу односно нападну тачку  $S$  реакције  $R$  одређену величином  $q_s$ .



## И.2 Нумеричко моделирање и резултати

**Минимална дебљина.** Будући да аналитичко одређивање вредности минималне дебљине није познато, примењени су одговарајући нумерички поступци (в. поглавље 12). Наиме, када се посматра половина лука, уз усвојени одговарајући механизам слома ( $q_c = 0$  и  $q_s = 0$ ), постоји само један опасан пресек (у којем се потпорна линија највише приближи интрадосу; в. слике 93а и 94а). Сходно томе, одговарајућим итеративним поступком (в. одељак 12.3) дебљина се прилагођава у односу на њега. Притом се удаљености  $\delta_{in}$  односно  $\widetilde{\delta}_{in}$  потпорне линије (односно нападне тачке резултантне силе) од интрадоса (в. слике 93а,б и 94а,б), које се привремено чувају у одговарајућим списковима (листама), добијају у складу са следећим изразима:

$$\delta_{in} = \rho(\varphi) - \frac{\eta(\varphi)}{2} + \frac{t}{2} \quad \text{за I случај,} \quad (313a)$$

$$\widetilde{\delta}_{in} = \frac{\widetilde{\eta}(\varphi)}{2} + \frac{t}{2} - \widetilde{\rho}(\varphi) \quad \text{за II случај.} \quad (313b)$$

Добијене нумеричке вредности дате су у табели 30, где је минимална дебљина представљена минималном вредношћу односа дебљине лука и његовог полураспона,  $t/l$ . Уз то је назначен и положај зглоба на интрадосу, одређен углом  $\beta$ .

Поред тога, израчунате су и минималне дебљине лукова чији је облик сличан циклоидном, и то оних чије осе имају истоветне пропорције као и у обама случајевима разматраних циклоидних лукова.<sup>3</sup> Одређеније, у табели 30 приложене су израчунате минималне дебљине за елиптичке, елипсасте лукове из трију средишта и сегментне лукове. Вредности које се односе на елиптичке лукове добијене су интерполацијом на основу нумеричких вредности које су израчунали Алексакис и Макрис (датих у табели 1 у [8]). Вредности које су дате за елипсасте лукове, и то за прелазни угао од 30, 45 и 60 степени, израчунате су у складу с поглављем 14 ове дисертације. Облик сегментног лука одређен је крајњим тачкама (на ослонцима и темену) осе разматраних циклоидних лукова.<sup>4</sup> Графички приказ ових наведених лукова дат је на слици 95, где су приказани лукови истог распона средишње линије.

<sup>3</sup> У I случају, као што је наведено, однос  $h/l$  износи 0,63662. На основу израчунате минималне дебљине за II случај, када лук је циклоидног интрадоса, однос  $h/l$  износи 0,64949.

<sup>4</sup> Тако је добијено да њихови обухватни углови за случај I и случај II износе редом 64,963 и 66,005 степени.

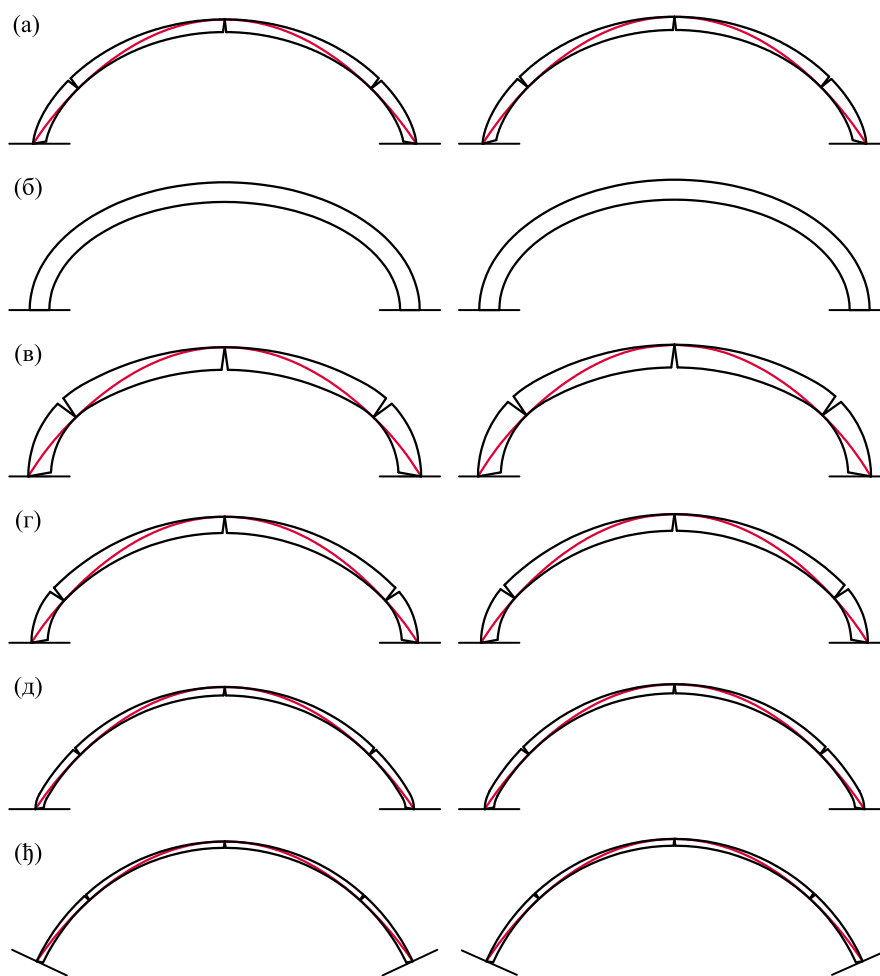
**Табела 29.** Минимална дебљина  $t/l_{\min}$  циклоидних лукова и обликом сличних лукова истих пропорција средишње линије

облик лука	I случај: $h/l = 0,63662$		II случај: $h/l = 0,64949$	
	$t/l_{\min}$	$\beta [^\circ]$	$t/l_{\min}$	$\beta [^\circ]$
<b>циклоидни лук</b>	<b>0,06820</b>	44,656	<b>0,07086</b>	45,276
елиптички лук [8]*	0,106 (0,108)	68,7 (68,9)	0,106 (0,108)	68,2 (68,4)
елипсасти лук (30)	0,12158	43,797	0,12210	44,152
елипсасти лук (45)	0,08701	47,491	0,08942	47,753
елипсасти лук (60)	0,04560	44,690	0,04919	45,461
сегментни лук	0,03422	42,228	0,03607	42,795

\* У складу с нормалном (вертикалном) стереотомијом.

Може се закључити да циклоидни лук, у поређењу с елиптичким, захтева скоро двоструко мању дебљину (на месту опасног пресека елиптичког зглоба циклоидни облик је повучен ка средишту лука, те је услед тога погоднији). Испоставља се да за поменуте пропорције, сегментни лук има најмању дебљину. Међутим, својим обликом ипак доста одступа од циклоидног односно елипсастог облика. Својим обликом, елипсасти лук прелазног угла од 30 степени највише личи на елиптички лук истих пропорција; Међутим, од свих разматраних лукова захтева највећу дебљину. Елипсасти лук прелазног угла од 45 степени такође има већу дебљину него циклоидни лук. Елипсасти лук прелазног угла од 60 степени због великог прелазног угла више личи на сегментни него на циклоидни или елиптички облик, те захтева мању дебљину од циклоидног лука. На основу наведеног, може се закључити да је циклоидни лук, захваљујући свом облику, погоднији за примену од уобичајених елиптичких и елипсастих лукова сличних пропорција.

**Минимални потисак.** У складу с разматрањем спроведеним у одељку 12.5 ове дисертације, израчунате су вредности минималног потиска за циклоидне лукове чија је дебљина већа од минималне. Ове вредности су дате за различите односе  $t/l$ , а у односу на тежину  $W$  половине лука. Уз то су назначени и положаји опасних пресека, означени углом  $\beta$ , у којима минимална потпорна линија додирује интрадос.



**Слика 95.** Упоредни приказ циклоидних лукова минималне де-  
бљине и сличних лукова истих пропорција (лево, I случај:  $h/l =$   
 $0,63662$ ; десно, II случај:  $h/l = 0,64949$ ): (а) циклоидни лукови, (б)  
елиптички лукови, (в-д) елипсасти лукови, (е) сегментни лукови

**Табела 30.** Минимални хоризонтални потисак за различите дебљине циклоидних лука

$t/l$	I: циклоидна оса		II: циклоидни интрадос	
	$H_{\min}/W$	$\beta [^\circ]$	$\tilde{H}_{\min}/\tilde{W}$	$\tilde{\beta} [^\circ]$
<i>0,06820</i>	0,68316	44,656		
<i>0,07086</i>			0,66675	45,276
0,08	0,65791	46,265	0,64638	46,435
0,10	0,61938	48,551	0,60583	48,767
0,12	0,58490	50,428	0,56958	50,688
0,15	0,53876	52,690	0,52115	53,017
0,20	0,47237	55,408	0,45179	55,849
0,25	0,41517	57,161	0,39246	57,731
0,30	0,36461	58,158	0,34048	58,883

Курзивом су назначене вредности које одговарају минималној дебљини лука.

---

## Литература

- [1] Aita, D.: Una possibile rilettura del problema dell'arco tra geometria e meccanica. 15th AIMETA Congress of Theoretical and Applied Mechanics (2001)
- [2] Aita, D.: Between geometry and mechanics: A re-examination of the principles of stereotomy from a statical point of view. In: Huerta, S. (ed.) Proceedings of the First International Congress on Construction History. Instituto Juan de Herrera, Madrid, 161–170 (2003)
- [3] Aita, D., Barsotti, R., Bennati, S., Foce, F.: The statics of pointed masonry arches between 'limit' and 'elastic' analysis. In: P. Roca and C. Molins (eds.) Arch Bridges IV, Advances in Assessment, Structural Design and Construction, CIMNE, Barcelona, 354–362 (2004)
- [4] Aita, D., Barsotti, R., Bennati, S.: Equilibrium of Pointed, Circular, and Elliptical Masonry Arches Bearing Vertical Walls. *J. Struct. Eng.* **138**(7), 880–888 (2012)
- [5] Aita, D., Barsotti, R., Bennati, S.: Notes on Nonlinear Elastic Analyses of Masonry Arches. In: Aita D., Pedemonte O., Williams K. (eds.) *Masonry Structures: Between Mechanics and Architecture*. Birkhäuser, 237–264 (2015)
- [6] Akbarzadeh, M., Van Mele, T., Block, P.: 3D Graphic Statics: Geometric Construction of Global Equilibrium. Proceedings of the IASS Annual Symposium, Amsterdam (2015)
- [7] Alexakis, H., Makris, N.: Limit equilibrium analysis of masonry arches. *Arch. Appl. Mech.* **85**(9), 1363–1381 (2015)
- [8] Alexakis, H., Makris, N.: Minimum thickness of elliptical masonry arches. *Acta Mech.* **224**(12), 2977–2991 (2013)
- [9] Baldi, B.: *In mechanica Aristotelis problemata exercitationes*. Moguntiaë, Typis & Sumptibus viduæ Ioannis Albini (1621)
- [10] Barlow, W. H.: On the Existence (practically) of the line of equal Horizontal Thrust in Arches, and the mode of determining it by Geometrical Construction. *Minutes and Proceedings of the Institution of Civil Engineers* **5**, 162–182 (1846)
- [11] Bélidor, S.: *La science des ingénieurs dans la conduite des travaux de fortification et d'architecture civile*. Paris (1754)
- [12] Benvenuto, E.: *An introduction to the history of structural mechanics*. Springer-Verlag, New York (1991)

- [13] Block, P.: Thrust Network Analysis: exploring three-dimensional equilibrium. PhD Thesis, Massachusetts Institute of Technology, Department of Architecture (2009)
- [14] Block, P., DeJong, M., Ochsendorf, J.: As Hangs the Flexible Line: Equilibrium of Masonry Arches. *Nexus Netw. J.* **8**(2), 13–24 (2006)
- [15] Block, P., Thierry Ciblac, T., Ochsendorf, J.: Real-time limit analysis of vaulted masonry buildings. *Comput. Struct.* **84**, 1841–1852 (2006)
- [16] Block, P., Lachauer, L.: Three-dimensional (3d) equilibrium analysis of Gothic masonry vaults. *Int. J. Archit. Herit.* **8**, 312–335 (2014)
- [17] Block, P., Lachauer, L.: Three-dimensional funicular analysis of masonry. *Mech. Res. Commun.* **56**, 53–60 (2014)
- [18] Block, P., Ochsendorf, J.: Thrust Network Analysis: A new methodology for three-dimensional equilibrium. *Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures* **48**(3), 167–173 (2007)
- [19] Blondel, F.: *Résolution des quatre principaux problèmes d’architecture.* (1670)
- [20] Branner, R.: Villard de Honnecourt, Archimedes, and Chartres. *J. Soc. Archit. Hist.* **19**(3), 91–96 (1960)
- [21] Boscovich, R. G.: *Sentimento sulla solidità della nuova Guglia del Duomo di Milano* (1765)
- [22] Calvo Barentin, C., Van Mele, T., Block, P.: Robotically controlled scale-model testing of masonry vault collapse. *Meccanica* **53**(7), 1917–1929 (2018)
- [23] Camerota, F.: A Scientific Concept of Beauty in Architecture: Vitruvius Meets Descartes, Galileo, and Newton. In: Gerbino, A. (ed.) *Geometrical Objects: Architecture and the Mathematical Sciences 1400-1800*, 215–241, Springer International Publishing (2014)
- [24] Cocchetti G., Colasante G., Rizzi E.: On the Analysis of Minimum Thickness in Circular Masonry Arches. *Appl. Mech. Rev.* **64**(5) (2012)
- [25] Coccia S., Como M.: Minimum Thrust of Rounded Cross Vaults. *Int. J. Archit. Herit.* **9**(4), 468–484 (2015)
- [26] Coccia, S., Como, M., Di Carlo, F.: Minimum thrust and minimum thickness of hemispherical masonry domes. *Acta Mech.* **227**(9), 2415–2425 (2016)
- [27] Como, M.: *Statics of Historic Masonry Constructions*, 3rd edition, vol. 9 of Springer Series in Solid and Structural Mechanics. Springer International Publishing AG (2017)
- [28] Corradi Dell’Acqua, L.: Boscovich as an engineer: the statics of masonry domes. *Mem. Soc. Astron. Ital. Suppl.* **23**, 83–92 (2013)
- [29] Coulomb, C. A.: *Essai sur une application des règles des maximis et minimis à quelques problèmes de statique relatifs à l’architecture.* Mémoires de mathématique et de physique présentés à l’académie royal des sciences per divers savants et lus dans ses assemblées **1**, 343–382 (1773)
- [30] Couplet, P.: *Seconde partie de l’examen des voûtes.* Histoire de l’Académie Royale des Sciences, 117–141 (1732)
- [31] Cowan, H. J.: Some Observations on the Structural Design of Masonry Arches and Domes Before the Age of Structural Mechanics. *Archit. Sci. Rev.* **24**(4), 98–102 (1981)
- [32] Cremona, L.: *Two treatises on the graphical calculus and reciprocal figures in graphical statics.* Clarendon press, Oxford (1890)

- [33] Culmann, K.: Die graphische Statik. Meyer and Zeller, Zürich (1866)
- [34] Curl, J. S.: A Dictionary of Architecture and Landscape Architecture, 2nd edition. Oxford University Press (2007)
- [35] Dati, C.: Lettera a Filateti di Timauro Antiate. Della vera storia della Cicloide, e della Famossissima esperienza dell'Argento vivo. Insegna della Stella, Firenze (1663)
- [36] Davies, N., Jokiniemi, E.: Dictionary of Architecture and Building Construction. Elsevier/Architectural Press (2008)
- [37] Da Vinci, L.: Forster Codex II, fol. 82v (1495)
- [38] De La Hire, P.: Traité de mécanique. L'Imprimerie Royale. Paris (1695)
- [39] De La Hire, P.: Sur la construction des voûtes dans les édifices. Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, 69–77 (1713)
- [40] De l'Orme, P.: Le premier tome de l'architecture. Federic Morel. Paris (1568)
- [41] Derand, F.: L'architecture des voûtes, ou l'art des traits, et coupes des voûtes. Paris (1743)
- [42] Dorn, D., Gaspari, J.: Material Imagination in Architecture. Routledge, London and New York (2016)
- [43] De Rosa, E., Galizia, F.: Evaluation of safety of pointed masonry arches through the Static Theorem of Limit Analysis. In: Lourenço, P., Oliveira, D., Portela, A. (eds.) ARCH'07 – 5<sup>th</sup> International Conference on Arch Bridges, 659–668 (2007)
- [44] Dimitri, R., Tornabene, F.: A Parametric Investigation of the Seismic Capacity for Masonry Arches and Portals of Different Shapes. Eng. Fail. Anal. **52**, 1–34 (2015)
- [45] Eddy, H. T.: New constructions in graphical statics. D. Van Nostrand, New York (1877)
- [46] Fallacara, G.: Architectural stone elements: Research, design and fabrication. Presses des Ponts, Paris (2016)
- [47] Fallacara, G., Stigliano, M.: New Fundamentals of Natural Architecture. Aracne editrice, Rome (2014)
- [48] Fitchen, J.: The construction of Gothic cathedrals. The University of Chicago press (1961)
- [49] Fletcher, B.: A history of architecture on comparative method. B.T. Batsford, London (1905)
- [50] Frezier, A. F.: La theorie et la pratique de la coupe des pierres et des bois pour la construction des voutes. Vol. 3. Charles-Antoine Jombert, Paris (1739)
- [51] Foce, F.: Milankovitch's Theorie der Druckkurven: Good mechanics for masonry architecture. Nexus Netw. J. **9**(2), 185–210 (2007)
- [52] Fontana, M.: Della dinamica libri tre. Parte II. Pavia (1794)
- [53] Gaetani, A., Lourenço, P. B., Monti, G., Milani, G.: A parametric investigation on the seismic capacity of masonry cross vaults. Eng. Struct. **148**, 686–703 (2017)
- [54] Gaetani, A., Monti, G., Lourenço, P. B., Marcari, G.: Design and Analysis of Cross Vaults Along History. Int. J. Archit. Herit. **10**(7), 841–856. (2016)
- [55] Gáspár, O., Sipos, A. A., Sajtos, I.: Effect of stereotomy on the lower bound value of minimum thickness of semi-circular masonry arches. Int. J. Archit. Herit. **12**(6), 899–921 (2018)

- [56] Gil-Martín, L. M., Hernández-Montes, E., Palomares, Pasadas-Fernández, M.: The optimum shape of an arch under non-symmetric loading conditions. *Arch. Appl. Mech.* **86**(8), 1509–1520 (2016)
- [57] Gregory, D.: Catenaria. *Phil. Trans.* **19**(231), 637–652 (1697)
- [58] Heyman, J.: The stone skeleton. *Int. J. Solids Struct.* **2**, 249–279 (1966)
- [59] Heyman, J.: Coulomb's memoir on statics: An essay in the history of civil engineering. Cambridge university press (1972)
- [60] Heyman, J.: "Gothic" Construction in Ancient Greece. *J. Soc. Archit. Hist.* **31**(1), 3–9 (1972)
- [61] Heyman, J.: The stone skeleton: structural engineering of masonry architecture. Cambridge university press (1997)
- [62] Heyman, J.: Structural Analysis: A Historical Approach. Cambridge University Press (1998)
- [63] Heyman, J.: Hooke's Cubico-Parabolical Conoid. *Notes Rec. R. Soc. Lond.* **52**(1), 39–50 (1998)
- [64] Hooke, R.: A Description of helioscopes, and some other instruments. John Martyn Printer to the Royal Society, London (1675)
- [65] Huerta, S.: Mechanics of masonry vaults: The equilibrium approach. In: Lourenço, P. B., Roca, P. (eds.) *Historical Constructions*, Guimarães, Portugal, 47–69 (2001)
- [66] Huerta, S.: Structural design in the work of Gaudí. *Archit. Sci. Rev.* **49**(4), 327–339 (2006)
- [67] Huerta, S.: Galileo was Wrong: The Geometrical Design of Masonry Arches. *Nexus Netw. J.* **8**(2), 25–52 (2006)
- [68] Huerta, S.: Oval Domes: History, Geometry and Mechanics. *Nexus Netw. J.* **9**(2), 211–248 (2007)
- [69] Huerta, S.: The Analysis of Masonry Architecture: A Historical Approach. *Archit. Sci. Rev.* **51**(4), 297–328 (2008)
- [70] Huerta, S.: The Debate about the Structural Behaviour of Gothic Vaults: From Viollet-le-Duc to Heyman. In: Kurrer, K. E., Lorenz, W., Wetzck, V. (eds.) *Proceedings of the Third International Congress on Construction History*, Cottbus, Germany, 837–844 (2009)
- [71] Huerta, S.: Designing by geometry: Rankine's theorems of transformation of structures. In: Cassinello, P., Huerta S., De Prada, J. M., Sánchez Lampreave, R. (eds.) *Geometría y proporción en las estructuras. Ensayos en honor de Ricardo Aroca*. Lampreave, Madrid, 262–285 (2010)
- [72] Huerta, S.: Wedges and plate-bandes: mechanical theories after De la Hire. In: Gargiani R. (ed.) *L'architrave, le plancher, la plate-forme. Nouvelle Histoire de la construction. Architecture Essais*. Presses polytechniques et universitaires romandes, Lausanne, 405–435 (2012)
- [73] Körner, C.: Gewölbte Decken. In: Durm, J., Ende, H., Schmitt, E., Wagner, H. (eds.) *Handbuch der Architectur*, Third part, 2. tome, 3. chapter, 141–553. Verlag von Arnold Bergsträsser, Darmstadt (1895)
- [74] Koocharian, A.: Limit Analysis of Voussoir (Segmental) and Concrete Arches. *ACI Journal, Proc.* V 49, 317 (1952)
- [75] Kurrer, K. E.: The History of the Theory of Structures: Searching for Equilibrium, 2nd edition. Wilhelm Ernst & Sohn Verlag für Architectur und technische Wissenschaften GmbH & Co. KG, Berlin (2018)



- [76] Lamé, M. G., Clapeyron, E.: Mémoire sur la stabilité des voûtes. *Annales Des Mines* **8**, 789–836 (1823)
- [77] Lengyel, G.: Discrete element analysis of gothic masonry vaults for self-weight and horizontal support displacement. *Eng. Struct.* **148**, 195–209 (2017)
- [78] Lengyel, G., Bagi, K.: Numerical analysis of the mechanical role of the ribs in groin vaults. *Comput. Struct.* **158** 42–60 (2015)
- [79] Leroy, C. F. A.: *Traité de stéréotomie: comprenant les applications de géométrie descriptive*. Gauthier-Villars, Paris (1877)
- [80] Le Seur, T., Jacquier, F., Boscovich, G. R.: *Parere di tre mattematici sopra i danni che si trovano nella cupola di S. Pietro*. (1742)
- [81] Le Seur, T., Jacquier, F., Boscovich, G. R.: *Riflessioni sopra alcune difficoltà spettanti i danni, e Risarcimenti della Cupola Di S. Pietro*. (1743)
- [82] Lorgna, A. M.: *Saggi di statica e meccanica applicate aUe arti*. Vol. 1. Verona (1782)
- [83] López Mozo, A.: Ovals for Any Given Proportion in Architecture: A Layout Possibly Known in the Sixteenth Century. *Nexus Netw. J.* **13**(3), 569–597 (2011)
- [84] Makris, N., Alexakis, H.: The effect of stereotomy on the shape of the thrust-line and the minimum thickness of semicircular masonry arches. *Arch. Appl. Mech.* **83**(10), 1511–1533 (2013)
- [85] Mark, R.: Modeling architectural structure: Experimental mechanics in historiography and criticism. *Exp. Mech.* **22**(10), 361–371. (1982)
- [86] Mark, R., Abel, J. F., O’Neill, K.: Photoelastic and Finite-element Analysis of a Quadripartite Vault. *Exp. Mech.* **13**(8), 322–329. (1973)
- [87] Mascheroni, L.: *Nuove ricerche sull’ equilibrio delle volte*. Francesco Locatelli, Bergamo (1785)
- [88] Mazzotti, A. A.: *All Sides to an Oval*. Springer (2017)
- [89] Méry, E.: *Sur l’équilibre des voûtes en berceau*. *Annales des Ponts et Chaussées* **1**(1), pl. CLXXIII and CLXXXIV, 50–70 (1840)
- [90] Milani, E., Milani, G., Tralli, A.: Limit analysis of masonry vaults by means of curved shell finite elements and homogenization, *Int. J. Solids Struct.* **45**(20), 5258–5288. (2008)
- [91] Milani, G., Simoni, M., Tralli, A.: Advanced numerical models for the analysis of masonry cross vaults: A case-study in Italy. *Eng. Struct.* **76**, 339–358 (2014)
- [92] Milankovitch, M.: *Theorie der Druckkurven*. *Zeitschrift für Mathematik und Physik* **55**, 1–27 (1907)
- [93] Milankovitch, M.: *Zur Statik der massiven Widerlager*. *Zeitschrift für Mathematik und Physik* **58**, 120–128 (1910)
- [94] Миланковић, М.: *Кроз царство наука. Изабрана дела, књ. 4, Завод за уџбенике, Београд* (2013)
- [95] Monge, G.: *Sur les lignes de courbure de la surface de l’Ellipsoïde*. *Journal de l’École* **2**, 145–165 (1795)
- [96] Moseley, H.: *On a new principle in statics, called the Principle of least Pressure*. *The London and Edinburgh Philosophical magazine and journal of science* **3**, 285–288 (1833)
- [97] Moseley, H.: *The Mechanical Principles of Engineering and Architecture*. Longman, Brown, Green and Longmans, London (1843)

- [98] Nikolić, D., Štulić, R.: Equilibrium Analysis of Frictionless Triangular Arches: Geometrical Formulation. *FME Transactions* **45**(2), 307–313 (2017)
- [99] Ochsendorf, J.: Collapse of masonry structures. PhD Thesis, University of Cambridge, Department of Engineering (2002)
- [100] Park, J. H., Joo, Y., Yang, J. G.: Cycloids in Louis I. Kahn's Kimbell Art Museum at Fort Worth, Texas. *The Mathematical Intelligencer* **29**(2), 42–48 (2007)
- [101] Poleni, G.: *Memorie storiche della gran cupola del Tempio Vaticano*. Stamperia del Seminario, Padova (1748)
- [102] Radelet-de Grave, P.: The use of a particular form of the parallelogram law of forces for the building of vaults (1650–1750). In: Becchi, A., Corradi, M., Foce, F., Pedemonte, O. (eds.) *Essays on the history of mechanics*, Springer Basel AG, 135–163 (2003)
- [103] Rankine, W. J. M.: *A manual of applied mechanics*. Richard Griffin and Company, London and Glasgow (1848)
- [104] Rankine, W. J. M.: On the Mathematical Theory of the Stability of Earthwork and Masonry. *Proc. R. Soc. Lond.* **8**, 60–61 (1856)
- [105] Rankine, W. J. M.: *A manual of applied mechanics*. Richard Griffin and company, London and Glasgow (1858)
- [106] Richter, I. A.: *The Notebooks of Leonardo da Vinci*. Oxford University Press (2008)
- [107] Rippmann M.: *Funicular Shell Design: Geometric Approaches to Form Finding and Fabrication of Discrete Funicular Structures*. PhD Thesis, ETH Zurich, Department of Architecture (2016)
- [108] Rippmann M., Van Mele T., Popescu M., Augustynowicz E., Méndez Echenagucia T., Calvo Barentin C., Frick U., Block P.: The Armadillo Vault: Computational design and digital fabrication of a freeform stone shell. *Advances in Architectural Geometry* 2016, 344–363 (2016)
- [109] Rippmann M., Block P.: Computational Tessellation of Freeform, Cut-Stone Vaults. *Nexus Netw. J.* **20**(2), <https://doi.org/10.1007/s00004-018-0383-y> (2018)
- [110] Roca, P., Cervera, M., Gariup, G., Pela, L. *Structural Analysis of Masonry Historical Constructions. Classical and Advanced Approaches*. *Arch. Comput. Method E.* **17**(3), 299–325 (2010)
- [111] Romano, A.: *Modelling, Analysis and Testing of Masonry Structures*. PhD Thesis, University of Naples Federico II, Faculty of Engineering (2005)
- [112] Romano, A., Ochsendorf, J. A.: The mechanics of gothic masonry arches. *Int. J. Archit. Herit.* **4**(1), 59–82 (2010)
- [113] Rosin, P.: On Serlio's Constructions of Ovals. *The Mathematical Intelligencer* **23**(1), 58–69 (2001)
- [114] Rossi M., Calvo Barentin C., Van Mele T., Block P.: Experimental study on the behaviour of masonry pavilion vaults on spreading supports. *Structures* **11**, 110–120 (2017)
- [115] Sakarovitch, J.: The Teaching of Stereotomy in Engineering Schools in France in the XVIIIth and XIXth centuries: an Application of Geometry, an "Applied Geometry", or a Construction Technique? In: Radelet-de Grave, P., Benvenuto, E. (eds.) *Between mechanics and architecture*. Birkhäuser, Basel, Boston, Berlin, 205–219 (1995)

- [116] Sakarovitch, J.: Stereotomy, a multifaceted technique. In: Huerta, S. (ed.) Proceedings of the First International Congress on Construction History. Instituto Juan de Herrera, SEHC, COAC, CAATC, Madrid, 69–79 (2003)
- [117] Sakarovitch, J.: Gaspard Monge Founder of "Constructive Geometry". In: Kurrer, K. E., Lorenz, W., Wetzck, V. (eds.) Proceedings of the Third International Congress on Construction History. Brandenburg University of Technology, Cottbus, 1293–1299 (2009)
- [118] Salimbeni, L.: Degli archi e delle volte. Dionigi Ramanzini, Verona (1787)
- [119] Scheffler, H.: Theorie der Gewölbe, Futtermauern und eisernen Brcken. Verlag der Schulbuchhandlung, Braunschweig (1857)
- [120] Serlio, S.: Il primo libro d'Architettura. Paris (1545)
- [121] Stirling, J.: Lineæ tertii ordinis Neutronianæ. Oxford (1717)
- [122] Struik, D.: A Concise History of Mathematics. Dover Publications, New York (1948)
- [123] Timoshenko, S. P.: History of Strength of Materials. McGraw-Hill Book Company Inc, New York (1953)
- [124] Truesdell, C.: The Rational Mechanics of Flexible or Elastic Bodies 1638-1788. Orell Füssli, Zürich (1960)
- [125] Ungewitter, G., Mohrmann, K.: Lehrbuch der Gotischen Konstruktionen. Vol. 1, T. O. Weigel Nachfolger, Leipzig (1890)
- [126] Van Mele, T., Block, P.: Algebraic Graph Statics. Computer-Aided Design **53**, 104–116 (2014)
- [127] Van Mele T., Mehrotra A., Mendez Echenagucia T., Frick U., Augustynowicz E., Ochsendorf J., DeJong M., Block P.: Form finding and structural analysis of a freeform stone vault. Proceedings of the IASS Annual Symposium, Tokyo (2016)
- [128] Venturoli, G.: Elements of Practical Mechanics (English translation, original: Elementi di Meccanica, 1806). J. Deighton & Sons, Cambridge and G. & W. B. Whittaker, London (1823)
- [129] Ware, S.: A treatise of the properties of arches, and their abutment piers. Longman, Hurst, Rees and Orme, London (1809)
- [130] Wittmann, W.: Zur Theorie der Gewölbe. Zeitschrift für Bauwesen **29**, 61–74. (1879)
- [131] Wolfe, W. S.: Graphical analysis: a handbook on graphic statics. McGraw-Hill, New York (1921)
- [132] Young, T. [pseudonym APSOPHUS]: Remarks on the Structure of covered Ways, independent of the Principle of the Arch in Equilibrium, and on the Best Forms for Arches in Buildings. A Journal of Natural Philosophy, Chemistry and the Arts **18**, 241–250 (1807)
- [133] Young, T.: Bridge. Supplement to the fourth, fifth and sixth editions of the Encyclopaedia Britannica, Vol. 2, 497–520, pl. 42–44. Archibald Constable, Edinburgh (1824)

|

—

|

—

|

—

|

—